arXiv:2603.03829v1 [math.AG] 4 Mar 2026

关于 $\mathcal{M}_{0,n}$ 的配边值相交理论

Benjamin Ellis-Bloor

摘要

我们通过将 $\mathrm{M}_{0,n}$ 上的弦方程从周环细化到代数配边，计算了点的零亏格配边值格罗莫夫-威滕不变量。这给出了 $\mathrm{M}_{0,n}$ 上配边值ψ类相交的归纳公式，尤其给出了配边类 $[\mathrm{M}_{0,n}]$，以及它们在 K-理论中的像。我们给出了截至 $n = 8$ 的显式公式。

1. 引言

将格罗莫夫-威滕不变量从有理上同调（或有理 Chow 群）细化为取值于复配边的想法，可追溯至 Kontsevich [8, Section 1.5]。近来，Abouzaid 和 Bai [1] 为一般辛流形构造了复配边值格罗莫夫-威滕不变量。Coates 和 Givental [2] 早期的工作则提出了取值于有理复配边的格罗莫夫-威滕不变量的定义。

本文聚焦于在尽可能简单的情形下计算这些不变量（整数情形），即目标空间为一个点且亏格为零。也就是说，我们旨在计算稳定亏格零曲线模空间的配边类 $[\mathrm{M}_{0,n}]$，其中有 n 个标记点（此处 $n \geqslant 3$），并将其视为配边环中的一个元素。我们主要在 Levine-Morel [11]和 Levine-Pandharipande [12], 构造的代数配边 Ω^*框架下开展研究；它是复配边 MU^* 在光滑代数簇上的对应理论。

代数配边定义在任意特征零域 k 上，本文假设该域为代数闭域。MU^* 和 Ω^* 均由泛形式群律支配，并且 $\mathrm{MU}^*(\text{点})$ 与 $\Omega^*(\mathrm{Spec}\ k)$ 均同构于 Lazard 环 $\mathbb{L}^* \cong \mathbb{Z}[u_1, u_2, u_3, \ldots]$，该环分类一维交换形式群律；在代数配边中，$u_i$ 的次数为 $-i$，而在复配边中，u_i 的次数为 $-2i$。特别地，在 $k = \mathbb{C}$上进行研究时，存在一个实现映射$\Omega^* \to \mathrm{MU}^{2*}$，它作用于一个点时是同构，因此我们的结果在复配边的框架下也成立。

现在我们来表述主定理。在计算配边类 $[\mathrm{M}_{0,n}]$时，我们必须理解配边环中更一般的类。具体而言，对于 X 上的光滑簇，令$p\colon X \to \mathrm{Spec}\ k$为投影。对于 $\alpha \in \Omega^*(X)$，令 $\int_X \alpha := p_*(\alpha)$，其中 p_* 是由 p 诱导的前推映射，因此特别地

$$[\overline{\mathcal{M}}_{0,n}] = \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n}} 1 \in \mathbb{L}^*.$$

对于每个 $1 \leqslant i \leqslant n$，令 L_i 为 $\mathrm{M}_{0,n}$ 上与 i^{th} 标记点对应的重言线丛，并令 $\psi_i = c_1(L_i) \in \Omega^1(\mathrm{M}_{0,n})$ 为其第一陈类，称为*psi*类。对于整数 $d_1, \ldots, d_n \geqslant 0$，定义

$$\psi^d = \psi_1^{d_1} \cdots \psi_n^{d_n},$$

*2020*年数学主题分类 主要分类：14H10。次要分类：14C17，55N22

并且对于 $1 \leqslant i \leqslant n$，定义

$$\psi^d/\psi_i = \begin{cases} \psi_1^{d_1} \cdots \psi_i^{d_i-1} \cdots \psi_n^{d_n}, & d_i > 0, \\ 0, & d_i = 0. \end{cases}$$

令 $|d| = d_1 + \cdots + d_n$。我们的主定理讨论计算形式为 $\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n}} \psi^d$ 的推前，我们称之为ψ类相交。

对于 T 为 {1、2、.....、n} 的子集，且 $|T| \geqslant 2$、$|T^c| \geqslant 2$ 和 $|T \cap \{1、2、3\}| \leqslant 1$，令

$$i_T \colon D^T \to \overline{\mathcal{M}}_{0,n}$$

表示除子 $D^T = \mathrm{M0}_{,\,|T|+1} \times \mathrm{M0}_{,\,|T^c|+1}$ 的包含映射，其一般点对应于只有一个节点的曲线，且两个分支分别包含标记为 T 和 T^c 中元素的标记点。我们记

- 为 $\mathrm{M0}_{,\,|T|+1}$（或 $\mathrm{M0}_{,\,|T^c|+1}$）中的节点分支标记点，并写作 $L_a = \mathrm{pr}_1^* L_\bullet$ 和 $L_b = \mathrm{pr}_2^* L_\bullet$，其中 $\mathrm{pr1} \colon D^T \to \overline{\mathrm{M}}0_{,\,|T|+1}$ 和 $\mathrm{pr2} \colon D^T \to \overline{\mathrm{M}}0_{,\,|T^c|+1}$ 是两个投影。接着我们定义 $\psi_a = c_1(L_a)$ 和 $\psi_b = c_1(L_b)$。

令 $x +_\Omega y \in \mathbb{L}^*[[x,y]]$ 表示泛形式群律，$\bar{x}$ 表示其逆元，即满足 $x +_\Omega \bar{x} = 0$的关于 $\mathbb{L}^*[[x]]$ 的唯一幂级数。我们将使用幂级数

$$\frac{1}{x(\bar{x} +_\Omega \bar{y})} - \frac{1}{(\bar{x} +_\Omega \bar{y})\bar{y}} + \frac{1}{\bar{x}\bar{y}} = \sum_{i,j \geqslant 0} b_{ij} x^i y^j,$$

其中，低阶项的显式表达式为

$$b_{00} = [\mathbb{P}^1]^2 - [\mathbb{P}^2], \quad b_{10} = [\mathrm{Bl}_{\mathrm{pt}}\,\mathbb{P}^3] - [\mathbb{P}^1][\mathbb{P}^2], \quad b_{01} = 2([\mathrm{Bl}_{\mathrm{pt}}\,\mathbb{P}^3] - [\mathbb{P}^1][\mathbb{P}^2]).$$

这里，$\mathrm{Bl}_{\mathrm{pt}}\,\mathbb{P}^3$ 是 $\mathbb{P}^3$ 在一点处的爆破。记 $x/\bar{x} = \sum_{j \geqslant 0} c_j x^j$，其中低阶项为 $c_0 = -1$、$c_1 = [\mathbb{P}^1]$ 和 $c_2 = 0$。

定理 1.1。ψ类相交由递推关系唯一确定

$$\begin{aligned} &\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n+1}} 1 \cdot \psi^d \\ &= [\mathbb{P}^1] \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n}} \psi^d - \sum_{i=1}^{n} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n}} \frac{\psi_i}{\bar{\psi}_i} \psi^d/\psi_i + \sum_T \int_{D^T} \left(\frac{1}{\psi_a(\bar{\psi}_a +_\Omega \bar{\psi}_b)} - \frac{1}{(\bar{\psi}_a +_\Omega \bar{\psi}_b)\bar{\psi}_b} + \frac{1}{\bar{\psi}_a \bar{\psi}_b} \right) i_T^* \psi^d \\ &= [\mathbb{P}^1] \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n}} \psi^d - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \geqslant -1} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n}} c_j \psi_i^j \psi^d/\psi_i + \sum_{i,j \geqslant 0} \sum_T b_{ij} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,|T|+1}} \psi_\bullet^i \prod_{\ell \in T} \psi_\ell^{d_\ell} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,|T^c|+1}} \psi_\bullet^j \prod_{\ell \in T^c} \psi_\ell^{d_\ell}, \end{aligned}$$

以及初始条件 $\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,3}} 1 = 1$。

注意，若 $|d| = 0$，则得到方程

$$[\overline{\mathcal{M}}_{0,n+1}] = [\mathbb{P}^1][\overline{\mathcal{M}}_{0,n}] + \sum_{i,j \geqslant 0} \sum_T b_{ij} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,|T|+1}} \psi_\bullet^i \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,|T^c|+1}} \psi_\bullet^j,$$

其中 $[\mathrm{M0}_{,\,3}] = 1$。特别是，为了计算配边类 $[\mathrm{M0}_{,\,n}] \in \mathbb{L}^*$，我们不得不计算更一般的psi类交数。

定理 1.1 将零亏格弦方程推广到了余边界理论中。Witten[18] 在任意亏格下为有理上同调（或有理 Chow 群）引入了该方程 g。在 $\mathrm{M}_{g,\,n}$ 上，有理上同调中的 psi类相交由弦方程与 KdV 层级共同支配，这就是 Witten 猜想，已由 Kontsevich 证明。然而，在零亏格下，psi类相交仅由弦方程决定；代数（或复）配边是普适的（复）定向上同调理论，因此该弦方程可由定理 1.1 推出。

更准确地说，我们有一个定向映射 $\Omega^* \to \mathrm{CH}^*$ 到周环。我们还有一个定向映射 $\Omega^* \to K^0[\beta,\beta^{-1}]$ 到 K-理论，其中 β是一个次数为 -1 的形式变量，并且 $K^0(\mathrm{Spec}\ k)\ [\beta,\beta^{-1}] = \mathbb{Z}[\beta,\beta^{-1}]$。通过这些定向映射将定理 1.1 映射到周环和 K-理论，我们得到它们各自零亏格 ψ类相交的已知显式闭公式，这些公式源自 Givental 和 Lee 关于量子 K-理论的研究（特别参见 [9] 和 [10]）。

在 K-理论的情形下，我们通过定义 psi 类的某些扭曲，得到一个闭式公式；具体而言，我们定义 $\Psi_i = [\mathrm{L}_i]\psi_i$，其中 $[\mathrm{L}_i]$ 是 K-理论中 $\mathrm{M0},_n$ 上的重言线丛 L_i 的类。

例 1.2. 周环和 K-理论中的 psi 类相交为

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n}} \psi^d = \binom{n-3}{d_1,\ldots,d_n} \quad \text{and} \quad \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n}} \Psi^d = \beta^{n-3-|d|}\binom{n-3}{n-3-|d|,d_1,\ldots,d_n},$$

它们分别是 $(t_1+\cdots+t_n)^{n-3}$ 和 $(\beta+t_1+\cdots+t_n)^{n-3}$ 的系数，其中 t_i 是形式变量。注意，当 $|d| = n-3$ 时， K-理论相交的公式与周环相交的公式一致。事实上，在余边界理论中，这一结论更普遍地成立。

1.1 计算

选定 Lazard 环 $\mathbb{L}^* \cong \mathbb{Z}[u_1,u_3,\ldots]$的生成元后，我们可以利用定理 1.1 显式计算低维的协边值 ψ 类交数。我们选取的生成元对应于附录 A 中给出的泛形式群律的表示（公式 11）。具体而言，在低次项中有

$$u_1 = [\mathbb{P}^1]u_2 = [\mathbb{P}^2]u_3 = [\mathrm{Bl}_{\mathrm{pt}}\,\mathbb{P}^3] - [\mathbb{P}^1]^3u_4 = [\mathbb{P}_{\mathbb{P}^2}(\mathrm{O}\ (1)\ \oplus \mathrm{O}\ \oplus \mathrm{O})] - [\mathbb{P}^1]^4 - 3[\mathbb{P}^1]^2[\mathbb{P}^2] + 4[\mathbb{P}^1][\mathrm{Bl}_{\mathrm{pt}}\,\mathbb{P}^3].$$

注意， $[\mathrm{Bl}_{\mathrm{pt}}\,\mathbb{P}^3] - [\mathbb{P}^1]^3$ 不等于 $[\mathbb{P}^3]$，这些簇的陈数计算表明了这一点。我们在例 2.10 中借助米尔诺超曲面讨论一种求得 u_5 无分母表达式的方法。为简洁起见，我们仅提及

$$2u_5 = [\mathbb{P}_{\mathbb{P}^3}(O(1)\oplus O\oplus O)] - [\mathbb{P}^1][\mathbb{P}_{\mathbb{P}^2}(O(1)\oplus O\oplus O)] - [\mathbb{P}^1]^3[\mathbb{P}^2] - [\mathbb{P}^1][\mathbb{P}^2]^2.$$

用这些生成元表示，我们得到以下余边界类 $[\mathrm{M0},_n]$关于 $n \leqslant 8$ 的表达式。在第 A.1 节中，我们完整计算了 $\mathrm{M0},_n$ 关于$n \leqslant 8$ 用这些生成元表示的所有 ψ类相交。

例1.3. 我们有

$$\begin{aligned}
[\overline{\mathcal{M}}_{0,3}] &= 1\\
[\overline{\mathcal{M}}_{0,4}] &= u_1\\
[\overline{\mathcal{M}}_{0,5}] &= 4u_1^2 - 3u_2\\
[\overline{\mathcal{M}}_{0,6}] &= 31u_1^3 - 30u_1u_2 + 17u_3\\
[\overline{\mathcal{M}}_{0,7}] &= 273u_1^4 - 317u_1^2u_2 + 70u_2^2 + 214u_1u_3 - 25u_4\\
[\overline{\mathcal{M}}_{0,8}] &= 2898u_1^5 - 4063u_1^3u_2 + 2012u_1u_2^2 + 2765u_1^2u_3 - 1204u_2u_3 - 385u_1u_4 + 461u_5.
\end{aligned}$$

Coates 和 Givental [2] 讨论了有理复配边理论中的 ψ类相交，这些相交可通过 $\mathrm{MU}^* \otimes \mathbb{Q}$ 中的希策布鲁赫-黎曼-罗赫公式，结合上同调

$\overline{\mathrm{M}}_{0,n}$ 上的交叉理论来计算。然而，他们给出的结果并非显式公式，而是通过辛形式体系抽象地表达。尽管如此，他们确实使用由复射影空间给出的 $\mathrm{MU}^*(\text{点}) \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q}[[\mathbb{C}P^1], [\mathbb{C}P^2], [\mathbb{C}P^3], \ldots]$ 的基底，明确计算了 $\overline{\mathrm{M}}_{0,n}$ 的有理配边类，其中 $n \leqslant 6$。例如，他们计算得出

$$[\overline{\mathcal{M}}_{0,6}] = \frac{45}{2}[\mathbb{C}P^1]^3 - 30[\mathbb{C}P^1][\mathbb{C}P^2] + \frac{17}{2}[\mathbb{C}P^3],$$

这与我们在例1.3中的计算一致。事实上，我们可以用整数基表示 $[\mathbb{P}^3]$，

$$[\mathbb{P}^3] = u_1^3 + 2u_3,$$

通过计算所有涉及的簇的陈数。我们在例4.3中给出了$[\overline{\mathrm{M}}_{0,n}]$ 在射影空间有理基下的展开式，其中 $n \leqslant 8$。

备注1.4。Givental 在其论文 [4] 中指出，量子配边理论中的弦方程没有简单的公式。然而，对于目标为一个点的零亏格情形，我们推导出了这样的弦方程。

1.2 证明概要

将弦方程的经典证明从周环推广到代数配边时，出现的主要差异是，对于 $\pi\colon \overline{\mathrm{M}}_{0,n+1} \to \overline{\mathrm{M}}_{0,n}$ 这个遗忘（$n+1$）$^{\text{st}}$ 标记的万能曲线，其推前 $\pi_*(1)$在周环中为零，但在代数配边中不为零。这里

$$\pi_*(1) = [\overline{\mathcal{M}}_{0,n+1} \xrightarrow{\pi} \overline{\mathcal{M}}_{0,n}]$$

是万能曲线的配边类，其中映射的配边类的精确定义将在第2.2节讨论。为了计算这个推前，并将其表示为 psi 类的形式，我们使用 Keel 对 $\overline{\mathrm{M}}_{0,n}$ 作为迭代爆破的描述 [7]，以及 Levine-Pandharipande 的公式 [12]

$$[\mathrm{Bl}_Z X \to X] = [X \xrightarrow{\mathrm{id}} X] - [\mathbb{P}(N_{Z/X} \oplus \mathcal{O}_Z) \to X] + [\mathbb{P}_{\mathbb{P}(N_{Z/X})}(\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}) \to X]$$

该公式用于计算沿法丛为 $N_{Z/X}$ 的光滑子簇 $Z \hookrightarrow X$ 爆破所得的配边类。我们还利用 Quillen 的一个定理（下文将其列为定理 2.8），来计算爆破公式中出现的射影丛的配边类。

证明中的关键技术依据，是对 Keel 构造中的爆心的法丛进行显式计算。具体而言，Keel 将 $\overline{\mathrm{M}}_{0,n+1}$ 构造成一系列爆破

$$B_{n-2} \xrightarrow{f_{n-2}} B_{n-3} \xrightarrow{f_{n-3}} \cdots \xrightarrow{f_3} B_2 \xrightarrow{f_2} B_1$$

这些爆破沿光滑的余维二中心进行，其中 $B_1 = \overline{\mathrm{M}}_{0,n} \times \mathbb{P}^1$，而爆破中心 $B_{k+1} \xrightarrow{f_{k+1}} B_k$同构于 $\overline{\mathrm{M}}_{0,n}$ 中所有满足 $|T| = k+1$ 的除子 D^T 之并，且这些除子两两不相交。接下来，我们的关键引理如下。

引理1.5。对于 $1 \leqslant k \leqslant n-3$和 $|T^c| = k+1$，我们有

$$N_{D^T/B_k} = (L_a^\vee \otimes L_b^\vee) \oplus L_b^\vee.$$

1.3 结构安排

本文结构如下。第2节介绍代数配边理论，尤其是 Levine 和 Pandharipande 给出的几何描述，其中包括爆破公式，以及用于计算射影丛推前的 Quillen公式。第3节致力于证明引理

M 上的配边值相交理论$\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$

1.5（在第 3.2 节中表述为引理 3.4），并应用 Levine-Pandharipande 关于万能曲线在 $\overline{\mathrm{M}}_{0,n}$ 上的爆破公式。

在第 4 节中，我们完成定理 1.1 的证明；在第 5 节中，我们讨论周环和 K-理论的情形，尤其是例 1.2 中的闭公式。最后，在附录 A 中，我们给出利用泛形式群律进行的计算，这些计算用于生成第 A.1 节中的表格，其中列出了 $\overline{\mathrm{M}}_0$ 上所有的协边值 ψ 类交数，n 适用于 $n \leqslant 8$。

致谢
我们感谢导师 Ezra Getzler 的指导与帮助。

2. 代数配边

2.1 代数配边的基本性质

设 k 为特征为 0 的代数闭域，并在本文中始终固定此域。令 $\mathbf{Sm}_k$ 为 k 上光滑拟射影概形的范畴，令 $\mathbf{Rings}^*$ 为带单位元的分次交换环范畴。代数配边最初由 Levine-Morel [11], 以函子的方式构造，是一个函子$\Omega^*\colon \mathbf{Sm}_k^{\mathrm{op}} \to \to \mathbf{Rings}^*$，满足一系列公理，这些公理类似于 Quillen 关于复配边的论文 [14] 中的公理。特别地，Ω^* 配备了推前映射

$$f_*\colon \Omega^*(Y) \to \Omega^{*+d}(X)$$

对于射影态射 $f\colon Y \to X$，其相对余维为 d，这些映射是分次$\Omega^*(X)$-模的同态。也就是说，对于 $\alpha \in \Omega^*(X)$ 和 $\beta \in \Omega^*(Y)$，有 $f_*(f^*(\alpha)\cdot \beta) = \alpha \cdot f_*(\beta)$，这也称为投影公式。利用推前映射，我们定义线丛$L \to X$的第一陈类为 $c_1(L) := s^*s_*(1)$，其中 $1 \in \Omega^0(X)$ 是单位元，$s\colon X \to L$ 是零截面。向量丛的高阶陈类通过 Grothendieck 的方法，利用射影丛公式构造。对于线丛 L，$M \to X$，有

$$c_1(L \otimes M) = c_1(L) +_\Omega c_1(M), \tag{1}$$

其中 $x +_\Omega y \in \Omega^*(\mathrm{Spec}\ k)\ [[x,y]]$是与 Ω^*相关联的唯一形式群律。存在唯一的幂级数 $\bar{x} \in \Omega^*(\mathrm{Spec}\ k)\ [[x]]$满足 $x +_\Omega \bar{x} = 0$，称为该形式群律的逆元，其中对于线丛 $L \to X$，我们有

$$c_1(L^\vee) = \overline{c_1(L)}.$$

定理 2.1 (Levine-Morel [11])。我们有 $\Omega^*(\mathrm{Spec}\ k)$ 同构于 *Lazard* 环 $\mathbb{L}^* \cong \mathbb{Z}[u_1, u_2, u_3, \dots]$，它刻画一维交换形式群律，而 $x +_\Omega y$ 是泛形式群律。这里，生成元 u_i 的次数为 $-i$。

2.2 代数配边的几何描述

现在我们给出 Levine-Pandharipande 所提出的代数配边的生成元与关系的显式描述 [12],，它类似于复配边的生成元与关系 [14]。

定义 2.2。设 $f\colon Y \to \mathbb{P}^1$ 是一个具有 Y 纯维数的射影态射，使得 $f^{-1}(0) = A \cup B$，其中 A 和 B 是 Y 的光滑卡蒂埃除子，并且彼此横截相交。于是，我们称 f 是关于 $0 \in \mathbb{P}^1$ 且具有退化轨迹 $D = A \cap B$的双点退化 。

在这种情况下，我们有 $\mathcal{O}_Y(A+B)|_D = \mathcal{O}_D$。但 $\mathcal{O}_Y(B)|_D = N_{D/A}$ 和 $\mathcal{O}_Y(A)|_D = N_{D/B}$ 是

D 在 A 和 B 中的法丛分别是，因此

$$N_{D/A} \otimes N_{D/B} = \mathcal{O}_D.$$

这意味着射影丛 $\mathbb{P}_D(N_{D/A} \oplus \mathcal{O}_D)$ 和 $\mathbb{P}_D(N_{D/B} \oplus \mathcal{O}_D)$ 同构，我们用 $\mathbb{P}(f)$ 表示这两个丛中任一个的全空间。

对于光滑拟射影概形 X，令 $\mathrm{M}^n(X)$ 表示余维为 n、Y光滑的射影态射 $Y \to X$ 的同构类在不交并运算下构成的幺半群的群完备化，并令 $\mathrm{M}^*(X) = \oplus_{n \geqslant 0} \mathrm{M}^n(X)$。若有射影态射 $\pi\colon Y \to X \times \mathbb{P}^1$，使得$f = \mathrm{pr}_2 \circ \pi\colon Y \to \mathbb{P}^1$ 是 $0 \in \mathbb{P}^1$ 上的双点退化，其中 pr_2 是到第二分量的投影，且 $\xi \in \mathbb{P}^1$ 是 f的正则值，那么我们可以考虑元素

$$r_{\pi,\xi} := [Y_\xi \to X] - [A \to X] - [B \to X] + [\mathbb{P}(f) \to X] \in \mathcal{M}^*(X),$$

其中 $Y_\xi = f^{-1}(\xi)$，我们称之为 双点关系。这里的映射由将 Y 中的包含映射与 $\mathrm{pr}_1 \circ \pi$复合得到，其中 $\mathrm{pr}_1\colon X \times \mathbb{P}^1 \to X$ 是到第一分量的投影。接着，令 $\mathrm{R}(X) \subset \mathrm{M}^*(X)$ 为由双点关系 $r_{\pi,\xi}$生成的子群，其中 π 任意，且 ξ（注意 Y 也可以变化）。

定理 2.3 (Levine-Pandharipande [12])**. </style}对于 光滑概形**$_k$，存在一个典范同构

$$\Omega^*(X) \cong \mathcal{M}^*(X)/\mathcal{R}(X).$$

从现在起，我们将直接把 $\Omega^*(X)$ 与几何表示 $\mathrm{M}^*(X)/\mathrm{R}(X)$ 等同起来。于是，代数配边中的结构映射和乘积可描述如下。

– 推前：若 $f\colon X \to Z$是一个射影态射，则推前 $f_*([Y \to X])$ 等于$[Y \to Z]$，其中 $Y \to Z$由与 f复合得到。– 拉回：若 $f\colon X \to Z$是一个光滑态射，则拉回 $f^*([Y \to Z])$ 等于 $[X \times_Z Y \to X]$，其中 $X \times_Z Y \to X$ 由投影到第一分量诱导。– 单位元：单位元 $1 \in \Omega^0(X)$ 由恒等映射的类 $[X \xrightarrow{\mathrm{id}} X]$给出。– 外积：两个类 $\alpha = [Y \to X] \in \Omega^*(X)$ 和$\beta = [Y' \to X'] \in \Omega^*(X')$ 的外积 $\alpha \times \beta$ 是乘积 $[Y \times_k Y' \to X \times_k X'] \in \Omega^*(X \times_k X')$。– 乘积：两个类 $\alpha = [Y \to X] \in \Omega^*(X)$ 和 $\beta = [Z \to X] \in \Omega^*(X)$ 的乘积 $\alpha \cdot \beta$ 等于 $\delta^*(\alpha \times \beta)$，其中 $\delta\colon X \to X \times_k X$是对角嵌入。

注记 2.4。 我们将使用记号 $[Y] := [Y \to \mathrm{Spec}\ k]$来表示 $\Omega^*(\mathrm{Spec}\ k) = \mathbb{L}^*$ 中的元素。

代数配边有一个我们在本文中始终使用的重要性质，即 $\Omega^i(X) = 0$对于$i > \dim X$。另一个重要性质是，光滑射影簇 X 的类 $[X] \in \mathbb{L}^*$ 完全由其陈数决定。

对于整数 $m,\ n > 0$，在 $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ 上定义线丛 $\mathrm{O}(1,1) = \mathrm{pr}_1^*\mathrm{O}_{\mathbb{P}^m}(1) \otimes \mathrm{pr}_2^*\mathrm{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$。于是，米尔诺超曲面 $H_{m,n} \subset \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ 是由 $\mathrm{O}(1,1)$ 的一个与零截面横截的截面的零点集所定义的光滑闭子概形。下述结论由 Levine-Morel [11,引理 2.5.5], 证明，并且是方程 1 的直接应用。

引理 2.5. 将泛形式群律展开为 $x +_\Omega y = x + y + \sum_{i,j \geqslant 1} a_{ij} x^i y^j$。于是我们有

$$[H_{m,n}] = [\mathbb{P}^m][\mathbb{P}^{n-1}] + [\mathbb{P}^{m-1}][\mathbb{P}^n] + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} [\mathbb{P}^{m-i}][\mathbb{P}^{n-j}].$$

例 2.6。 经过坐标变换，我们有 $H_{1,\ 1}$ 是 $\mathbb{P}^1$ 在 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 中的对角副本。由引理 2.5 可得

$$[H_{1,1}] = [\mathbb{P}^1] + [\mathbb{P}^1] + a_{11},$$

这意味着 $a_{11} = -[\mathbb{P}^1]$。

2.3 爆破和射影丛的推前

设 $i\colon Z \to X$ 是 $\mathbf{Sm}_k$ 中的一个正则嵌入，其法丛为 $N_{Z/X}$，并令 $\mathrm{Bl}_Z X$ 表示沿 Z对 X 进行的爆破。设 $p\colon \mathbb{P}(N_{Z/X}) \to Z$ 为投影。我们有以下关于爆破映射 [13, 的配边类的公式，见第 4 节。1]。

引理 2.7 (爆破公式)。 我们有如下关系

$$\begin{aligned}[\mathrm{Bl}_Z X \to X] &= [X \xrightarrow{id} X] - i_*[\mathbb{P}(N_{Z/X} \oplus \mathcal{O}_Z) \to Z] + i_* p_* [\mathbb{P}_{\mathbb{P}(N_{Z/X})}(\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}) \to \mathbb{P}(N_{Z/X})] \\ &= [X \xrightarrow{id} X] - [\mathbb{P}(N_{Z/X} \oplus \mathcal{O}_Z) \to X] + [\mathbb{P}_{\mathbb{P}(N_{Z/X})}(\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}) \to X].\end{aligned}$$

证明。 考虑到法丛的变形，即沿 $Z \times \{0\}$对 $X \times \mathbb{P}^1$ 进行爆破，并将此爆破记为 Y。于是，爆破映射 $Y \to X \times \mathbb{P}^1$ 是定义在 $0 \in \mathbb{P}^1$上的双点退化，其对应的 $A = \mathrm{Bl}_Z X$、 $B = \mathbb{P}(N_{Z/X} \oplus \mathrm{O}_Z)$ 和退化轨迹 $D = \mathbb{P}(N_{Z/X})$ 的法丛为 $\mathrm{O}(1)$，且该退化轨迹位于 B内。由于 $\mathbb{P}^1$ 在一个正则值上的纤维等于 X，爆破公式恰好就是相应的双点关系。□

我们有一个归功于 Quillen 的公式，可用于计算爆破公式右侧出现的射影丛项。证明此结果见 [17, 定理 5.30]； 在秩为二的情形下，利用双点关系给出的几何证明见 [6,命题 2.1] 。

定理 2.8 (Quillen). 设 $X \in \mathbf{Sm}_k$ ，且 $V \to X$ 是一个秩为 n 的向量丛，其 Ω^*-陈根为 λ_1、……、 λ_n。设 $\pi\colon \mathbb{P}(V) \to X$为相应的射影丛，并固定一个幂级数 $f(t) \in \Omega^*(X)[[t]]$。令 $\xi = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1))$，则有

$$\pi_*(f(\xi)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(\bar{\lambda}_i)}{\prod_{j \neq i}(\lambda_j +_\Omega \bar{\lambda}_i)} \in \Omega^*(X).$$

注 2.9. 定理 2.8 中公式的右侧关于变量 λ_1、……、 λ_n 对称，因此可表示为 $c_1(V)$、……、 $c_n(V)$ 中的幂级数。事实上，这个幂级数是一个多项式，从而给出 $\Omega^*(X)$ 中一个定义良好的元素，因为当 $i > \dim X$ 时，$\Omega^i(X) = 0$。

例 2.10（ $\mathbb{L}^*$的低次生成元）。 我们将使用爆破公式和射影丛公式、引理 2.7 以及定理 2.8，来确定拉扎德环 $\mathbb{L}^*$ 中低次生成元 u_i 的显式代表元。这些生成元对应于附录 A 的公式 11 中给出的泛形式群律$x +_\Omega y$ 的表示。令 $\mathrm{pt} = \mathrm{Spec}\, k$。首先，我们将定理 2.8 应用于平凡丛 $\mathrm{O}_{\mathrm{pt}} \oplus \mathrm{O}_{\mathrm{pt}}$，于是 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$。如附录 A（即公式 12）所述，幂级数的常数项

$$\frac{1}{y +_\Omega \bar{x}} + \frac{1}{x +_\Omega \bar{y}}$$

是u_1。因此可得 $u_1 = [\mathbb{P}(\mathrm{O}_{\mathrm{pt}} \oplus \mathrm{O}_{\mathrm{pt}})] = [\mathbb{P}^1]$，这也可以由例 2.6 推导出来。类似地，该级数的常数项

$$\frac{1}{(y +_\Omega \bar{x})(z +_\Omega \bar{x})} + \frac{1}{(x +_\Omega \bar{y})(z +_\Omega \bar{y})} + \frac{1}{(x +_\Omega \bar{z})(y +_\Omega \bar{z})} \tag{2}$$

根据注 A.2，是 u_2，这意味着 $u_2 = [\mathbb{P}(\mathrm{O}_{\mathrm{pt}} \oplus \mathrm{O}_{\mathrm{pt}} \oplus \mathrm{O}_{\mathrm{pt}})] = [\mathbb{P}^2]$。然而，生成元 u_3 更为复杂。应用引理 2.7，并在 $X = \mathbb{P}^3$ 和 $Z = \mathrm{pt}$ 的情形下推前到一个点，我们得到

$$\begin{aligned}[\mathrm{Bl}_{\mathrm{pt}}\,\mathbb{P}^3] &= [\mathbb{P}^3] - [\mathbb{P}^3] + [\mathbb{P}_{\mathbb{P}^2}(\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O})] \\ &= [\mathbb{P}_{\mathbb{P}^2}(\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O})].\end{aligned}$$

我们再次利用定理 2.8 计算该射影丛的类，其中 $\lambda_1 = 0$ 和 $\lambda_2 = [\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2]$，注意到 $\lambda_2^2 = [\text{点} \to \mathbb{P}^2]$。根据附录 A 中的公式 12，截断至 2 次，我们得到

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{\bar{x}} = u_1 + (u_1^3 - u_1u_2 + u_3)x^2,$$

因此，利用 $u_2 = [\mathbb{P}^2]$，

$$[\mathrm{Bl}_{\mathrm{pt}}\,\mathbb{P}^3] = u_1u_2 + u_1^3 - u_1u_2 + u_3 = u_1^3 + u_3.$$

也就是说，我们有 $u_3 = [\mathrm{Bl}_{\mathrm{pt}}\,\mathbb{P}^3] - [\mathbb{P}^1]^3$。由于 $1/x + 1/\bar{x}$ 中 x^3 的系数不包含 u_4 这一项，因此需要采用另一种方法来计算 u_4 的一个代表元。不过，将 $y = z = 0$ 代入幂级数 2 后，我们（再次根据注 A.2）得到截断至 2 次的多项式

$$u_2 + (-3u_1^4 + 3u_1^2u_2 - u_2^2 - 4u_1u_3 + u_4)x^2.$$

因此，我们可以取

$$\begin{aligned}u_4 &= [\mathbb{P}_{\mathbb{P}^2}(\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O} \oplus \mathcal{O})] + 3u_1^4 - 3u_1^2u_2 + 4u_1u_3 \\ &= [\mathbb{P}_{\mathbb{P}^2}(\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O} \oplus \mathcal{O})] - [\mathbb{P}^1]^4 - 3[\mathbb{P}^1]^2[\mathbb{P}^2] + 4[\mathbb{P}^1][\mathrm{Bl}_{\mathrm{pt}}\,\mathbb{P}^3].\end{aligned}$$

采用同样的方法并利用注 A.2，我们得到

$$2u_5 = [\mathbb{P}_{\mathbb{P}^3}(\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O} \oplus \mathcal{O})] - [\mathbb{P}^1][\mathbb{P}_{\mathbb{P}^2}(\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O} \oplus \mathcal{O})] - [\mathbb{P}^1]^3[\mathbb{P}^2] - [\mathbb{P}^1][\mathbb{P}^2]^2. \tag{3}$$

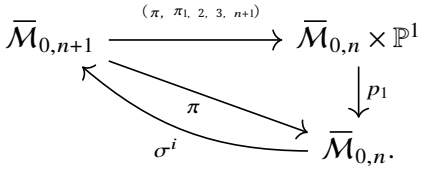
根据引理 2.5，可以得到一个关于米尔诺超曲面 $H_{3,3}$、$H_{5,1}$ 和 $H_{4,2}$ 的更复杂的 u_5 无分母表达式，因为由公式 11 可知，$a_{33} - a_{51} - a_{42}$中 u_5 的系数等于 1，其中a_{ij}是 x^iy^j的系数。

3. 配边类$\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$

对于 $n \geqslant 3$，令 $\overline{\mathrm{M}}0,_n$ 表示亏格为零且有 n 个标记点的稳定曲线模空间。注意，$\overline{\mathrm{M}}0,_n$ 是一个维数为 $n-3$ 的光滑真簇，因此定义了一个元素 $[\overline{\mathrm{M}}0,_n] \in \mathbb{L}^{-(n-3)}$。本节将推导出余边界类 $[\overline{\mathrm{M}}0,_n]$的归纳公式所需的技术结果，该公式将在第 4 节中完成。

3.1 Keel 对$\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$的爆破描述

现在我们回顾 Keel 对 $\overline{\mathrm{M}}0,_n$ 的构造 [7]，即沿光滑中心进行迭代爆破。考虑如下图示



这里，π 遗忘标记为（$n+1$）$^{\mathrm{st}}$的点，σ^i 是对应于标记为 i^{th}的点的截面，p_1是投影到第一分量，而$\pi_{1,\ 2,\ 3,\ n+1}$ 遗忘除标记为 1、2、3 和 π 的点以外的所有标记，

其中，我们将 $\mathrm{M}_{0,4}$ 与 $\mathbb{P}^1$ 视为相同。对于带有 $|T| \geqslant 2$、$|T^c| \geqslant 2$ 和 $|T \cap \{1, 2, 3\}| \leqslant 1$ 的 $T \subset \{1, 2, 3, \ldots\ldots, n\}$，令 D^T 为 $\mathrm{M}0,\ n$ 的除子，其一般元素是一条仅有一个节点的曲线，且两个分量分别包含由集合 T 和 T^c 中元素标记的点，使得

$$D^T \cong \overline{\mathcal{M}}_{0,|T|+1} \times \overline{\mathcal{M}}_{0,|T^c|+1}.$$

由于 $D^T = D^{T^c}$，条件 $|T \cap \{1、2、3\}| \leqslant 1$ 确保我们不会对除子重复计数。将映射 $(\pi、\pi_1、2、3、n+1)$ 记为 π_1。我们将 D^T 嵌入 $\mathrm{M}0、n \times \mathbb{P}^1$ 中，得到

$$S_1^T := (\pi_1 \circ \sigma^i)(D^T)$$

对于 $i \in T$，其与 $i \in T$ 的选择无关。令 $B_1 = \mathrm{M}0、n \times \mathbb{P}^1$，并令 $\overline{B_2}$ 为沿所有满足 $|T^c| = 2$ 的 S_1^T 的并集对 B_1 进行爆破所得的簇；这些子簇彼此不交，因此该爆破的中心是一个光滑余维二子簇。按照这一过程，我们归纳地定义一列爆破

$$B_{k+1} \xrightarrow{f_{k+1}} B_k \xrightarrow{f_k} \cdots \xrightarrow{f_3} B_2 \xrightarrow{f_2} B_1,$$

其中 B_{k+1} 是沿所有满足 $|T^c| = k+1$ 的 S_1^T 的严格变换（在复合映射 $B_k \xrightarrow{g_k} B_1$ 下）之并集对 B_k 进行爆破所得的簇。这些严格变换仍然彼此不交，因此构成一个光滑余维二中心。我们将这些严格变换记为 $S_k^T \subset B_k$。

定理 3.1 (Keel [7])。对于每个 k，映射 π_1 都可经由 B_k分解

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathcal{M}}_{0,n+1} & \xrightarrow{\pi_k} & B_k \\ & \searrow^{\pi_1} \quad \nwarrow^{\sigma^i \circ p_1} & \downarrow{\scriptstyle g_k} \uparrow{\scriptstyle \sigma_k^i} \\ & & B_1, \end{array}$$

从而诱导出 $B_k \xrightarrow{g_k} B_1$ 的截面 $\sigma_k^1、\ldots\ldots、\sigma_k^n$，其中对于任意 $i \in T$，有 $S_k^T = \sigma_k^i(S_1^T)$，且 $\pi_{n-2}: \mathcal{M}_{0,\ n+1} \to B_{n-2}$是一个同构。

3.2 Keel 爆心的法丛

本节中，我们将用典范线丛给出爆心 S_k^T 在 B_k 内的法丛 $N_{S_k^T/B_k}$ 的公式，其中 $|T| = k+1$。

对于每个 $k \geqslant 2$，令 P_k^T 为 $P_1^T := D^T \times \mathbb{P}^1 \subset B_1$ 在爆破复合 g_k 下的严格变换。对于 $1 \leqslant i \leqslant n$，令 Σ_k^i 为 $\Sigma_1^i := (\pi_1 \circ \sigma^i)(\mathrm{M}0,\ n) \subset B_1$ 在 g_k 下的严格变换。

引理 3.2 (Keel [7])。对于每个 $k \geqslant 1$ 和 $i \in T$，我们有 S_k^T 是 B_k 的除子 P_k^T 和 Σ_k^i 的完全交。

对于每个 $1 \leqslant i \leqslant n$，令 $L_i = (\sigma^i)^* \omega_{\mathcal{M}_{0,n+1}/\mathcal{M}_{0,\ n}}$ 表示 $\mathrm{M}0,\ n$ 上的 i^{th} 重言线丛，其中 $\omega_{\mathcal{M}_{0,\ n+1}/\mathcal{M}_{0,\ n}}$ 是相对对偶化层。特别地，在标记点为 $x_1, \ldots, x_n$ 的稳定曲线 C 上，L_i 的纤维是余切空间 $T_{x_i}^* C$。回顾一下，在 $\mathrm{M}0,\ n+1$ 上，我们有关系

$$L_i = \pi^* L_i \otimes \mathcal{O}_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n+1}}(D^{\{i,n+1\}}). \tag{4}$$

通过归纳应用公式 4，并利用 $\mathrm{M}_{0,3}$ 是一个点，我们得到 $\mathrm{M}0,n$ 上典范线丛的以下著名描述。

引理 3.3。 对于固定的互异 $1 \leqslant i$、 j、 $k \leqslant n$，有

$$L_i = O_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n}}\Big(\sum_{\substack{i \in T \\ j,k \in T^c}} D^T \Big).$$

将 D^T 与 $\mathrm{M0}_{,\,|T|+1} \overline{\times} \mathrm{M0}_{,\,|T^c|+1}$ 视为同一对象，令 $\mathrm{pr}_1 \colon \overline{\ } D^T \to \mathrm{M0}_{,\,|T|+1}$ 和 $\mathrm{pr}_2 \colon \overline{\ } D^T \to \mathrm{M0}_{,\,|T^c|+1}$ 为两个投影，并将 $L_\bullet$ 记作 $\mathrm{M0}_{,\,|T|+1}$（或 $\mathrm{M0}_{,\,|T^c|+1}$）上与分支点对应的重言线丛。于是，令 $L_a = \mathrm{pr}_1^* L_\bullet$ 和 $L_b = \mathrm{pr}_2^* L_\bullet$，这是一个众所周知的事实：

$$N_{D^T/\overline{\mathcal{M}}_{0,n}} = L_a^\vee \otimes L_b^\vee.$$

引理 3.4. 设 $1 \leqslant k \leqslant n-3$ 和 $|T^c| = k+1$。在由截面 σ_k^i 给出的同构 $S_k^T \cong D^T$ 下，对任意 $i \in T$，我们有

$$N_{D^T/B_k} = (L_a^\vee \otimes L_b^\vee) \oplus L_b^\vee.$$

注 3.5。 更准确地说，通过截面 $\pi_1 \circ \sigma^i$ 将 S_1^T 与 D^T 视为同一对象，对任意 $i \in T$，我们有

$$(\sigma_k^i|_{D^T})^* N_{S_k^T/B_k} = (L_a^\vee \otimes L_b^\vee) \oplus L_b^\vee,$$

注意到 $\sigma_k^i|_{D^T}$ 是一个同构。为简化记号，通常省略该同构下的拉回，改写为 D^T 而非 S_k^T。

证明。 由引理 3.2 可得

$$N_{S_k^T/B_k} = O_{S_k^T}(P_k^T) \oplus O_{S_k^T}(\Sigma_k^i)$$

对于 $i \in T$。由于对于每个包含 i 且满足 $|V^c| = k$ 的 V， $|T^c| \neq k$ 和 Σ_{k-1}^i 都包含 S_{k-1}^V，因此我们知道（见 [7,引理 4.3] 及其中随后给出的断言）

$$P_k^T = f_k^* P_{k-1}^T \quad \text{and} \quad \Sigma_k^i = f_k^* \Sigma_{k-1}^i - \sum_{\substack{i \in V \\ |V^c| = k}} E_k^V,$$

其中例外除子为 $E_k^V = f_k^{-1}(S_{k-1}^V)$。因此可得

$$\begin{aligned} N_{S_k^T/B_k} &= O_{S_k^T}(f_k^* P_{k-1}^T) \oplus O_{S_k^T}\Big(f_k^* \Sigma_{k-1}^i - \sum_{\substack{i \in V \\ |V^c| = k}} E_k^V \Big) \\ &= O_{S_k^T}(f_k^* P_{k-1}^T) \oplus O_{S_k^T}\Big(f_k^* \Sigma_{k-1}^i - \sum_{\substack{i \in V \\ |V^c| = k}} S_k^T \cap E_k^V \Big). \end{aligned}$$

然而，注意到每个 $S_k^T \cap E_k^V$ 恰好是沿交集 $S_{k-1}^T \cap S_{k-1}^V$ 对 S_{k-1}^T 进行爆破所得的例外除子（见 [3, 命题 IV-21]）。但由 [7, 引理 4.4] 可知， S_{k-1}^T 与 S_{k-1}^V 有非空交集，当且仅当 T 是 V 的子集；此时，它们的交集是各自的一个光滑卡蒂埃除子。因此，若 $T \not\subset V$，则 $S_k^T \cap E_k^V = \emptyset$；否则，我们有

$$S_k^T \cap E_k^V = (f_k|_{S_k^T})^* (S_{k-1}^T \cap S_{k-1}^V)$$

作为 S_k^T 和 $f_k|_{S_k^T}$ 的除子， $S_k^T \to S_{k-1}^T$ 是一个同构。因此可得

$$N_{S_k^T/B_k} = (f_k|_{S_k^T})^* O_{S_{k-1}^T}(P_{k-1}^T) \oplus (f_k|_{S_k^T})^* O_{S_{k-1}^T}\Big(\Sigma_{k-1}^i - \sum_{\substack{V \supset T \\ |V^c| = k}} S_{k-1}^T \cap S_{k-1}^V \Big).$$

重复上述过程，并利用 S_{k-1}^T 和 S_{k-1}^V 对于 $V \supset T$ 和 $|V^c| = k$ 与爆破 f_{k-1} 的中心横截相交于Cartier除子（若交集非空），从而

$$S_{k-1}^T \cap S_{k-1}^V = (f_{k-1}|_{S_{k-1}^T})^*(S_{k-2}^T \cap S_{k-2}^V),$$

也就是说，它们的严格变换的交集就是它们交集的严格变换，我们得到等式

$$N_{S_k^T/B_k} = (f_{k-1} \circ f_k|_{S_k^T})^* O_{S_{k-2}^T}(P_{k-2}^T) \oplus (f_{k-1} \circ f_k|_{S_k^T})^* O_{S_{k-2}^T}\left(\Sigma_{k-2}^i - \sum_{\substack{V \supset T \\ k-1 \leqslant |V^c| \leqslant k}} S_{k-2}^T \cap S_{k-2}^V\right).$$

继续这一过程，可推出

$$N_{S_k^T/B_k} = (g_k|_{S_k^T})^* O_{S_1^T}(P_1^T) \oplus (g_k|_{S_k^T})^* O_{S_1^T}\left(\Sigma_1^i - \sum_{V \supset T} S_1^T \cap S_1^V\right).$$

$P_1^T = D^T \times \mathbb{P}^1$ 在$B_1 = \mathrm{M}0,_n \times \mathbb{P}^1$ 中的法丛为 $\mathrm{O}^{P_1^T}(P_1^T) = \mathrm{pr}_1^*(L_a^\vee \otimes L_b^\vee)$。限制到$S_1^T$上，并将其与 D^T 识别后，有 $\mathrm{O}^{S_1^T}(P_1^T) = L_a^\vee \otimes L_b^\vee$。现在我们分析第二个直和项。

情形 *1*。 假设 $|T \cap \{1、2、3\}| = 1$。注意到 $S_1^T = (\pi_1 \circ \sigma^i)(D^T) = D^T \times$点，因此 $\mathrm{O}^{S_1^T}(\Sigma_1^i) = \mathrm{O}^{S_1^T}$。分别将 S_1^T和 S_1^V与 D^T和 D^V 识别后，我们有

$$O_{S_1^T}\left(\Sigma_1^i - \sum_{V \supset T} S_1^T \cap S_1^V\right) = O_{D^T}\left(-\sum_{V \supset T} D^T \cap D^V\right).$$

我们可以写成 $D^T \cap D^V = \overline{\mathrm{M}}0,_{|T|+1} \times D(v\backslash T) \cup \{\bullet\}_{|T^c|+1}$，其中 $D(v\backslash T) \cup \{\bullet\}_{|T^c|+1}$表示 $\mathrm{M}0,_{|T^c|+1}$ 的相应除子$D(v\backslash T) \cup \{\bullet\}$，而 $\bullet$是分支点。这里我们将 $\mathrm{M}0,_{|T^c|+1}$视为具有由 $T^c \cup \{\bullet\}$ 中元素标记的标记点，并注意到 $((V \setminus T) \cup \{\bullet\})^c = V^c$。不妨设 $1 \in T$。那么，由于 $T \subset V$和 $|V \cap \{1, 2, 3\}| \leqslant 1$，我们有 $2, 3 \in V^c$，因此通过重新标记可得

$$O_{\overline{\mathcal{M}}_{0,|T^c|+1}}\left(\sum_{V \supset T} D_{|T^c|+1}^{(V\backslash T) \cup \{\bullet\}}\right) = O_{\overline{\mathcal{M}}_{0,|T^c|+1}}\left(\sum_{\substack{\bullet \in W \\ 2,3 \in W^c}} D_{|T^c|+1}^W\right) = L_\bullet$$

由引理 3.3。因此，由此可得

$$O_{D^T}\left(-\sum_{V \supset T} D^T \cap D^V\right) = O_{\overline{\mathcal{M}}_{0,|T|+1} \times \overline{\mathcal{M}}_{0,|T^c|+1}}\left(\overline{\mathcal{M}}_{0,|T|+1} \times \left(-\sum_{\substack{\bullet \in W \\ 2,3 \in W^c}} D_{|T^c|+1}^W\right)\right)$$

$$= \mathrm{pr}_2^* L_\bullet^\vee = L_b^\vee.$$

情形 *2.* 现在假设 $|T \cap \{1,2,3\}| = 0$。在将 S_1^T 与 Σ_1^i 分别等同于 D^T 与 $\mathrm{M}0,_n$ 的情况下，我们有 $\mathrm{O}^{S_1^T}(\Sigma_1^i)$ 是该图的法丛到 D^T 的限制

$$\pi_{1,2,3,n+1} \circ \sigma^i : \overline{\mathcal{M}}_{0,n} \to \overline{\mathcal{M}}_{0,4} = \mathbb{P}^1,$$

即我们有

$$O_{S_1^T}(\Sigma_1^i) = (\pi_{1,2,3,n+1} \circ \sigma^i|_{D^T})^* T_{\mathbb{P}^1} = (\pi_{1,2,3,n+1} \circ \sigma^i|_{D^T})^* O_{\mathbb{P}^1}(2).$$

令 $\pi_{1,\ 2,\ 3,\ i} : \overline{\mathrm{M}0,}_{\ n} \to \overline{\mathrm{M}_{0,4}}$遗忘除标记点 1、2、3、 i之外的所有标记点。于是，注意到

$$\pi_{1,2,3,n+1} \circ \sigma^i|_{D^T} = \pi_{1,2,3,i}|_{D^T}$$

如果我们将 $\mathrm{M}_{0,4}$ 中的元素视为带有由集合 {1、2、3、4}标记的标记点，并且两个遗忘映射分别将标记点 $n+1$ 和 i 重新标记为 4。事实上，这两个映射都等于 $\pi_{1,2,3,\bullet} \circ \mathrm{pr}_2 \colon D^T \to \mathrm{M}_{0,4}$，其中映射 $\pi_{1,2,3,\bullet} \colon \mathrm{M}_{0,|T^c|+1} \to \mathrm{M}_{0,4}$ 的定义类似（见 [7,事实 0.2]）。因此，我们有

$$O_{S_1^T}(\Sigma_1^i) = (\pi_{1,2,3,i}|_{D^T})^* O_{\mathbb{P}^1}(2),$$

为简单起见，我们现在将 $\mathrm{M}_{0,4} = \mathbb{P}^1$ 中的标记点 4 重新标记为 i。注意，$\mathrm{M}_{0,4}$ 的除子 $D^{\{1,i\}}$ 和 $D^{\{2,i\}}$ 是 $\mathbb{P}^1$ 中的点，因此它们线性等价，于是我们可以写成

$$O_{S_1^T}(\Sigma_1^i) = (\pi_{1,2,3,i}|_{D^T})^* O_{\overline{M}_{0,4}}(D^{\{1,i\}} + D^{\{2,i\}}).$$

我们有

$$\pi_{1,2,3,i}^*(D^{\{1,i\}} + D^{\{2,i\}}) = \sum_{\substack{1,i\in V\\ 2,3\in V^c}} D^V + \sum_{\substack{2,i\in V\\ 1,3\in V^c}} D^V.$$

与 D^T 相交，得到

$$O_{S_1^T}(\Sigma_1^i) = O_{D^T}\left(\sum_{\substack{1,i\in V\\ 2,3\in V^c}} D^T \cap D^V + \sum_{\substack{2,i\in V\\ 1,3\in V^c}} D^T \cap D^V \right),$$

因此

$$O_{S_1^T}\left(\Sigma_1^i - \sum_{V\supset T} S_1^T \cap S_1^V\right) = O_{D^T}\left(\sum_{\substack{1,i\in V\\ 2,3\in V^c}} D^T \cap D^V + \sum_{\substack{2,i\in V\\ 1,3\in V^c}} D^T \cap D^V - \sum_{V\supset T} D^T \cap D^V \right).$$

然而，请注意，如果 $V \supset T$ 是任意的，那么由于 $|V \cap \{1,2,3\}| \leqslant 1$，我们知道 $1 \in V$ 蕴含 $2, 3 \in V^c$。类似地，如果 $2 \in V$，那么 $1,3 \in V^c$。此外，由于 $i \in T$，我们知道 $i \in V$。因此可得

$$\sum_{\substack{1,i\in V\\ 2,3\in V^c}} D^T \cap D^V + \sum_{\substack{2,i\in V\\ 1,3\in V^c}} D^T \cap D^V - \sum_{V\supset T} D^T \cap D^V = -\sum_{\substack{V\supset T\\ 1,2\in V^c}} D^T \cap D^V,$$

因此，类似于情形 1 的证明，我们得到

$$\begin{aligned} O_{S_1^T}\left(\Sigma_1^i - \sum_{V\supset T} S_1^T \cap S_1^V\right) &= O_{\overline{M}_{0,|T|+1}\times \overline{M}_{0,|T^c|+1}}\left(\overline{M}_{0,|T|+1} \times \left(-\sum_{\substack{\bullet\in W\\ 1,2\in W^c}} D^W_{|T^c|+1}\right)\right) \\ &= L_b^\vee. \end{aligned}$$

因此，我们已经证明了

$$(\sigma_k^i|_{D^T})^* N_{S_k^T/B_k} = (\sigma_k^i|_{D^T})^*(g_k|_{S_k^T})^*((L_a^\vee \otimes L_b^\vee) \oplus L_b^\vee) = (L_a^\vee \otimes L_b^\vee) \oplus L_b^\vee,$$

最后一个等式由定理 3.1 得出。 □

3.3 $\mathcal{M}_{0,n}$ 的配边类

对于每个 $1 \leqslant i \leqslant n$，令 $\psi_i = c_1(L_i) \in \Omega^1(\mathrm{M}_{0,n})$，称为 *psi*类。在 $\mathrm{M}_{0,n}$ 的除子 D^T 上，令 $\psi_a = c_1(L_a)$ 和 $\psi_b = c_1(L_b)$，它们是 $\Omega^1(D^T)$ 的元素，并令

$$i_T \colon D^T \to \overline{M}_{0,n}$$

为包含映射。按照 [6], 中的记号，将满足 $x +_\Omega y = x + y - xyq(x,y)$ 的唯一幂级数记为 $q(x,y)$，并由 $\varphi(x) = q(x,\bar{x})$ 定义幂级数 $\varphi(x) \in \mathbb{L}^*[[x]]$。注意，我们

有该关系

$$\varphi(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{\bar{x}}. \tag{5}$$

命题 3.6. 作为 $\Omega^1(\mathcal{M}_{0,n})$ 中的元素，我们有

$$[\overline{\mathcal{M}}_{0,n+1}\xrightarrow{\pi}\overline{\mathcal{M}}_{0,n}]=[\mathbb{P}^1][\overline{\mathcal{M}}_{0,n}\xrightarrow{id}\overline{\mathcal{M}}_{0,n}]+\sum_T(i_T)_*\left(\frac{1}{\psi_a(\bar{\psi}_a+_\Omega\bar{\psi}_b)}-\frac{1}{(\bar{\psi}_a+_\Omega\bar{\psi}_b)\bar{\psi}_b}+\frac{1}{\bar{\psi}_a\bar{\psi}_b}\right).$$

证明. 首先，由于映射 $\pi_{n-2}\colon \mathrm{M}0,\overline{n+1}\to B_{n-2}$ 依定理 3.1 在 B_1 上是同构，我们有

$$[\overline{\mathcal{M}}_{0,n+1}\xrightarrow{\pi_1}B_1]=[B_{n-2}\xrightarrow{g_{n-2}}B_1].$$

对于 $|T^c|=k$，设 $i_{k,T}\colon D^T\to B_k$ 为如引理 3.4 所述、通过将 S_k^T 与 D^T 等同而得到的包含映射。由于对应于 $|T^c|=k$ 的 D^T 互不相交，由引理 2.7 我们有

$$\begin{aligned}[B_{k+1}\xrightarrow{f_{k+1}}B_k]=[B_k\xrightarrow{\mathrm{id}}B_k]&-\sum_{|T^c|=k}(i_{k,T})_*[\mathbb{P}(N_{D^T/B_k}\oplus O_{D^T})\to D^T]\\&+\sum_{|T^c|=k}(i_{k,T})_*p_*[\mathbb{P}_{\mathbb{P}(N_{D^T/B_k})}(O(1)\oplus O)\to\mathbb{P}(N_{D^T/B_k})].\end{aligned}$$

经由 g_k 前推至 B_1，我们得到

$$\begin{aligned}[B_{k+1}\xrightarrow{g_{k+1}}B_1]=[B_k\xrightarrow{g_k}B_1]&-\sum_{|T^c|=k}(g_k)_*(i_{k,T})_*[\mathbb{P}(N_{D^T/B_k}\oplus O_{D^T})\to D^T]\\&+\sum_{|T^c|=k}(g_k)_*(i_{k,T})_*p_*[\mathbb{P}_{\mathbb{P}(N_{D^T/B_k})}(O(1)\oplus O)\to\mathbb{P}(N_{D^T/B_k})].\end{aligned}$$

由归纳法及引理 3.4,

$$\begin{aligned}[B_{n-2}\xrightarrow{g_{n-2}}B_1]=[B_1\xrightarrow{\mathrm{id}}B_1]&-\sum_T(g_k)_*(i_{k,T})_*[\mathbb{P}((L_a^\vee\otimes L_b^\vee)\oplus L_b^\vee\oplus O_{D^T})\to D^T]\\&+\sum_T(g_k)_*(i_{k,T})_*p_*[\mathbb{P}_{\mathbb{P}((L_a^\vee\otimes L_b^\vee)\oplus L_b^\vee)}(O(1)\oplus O)\to\mathbb{P}((L_a^\vee\otimes L_b^\vee)\oplus L_b^\vee)].\end{aligned}$$

接着，我们通过投影 p_1 将其推前到 $\mathrm{M}0,\overline{n}\colon\ B_1=\mathrm{M}0,\overline{n\times\mathbb{P}^1}\to\mathrm{M}0,\overline{n}$。由于 $g_k\circ i_{k,T}=i_T$，由 Ω^* 中积的定义可得

$$\begin{aligned}[\overline{\mathcal{M}}_{0,n+1}\xrightarrow{\pi}\overline{\mathcal{M}}_{0,n}]=[\mathbb{P}^1][\overline{\mathcal{M}}_{0,n}\xrightarrow{\mathrm{id}}\overline{\mathcal{M}}_{0,n}]&-\sum_T(i_T)_*[\mathbb{P}((L_a^\vee\otimes L_b^\vee)\oplus L_b^\vee\oplus O_{D^T})\to D^T]\\&+\sum_T(i_T)_*p_*[\mathbb{P}_{\mathbb{P}((L_a^\vee\otimes L_b^\vee)\oplus L_b^\vee)}(O(1)\oplus O)\to\mathbb{P}((L_a^\vee\otimes L_b^\vee)\oplus L_b^\vee)].\end{aligned} \tag{6}$$

将定理 2.8 应用于 $X=D^T$ 上的秩3丛 $V=(L_a^\vee\otimes L_b^\vee)\oplus L_b^\vee\oplus \mathrm{O}_{D^T}$，因此在此情形下 $\lambda_1=\psi_a+_\Omega\psi_b$、$\lambda_2=\psi_b$ 和 $\lambda_3=0$，可得

$$[\mathbb{P}((L_a^\vee\otimes L_b^\vee)\oplus L_b^\vee\oplus O_{D^T})\to D^T]=\frac{1}{\psi_a(\psi_a+_\Omega\psi_b)}+\frac{1}{\bar{\psi}_a\psi_b}+\frac{1}{(\bar{\psi}_a+_\Omega\bar{\psi}_b)\bar{\psi}_b}. \tag{7}$$

再次由定理 2.8 可得

$$[\mathbb{P}_{\mathbb{P}((L_a^\vee\otimes L_b^\vee)\oplus L_b^\vee)}(O(1)\oplus O)\to\mathbb{P}((L_a^\vee\otimes L_b^\vee)\oplus L_b^\vee)]=\frac{1}{\xi}+\frac{1}{\bar{\xi}},$$

其中 $\xi=c_1(\mathrm{O}(1))$，根据方程 5，它等于 $\varphi(\xi)$。因此，将定理 2.8 应用于秩为 2 的

丛 $V = (L_a^\vee \otimes L_b^\vee) \oplus L_b^\vee$ 在 $X = D^T$ 上，可得

$$p_*[\mathbb{P}_{\mathbb{P}((L_a^\vee \otimes L_b^\vee)\oplus L_b^\vee)}(\mathcal{O}(1)\oplus\mathcal{O}) \to \mathbb{P}((L_a^\vee \otimes L_b^\vee)\oplus L_b^\vee)] = \frac{1}{\psi_a}\left(\frac{1}{\psi_a +_\Omega \psi_b} + \frac{1}{\bar\psi_a +_\Omega \bar\psi_b}\right) + \frac{1}{\bar\psi_a}\left(\frac{1}{\psi_b} + \frac{1}{\bar\psi_b}\right). \quad (8)$$

将公式 7 和 8 代入公式 6，即得所需公式。 □

作为关于 $\mathbb{L}^*[[x,y]]$ 的幂级数，我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{x(\bar x +_\Omega \bar y)} - \frac{1}{(\bar x +_\Omega \bar y)\bar y} + \frac{1}{\bar x \bar y} &= \frac{1}{x}(\varphi(x +_\Omega y) - \varphi(y)) + \left(\frac{1}{y} - \varphi(y)\right)(\varphi(x +_\Omega y) - \varphi(x)) + \frac{1}{x +_\Omega y}(\varphi(y) - q(x,y)) \\ &= \sum_{i,j\geqslant 0} b_{ij} x^i y^j, \end{aligned} \quad (9)$$

其中 b_{ij} 的次数为 $2 + i + j$。我们在命题 A.1 中证明第一个等式，并解释它为何是一个幂级数；随后在公式 14 中计算至 3 次的系数。特别地，根据例 2.10，我们知道

$$b_{00} = [\mathbb{P}^1]^2 - [\mathbb{P}^2], \quad b_{10} = [\mathrm{Bl}_{\mathrm{pt}}\mathbb{P}^3] - [\mathbb{P}^1][\mathbb{P}^2], \quad b_{01} = 2([\mathrm{Bl}_{\mathrm{pt}}\mathbb{P}^3] - [\mathbb{P}^1][\mathbb{P}^2]).$$

若 $X \in \mathbf{Sm}_k$ 且 $p\colon X \to \mathrm{Spec}\ k$ 是投影，则对于 $\alpha \in \Omega^*(X)$，我们令

$$\int_X \alpha := p_*(\alpha).$$

推论 3.7. 我们有 $[\mathcal{M}_{0,3}] = 1$，且对每个 $n \geqslant 3$，

$$[\overline{\mathcal{M}}_{0,n+1}] = [\mathbb{P}^1][\overline{\mathcal{M}}_{0,n}] + \sum_{i,j\geqslant 0}\sum_T b_{ij}\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,|T|+1}} \psi_\bullet^i \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,|T^c|+1}} \psi_\bullet^j.$$

证明. 将命题 3.6 的关系前推到一个点，我们有

$$[\overline{\mathcal{M}}_{0,n+1}] = [\mathbb{P}^1][\overline{\mathcal{M}}_{0,n}] + \sum_{i,j\geqslant 0}\sum_T b_{ij}\int_{D^T} \psi_a^i \psi_b^j.$$

考虑如下图表

$$\begin{array}{ccc} D^T & \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} & \overline{\mathcal{M}}_{0,|T^c|+1} \\ {\scriptstyle \mathrm{pr}_1}\downarrow & \searrow^{p} & \downarrow{\scriptstyle q_2} \\ \overline{\mathcal{M}}_{0,|T|+1} & \xrightarrow{q_1} & \text{谱 } k_\circ \end{array}$$

由投影公式，我们有

$$\int_{D^T} \psi_a^i \psi_b^j = p_*((\mathrm{pr}_1^*\psi_\bullet^i)(\mathrm{pr}_2^*\psi_\bullet^j)) = (q_1)_*(\mathrm{pr}_1)_*((\mathrm{pr}_1^*\psi_\bullet^i)(\mathrm{pr}_2^*\psi_\bullet^j)) = (q_1)_*(\psi_\bullet^i(\mathrm{pr}_1)_*\mathrm{pr}_2^*\psi_\bullet^j).$$

根据代数配边的公理 [11,定义 1.1.2], ，我们知道 $(\mathrm{pr}_1)_*\mathrm{pr}_2^* = q_1^*(q_2)_*$。因此可得

$$(q_1)_*\left(\psi_\bullet^i(\mathrm{pr}_1)_*\mathrm{pr}_2^*\psi_\bullet^j\right) = (q_1)_*(\psi_\bullet^i q_1^*(q_2)_*\psi_\bullet^j) = (q_1)_*(\psi_\bullet^i)(q_2)_*(\psi_\bullet^j),$$

这等于 $\left(\int_{\mathcal{M}_{0,|T|+1}} \psi_\bullet^i\right)\left(\int_{\mathcal{M}_{0,|T^c|+1}} \psi_\bullet^j\right)$。 □

4. 余边界中的弦方程

本节给出一个归纳公式，用于计算 $\mathrm{M}0,_n$ 上所有协边值 ψ 类交数，其中尤其包括配边类 $[\overline{\mathrm{M}0},_n]$。对于整数 $d_1,\ldots,d_n\geqslant 0$，定义

$$\psi^d=\psi_1^{d_1}\cdots\psi_n^{d_n},$$

并且对于 $1\leqslant i\leqslant n$，定义

$$\psi^d/\psi_i=\begin{cases}\psi_1^{d_1}\cdots\psi_i^{d_i-1}\cdots\psi_n^{d_n}, & d_i>0,\\ 0, & d_i=0.\end{cases}$$

我们令 $|d|=d_1+\cdots+d_n$。记

$$\frac{x}{\bar{x}}=x\varphi(x)-1=\sum_{j\geqslant 0}c_jx^j, \tag{10}$$

其中c_j的次数为 j。在低次数情形下，我们有 $c_0=-1$、 $c_1=[\mathbb{P}^1]$和 $c_2=0$，这由方程13和例 2.10 得出。

定理4.1（弦方程）。 对于 $n\geqslant 3$，我们有

$$\begin{aligned}&\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n+1}}1\cdot\psi^d\\ &=[\mathbb{P}^1]\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n}}\psi^d-\sum_{i=1}^n\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n}}\frac{\psi_i}{\bar{\psi}_i}\psi^d/\psi_i+\sum_T\int_{D^T}\left(\frac{1}{\psi_a(\bar{\psi}_a+_\Omega\bar{\psi}_b)}-\frac{1}{(\bar{\psi}_a+_\Omega\bar{\psi}_b)\bar{\psi}_b}+\frac{1}{\bar{\psi}_a\bar{\psi}_b}\right)i_T^*\psi^d\\ &=[\mathbb{P}^1]\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n}}\psi^d-\sum_{i=1}^n\sum_{j\geqslant 0}\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n}}c_j\psi_i^j\psi^d/\psi_i+\sum_{i,j\geqslant 0}\sum_T b_{ij}\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,|T|+1}}\psi_\bullet^i\prod_{\ell\in T}\psi_\ell^{d_\ell}\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,|T^c|+1}}\psi_\bullet^j\prod_{\ell\in T^c}\psi_\ell^{d_\ell}.\end{aligned}$$

证明。 令 I 表示满足 $d_i>0$的所有指标 $1\leqslant i\leqslant n$ 的集合。对于每个 $i\in I$，我们令 $D_i=c_1(\mathrm{O}\mathcal{M}_{0,\,n+1}(D^{\{i,\,n+1\}}))$。由公式 4 可得

$$\psi_i=\pi^*\psi_i+_\Omega D_i.$$

注意，若 $j\in I$满足 $i\neq j$，则 $D^{\{i,n+1\}}\cap D^{\{j,n+1\}}=\emptyset$，这意味着 $D_iD_j=0$。事实上，令 $f\colon D^{\{i,n+1\}}\to\mathrm{M}0,_{n+1}$表示包含映射，因此 $D_i=f_*(1)$。由于 $\mathrm{O}(D^{\{j,n+1\}})$ 的典范截面 s 的零点集为 $D^{\{j,n+1\}}$，拉回截面 f^*s 的零点集为 $D^{\{i,n+1\}}\cap D^{\{j,n+1\}}=\emptyset$。也就是说， $D^{\{i,n+1\}}$ 上的线丛 $f^*\mathrm{O}(D^{\{j,n+1\}})$ 是平凡的，因为它有一个处处非零截面，因此 $c_1(f^*\mathrm{O}(D^{\{j,n+1\}}))=0$。于是，由投影公式，

$$D_iD_j=f_*(1)c_1(\mathcal{O}(D^{\{j,n+1\}}))=f_*(f^*c_1(\mathcal{O}(D^{\{j,n+1\}})))=0.$$

同样地，注意到 f^*L_i 是 $D^{\{i,\,n+1\}}$ 上的平凡线丛，因此

$$\psi_iD_i=c_1(L_i)f_*(1)=f_*(c_1(f^*L_i))=0.$$

因此可得

$$\begin{aligned}\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n+1}}1\cdot\psi^d&=\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n+1}}\prod_{i\in I}\psi_i(\pi^*\psi_i+_\Omega D_i)^{d_i-1}\\ &=\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n+1}}\prod_{i\in I}\psi_i(\pi^*\psi_i)^{d_i-1}.\end{aligned}$$

记 $\psi_i=\pi^*\psi_i+_\Omega D_i$和$x+_\Omega y=x+y+\sum_{j,\,l\geqslant 1}a_{jl}x^jy^\ell$，由投影公式再次得到

that

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n+1}} \prod_{i\in I} \psi_i (\pi^*\psi_i)^{d_i-1} = \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n+1}} \prod_{i\in I} \left(\pi^*\psi_i + D_i + \sum_{j,\ell\geqslant 1} a_{j\ell}(\pi^*\psi_i)^j D_i^\ell\right)(\pi^*\psi_i)^{d_i-1}$$
$$= \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n}} \pi_*(1)\psi^d + \sum_{i=1}^n \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n}} \left(\pi_*(D_i) + \sum_{j,\ell\geqslant 1} a_{j\ell}\psi_i^j \pi_*(D_i^\ell)\right)\psi^d/\psi_i.$$

对于$l \geqslant 2$，有

$$D_i^\ell = f_*(1)f_*(1)^{\ell-1} = f_*(f^*(f_*(1)^{\ell-1})) = f_*(f^*(c_1(\mathcal{O}(D^{\{i,n+1\}}))^{\ell-1})) = f_*(f^*c_1(\mathcal{O}(D^{\{i,n+1\}})))^{\ell-1}.$$

注意，我们可以将 f 与 π的截面 σ^i 等同：$\mathrm{M}0,n+1 \to \mathrm{M}0,n$ 对应于 i^{th} 标记点，因此 $f^*c_1(\mathcal{O}(D^{\{i,n+1\}})) = L_i^\vee$。由此可得 $D_i^\ell = f_*(\bar{\psi}_i^{\ell-1})$，并且

$$\pi_*(D_i^\ell) = \pi_* f_*(\bar{\psi}_i^{\ell-1}) = \bar{\psi}_i^{\ell-1}.$$

观察到该方程对 $k = 1$同样成立。因此，我们有

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n+1}} 1\cdot\psi^d = \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n}} \pi_*(1)\psi^d + \sum_{i=1}^n \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n}} \left(1 + \sum_{j,\ell\geqslant 1} a_{j\ell}\psi_i^j \bar{\psi}_i^{\ell-1}\right)\psi^d/\psi_i$$
$$= \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n}} \pi_*(1)\psi^d - \sum_{i=1}^n \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n}} \frac{\psi_i}{\bar{\psi}_i}\psi^d/\psi_i,$$

其中最后一个等式由方程$\psi_i + _\Omega \bar{\psi}_i = 0$得出。然后，我们利用命题 3.6替换 $\pi_*(1)$，并使用投影公式。定理4.1陈述中的第二个等式源于如下事实：

$$i_T^*\psi_j = \begin{cases} \mathrm{pr}_1^*\psi_j & \text{if } j\in T, \\ \mathrm{pr}_2^*\psi_j & \text{if } j\in T^c, \end{cases}$$

以及与推论 3.7中相同的论证。 □

推论4.2. 结合初始条件$\int_{\mathcal{M}0,3} 1 = 1$，定理*4.1*确定了所有$\psi$类相交$\int_{\mathcal{M}0,n} \psi^d$的值。

证明。 由于 $\dim\overline{\mathrm{M}}0,n = n-3$，根据 Ω^* 的维数消失性质可知，若 $|d| > n-3$，则 $\psi^d = 0$。若 $0 \leqslant |d| \leqslant n-3$，则对于某个 $1 \leqslant i \leqslant n$，有 $d_i = 0$，因此可以应用定理4.1。□

例 4.3。 利用定理4.1，特别是推论 3.7，并结合附录 A 中公式 11 给出的通用形式群律的表示，我们得到类 $[\underline{\mathrm{M}}0,n]$ 在 $n \leqslant 8$ 下的以下表达式：

$$[\overline{\mathcal{M}}_{0,3}] = 1$$
$$[\overline{\mathcal{M}}_{0,4}] = u_1$$
$$[\overline{\mathcal{M}}_{0,5}] = 4u_1^2 - 3u_2$$
$$[\overline{\mathcal{M}}_{0,6}] = 31u_1^3 - 30u_1u_2 + 17u_3$$
$$[\overline{\mathcal{M}}_{0,7}] = 273u_1^4 - 317u_1^2u_2 + 70u_2^2 + 214u_1u_3 - 25u_4$$
$$[\overline{\mathcal{M}}_{0,8}] = 2898u_1^5 - 4063u_1^3u_2 + 2012u_1u_2^2 + 2765u_1^2u_3 - 1204u_2u_3 - 385u_1u_4 + 461u_5.$$

利用例 2.10 中给出的生成元表达式 u_i 计算陈数，我们也可以用以下有理基 p_m 来表示这些配边类：
= $[\mathbb{P}^m]$ 由射影空间给出的配边环。我们有如下结果；它也可以由 Coates-Givental 的形式体系 [2]推导得出：

$$[\overline{\mathcal{M}}_{0,3}] = 1$$
$$[\overline{\mathcal{M}}_{0,4}] = p_1$$
$$[\overline{\mathcal{M}}_{0,5}] = 4p_1^2 - 3p_2$$
$$[\overline{\mathcal{M}}_{0,6}] = \tfrac{45}{2}p_1^3 - 30p_1p_2 + \tfrac{17}{2}p_3$$
$$[\overline{\mathcal{M}}_{0,7}] = 166p_1^4 - 317p_1^2p_2 + 70p_2^2 + 107p_1p_3 - 25p_4$$
$$[\overline{\mathcal{M}}_{0,8}] = \tfrac{3031}{2}p_1^5 - \tfrac{11305}{3}p_1^3p_2 + \tfrac{3563}{2}p_1p_2^2 + \tfrac{2765}{2}p_1^2p_3 - 602p_2p_3 - 385p_1p_4 + \tfrac{461}{6}p_5.$$

5. 周环与 K 理论

本节利用代数配边的普适性，分析定理4.1 在周环和 K-理论这两个众所周知的情形下的像；前者是 Witten 在 Chow／上同调情形下的结果 [18] ，后者则是 Lee 关于 K-理论的研究成果 [9, 10] 。

备注 5.1。 由于代数配边是普适的定向上同调理论 [11],, 因此可通过对定理4.1应用定向映射 $\mathbb{L}^* \to \mathrm{A}^*(\mathrm{Spec}\ k)$，得到一个取值于任意定向上同调理论 A^* 的 $\mathrm{M0}_{,n}$ 上 ψ类相交的弦方程。

5.1 周环

周环 CH^* 具有相应的形式群律 $x +_{\mathrm{CH}} y = x + y$，称为加法形式群律；在这种情况下 $\bar{x} = -x$。 Ω^* 的普适性给出一个映射 $\mathbb{L}^* \to \mathrm{CH}^*(\mathrm{Spec}\ k)$，其定义为 $[X] \mapsto 0 \text{if } \dim X > 0$。定理4.1中加法形式群律情形下的弦方程为

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n+1}} 1 \cdot \psi^d = \sum_{i=1}^{n} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n}} \psi^d / \psi_i.$$

这个递推关系有如下闭式解

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n}} \psi^d = \binom{n-3}{d_1, \ldots, d_n}.$$

我们可以将这一结果改写为生成函数的形式如下。令

$$E_n = \sum_d t^d \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n}} \psi^d$$

对于每个 $n \geqslant 3$，其中 $t^d = t_1^{d_1} \cdots t_n^{d_n}$。那么，我们有 $E_n = (t_1 + \cdots + t_n)^{n-3}$。

5.2 K理论

令 $K^0(X)$ 表示 X 上局部自由相干层的格罗滕迪克群，并令 $K^0(X)\ [\beta, \beta^{-1}] := K^0(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\beta, \beta^{-1}]$，其中 β 是次数为 -1 的形式变量。我们用 [E] 表示局部自由相干层 E 在格罗滕迪克群中的类。与 $K^0[\beta, \beta^{-1}]$ 相关联的形式群律是乘法形式群律 $x +_K y = x + y - \beta xy$，且 $\bar{x} = -x/(1 - \beta x)$。在此情况下，若 $f\colon Y \to X$ 是一个相对余维为 d 的射影态射，则

$$f_*([\mathcal{E}]\beta^n) = \sum_{i \geqslant 0} (-1)^i [R^i f_*(\mathcal{E})] \beta^{n-d}.$$

因此，若 $L \to X$是一个线丛，且 L 是其截面层，则 $c_1(L) = (1 - [\mathrm{L}^\vee])\ \beta^{-1}$。根据 Ω^*的泛性质，可得到一个映射 $\mathbb{L}^* \to K^0(\mathrm{Spec}\ k)\ [\beta, \beta^{-1}]$，其定义为

$$[X] \mapsto \chi_{\mathrm{alg}}(X, \mathcal{O}_X)\beta^{\dim X},$$

其中，$\chi_{\mathrm{alg}}(X,\mathcal{O}_X) = \sum_{i\geqslant 0}(-1)^i \dim\ H^i(X,\mathcal{O}_X)$ 是代数欧拉示性数。乘法形式群律情形下定理4.1的弦方程为

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n+1}} 1\cdot\psi^d = \beta\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n}}\psi^d + \sum_{i=1}^{n}\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n}}(1-\beta\psi_i)\psi^d/\psi_i.$$

然而，如果我们考虑 psi类的某些扭曲，就能得到一种具有简单闭式解的替代递推关系。具体而言，对于每个 $1\leqslant i\leqslant n$，令

$$\Psi_i = [\mathcal{L}_i]\psi_i = ([\mathcal{L}_i]-1)\beta^{-1},$$

其中 $\mathbb{L}_i$ 是线丛 $L_i\to \overline{\mathcal{M}}_{0,\ n}$ 的截面层。

命题 5.2。对于 $n\geqslant 3$，我们有

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n+1}} 1\cdot\Psi^d = \beta\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n}}\Psi^d + \sum_{i=1}^{n}\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n}}\Psi^d/\Psi_i.$$

证明。证明的结构与定理4.1相同。然而，如果我们再次令 $D_i = c_1(\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{M}}_{0,\ n+1}}(D_{\{i,\ n+1\}}))$，然后定义 $\tilde{D}_i = [\mathcal{O}(D_{\{i,\ n+1\}})]D_i$，现在便有

$$\Psi_i = \pi^*\Psi_i +_{\tilde{K}} \tilde{D}_i,$$

其中 $x +_{\tilde{K}} y = x + y + \beta xy$。注意，对于 $i\neq j$，$D_iD_j = 0$ 且 $\Psi_iD_i = 0$，因为 $D_iD_j = 0$ 且 $\psi_iD_i = 0$，与定理4.1的证明中一样，因此我们同样得到

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n+1}} 1\cdot\Psi^d = \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n}}\pi_*(1)\Psi^d + \sum_{i=1}^{n}\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n}}\left(\pi_*(\tilde{D}_i)+\beta\Psi_i\pi_*(\tilde{D}_i)\right)\Psi^d/\Psi_i.$$

我们知道 $\pi_*(1) = \beta$ 由命题 3.6。令 $f\colon D_{\{i,n+1\}}\to \overline{\mathcal{M}}_{0,n+1}$ 为包含映射，我们有

$$\pi_*(\tilde{D}_i) = \pi_*([\mathcal{O}(D^{\{i,n+1\}})]f_*(1)) = (\pi_*\circ f_*)([f^*\mathcal{O}(D^{\{i,n+1\}})]) = [\mathcal{L}_i^\vee].$$

然而，请注意

$$\Psi_i +_{\tilde{K}} (([\mathcal{L}_i^\vee]-1)\beta^{-1}) = 0,$$

这意味着

$$([\mathcal{L}_i^\vee]-1)\beta^{-1} = -\frac{\Psi_i}{1+\beta\Psi_i} = \sum_{j\geqslant 1}(-1)^j\beta^{j-1}\Psi_i^j,$$

因此

$$\pi_*(\tilde{D}_i) = 1 + \sum_{j\geqslant 1}(-1)^j\beta^j\Psi_i^j.$$

因此可得

$$\begin{aligned}\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n+1}} 1\cdot\Psi^d &= \beta\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n}}\Psi^d + \sum_{i=1}^{n}\left(1+\sum_{j\geqslant 1}(-1)^j\beta^j\Psi_i^j + \beta\Psi_i + \sum_{j\geqslant 1}(-1)^j\beta^{j+1}\Psi_i^{j+1}\right)\Psi^d/\Psi_i\\ &= \beta\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n}}\Psi^d + \sum_{i=1}^{n}\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n}}\Psi^d/\Psi_i.\end{aligned}$$

□

对于每个 $n\geqslant 3$，定义生成函数

$$E_n = \sum_d t^d\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n}}\Psi^d.$$

推论 5.3。我们有

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n}} \Psi^d = \beta^{n-3-|d|}\binom{n-3}{n-3-|d|, d_1, \ldots, d_n},$$

从而 $E_n = (\beta + t_1 + \cdots + t_n)^{n-3}$。

证明。由于对 $|d| > n-3$ 有 $\psi^d = 0$，故对 $|d| > n-3$ 有 $\Psi^d = 0$。结合初始条件 $\int_{\mathcal{M}_{0,3}} 1 = 1$，由命题 5.2 经归纳法即得该结果。□

注记 5.4。注意到，更一般地，在 Ω^* 中，若 $|d| = n-3$，则

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n}} \psi^d = \binom{n-3}{d_1, \ldots, d_n},$$

其成立是因为余边界值弦方程中所有未出现在周环弦方程中的项在此情形下均消失。这一现象可见于第 A.1 节的表格中。

附录 A. 形式群律计算

本节将利用泛形式群律 $x +_\Omega y \in \mathbb{L}^*[[x, y]]$ 进行一些低次数计算。回想一下，我们将 $q(x,\ y)$ 定义为满足 $x +_\Omega y = x + y - xyq(x,\ y)$ 的唯一幂级数，并将 $\varphi(x) = q(x,\ \bar{x})$ 定义为。现在，我们给出一个组合证明，说明命题 3.6（以及定理4.1）的陈述中出现的表达式确实是一个幂级数。

命题 A.1. 我们有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{x(\bar{x} +_\Omega \bar{y})} - \frac{1}{(\bar{x} +_\Omega \bar{y})\bar{y}} + \frac{1}{\bar{x}\bar{y}}\\ &\quad = \frac{1}{x}(\varphi(x +_\Omega y) - \varphi(y)) + \left(\frac{1}{y} - \varphi(y)\right)(\varphi(x +_\Omega y) - \varphi(x)) + \frac{1}{x +_\Omega y}(\varphi(y) - q(x, y))\end{aligned}$$

是一个系数取自 *Lazard* 环 $\mathbb{L}^*$ 的幂级数。

证明。首先，利用等式 5，我们有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{x(\bar{x} +_\Omega \bar{y})} - \frac{1}{(\bar{x} +_\Omega \bar{y})\bar{y}} + \frac{1}{\bar{x}\bar{y}}\\ &\quad = \left(\varphi(x +_\Omega y) - \frac{1}{x +_\Omega y}\right)\left(\frac{1}{x} - \varphi(y) + \frac{1}{y}\right) + \left(\varphi(x) - \frac{1}{x}\right)\left(\varphi(y) - \frac{1}{y}\right)\\ &\quad = \frac{1}{x}(\varphi(x +_\Omega y) - \varphi(y)) + \left(\frac{1}{y} - \varphi(y)\right)(\varphi(x +_\Omega y) - \varphi(x)) + \frac{\varphi(y)}{x +_\Omega y} + \frac{1}{xy} - \frac{1}{x(x +_\Omega y)} - \frac{1}{y(x +_\Omega y)}.\end{aligned}$$

最后三项之和等于

$$\frac{(x +_\Omega y) - x - y}{xy(x +_\Omega y)} = -\frac{q(x, y)}{x +_\Omega y},$$

因此

$$\begin{aligned}&\frac{1}{x(\bar{x}+_\Omega \bar{y})}-\frac{1}{(\bar{x}+_\Omega \bar{y})\bar{y}}+\frac{1}{\bar{x}\bar{y}}\\&\quad=\frac{1}{x}(\varphi(x+_\Omega y)-\varphi(y))+\left(\frac{1}{y}-\varphi(y)\right)(\varphi(x+_\Omega y)-\varphi(x))+\frac{1}{x+_\Omega y}(\varphi(y)-q(x,y)).\end{aligned}$$

注意到 $\varphi(x+_\Omega y)-\varphi(y)$ 可被 x 整除。事实上，我们知道它可被 $(x+_\Omega y)-y$ 整除，但 $(x+_\Omega y)-y=x(1-yq(x,y))$。类似地，我们有 $\varphi(x+_\Omega y)-\varphi(x)$ 可被 y 整除。为看出$\varphi(x)-q(x,y)$ 可被 $x+_\Omega y$ 整除，请注意

$$\varphi(x)-q(x,y)=q(x,\bar{x})-q(x,y)$$

可被 $\bar{x}-y$ 整除，但由于 $y=(x+_\Omega y)+_\Omega \bar{x}$，我们有

$$\bar{x}-y=(x+_\Omega y)(-1+\bar{x}q(x+_\Omega y,\bar{x})).$$ □

我们现在给出如下表示 [5]，即泛形式群律的系数$x+_\Omega y$ 直至齐次次数 6。参见 Stapleton 的网站 [16]，以了解对 $x+_\Omega y$ 的系数的大量进一步计算。

$$\begin{aligned}x+_\Omega y=x+y&-u_1xy+(u_1^2-u_2)(x^2y+xy^2)\\&+(-2u_1^3+2u_1u_2-2u_3)(x^3y+xy^3)+(-4u_1^3+4u_1u_2-3u_3)x^2y^2\\&+(3u_1^4-3u_1^2u_2+u_2^2+4u_1u_3-u_4)(x^4y+xy^4)\\&+(10u_1^4-11u_1^2u_2+3u_2^2+11u_1u_3-2u_4)(x^3y^2+x^2y^3)\\&+(-4u_1^5+2u_1^3u_2-6u_1u_2^2-6u_1^2u_3+4u_2u_3+2u_1u_4-6u_5)(x^5y+xy^5)\\&+(-21u_1^5+21u_1^3u_2-22u_1u_2^2-28u_1^2u_3+15u_2u_3+7u_1u_4-15u_5)(x^4y^2+x^2y^4)\\&+(-34u_1^5+37u_1^3u_2-33u_1u_2^2-43u_1^2u_3+22u_2u_3+10u_1u_4-20u_5)x^3y^3+\dots\end{aligned}\tag{11}$$

由此可得

$$\begin{aligned}q(x,y)=u_1&-(u_1^2-u_2)(x+y)-(-2u_1^3+2u_1u_2-2u_3)(x^2+y^2)-(-4u_1^3+4u_1u_2-3u_3)xy\\&-(3u_1^4-3u_1^2u_2+u_2^2+4u_1u_3-u_4)(x^3+y^3)\\&-(10u_1^4-11u_1^2u_2+3u_2^2+11u_1u_3-2u_4)(x^2y+xy^2)\\&-(-4u_1^5+2u_1^3u_2-6u_1u_2^2-6u_1^2u_3+4u_2u_3+2u_1u_4-6u_5)(x^4+y^4)\\&-(-21u_1^5+21u_1^3u_2-22u_1u_2^2-28u_1^2u_3+15u_2u_3+7u_1u_4-15u_5)(x^3y+xy^3)\\&-(-34u_1^5+37u_1^3u_2-33u_1u_2^2-43u_1^2u_3+22u_2u_3+10u_1u_4-20u_5)x^2y^2+\dots\end{aligned}$$

接下来，我们有

$$\bar{x}=-x-u_1x^2-u_1^2x^3+(-2u_1^3+u_1u_2-u_3)x^4+\dots$$

这意味着

$$\begin{aligned}\varphi(x)=q(x,\bar{x})=u_1&+(u_1^3-u_1u_2+u_3)x^2+(u_1^4-u_1^2u_2+u_1u_3)x^3\\&+(3u_1^5-2u_1^3u_2+2u_1u_2^2+4u_1^2u_3-u_2u_3-u_1u_4+2u_5)x^4+\dots\end{aligned}\tag{12}$$

and

$$\begin{aligned}\frac{x}{\bar{x}} &= -1 + x\varphi(x)\\ &= -1 + u_1x + (u_1^3 - u_1u_2 + u_3)x^3 + (u_1^4 - u_1^2u_2 + u_1u_3)x^4\\ &\quad + (3u_1^5 - 2u_1^3u_2 + 2u_1u_2^2 + 4u_1^2u_3 - u_2u_3 - u_1u_4 + 2u_5)x^5 + \dots\end{aligned} \tag{13}$$

现在我们计算命题 A.1 的幂级数，直到三阶。首先，我们有

$$\begin{aligned}\varphi(x +_\Omega y) = u_1 &+ (u_1^3 - u_1u_2 + u_3)(x^2 + 2xy + y^2) + (u_1^4 - u_1^2u_2 + u_1u_3)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3)\\ &+ (3u_1^5 - 2u_1^3u_2 + 2u_1u_2^2 + 4u_1^2u_3 - u_2u_3 - u_1u_4 + 2u_5)(x^4 + y^4)\\ &+ (11u_1^5 - 9u_1^3u_2 + 10u_1u_2^2 + 15u_1^2u_3 - 6u_2u_3 - 4u_1u_4 + 8u_5)(x^3y + xy^3)\\ &+ (17u_1^5 - 15u_1^3u_2 + 16u_1u_2^2 + 23u_1^2u_3 - 10u_2u_3 - 6u_1u_4 + 12u_5)x^2y^2 + \dots\end{aligned}$$

由此可根据命题 A.1 得出

$$\begin{aligned}&\frac{1}{x(\bar{x} +_\Omega \bar{y})} - \frac{1}{(\bar{x} +_\Omega \bar{y})\bar{y}} + \frac{1}{\bar{x}\bar{y}}\\ &= \frac{1}{x}(\varphi(x +_\Omega y) - \varphi(y)) + \left(\frac{1}{y} - \varphi(y)\right)(\varphi(x +_\Omega y) - \varphi(x)) + \frac{1}{x +_\Omega y}(\varphi(y) - q(x,y))\\ &= (u_1^2 - u_2) + (u_1^3 - u_1u_2 + u_3)(x + 2y)\\ &\quad + (5u_1^4 - 5u_1^2u_2 + u_2^2 + 6u_1u_3 - u_4)(x^2 + y^2) + (4u_1^4 - 4u_1^2u_2 + u_2^2 + 5u_1u_3 - u_4)xy\\ &\quad + (10u_1^5 - 9u_1^3u_2 + 6u_1u_2^2 + 13u_1^2u_3 - 3u_2u_3 - 3u_1u_4 + 4u_5)x^3\\ &\quad + (17u_1^5 - 15u_1^3u_2 + 15u_1u_2^2 + 23u_1^2u_3 - 9u_2u_3 - 6u_1u_4 + 11u_5)x^2y\\ &\quad + (14u_1^5 - 12u_1^3u_2 + 12u_1u_2^2 + 19u_1^2u_3 - 7u_2u_3 - 5u_1u_4 + 9u_5)xy^2\\ &\quad + (12u_1^5 - 10u_1^3u_2 + 8u_1u_2^2 + 16u_1^2u_3 - 4u_2u_3 - 4u_1u_4 + 6u_5)y^3 + \dots\end{aligned} \tag{14}$$

注记 A.2. 计算配边类 $[\mathbb{P}_{\mathbb{P}^2}(\mathsf{O}(1)\ \oplus\mathsf{O}\ \oplus\mathsf{O})]$ 和 $[\mathbb{P}_{\mathbb{P}^3}(\mathsf{O}(1)\ \oplus\mathsf{O}\ \oplus\mathsf{O})]$，以求得例 2.10 中的生成元 u_4 和 u_5 的表达式时，我们利用了将 $y = z = 0$ 代入幂级数后

$$\frac{1}{(y +_\Omega \bar{x})(z +_\Omega \bar{x})} + \frac{1}{(x +_\Omega \bar{y})(z +_\Omega \bar{y})} + \frac{1}{(x +_\Omega \bar{z})(y +_\Omega \bar{z})},$$

我们得到关于一个变量的幂级数

$$\begin{aligned}&\varphi(x)^2 - \frac{1}{x}(2\varphi(x) - q(x,0) - u_1)\\ &\quad = u_2 + (-3u_1^4 + 3u_1^2u_2 - u_2^2 - 4u_1u_3 + u_4)x^2 + (2u_1u_2^2 - 2u_2u_3 + 2u_5)x^3 + \dots\end{aligned}$$

A.1 表格

利用定理4.1，我们计算出以下表格中给出的所有配边值 ψ 类交数 $\int_{\mathcal{M}_{0,\,n}} \psi^d$，其中 $n \leqslant 8$，并按总次数 $|d|$ 对其进行整理。注意，我们没有列出可通过置换标记点从表中已有交数得到的那些交数。

表 A.0. $|d| = 0$

n	1
3	1
4	u_1
5	$4u_1^2 - 3u_2$
6	$31u_1^3 - 30u_1u_2 + 17u_3$
7	$273u_1^4 - 317u_1^2u_2 + 70u_2^2 + 214u_1u_3 - 25u_4$
8	$2898u_1^5 - 4063u_1^3u_2 + 2012u_1u_2^2 + 2765u_1^2u_3 - 1204u_2u_3 - 385u_1u_4 + 461u_5$

表 A.1. $|d| = 1$

n	ψ_1
4	1
5	u_1
6	$10u_1^2 - 9u_2$
7	$101u_1^3 - 100u_1u_2 + 67u_3$
8	$1078u_1^4 - 1302u_1^2u_2 + 350u_2^2 + 889u_1u_3 - 125u_4$

表 A.2. $|d| = 2$

n	ψ_1^2	$\psi_1\psi_2$
5	1	2
6	u_1	0
7	$20u_1^2 - 19u_2$	$38u_1^2 - 36u_2$
8	$246u_1^3 - 245u_1u_2 + 177u_3$	$400u_1^3 - 400u_1u_2 + 330u_3$

表 A.3. $|d| = 3$

n	ψ_1^3	$\psi_1^2\psi_2$	$\psi_1\psi_2\psi_3$
6	1	3	6
7	u_1	$-2u_1$	$-12u_1$
8	$35u_1^2 - 34u_2$	$100u_1^2 - 95u_2$	$210u_1^2 - 180u_2$

表 A.4. $|d| = 4$

n	ψ_1^4	$\psi_1^2\psi_2\psi_3$	$\psi_1^2\psi_2^2$	$\psi_1\psi_2^3$	$\psi_1\psi_2\psi_3\psi_4$
7	1	12	6	4	24
8	u_1	$-40u_1$	$-10u_1$	$-5u_1$	$-120u_1$

表 A.5. $|d| = 5$

n	ψ_1^5	$\psi_1^3\psi_2\psi_3$	$\psi_1\psi_2^2\psi_3^2$	$\psi_1^2\psi_2\psi_3\psi_4$	$\psi_1^2\psi_2^3$	$\psi_1\psi_2^4$	$\psi_1\psi_2\psi_3\psi_4\psi_5$
8	1	20	30	60	10	5	120

参考文献

1 M. Abouzaid，S. Bai。配边与奇点解消及其在格罗莫夫-威滕理论中的应用。预印本，arXiv:2412.04451，2024。2 T. Coates，A. Givental。量子配边与形式群律。《数学的统一性：纪念盖尔范德九十寿辰》。美国马萨诸塞州波士顿：Birkhäuser Boston，155-171，2006。3 D. Eisenbud，J. Harris。概形几何。《数学研究生教材》第197卷，Springer-Verlag，纽约，2000。4 A. Givental。弗罗贝尼乌斯结构的辛几何。《弗罗贝尼乌斯流形》，AspectsMath.，第E36卷，Vieweg，威斯巴登，91-112，2004。5 M. Hazewinkel。形式群及其应用。Academic Press，纽约，1978。6 J. Hornbostel，V. Kiritchenko。代数配边的舒伯特演算。《纯粹与应用数学杂志》，第656期，59-85，2011。7 S. Keel。零亏格稳定N点曲线模空间的交叉理论。《美国数学会汇刊》，第330卷，第2期，545-574，1992。8 M. Kontsevich。通过环面作用枚举有理曲线。《曲线模空间》，美国马萨诸塞州波士顿：Birkh¨auser Boston，335–368，1995。9 Y.-P. Lee。德利涅–芒福德模空间上典范线丛欧拉示性数的一个公式。《国际数学研究通知》第8期，393–400，1997。10 Y.-P. Lee。量子K理论 I：基础。《杜克数学杂志》121(3):389–424，2004。11 M. Levine，F. Morel。代数配边。《施普林格数学专著》，Springer-Verlag，2007。12 M. Levine，R. Pandharipande。重探代数配边。《数学发明》176卷，63-130，2009。13 M. Levine，Y. Yang，G. Zhao，J. Riou。代数椭圆上同调理论与双向翻转 I。《数学年刊》375(3)，1823-1855，2019。14 D. Quillen。利用斯廷罗德运算对配边理论若干结果的初等证明。《数学进展》7，29-56，1971。15 D. Quillen。关于无定向配边理论与复配边理论的形式群律。《美国数学会通报》75 (2)，1293-1298，1969。16 N. Stapleton。网站。网址：https://www.ms.uky.edu/ njst237/universal.txt。2026。17 A. Vishik。代数配边中的对称运算。《数学进展》213，489-552，2007。18 E. Witten。二维引力与模空间上的交叉理论。《微分几何综述》，第1卷，243-310，1991。

Benjamin Ellis-Bloor benjaminellis-bloor2026@u.northwestern.edu西北大学数学系，伊利诺伊州埃文斯顿 60208