arXiv:2603.03833v1 [math.AP] 4 Mar 2026

插值空间中拟线性抛物问题非孤立平衡点的线性化稳定性

Bogdan–Vasile Matioc 与 Christoph Walker

摘要。本文在插值空间中建立了形如 $u' = A(u)u + f(u)$ 的拟线性抛物问题的非孤立平衡点的稳定性（从而推广了以往依赖于极大正则性的结果）。该方法在选择插值方法时具有充分的灵活性，并且对半线性部分 f 仅要求较低的正则性假设。文中给出了具体问题的应用，包括毛细驱动的Hele–Shaw问题和分数阶平均曲率流。

1. 引言与主要结果

本文研究形如下述拟线性抛物问题的平衡解的稳定性性质

$$u' = A(u)u + f(u), \quad t > 0, \qquad u(0) = u^0, \tag{1.1}$$

假设 $A(u)$ 是巴拿赫空间 E_0 上以 E_1 为定义域的无界算子，并且在 E_0 上生成一个解析半群。

证明（孤立）定常解的指数稳定性或不稳定性，一种成熟且强有力的工具是线性化稳定性原理。该原理根据平衡态处相应线性化算子的谱值实部的符号来推断这些性质。鉴于其在应用中的重要性，针对抛物型情形，研究者在多种框架下运用不同技术发展了这类抽象结果，参见 [12,14,19,26,27,29,30,36,41,42] 相关工作的一个不完整列表。

然而，在某些应用中，平衡解集合并非离散集，而是构成一个有限维光滑流形。在某些情况下，守恒量（流不变量）能够唯一确定一个平衡态；随后，可通过将线性化稳定性原理应用于问题的适当约化，将该平衡态识别为给定初值对应的 ω极限集。

在无法充分利用流不变量的情况下，分析定常解稳定性的一种标准方法（尽管在技术上颇为复杂）是基于中心流形理论。该理论在非线性抛物演化问题的分析中已相当成熟，参见例如 [4,6,10,12,21,23,24,27,34,44]。

近年来，在连续、赫尔德或 L_p-极大正则性框架下，线性化稳定性原理已在 [37–39] 中得到大幅扩展。

2020年 数学学科分类。 35K59;35B35; 37D10;35R35. 关键词与短语。 线性化稳定性；拟线性抛物问题；中心流形。部分由德国科学基金会（德国科学基金会）的 RTG 2339“界面、复杂结构与奇异极限”资助。

这些研究探讨了这样一种情形：在平衡态 u_* 的某个邻域内，定常解集合构成一个有限维 C^1 流形，其维数与 u_* 处线性化算子的核维数相同。由此得到的广义线性化稳定性原理保证了 u_* 的稳定性，并且从足够接近 u_* 的初始状态出发的解会指数收敛到 u_* 附近的某个（可能不同的）定常解，前提是 0 是线性化算子的半单特征值，且谱的其余部分位于开左半平面内。这一广义原理在应用中尤为重要，因为它在最低限度的正则性和谱假设下提供了尖锐的收敛结果，并已成功应用于广泛的非线性模型，包括拟线性抛物型方程、自由边界问题、流体动力学、相变模型和几何演化方程。

本研究在不假设极大性质的情况下，建立了与 [37–39] 中类似的结果。我们转而在一般插值空间中开展研究，并可完全灵活地选择插值方法。分析中的一个关键要素是演化算子的概念，它用于将演化问题 (1.1) 重述为适当插值空间中关于 u 的不动点问题，这些插值空间介于 E_0 与 E_1 之间。具体而言，我们的首个主要结果（见下文定理 1.3）在成熟的 [1] 抛物型理论框架内，给出了拟线性问题中平衡态的线性化稳定性。因此，我们也推广了 [7], 的结果；该文研究了半线性情形（见注 1.4）。此外，在定理 1.6 中，我们将这一理论推广至定义域满足 $\mathrm{dom}(f) \subsetneq \mathrm{dom}(A)$ 的情形，其中函数 $u \mapsto f(u)$ 与拟线性项 $u \mapsto A(u)$ 的适定性和稳定性理论是在介于 $\mathrm{dom}(f)$ 与 $\mathrm{dom}(A)$ 之间的相空间中建立的。因此，这降低了对 f 的正则性假设，并涵盖了一种极限临界情形；在某些应用中，该情形对应的函数空间对于相应的演化方程是尺度不变的。

我们的抽象结果对应用的相关性，将通过以下示例加以说明：4.1—示例4.3 分别涉及具有表面张力的赫勒-肖问题、分数阶平均曲率流（针对周期图像），以及临界尺度不变空间中的拟线性演化问题。

全文中，我们假设 E_0 和 E_1 是定义在 $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ 上的巴拿赫空间，且嵌入 $E_1 \hookrightarrow E_0$ 连续且稠密。对于每个 $\theta \in (0,1)$，我们固定一个任意的、指数为 θ 的可容许插值函子 $(\cdot,\cdot)_\theta$ （参见 [2, I. 第2节.11]），并定义 $E_\theta := (E_0, E_1)_\theta$ 为相应的插值空间，其范数为 $\|\cdot\|_\theta$。

非孤立平衡态的线性化稳定性。我们先讨论定义域相等的情形，即 $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(A)$。为此，我们固定指数

$$0 < \gamma \le \beta < \alpha < 1 \tag{1.2a}$$

并假设存在某个 O_β E_β的开子集，使得

$$(A, f) \in \mathrm{C}^1\big(O_\beta, \mathcal{H}(E_1, E_0) \times E_\gamma\big), \tag{1.2b}$$

其中 $\mathcal{H}(E_1, E_0)$ 表示 $\mathcal{L}(E_1, E_0)$ 中由 E_0上的强连续解析半群生成元构成的开子集。

我们首先回顾 [1] （另见 [30, 定理 1.1]），拟线性柯西问题（1.1）在 O_α中局部适定，其中 $O_\theta := O_\beta \cap E_\theta$ 对于 $\theta \in (\beta, 1]$:

定理 1.1。假设（1.2）。那么，对每个 $u^0 \in O_\alpha$，柯西问题（1.1）都存在唯一的最大经典解

$$u = u(\cdot; u^0) \in \mathrm{C}^1\big((0,t^+), E_0\big) \cap \mathrm{C}\big((0,t^+), E_1\big) \cap \mathrm{C}^{\alpha-\theta}\big([0,t^+), E_\theta\big) \tag{1.3}$$

对每个 $0 \le \theta \le \alpha$，其中 $t^+ = t^+(u^0) \in (0, \infty]$ 是最大存在时间。此外，如果轨道 $u([0,t^+(u^0)); u^0)$ 在 O_α 中相对紧，则 $t^+(u^0) = \infty$。

我们以这一适定性结果为基础，研究构成有限维流形的平衡态的稳定性性质。我们的方法受到 [38] 的启发，并遵循其中发展出的策略。为陈述精确结果，我们需要作一些准备并介绍相关记号。

记（1.1）的平衡点集为$\mathcal{E}$，即

$$\mathcal{E} := \{u \in O_1 : A(u)u + f(u) = 0\}.$$

我们研究解 $u(\cdot; u^0)$ 的渐近行为，其初始数据为 $u^0 \in O_\alpha$，位于固定平衡态 $u_* \in \mathcal{E}$ 的一个邻域内；我们将在下文对该平衡态施加适当的假设。假设存在 $\mathbb{R}^m$ 中 0 的一个邻域 U、一个函数 $\Psi \in \mathrm{C}^2(U, E_1)$ 以及一个常数 $r > 0$，使得

$$\Psi(U) = \mathcal{E} \cap \mathbb{B}_{E_1}(u_*, r), \qquad \Psi(0) = u_*, \qquad \operatorname{rank}(\partial\Psi(0)) = m. \tag{1.4}$$

假设（1.4）保证在 u_* 的某个邻域内，平衡点集 $\mathcal{E}$ 构成一个 m维的 C^2流形。

引入 $v := u - u_*$，我们在 u_* 处将问题（1.1）线性化，得到如下形式

$$v' = A_*(v)v + g(v), \quad t > 0, \qquad v(0) = u^0 - u_*, \tag{1.5}$$

其中，给定 $v \in O_\beta^* := O_\beta - u_*$，我们定义

$$A_*(v)w := A(u_* + v)w + (\partial A(u_*)[w])u_* + \partial f(u_*)w, \qquad w \in E_1,$$

and

$$g(v) := f(u_* + v) - f(u_*) - \partial f(u_*)v + \big(A(u_* + v) - A(u_*) - (\partial A(u_*)v)\big)u_*.$$

由（1.2b）可得

$$(A_*, g) \in \mathrm{C}^1\big(O_\beta^*, \mathcal{L}(E_1, E_0) \times E_0\big)$$

with

$$g(0) = 0, \qquad \partial g(0) = 0. \tag{1.6}$$

此外，令 $\psi(\xi) := \Psi(\xi) - u_*$ 对于 $\xi \in U$，则（1.4）的第一个条件意味着

$$A_*(\psi(\xi))\psi(\xi) + g(\psi(\xi)) = 0, \qquad \xi \in U. \tag{1.7}$$

在 $\xi = 0$ 处对该恒等式求导，并利用 $\psi(0) = 0$ 和 $\partial g(0) = 0$，即可得到 $A_*(0)\partial\psi(0) = 0$。也就是说，$T_{u_*}\mathcal{E} \subset \ker(A_*(0))$，其中 $T_{u_*}\mathcal{E} = \operatorname{rg}(\partial\Psi(0))$ 表示$\mathcal{E}$ 在 u_* 处的切空间，并且

$$A_*(0) = A(u_*) + (\partial A(u_*)[\cdot])u_* + \partial f(u_*).$$

事实上，我们还将进一步假设

$$T_{u_*}\mathcal{E} = \ker(A_*(0)), \tag{1.8a}$$

0 是 $A_*(0)$的半单特征值，即，

$$\mathrm{rg}(A_*(0)) \text{ is closed and } E_0 = \ker(A_*(0)) \oplus \mathrm{rg}(A_*(0)), \tag{1.8b}$$

并且

$$\sigma(A_*(0)) \setminus \{0\} \subset [\mathrm{Re}\, z < 0]. \tag{1.8c}$$

特别 是，0 是 $\sigma(A_*(0))$ 的一个孤立谱点，由此得到不交并

$$\sigma(A_*(0)) = \{0\} \cup \sigma_s(A_*(0)),$$

$$-\omega_0 := \sup\{\mathrm{Re}\,\lambda \,:\, \lambda \in \sigma_s(A_*(0))\} < 0.$$

我们指出，假设 (1.4) 和 (1.8) 表明平衡态解 u_* 是 法向稳定 [37–39]。

令 $P \in \mathcal{L}(E_0)$ 为对应于 $A_*(0)$ 的谱集 $\{0\}$ 、取值于 $\ker(A_*(0))$ 上的谱投影，参见例如 [27, 附录 A], ，并记 $Q := 1 - P$ 为 E_0 到 $\mathrm{rg}(A_*(0))$ 的相应投影。那么 $\mathrm{rg}(P) = \ker(A_*(0)) \subset E_1$ ，且 $\mathrm{rg}(Q) = \mathrm{rg}(A_*(0))$。此外，令 $E_\theta^0 := P(E_\theta)$ 和 $E_\theta^s := Q(E_\theta)$，我们得到如下拓扑和分解

$$E_\theta = E_\theta^0 \oplus E_\theta^s, \qquad \theta \in [0,1], \tag{1.9a}$$

并且，由于 $\mathrm{rg}(P) = \ker(A_*(0)) = E_1^0$，实际上我们有

$$E_\theta^0 = \ker(A_*(0)) = E_1^0, \qquad \theta \in [0,1]. \tag{1.9b}$$

分解（1.9a）将 $A_*(0)$ 分解为

$$A_*(0) = 0 \oplus A_*^s(0) \tag{1.9c}$$

并且，鉴于 [27, 附录 A],稳定部分 $A_*^s(0)$满足

$$A_*^s(0) \in \mathcal{H}(E_1^s, E_0^s) \qquad \text{and} \qquad \sigma(A_*^s(0)) = \sigma_s(A_*(0)) \subset [\mathrm{Re}\, z \le -\omega_0]. \tag{1.9d}$$

最后，为了陈述我们的稳定性结果，我们还需要一个技术性假设：存在 $\zeta \in [0,1)$ 以及巴拿赫空间 F 和 G，使得

$$E_\zeta \hookrightarrow G, \qquad P \in \mathcal{L}(F, P(F)), \qquad P(F) \hookrightarrow E_1^0, \tag{1.10a}$$

and

$$\|A(w) - A(u_*)\|_{\mathcal{L}(G,F)} \le L\|w - u_*\|_{E_\beta}, \qquad w \in O_\beta. \tag{1.10b}$$

显然，不失一般性，我们实际上可以假设 $\alpha < \zeta < 1$。

备注 *1.2*。假设（*1.10*）是我们分析中的关键要素，它弥补了拟线性部分缺乏最大正则性性质的问题。事实上，它使我们能够处理（*1.1*）的重写形式（*1.5*）中的半线性项 g，该项仅取值于 E_0。然而，我们强调，在许多应用中，这一假设并未施加实质性限制，而且很容易验证，见例 *4.1*–例 *4.3*，尤其是命题 *4.2*。事实上，在应用中，算子 $P \in L(F, P(F))$ 通常是投影 $P \in L(E_0)$ 的延拓，并且 $P(F) = E_1^0$。

我们还要指出，由于 E_1^0 是有限维的， E_1^0 上的所有范数都等价，因此我们在 E_1^0 上赋予 $\|\cdot\|_1$。

我们将证明，法向稳定平衡 u_* 对于（1.1）是稳定的。此外，我们将证明，对于任意 u^0 充分接近于 u_* 在 E_α 中的初值，相应的极大解 $u(\cdot;\, u^0)$ 在全局有定义，并以指数速度收敛于一个

平衡态 $\hat{u}_* \in \mathcal{E}$。渐近极限 $\hat{u}_* \in \mathcal{E}$ 由初值 u^0唯一确定，尽管它可能随 u^0 而变化。

定理 *1.3.* 假设 *(1.2)* 成立，并且对于平衡解 $u_* \in E$，假设 *(1.4)*、*(1.8)* 和 *(1.10)* 成立。那么 u_* 在 E_α 中是稳定的。此外，对于任意给定的 $\omega \in (0, \omega_0)$，存在常数 $\delta > 0$ 和 $K \geq 1$，使得对于每个 $u^0 \in \mathbb{B}_{E_\alpha}(u_*, \delta)$，*(1.1)* 的极大解 $u(\cdot; u^0)$ 都是全局定义的，并且存在唯一的 $\hat{u}_* \in E$，使得

$$\|u(t; u^0) - \hat{u}_*\|_{E_\alpha} \leq K e^{-\omega t} \|u^0 - u_*\|_{E_\alpha}, \qquad t \geq 0. \tag{1.11}$$

定理 1.3的证明见第 2 节，我们还请参阅例 4.1 和例 4.2，了解该结果的两个应用。

当然，定理 1.3 也适用于半线性情形，其中 $A(u) = A$与 u无关。不过，正如 [7] 中所指出的：

注 1.4. (i) 在(1.4)中，为简便起见，我们假设平衡点集在m维C^2流形的一个邻域内。u_* 不过，只需该集合是一个C^{2-}流形，甚至只需它是某个$\mathrm{C}^{1+\delta}$流形，其中 $\delta \in (0,1)$。在半线性情形下，C^1流形实际上已足够（见脚注*1*）。

(ii) 在半线性情形下，条件(1.2a) 可以替换为稍微更一般的要求

$$0 \leq \gamma < \alpha < 1,$$

即，选择 $\gamma = 0$ 是可行的，见 *[32,* 定理 *1*。*2]* 以及定理*1.3*的证明。**(iii)** 假设(1.10) 在半线性情形下自动成立。

时间加权空间中非孤立平衡态的线性化稳定性。在某些应用中，半线性项 $u \mapsto f(u)$ 在(1.1)中要求比拟线性部分 u具有更高的正则性 $u \mapsto A(u)$。在这种情况下，定理1.3 不再能给出最优结果。利用 [28, 32], 中建立的适定性理论，我们现在将定理1.3 推广到这一情形，采用的方法类似于 [29, 定理 1。3]中的方法。

对于如上定义的插值空间 E_θ、$\theta \in [0,1]$，我们固定

$$0 < \gamma < \beta < \xi < 1, \qquad q \geq 1, \tag{1.12a}$$

并对（1.1）中的拟线性部分施加与之前相同的假设，即

$$A \in \mathrm{C}^1(O_\beta, \mathcal{H}(E_1, E_0)). \tag{1.12b}$$

Th与先前设定的主要区别在于满足以下条件的半线性部分

$$f \in \mathrm{C}^1(O_\xi, E_\gamma) \tag{1.12c}$$

因而可能需要比 $\xi > \beta$ 更高的正则性。此外，我们还对每个 $R > 0$ 假设存在常数 $C(R) > 0$，使得

$$\begin{aligned} &\|f(u) - f(v)\|_{E_\gamma} \\ &\leq C(R)\big[1 + \|u\|_\xi^{q-1} + \|v\|_\xi^{q-1}\big]\big[(1 + \|u\|_\xi + \|v\|_\xi)\|u - v\|_\beta + \|u - v\|_\xi\big] \end{aligned} \tag{1.12d}$$

对于 u，$v \in O_\xi \cap \mathbb{B}_{E_\beta}(0, R)$。定量估计（1.12d）涉及参数 $q \geq 1$，该参数衡量 f 相对于 E_ξ 项的增长；在研究（3.1）中可见，研究（1.1）的适定性时，自然会用到时间加权空间。在

[28,32] 这种方法所需的假设略宽于（1.12）中所述，而 [22, 25, 40, 42] 则在适当的最大正则性框架中处理该问题。利用时间权重研究（1.1）适定性的优势在于，可以使用相空间 E_α 及其参数 $\alpha \in (\beta, \xi)$，此时无需定义半线性项 f。更确切地说，我们将临界值 $\alpha_{\rm crit} < \xi$ 定义为

$$\alpha_{\rm crit} := \frac{q\xi - 1 - \gamma}{q-1} \quad \text{if } q > 1, \qquad \alpha_{\rm crit} := -\infty \quad \text{if } q = 1, \tag{1.12e}$$

并考虑初始数据 $u^0 \in O_\alpha$，其中

$$\alpha_{\rm crit} \le \alpha \in (\beta, \xi). \tag{1.12f}$$

在临界情形 $\alpha = \alpha_{\rm crit} \in (\beta, \xi)$，适定性理论（建立于 [28]）需要如下附加假设：存在一个插值函子 $\{\cdot,\cdot\}^{\alpha/\xi}$，其指数为 α/ξ，并且对每个 $\eta \in \{\alpha, \beta, \xi\}$ 存在一个插值函子 $\{\cdot,\cdot\}^{\gamma/\eta}$，其指数为 γ/η，使得

$$E_\alpha \doteq \{E_0, E_\xi\}^{\alpha/\xi}, \qquad E_\gamma \doteq \{E_0, E_\eta\}^{\gamma/\eta}, \quad \eta \in \{\alpha, \beta, \xi\}. \tag{1.13}$$

性质 (1.13) 在应用中其实并不具有很强的限制性，因为只要对每个 $\theta \in \{\gamma, \beta, \alpha, \xi\}$，插值函子 $(\cdot,\cdot)_\theta$ 是复插值函子 $[\cdot,\cdot]_\theta$、连续插值函子 $(\cdot,\cdot)^0_{\theta,\infty}$，或带参数 $p \in [1,\infty]$ 的实插值函子 $(\cdot,\cdot)_\theta = (\cdot,\cdot)_{\theta,p}$ 之一，该性质便自动成立（参见例如 [2, I.Remarks 2.11.2 (b)]）。

在假设（1.1）和 O_α 下，关于假设（1.12）和（1.13的局部适定性已在 [28,32] 中得到证明，并总结于 [29, 定理 1.2]中。我们回顾这一结果：

定理 1.5。假设(1.12)-(1.13)成立。那么，对每个 $u^0 \in O_\alpha$，柯西问题(1.1)都存在唯一的最大经典解 $u = u(\cdot; u^0)$，且满足

$$u \in {\rm C}^1((0,t^+), E_0) \cap {\rm C}((0,t^+), E_1) \cap {\rm C}([0,t^+), O_\alpha) \cap {\rm C}^{\alpha-\beta}([0,t^+), E_\beta) \tag{1.14a}$$

and

$$\lim_{t\to 0} t^{\xi-\alpha} \|u(t)\|_{E_\xi} = 0, \tag{1.14b}$$

其中 $t^+ = t^+(u^0) \in (0,\infty]$ 表示最大存在时间。

现在，我们可以在这一框架下陈述正规稳定平衡态的稳定性结果：

定理 *1.6*。假设 *(1.12)-(1.13)* 成立，并且对于平衡态 $u_* \in E$，假设 *(1.4)*、*(1.8)* 和 *(1.10)* 成立。那么，u_* 在 E_α 中稳定。此外，对于任意给定的 $\omega \in (0, \omega_0)$，存在常数 $\delta > 0$ 和 $K \ge 1$，使得对每个 $u^0 \in \mathbb{B}_{E_\alpha}(u_*, \delta)$，*(1.1)* 的极大解 $u(\cdot; u^0)$ 在全局有定义，并且存在唯一的 $\hat{u}_* \in E$，使得

$$\|u(t;u^0) - \hat{u}_*\|_{E_\alpha} + t^{\xi-\alpha}\|u(t;u^0) - \hat{u}_*\|_{E_\xi} \le Ke^{-\omega t}\|u^0 - u_*\|_{E_\alpha}, \qquad t \ge 0. \tag{1.15}$$

该结果的证明见第3节，应用见例4.3。我们注意到，在非临界情形下不需要假设（1.13）$\alpha_{\rm crit} < \alpha \in (\beta, \xi)$：

注1.7。在非临界情形下 $\alpha_{\rm crit} < \alpha \in (\beta, \xi)$ 实际上可以省略假设 (1.13) 定理 *1.6*。若将估计 (1.15)替换为以下形式，则结论仍然成立（证明类似）：

$$\|u(t;u^0) - \hat{u}_*\|_{E_\alpha} + t^{\mu}\|u(t;u^0) - \hat{u}_*\|_{E_\xi} \le Me^{-\omega t}\|u^0\|_{E_\alpha}, \qquad t > 0,$$

对于某个固定（但任意）的 $\mu > \xi - \alpha$。

2. 定理1.3的证明

本节给出定理1.3的证明。我们使用前文引入的记号，并将 [38, 定理 21] 的证明改编到我们的情形。此外，我们利用以下事实：对于某些稠密嵌入的巴拿赫空间 $A \in \mathcal{H}(F_1, F_0)$，当且仅当存在常数 $F_1 \hookrightarrow F_0$ 使得 $\kappa \geq 1$ 和 $\omega > 0$ 满足 $A \in \mathcal{H}(F_1, F_0; \kappa, \omega)$，也就是说

$$\omega - A \in \mathcal{L}is(F_1, F_0) := \{T \in \mathcal{L}(F_1, F_0) : T \text{ is bijective}\}$$

and

$$\|(\lambda - A)x\|_{F_0} \geq |\lambda| \, \|x\|_{F_0} + \|x\|_{F_1}, \qquad x \in F_1, \ \mathrm{Re}\ \lambda \geq \omega.$$

详情请参见 [2] 。

定理*1.3*的证明。 我们将冗长的证明分为四个步骤。

(i) 首先，我们将流形 $\mathcal{E}$ 表示为 u_* 邻域内的一个平移图。为此，定义 $h : U \to E_1^0$，使得 $h(\xi) := P\psi(\xi)$ 对于 $\xi \in U$ 成立，并注意到

$$\partial h(0) = P\partial\psi(0) \in \mathcal{L}is(\mathbb{R}^m, E_1^0)$$

由于（1.4）、（1.8）和（1.9b）。因此，逆函数定理保证映射 h 是 C^2-微分同胚，在 0 的某个邻域内，因而可逆。因此，存在 $r_0 > 0$ 使得

$$h^{-1} \in \mathrm{C}^2(\mathbb{B}_{E_1^0}(0, r_0), U), \qquad h^{-1}(0) = 0.$$

令 $\Phi(x) := \psi(h^{-1}(x))$ 对于 $x \in \mathbb{B}_{E_1^0}(0, r_0)$。则 $\Phi \in \mathrm{C}^2(\mathbb{B}_{E_1^0}(0, r_0) \ E_1)$ 满足 $\Phi(0) = 0$并且，回顾（1.2），

$$\{\Phi(x) + u_* : x \in \mathbb{B}_{E_1^0}(0, r_0)\} = \mathcal{E} \cap W$$

对于某个邻域 W，其中包含 u_* 并且位于 O_1中。由于

$$P\Phi(x) = P\psi(h^{-1}(x)) = x, \qquad x \in \mathbb{B}_{E_1^0}(0, r_0),$$

根据 h的定义，我们有

$$\Phi(x) = P\Phi(x) + Q\Phi(x) = x + Q\Phi(x), \qquad x \in \mathbb{B}_{E_1^0}(0, r_0).$$

因此，对 $x \in \mathbb{B}_{E_1^0}(0, r_0)$，定义 $\phi(x) := Q\Phi(x)$，得到 $\phi \in \mathrm{C}^2(\mathbb{B}_{E_1^0}(0, r_0) \ E_1^s)$，并由 $\mathrm{rg}(P) = \mathrm{rg}(\partial\psi(0))$ 推得

$$\phi(0) = 0, \qquad \partial\phi(0) = Q\partial\psi(0)\partial h^{-1}(0) = 0, \tag{2.1a}$$

and

$$\Big\{x + \phi(x) + u_* : x \in \mathbb{B}_{E_1^0}(0, r_0)\Big\} = \mathcal{E} \cap W \tag{2.1b}$$

对于某个 W u_* 在 O_1 中的邻域。因此，流形 $\mathcal{E}$ 确实可以表示为 u_* 的一个邻域内由函数 ϕ 平移 u_* 后所形成的图。

如有必要，取小一些的 $r_0 > 0$，根据（2.1a），我们可以假设

$$\|\partial\phi(x)\|_{\mathcal{L}(E_1^0, E_1^s)} \leq 1 \quad \text{and} \quad \|\phi(x)\|_{E_1^s} \leq \|x\|_{E_1^0}, \qquad x \in \mathbb{B}_{E_1^0}(0, r_0), \tag{2.2}$$

特别地，ϕ是一致 Lipschitz 连续的，并且

$$x + \phi(x) + y \in O_\beta^*, \qquad x \in \mathbb{B}_{E_1^0}(0, r_0), \ y \in \mathbb{B}_{E_\beta^s}(0, r_0). \tag{2.3}$$

我们还由（1.7）以及恒等式 $\psi(h^{-1}(x)) = \Phi(x) = x + \phi(x)$ 可知

$$A_*(x+\phi(x))(x+\phi(x)) + g(x+\phi(x)) = 0, \qquad x \in \mathbb{B}_{E_1^0}(0, r_0). \tag{2.4}$$

(ii) 接下来，我们推导平移后的解 $u - u_*$ 在E_1^0 和E_1^s上的投影所对应的柯西问题。这个柯西问题（见下文（2.10）-（2.11））将在随后的分析中发挥关键作用。

更确切地说，设 $u^0 \in O_\alpha$ 满足 $P(u^0 - u_*) \in \mathbb{B}_{E_1^0}(0, r_0)$。令 $u = u(\cdot; u^0)$ 为由定理 1.1 给出的（1.1）的极大解，并设 $v := u - u_*$。那么，存在充分小的 $T \in (0, t^+(u^0))$，使得对于所有 $t \in [0, T)$，均有 $Pv(t) \in \mathbb{B}_{E_1^0}(0, r_0)$。因此，

$$\begin{aligned} x(t) &:= Pv(t) = P(u(t) - u_*) \in \mathbb{B}_{E_1^0}(0, r_0), \\ y(t) &:= Q(v(t)) - \phi(x(t)) = Q(u(t) - u_*) - \phi(x(t)) \end{aligned} \tag{2.5}$$

在 $t \in [0, T)$ 时有定义，并且满足

$$x(t) + \phi(x(t)) + y(t) = u(t) - u_* = v(t) \in O_\beta^*, \qquad t \in [0, T).$$

此外，由于 $\phi \in \mathrm{C}^2(\mathbb{B}_{E_1^0}(0, r_0)\ E_1^s)$ 是一致 Lipschitz 连续的，我们由（1.3）推得

$$\begin{aligned} &x \in \mathrm{C}^1((0,T), E_1^0) \cap \mathrm{C}^{\alpha-\theta}([0,T), E_1^0), \\ &y \in \mathrm{C}^1((0,T), E_0^s) \cap \mathrm{C}((0,T), E_1^s) \cap \mathrm{C}^{\alpha-\theta}([0,T), E_\theta^s) \end{aligned} \tag{2.6}$$

对 $\theta \in [0, \alpha]$，并由（1.5），有序对 (x, y) 是演化问题

$$\begin{aligned} x' &= S(x,y), \quad t > 0, & x(0) &= x^0 := P(u^0 - u_*), \\ y' &= R(x,y), \quad t > 0, & y(0) &= y^0 := Q(u^0 - u_*) - \phi(P(u^0 - u_*)), \end{aligned}$$

在 $E_1^0 \times E_0^s$ 中，其中

$$\begin{aligned} S(x,y) &:= PA_*(x+\phi(x)+y)(x+\phi(x)+y) + Pg(x+\phi(x)+y), \\ R(x,y) &:= QA_*(x+\phi(x)+y)(x+\phi(x)+y) + Qg(x+\phi(x)+y) - \partial\phi(x)S(x,y). \end{aligned}$$

为揭示该系统的结构，我们稍微滥用一下记号，在适当时省略时间变量，直接写作 (x, y)。首先利用恒等式（2.4）可得

$$\begin{aligned} S(x,y) = P&\big[A_*(x+\phi(x)+y) - A_*(x+\phi(x))\big](x+\phi(x)) \\ &+ P\big[g(x+\phi(x)+y) - g(x+\phi(x))\big] + PA_*(x+\phi(x)+y)y. \end{aligned}$$

注意到 $A_*(v) = A(u_*+v) - A(u_*) + A_*(0)$ 对 $v \in O_\beta^*$，结合（1.9c）-（1.9d），可得

$$PA_*(v)(x+z) = P\big[A(u_*+v) - A(u_*)\big](x+z), \qquad v \in O_\beta^*,\ x \in E_1^0,\ z \in E_1^s,$$

并回忆起 $\phi(x)\ y \in E_1^s$，可推得

$$S(x,y) = S_1(x,y) + S_2(x,y), \tag{2.7a}$$

其中

$$\begin{aligned} S_1(x,y) := P&\big[A(u_*+x+\phi(x)+y) - A(u_*+x+\phi(x))\big](x+\phi(x)) \\ &+ P\big[g(x+\phi(x)+y) - g(x+\phi(x))\big] \end{aligned} \tag{2.7b}$$

对于 $x \in \mathbb{B}_{E_1^0}(0,\ r_0)$ 和 $y \in \mathbb{B}_{E_\beta^s}(0,\ r_0)$，且

$$S_2(x,y) := P\big[A(u_* + x + \phi(x) + y) - A(u_*)\big]y \tag{2.7c}$$

对于 $x \in \mathbb{B}_{E_1^0}(0, r_0)$ 和 $y \in E_1^s \cap \mathbb{B}_{E_\beta^s}(0, r_0)$。

类似地，我们由（2.4）首先推得

$$\begin{aligned} R(x,y) = {} & QA_*(x+\phi(x)+y)y + Q\big[A_*(x+\phi(x)+y) - A_*(x+\phi(x)\big](x+\phi(x)) \\ & + Q\big[g(x+\phi(x)+y) - g(x+\phi(x))\big] - \partial\phi(x)S(x,y) \end{aligned}$$

然后，利用

$$QA_*(v)(x+z) = Q\big[A(u_*+v) - A(u_*)\big](x+z) + A_*^s(0)z, \qquad v \in O_\beta^*,\ x \in E_1^0,\ z \in E_1^s,$$

that

$$\begin{aligned} R(x,y) = {} & A_*^s(0)y + Q\big[A(u_* + x + \phi(x) + y) - A(u_*)\big]y \\ & + Q\big[A(u_* + x + \phi(x) + y) - A(u_* + x + \phi(x))\big](x + \phi(x)) \\ & + Q\big[g(x + \phi(x) + y) - g(x + \phi(x))\big] - \partial\phi(x)S(x,y). \end{aligned}$$

因此，我们由 $S(x,y)$ 在（2.7）中的表示得到

$$R(x,y) = \mathcal{A}(x,y)y + q(x,y)$$

对于 $x \in \mathbb{B}_{E_1^0}(0, r_0)$ 和 $y \in E_1^s \cap \mathbb{B}_{E_\beta^s}(0, r_0)$，其中我们令

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x,y) := {} & A_*^s(0) + Q\big[A(u_* + x + \phi(x) + y) - A(u_*)\big] \\ & - \partial\phi(x)P\big[A(u_* + x + \phi(x) + y) - A(u_*)\big] \end{aligned} \tag{2.8}$$

and

$$\begin{aligned} q(x,y) := {} & Q\big[A(u_* + x + \phi(x) + y) - A(u_* + x + \phi(x))\big](x + \phi(x)) \\ & + Q\big[g(x + \phi(x) + y) - g(x + \phi(x))\big] \\ & - \partial\phi(x)P\big[A(u_* + x + \phi(x) + y) - A(u_* + x + \phi(x))\big](x + \phi(x)) \\ & - \partial\phi(x)P\big[g(x + \phi(x) + y) - g(x + \phi(x))\big]. \end{aligned} \tag{2.9}$$

综上，数对 (x,y) 满足柯西问题

$$x' = S(x,\ y),\ t > 0, \qquad x(0) = x^0 := P(u^0 - u_*), \tag{2.10}$$

$$y' = \mathcal{A}(x,y)y + q(x,y), \quad t > 0, \quad y(0) = y^0 := Q(u^0 - u_*) - \phi(P(u^0 - u_*)), \tag{2.11}$$

在 $E_1^0 \times E_0^s$ 中，其中

$$\begin{aligned} & S : \mathbb{B}_{E_1^0}(0, r_0) \times (E_1^s \cap \mathbb{B}_{E_\beta^s}(0, r_0)) \to E_1^0, \\ & \mathcal{A} : \mathbb{B}_{E_1^0}(0, r_0) \times \mathbb{B}_{E_\beta^s}(0, r_0) \to \mathcal{L}(E_1^s, E_0^s) \end{aligned}$$

分别定义于（2.7）和（2.8）中，而

$$q : \mathbb{B}_{E_1^0}(0, r_0) \times \mathbb{B}_{E_\beta^s}(0, r_0) \to E_0^s$$

定义于（2.9）中。显然，函数 S、$\mathcal{A}$和 q 均为连续可微函数。

事实上，由（1.2b）、（1.6）和（2.2）可直接推出，对于任意 $\eta \in (0,\ r_0)$（将在下文选取，见步骤 **(iv)**），存在 $r(\eta) \in (0,\ \eta)$ 使得

$$\|q(x,y)\|_{E_0^s} \le \eta\|y\|_{E_\beta^s}, \qquad x \in \bar{\mathbb{B}}_{E_1^0}(0, r(\eta)),\ y \in \bar{\mathbb{B}}_{E_\beta^s}(0, r(\eta)), \tag{2.12}$$

and

$$\|S_1(x,y)\|_{E_1^0} \leq \eta\|y\|_{E_\beta^s}, \qquad x \in \bar{\mathbb{B}}_{E_1^0}(0,r(\eta)),\ y \in \bar{\mathbb{B}}_{E_\beta^s}(0,r(\eta)), \tag{2.13}$$

这里我们回顾一下，在 E_1^0 上的所有范数都等价。关于 S_2，我们调用假设（1.10），推得存在常数 $C>0$ 使得

$$\begin{aligned}\|S_2(x,y)\|_{E_1^0} &\leq C\|S_2(x,y)\|_{P(F)} \leq C\|A(u_*+x+\phi(x)+y)-A(u_*)\|_{\mathcal{L}(G,F)}\|y\|_G\\ &\leq \eta\|y\|_{E_\zeta^s}\end{aligned}$$

对于 $x \in \mathbb{B}_{E_1^0}(0,r(\eta))$ 以及 $y \in E_\zeta^s \cap \mathbb{B}_{E_\beta^s}(0,r(\eta))$。事实上，由于 $E_\zeta^s \hookrightarrow E_\beta^s$，因此根据 (2.7a) 和 (2.13) 可假设

$$\|S(x,y)\|_{E_1^0} \leq \eta\|y\|_{E_\zeta^s}, \qquad x \in \bar{\mathbb{B}}_{E_1^0}(0,r(\eta)),\ y \in E_\zeta^s \cap \bar{\mathbb{B}}_{E_\beta^s}(0,r(\eta)). \tag{2.14}$$

最后，回顾 (2.8)，并在必要时缩小 $r(\eta) \in (0,\eta)$，由 (1.2b) 和 (2.2) 可推知

$$\|\mathcal{A}(x,y)-A_*^s(0)\|_{\mathcal{L}(E_1^s,E_0^s)} \leq \eta, \qquad x \in \bar{\mathbb{B}}_{E_1^0}(0,r(\eta)),\ y \in \bar{\mathbb{B}}_{E_\beta^s}(0,r(\eta)). \tag{2.15}$$

为简化记号，设

$$\bar{\mathbb{B}}_\beta(r(\eta)) := \bar{\mathbb{B}}_{E_1^0}(0,r(\eta)) \times \bar{\mathbb{B}}_{E_\beta^s}(0,r(\eta))$$

对于 $\eta \in (0,r_0)$。

(iii) 固定 $\bar{\alpha} \in (\max\{\beta,\alpha+\zeta-1\},\alpha)$，并定义 $\rho := \alpha-\bar{\alpha} \in (0,\min\{\alpha-\beta,1-\zeta\})$。对于任意 $T \in (0,\infty]$，引入集合

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_\eta(T) := \Big\{&(x,y) \in \mathrm{C}([0,T),\bar{\mathbb{B}}_\beta(r(\eta))) :\\ &\|x(t)-x(s)\|_{E_1^0}+\|y(t)-y(s)\|_{E_\beta^s} \leq N|t-s|^\rho, \quad t,s \in [0,T)\Big\},\end{aligned}$$

其中 $N>0$ 需适当选取（见下文（2.17））。给定 $(x,y) \in \mathcal{M}_\eta(T)$，我们将唯一的抛物型演化算子 $\mathcal{A}(x,y)$ 与之关联，该算子作用于 $U_{\mathcal{A}(x,y)}$ 上，具有正则性子空间 E_1^s，并给出若干对我们有用的估计。

首先，固定 $\omega \in (0,\omega_0)$ 并令 $4\varepsilon := \omega_0-\omega > 0$。利用 [2, II.Proposition 1.4.2]，由（1.9d）和（2.15）可知（必要时将 $r(\eta) > 0$ 取得更小），存在常数 $\kappa \geq 1$ 和 $L \geq 1$，使得

$$\omega_0-\varepsilon+\mathcal{A}(x,y) \in \mathcal{H}(E_1^s,E_0^s;\kappa,\varepsilon), \qquad (x,y) \in \bar{\mathbb{B}}_\beta(r(\eta)),$$

并且，回顾（2.2）以及 $\phi \in \mathrm{C}^2(\mathbb{B}_{E_1^0}(0,r_0)\,E_1^s)$[1]这一事实，

$$\|\mathcal{A}(x,y)-\mathcal{A}(\bar{x},\bar{y})\|_{\mathcal{L}(E_1^s,E_0^s)} \leq L(\|x-\bar{x}\|_{E_1^0}+\|y-\bar{y}\|_{E_\beta^s}), \qquad (x,y),(\bar{x},\bar{y}) \in \bar{\mathbb{B}}_\beta(r(\eta)).$$

这些性质确保，对于每个 $(x,y) \in \mathcal{M}_\eta(T)$，

$$\mathcal{A}(x,y) \in \mathrm{C}^\rho([0,T),\mathcal{L}(E_1^s,E_0^s)) \tag{2.16a}$$

with

$$\|\mathcal{A}(x(t),y(t))-\mathcal{A}(x(s),y(s))\|_{\mathcal{L}(E_1^s,E_0^s)} \leq LN|t-s|^\rho, \qquad t,s \in [0,T), \tag{2.16b}$$

[1]此处我们利用 $\partial\phi$ 的利普希茨连续性，并隐含地利用平衡态构成一个 C^2-流形这一假设。在半线性情形下，$\mathcal{A}$ 与 (x,y) 无关，因此显然不需要 $\partial\phi$ 的利普希茨连续性，所以 C^1-流形就足够了。

and

$$\omega_0 - \varepsilon + \mathcal{A}(x(t), y(t)) \in \mathcal{H}(E_1^s, E_0^s; \kappa, \varepsilon), \qquad t \in [0, T). \tag{2.16c}$$

性质（2.16）使我们能够调用 [2, 第二节5] 中关于族 $\{\mathcal{A}(x,y) : (x,y) \in \mathcal{M}\eta(T)\}$的稳定性估计。令 $c_0(\rho) > 0$ 为 [2, II.定理 5.11]中的常数，并选择 $N > 0$ 使得

$$c_0(\rho)(LN)^{1/\rho} = \varepsilon. \tag{2.17}$$

注意

$$-\nu := c_0(\rho)(LN)^{1/\rho} - \omega_0 + 2\varepsilon = -\omega_0 + 3\varepsilon = -\omega - \varepsilon < 0. \tag{2.18}$$

接着由 [2,II.Theorem 5.1.1、II.Lemma 5.1.3], (2.16) 和 (2.18) 可知，对于每个 $(x,y) \in \mathcal{M}\eta(T)$, 存在唯一的抛物型演化算子 $U_{\mathcal{A}(x,y)}$ on E_0^s，其正则性子空间为 E_1^s。此外，存在常数 $M \geq 1$ （取决于常数 LN、 ρ、 κ、 ω_0 和 ε，但与 $T \in (0, \infty]$ 无关），使得对于 $0 \leq s \leq t < T$,

$$\|U_{\mathcal{A}(x,y)}(t,s)\|_{\mathcal{L}(E_\theta^s)} + (t-s)^{\theta-\vartheta_0}\|U_{\mathcal{A}(x,y)}(t,s)\|_{\mathcal{L}(E_\vartheta^s, E_\theta^s)} \leq Me^{-(\omega+\varepsilon)(t-s)}, \tag{2.19}$$

在.....条件下 $0 \leq \vartheta_0 \leq \vartheta \leq \theta \leq 1$ 具有 $\vartheta_0 < \vartheta$ 若 $0 < \vartheta < \theta < 1$。此外，由 [2, II.Theorem 5.3.1] 可知

$$w := \left[t \mapsto U_{\mathcal{A}(x,y)}(t,0)w^0 + \int_0^t U_{\mathcal{A}(x,y)}(t,\tau)p(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right] \in \mathrm{C}^\rho([0,T), E_{\bar\alpha}^s)$$

并且（如有必要，可增大 $M \geq 1$ ）

$$\|w(t) - w(\tau)\|_{E_{\bar\alpha}^s} \leq M(t-\tau)^\rho\big(\|w^0\|_{E_\alpha^s} + \|p\|_{L_\infty((0,t),E_0^s)}\big), \qquad 0 \leq \tau \leq t < T, \tag{2.20}$$

只要 $w^0 \in E_\alpha^s$ 和 $p \in L_{\infty,\,\mathrm{loc}}([0,T)\ E_0^s)$，其中我们回顾一下 $\rho = \alpha - \bar\alpha$.

(iv) 最后，我们将 (2.10)–(2.11) 对 (1.1) 的重新表述与稳定性估计式 (2.19)–(2.20) 结合起来，完成定理1.3的证明。

因此，令 $R > 0$ 满足 $\mathbb{B}_{E_\alpha}(u_*,\ R) \subset O_\alpha$，并选取足够小的 $\eta \in (0,\ \min\{r_0,\ R/(2c_{1,\ \alpha})\})$ 和 $\delta_0 \in (0,\ 1)$，使得

$$c_{\alpha,\beta}M\eta\int_0^\infty (1 + \sigma^{-\alpha} + \sigma^{-\zeta})e^{-\varepsilon\sigma/2}\,\mathrm{d}\sigma \leq \frac{1}{2}, \qquad \delta_0 \leq \frac{r(\eta)}{4M}, \tag{2.21a}$$

$$c_{\bar\alpha,\beta}M(1+2M\eta)\delta_0 \leq \frac{N}{4}, \qquad \frac{M\eta\delta_0}{\rho}\left(\sup_{\sigma>0}(\sigma^{1-\rho} + \sigma^{1-\rho-\zeta})e^{-(\omega+\varepsilon/2)\sigma}\right) \leq \frac{N}{4}, \tag{2.21b}$$

其中 $r(\eta) \in (0,\ \eta)$ 如 (ii) 中所述，且 $c_{\vartheta,\ \theta} > 0$ 表示连续嵌入 $E_\vartheta^s\ , \to E_\theta^s$ 的范数，其中 $0 \leq \theta \leq \vartheta \leq 1$ （不失一般性，假设 $c_{\vartheta,\ \theta} \geq 1$）。接着考虑 $u^0 \in \bar{\mathbb{B}}_{E_\alpha}(u_*,\ \delta) \subset O_\alpha$ ，其中 $\delta \in (0,\ R)$ 足够小，使得（回顾一下， E_1^0 上的所有范数都等价）

$$\|x^0\|_{E_1^0} = \|P(u^0 - u_*)\|_{E_1^0} \leq \|P\|_{\mathcal{L}(E_\alpha, E_1^0)}\|u^0 - u_*\|_{E_\alpha} \leq \delta_0 < r_0, \tag{2.22}$$

其中，最后一个不等式由 $0 < r(\eta) < \eta < r_0$ 和 (2.21a) 得出，并且满足（利用 (2.2)）

$$\begin{aligned}\|y^0\|_{E_\beta^s} &\leq c_{\alpha,\beta}\|y^0\|_{E_\alpha^s} = c_{\alpha,\beta}\|Q(u^0 - u_*) - \phi(P(u^0 - u_*))\|_{E_\alpha^s} \\ &\leq c_{\alpha,\beta}\|Q\|_{\mathcal{L}(E_\alpha, E_\alpha^s)}\|u^0 - u_*\|_{E_\alpha} + c_{\alpha,\beta}c_{1,\alpha}\|P(u^0 - u_*)\|_{E_1^0} \leq \delta_0.\end{aligned} \tag{2.23}$$

回顾 $u = u(\cdot; u^0)$ 表示问题（1.1）的极大解，其最大存在时间为 $t^+ = t^+(u^0)$ 由定理1.1 给出，并且(x,y) 在（2.5）中引入

满足（2.6）。由于（2.21a）、（2.22）和（2.23），我们可以选取 $T \in (0, t^+)$ 充分小，使得

$$\|x(t)\|_{E_1^0} \leq 2\delta_0 \leq r(\eta) < r_0, \qquad \|y(t)\|_{E_\beta^s} \leq c_{\alpha,\beta}\|y(t)\|_{E_\alpha^s} \leq 2\delta_0 \leq r(\eta)$$

对于 $t \in [0, T)$ 并且，鉴于 (2.6)，我们还可以进一步假设存在一个常数 $C > 0$使得

$$\|x(t) - x(\tau)\|_{E_1^0} + \|y(t) - y(\tau)\|_{E_\beta^s} \leq CT^{\bar{\alpha}-\beta}|t-\tau|^\rho \leq N|t-\tau|^\rho$$

对于 $t,\ \tau \in [0, T)$。定义

$$T_0 := \sup\left\{ T \in (0, t^+) : \begin{array}{l} \|x(t)\|_{E_1^0} \leq r(\eta) < r_0,\ \|y(t)\|_{E_\beta^s} \leq c_{\alpha,\beta}\|y(t)\|_{E_\alpha^s} \leq r(\eta), \\ \|x(t)-x(\tau)\|_{E_1^0} + \|y(t)-y(\tau)\|_{E_\beta^s} \leq N|t-\tau|^\rho,\ t,\tau \in [0,T) \end{array} \right\}.$$

那么，$T_0 \in (0,\ t^+]$ 由 [2, II.备注 2.1。2], (2.6)、(2.11)以及(iii) 可知，y由常数变易公式给出

$$y(t) = U_{\mathcal{A}(x,y)}(t,0)y^0 + \int_0^t U_{\mathcal{A}(x,y)}(t,\tau)q(x(\tau),y(\tau))\,\mathrm{d}\tau, \qquad 0 \leq t < T_0.$$

对于 $\theta \in \{\alpha,\ \zeta\}$，令 $\alpha_0 = \alpha_0(\theta)$ 由以下条件定义 $\alpha_0 := \alpha$ 若 $\theta = \alpha$ 且 $\alpha_0 := 0$ 若 $\theta = \zeta$ (回忆 $\alpha < \zeta$)。那么，根据 (2.12) 和 (2.19)，我们有

$$\begin{aligned} e^{\omega t}\|y(t)\|_{E_\theta^s} &\leq e^{\omega t}\|U_{\mathcal{A}(x,y)}(t,0)\|_{\mathcal{L}(E_\alpha^s,E_\theta^s)}\|y^0\|_{E_\alpha^s} \\ &\quad + e^{\omega t}\int_0^t \|U_{\mathcal{A}(x,y)}(t,\tau)\|_{\mathcal{L}(E_0^s,E_\theta^s)}\,\|q(x(\tau),y(\tau))\|_{E_0^s}\,\mathrm{d}\tau \\ &\leq Mt^{\alpha_0-\theta}e^{-\varepsilon t}\|y^0\|_{E_\alpha^s} + M\eta\int_0^t e^{-\varepsilon(t-\tau)}(t-\tau)^{-\theta}e^{\omega\tau}\|y(\tau)\|_{E_\beta^s}\,\mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

对于 $t \in (0,\ T_0)$。一方面，对于 $\theta = \alpha$，我们推得

$$e^{(\omega+\varepsilon/2)t}\|y(t)\|_{E_\alpha^s} \leq M\|y^0\|_{E_\alpha^s} + c_{\alpha,\beta}M\eta\Big(\int_0^\infty \sigma^{-\alpha}e^{-\varepsilon\sigma/2}\,\mathrm{d}\sigma\Big)\sup_{\tau\in[0,t]} e^{(\omega+\varepsilon/2)\tau}\|y(\tau)\|_{E_\alpha^s}$$

对于 $t \in [0, T_0)$，因此 (2.21a) 保证了

$$\|y(t)\|_{E_\alpha^s} \leq 2Me^{-(\omega+\varepsilon/2)t}\|y^0\|_{E_\alpha^s}, \qquad t \in [0, T_0). \tag{2.24}$$

因此，再次利用 (2.21a) 和 (2.23)，可得

$$\|y(t)\|_{E_\beta^s} \leq c_{\alpha,\ \beta}\|y(t)\|_{E_\alpha^s} \leq 2Mc_{\alpha,\ \beta}\|y^0\|_{E_\alpha^s} \leq 2M\delta_0 \leq \frac{r(\eta)}{2}, \qquad t \in [0, T_0)。 \tag{2.25}$$

另一方面，取 $\theta = \zeta$ 并利用 (2.24)，得到

$$e^{(\omega+\varepsilon/2)t}\|y(t)\|_{E_\zeta^s} \leq \Big[Mt^{-\zeta} + 2c_{\alpha,\beta}M^2\eta\Big(\int_0^\infty \sigma^{-\zeta}e^{-\varepsilon\sigma/2}\,\mathrm{d}\sigma\Big)\Big]\|y^0\|_{E_\alpha^s}$$

从而

$$\|y(t)\|_{E_\zeta^s} \leq M(1+t^{-\zeta})e^{-(\omega+\varepsilon/2)t}\|y^0\|_{E_\alpha^s}, \qquad t \in (0, T_0), \tag{2.26}$$

由于（2.21a）。接下来，由（2.20），并利用（2.12）、（2.23）以及（2.25），可知

$$\begin{aligned}\|y(t)-y(\tau)\|_{E^s_{\bar\alpha}} &\le M\big(\|y^0\|_{E^s_\alpha}+\|q(x,y)\|_{L_\infty((0,t),E^s_0)}\big)(t-\tau)^\rho\\ &\le M\big(\|y^0\|_{E^s_\alpha}+\eta\|y\|_{L_\infty((0,t),E^s_\beta)}\big)(t-\tau)^\rho\\ &\le M(1+2M\eta)\delta_0(t-\tau)^\rho\end{aligned}$$

对于 $0\le\tau<t<T_0$，使得 (2.21b) 蕴含

$$\|y(t)-y(\tau)\|_{E^s_\beta}\le c_{\bar\alpha,\beta}\|y(t)-y(\tau)\|_{E^s_{\bar\alpha}}\le\frac{N}{4}(t-\tau)^\rho,\qquad 0\le\tau<t<T_0. \tag{2.27}$$

现在我们转向 x满足的方程 (2.10)，并由 (2.6)、(2.14) 和 (2.26) 推得

$$\begin{aligned}\|x(t)-x(\tau)\|_{E^0_1}&\le\int_\tau^t\|S(x(\sigma),y(\sigma))\|_{E^0_1}\,\mathrm{d}\sigma\le\eta\int_\tau^t\|y(\sigma)\|_{E^s_\zeta}\,\mathrm{d}\sigma\\ &\le M\eta\|y^0\|_{E^s_\alpha}\int_\tau^t(1+\sigma^{-\zeta})e^{-(\omega+\varepsilon/2)\sigma}\,\mathrm{d}\sigma\end{aligned} \tag{2.28}$$

对于 $0\le\tau<t<T_0$。一方面，由 (2.23) 和 (2.28) 得到

$$\begin{aligned}\|x(t)-x(\tau)\|_{E^0_1}&\le M\eta\|y^0\|_{E^s_\alpha}\left(\sup_{\sigma>0}(\sigma^{1-\rho}+\sigma^{1-\rho-\zeta})e^{-(\omega+\varepsilon/2)\sigma}\right)\int_\tau^t\sigma^{\rho-1}\,\mathrm{d}\sigma\\ &\le\frac{M\eta\delta_0}{\rho}\left(\sup_{\sigma>0}(\sigma^{1-\rho}+\sigma^{1-\rho-\zeta})e^{-(\omega+\varepsilon/2)\sigma}\right)(t^\rho-\tau^\rho)\end{aligned}$$

因此，利用 (2.21b)，

$$\|x(t)-x(\tau)\|_{E^0_1}\le\frac{N}{4}(t-\tau)^\rho,\qquad 0\le\tau<t<T_0. \tag{2.29}$$

另一方面，结合 (2.28) 与 (2.21a)、(2.22) 和 (2.23)，可推得

$$\|x(t)\|_{E^0_1}\le\|x^0\|_{E^0_1}+M\eta\|y^0\|_{E^s_\alpha}\int_0^\infty(1+\sigma^{-\zeta})e^{-(\omega+\varepsilon/2)\sigma}\,\mathrm{d}\sigma$$

因此

$$\|x(t)\|_{E^0_1}\le\|x^0\|_{E^0_1}+\|y^0\|_{E^s_{\bar\alpha}}\le2\delta_0\le\frac{r(\eta)}{2},\qquad t\in[0,T_0). \tag{2.30}$$

因此，由（2.25）、（2.27）、（2.29）和（2.30）可推知 $T_0=t^+$。特别地，前面的所有估计在区间 $(0,t^+)$上均成立。由于

$$v(t)=u(t)-u_*=x(t)+\phi(x(t))+y(t),\qquad t\in[0,t^+),$$

事实上，它们蕴含（另见（2.2））

$$u([0,t^+))\subset\bar{\mathbb{B}}_{E_\alpha}(u_*,2c_{1,\alpha}r(\eta))\subset\bar{\mathbb{B}}_{E_\alpha}(u_*,R)\subset O_\alpha \tag{2.31}$$

and

$$u\in\mathrm{BUC}^\rho([0,t^+),E_{\bar\alpha}).$$

因此，轨道 $u([0,t^+))$ 在 $O_{\bar\alpha}$中相对紧。由定理 1.1，我们得出 $T_0=t^+=\infty$（因为 E_α 和 $E_{\bar\alpha}$ 中的解相同）。

我们注意到，在推导（2.30）时所使用的论证表明

$$\hat x_*:=\lim_{t\to\infty}x(t)=x^0+\int_0^\infty S(x(\sigma),y(\sigma))\,\mathrm{d}\sigma \tag{2.32}$$

在 E_1^0 中存在，因为该积分绝对收敛。事实上，$\hat{x}_* \in \mathbb{B}_{E_1^0}(0,\ r_0)$ 并且

$$\begin{aligned}\|x(t)-\hat{x}_*\|_{E_1^0} &\leq \int_t^\infty \|S(x(\sigma),y(\sigma))\|_{E_1^0}\,\mathrm{d}\sigma \leq M\eta\|y^0\|_{E_\alpha^s}\int_t^\infty (1+\sigma^{-\zeta})e^{-(\omega+\varepsilon/2)\sigma}\,\mathrm{d}\sigma\\ &\leq M\eta\|y^0\|_{E_\alpha^s}e^{-\omega t}\int_0^\infty (1+\sigma^{-\zeta})e^{-\varepsilon\sigma/2}\,\mathrm{d}\sigma \leq C\|y^0\|_{E_\alpha^s}e^{-\omega t}\end{aligned} \tag{2.33}$$

对于 $t\geq 0$ 以及某个常数 $C>0$，证明了 x的指数收敛。

此外，由于 $\hat{x}_* \in \mathbb{B}_{E_1^0}(0,r_0)$，由（2.1b）可推得

$$\hat{u}_* := u_* + \hat{x}_* + \phi(\hat{x}_*) \in \mathcal{E}, \tag{2.34}$$

并且结合（2.2）、（2.24）和（2.33），我们可得一个常数 $C>0$ 使得

$$\begin{aligned}\|u(t)-\hat{u}_*\|_{E_\alpha} &\leq c_{1,\alpha}\|x(t)-\hat{x}_*\|_{E_1^0}+c_{1,\alpha}\|\phi(x(t))-\phi(\hat{x}_*)\|_{E_1^s}+\|y(t)\|_{E_\alpha^s}\\ &\leq 2c_{1,\alpha}\|x(t)-\hat{x}_*\|_{E_1^0}+\|y(t)\|_{E_\alpha^s}\leq C\|y^0\|_{E_\alpha^s}e^{-\omega t}\end{aligned}$$

对于 $t\geq 0$。注意到 $\|y^0\|_{E_\alpha^s}\leq c\|u^0-u_*\|_{E_\alpha}$ 根据（2.22）-（2.23），这就证明了（1.11）。

最后，关于 u_*的稳定性断言，我们注意到，给定任意 $r_1>0$，可选取 $\delta>0$ 和 $2c_{1,\alpha}r(\eta)\in(0,r_1)$，使得以初值 $u^0\in\bar{\mathbb{B}}_{E_\alpha}(u_*,\delta)$ 出发的极大解 $u(\cdot;u^0)$ 全局存在，并且始终保持在 $\bar{\mathbb{B}}_{E_\alpha}(u_*,2c_{1,\alpha}r(\eta))$ 内，参见（2.31）。这就证明了定理 1.3。□

供后文使用，我们陈述如下：

注 2.1。 鉴于 (2.2)、(2.22)、(2.23)以及 (2.32)-(2.34)，存在一个常数 $C>0$使得

$$\|\hat{u}_*-u_*\|_{E_1}=\|\hat{x}_*+\phi(\hat{x}_*)\|_{E_1}\leq 2\|\hat{x}_*\|_{E_1^0}\leq C(\|x^0\|_{E_1^0}+\|y^0\|_{E_\alpha^s})\leq C\|u^0-u_*\|_{E_\alpha}$$

对于 $u^0\in\bar{\mathbb{B}}_{E_\alpha}(u_*,\delta)$。特别地，平衡态 $\hat{u}_*=\hat{u}_*(u^0)$ 在 E_α 中当 $u^0\to u_*$ 趋于 E_1 时收敛到 u_* 。

3. 定理1.6的证明

在假设 (1.1)–(1.12)–(1.13) 下研究 (1.1) 的一个自然框架是时间加权空间，它能够有效刻画 (1.1) 的解在 $t=0$ 附近的（奇异）行为。设 E 是一个巴拿赫空间，$\mu\in\mathbb{R}$，且 $T>0$。那么时间加权空间 $\mathrm{C}_\mu((0,T],E)$ 定义如下

$$\mathrm{C}_\mu((0,T],E):=\{u\in\mathrm{C}((0,T],E)\,:\,t^\mu\|u(t)\|_E\to 0 \text{ for } t\to 0\}, \tag{3.1}$$

作为赋有该范数的巴拿赫空间

$$\|u\|_{\mathrm{C}_\mu((0,T],E)}:=\sup_{t\in(0,T]}t^\mu\|u(t)\|_E.$$

定理1.6 的证明基于定理 1.3，其应用得益于以下预备结果。特别是，该结果为从以 u_*为中心且充分小的球内出发的解提供了一致估计。

命题 3.1。假设 (1.12)-(1.13)，并固定 $\nu\in(\xi,1)$ 和 $\eta\in(0,\gamma)$。那么存在常数 $r>0$ 和 $T>0$，使得 $\bar{\mathbb{B}}_{E_\alpha}(u_*,r)\subset O_\alpha$，并且对于每个 $u^0\in\bar{\mathbb{B}}_{E_\alpha}(u_*,r)$，柯西问题 (1.1) 都存在唯一解

$$u(\cdot;u^0)\in \mathrm{C}((0,T],E_1)\cap \mathrm{C}^1((0,T],E_0)\cap \mathrm{C}([0,T],O_\alpha)\cap \mathrm{C}^{\alpha-\beta}([0,T],E_\beta)\\ \cap \mathrm{C}_{\xi-\alpha}((0,T],E_\xi).$$

Mo此外，存在常数 $C>0$，使得对于 $u^0,u^1\in\bar{\mathbb{B}}_{E_\alpha}(u_*,r)$，有 t

$$\begin{aligned}&\|u(\cdot;u^0)-u(\cdot;u^1)\|_{\mathrm{C}([0,T],E_\alpha)}+\|u(\cdot;u^0)-u(\cdot;u^1)\|_{\mathrm{C}_{\xi-\alpha}((0,T],E_\xi)}\\&+\|u(\cdot;u^0)-u(\cdot;u^1)\|_{\mathrm{C}_{\nu-\alpha+\eta}((0,T],E_\nu)}\le C\|u^0-u^1\|_\alpha.\end{aligned}\tag{3.2}$$

证明。这由 [29,命题 2.1 和推论 22]得证。 □

现在我们可以证明定理1.6了。

定理 1.6 的证明。在定理 1.6 的假设下，我们固定 $0<\omega<\bar\omega<\omega_0$，以及 $\nu\in(\xi,1)$ 和 $\eta\in(0,\gamma)$。由嵌入 $E_\xi\hookrightarrow E_\beta$ 可知，假设 (1.2)（将 β 替换为 ξ，并将 α 替换为 ν）、(1.4)、(1.8) 和 (1.10)（其中 ζ 取自 $(\nu,1)$）均成立。因此，我们可以应用定理 1.3，将 ω 替换为 $\bar\omega$，从而得到常数 $\delta_1>0$ 和 $K_1\ge1$，使得对每个 $\|\bar u^0\|_{E_\nu}\le\delta_1$，方程 (1.1) 的极大解 $u=u(\cdot;\bar u^0)$ 在全局有定义，且存在 $\hat u_*=\hat u_*(\bar u^0)\in\mathrm{E}$，使得

$$\|\hat u_*-u_*\|_{E_1}\le K_1\|\bar u^0-u_*\|_{E_\nu}\tag{3.3}$$

根据注释 2.1，使得

$$\|u(t;\bar u^0)-\hat u_*\|_{E_\nu}\le K_1e^{-\bar\omega t}\|\bar u^0-u_*\|_{E_\nu},\qquad t\ge0.\tag{3.4}$$

令 $T>0$ 和 $r>0$ 为命题 3.1 中的常数，并固定任意的 $t_*\in(0,T)$。于是由 (3.2) 可推得，存在 $\delta\in(0,r)$ 及常数 $C>0$，使得对每个 $u^0\in\bar{\mathbb{B}}_{E_\alpha}(u_*,\delta)$，均有 $\bar u^0:=u(t_*;u^0)\in\bar{\mathbb{B}}_{E_\nu}(u_*,\delta_1)$，且

$$\|u(t_*;u^0)-u_*\|_{E_\nu}\le C\|u^0-u_*\|_{E_\alpha}.\tag{3.5}$$

因此，对于这样的初值 $u^0\in\bar{\mathbb{B}}_{E_\alpha}(0,\delta)$，由 $u(t;u^0)=u(t-t_*;u(t_*;u^0))$ $t\in[t_*,t^+(u^0))$（由解的唯一性）以及 $t^+(u(t_*;u^0))=\infty$ 可知，$t^+(u^0)=\infty$。此外，根据 (3.4)-(3.5)，我们得到对于 $t\ge t_*$，

$$\begin{aligned}\|u(t;u^0)-\hat u_*\|_{E_\alpha}&\le C\|u(t;u^0)-\hat u_*\|_{E_\xi}\le C\|u(t-t_*;u(t_*;u^0))-\hat u_*\|_{E_\nu}\\&\le CK_1e^{-\bar\omega(t-t_*)}\|u(t_*;u^0)-u_*\|_{E_\nu}\\&\le Ce^{-\bar\omega t}\|u^0-u_*\|_{E_\alpha}.\end{aligned}\tag{3.6}$$

此外，对于 $t\in(0,\ t_*]$，我们结合 (3.2)、(3.3) 和 (3.5) 得到

$$\begin{aligned}&\|u(t;u^0)-\hat u_*\|_{E_\alpha}+t^{\xi-\alpha}\|u(t;u^0)-\hat u_*\|_{E_\xi}\\&\le\|u(t;u^0)-u_*\|_{E_\alpha}+t^{\xi-\alpha}\|u(t;u^0)-u_*\|_{E_\xi}+C\|\hat u_*-u_*\|_{E_1}\\&\le C(\|u^0-u_*\|_{E_\alpha}+\|u(t_*;u^0)-u_*\|_{E_\nu})\\&\le C\|u^0-u_*\|_{E_\alpha}.\end{aligned}\tag{3.7}$$

由于 $\omega<\bar{\omega}$，由 (3.6) 和 (3.7) 可知，存在一个常数 $K\geq 1$，使得对于每个 $u^0\in\bar{\mathbb{B}}_{E_\alpha}(u_*,\ \delta)$，方程 $(\cdot;\ u^0)$ 的极大解 $u(\cdot;\ u^0)$ 对于 (1.1) 在全局上有定义，并且存在 $\hat{}u_*\in\mathcal{E}$ 使得

$$\|u(t;u^0)-\hat{u}_*\|_\alpha+t^{\xi-\alpha}\|u(t;u^0)-\hat{u}_*\|_\xi\leq Ke^{-\omega t}\|u^0-u_*\|_\alpha,\qquad t>0.$$

仍需证明 u_* 是稳定的。这可由前面的估计以及如下事实直接推出：存在常数 $C>0$，使得对每个 $u^0\in\mathbb{B}_{E_\alpha}(u_*,\ \delta)$，渐近极限 $\hat{}u_*=\hat{}u_*(u^0)$ 满足

$$\|\hat{u}_*-u_*\|_{E_1}\leq C\|u^0-u_*\|_{E_\alpha}$$

正如（3.7）中所证明的。至此，定理 1.6的证明完成。 □

4. Examples

本节将说明定理1.3 如何应用于具体情形，即由表面张力驱动的赫勒-肖问题和分数阶平均曲率流，见例 4.1和例 4.2。此外，在例 4.3中，我们将定理 1.6（取 $\alpha=\alpha_{\rm crit}$）应用于一个具有尺度不变性和非平凡半线性项 f的抛物型问题。

4.1. 例（分数阶平均曲率流）。由阶数为 $\sigma\in(0,\ 1)$ 的非局部分数阶平均曲率驱动的一族周期图 $\{\Sigma(u(t)):\ t\geq 0\}$ 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的演化由下式支配

$$V(t)=-H_\sigma(\Sigma(u(t))),\quad t>0,\qquad \Sigma(0)=\Sigma_0,\tag{4.1}$$

其中，$V(t)$ 表示 $\Sigma(u(t))$ 的法向速度，且

$$H_\sigma(\Sigma(u))(x,u(x)):=-\frac{2}{\sigma}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{u(x)-u(x-y)-y\cdot\nabla u(x-y)}{\left[|y|^2+(u(x)-u(x-y))^2\right]^{\frac{n+1+\sigma}{2}}}\,{\rm d}y,\qquad x\in\mathbb{R}^n,$$

是阶数为 $\sigma\in(0,\ 1)$ 的图 $\Sigma(u)=\{(x,\ u(x)):\ \ x\in\mathbb{R}^n\}$。这一几何概念是最近才在 [5]中引入的。在周期图的情形下，问题（4.1）已在 [31]中表述为一个拟线性演化问题

$$u'=A(u)u,\quad t>0,\qquad u(0)=u^0,\tag{4.2}$$

其中

$$A(u)v(x):=\frac{2}{\sigma}(1+|\nabla u|^2)^{1/2}(x)\int_{\mathbb{R}^n}\frac{v(x)-v(x-y)-y\cdot\nabla v(x-y)}{\left[|y|^2+(u(x)-u(x-y))^2\right]^{\frac{n+1+\sigma}{2}}}\,{\rm d}y,\qquad x\in\mathbb{R}^n.$$

对于（4.2），一个合适的分析框架是小 Hölder 空间 $\mathrm{h}^s(\mathbb{T}^n)$，$s\geq 0$。这些空间定义为经典 Hölder 空间 $\mathrm{C}^s(\mathbb{T}^n)$ 中 $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ 的闭包。这里，$\mathrm{C}^s(\mathbb{T}^n)$ 表示定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的巴拿赫空间，其元素在每个变量上均为 2π-周期函数，并且具有阶数为 $[s]$ 的（$s-[s]$）- Hölder 连续导数：$=\max\{k\in\mathbb{N}:\ \ k\leq s\}$。此外，$\mathrm{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ 是所有满足 $s\geq 0$ 的 $\mathrm{C}^s(\mathbb{T}^n)$ 的交集。

正如 [31] 通过尺度论证所示，空间 $\mathrm{h}^1(\mathbb{T}^n)=\mathrm{C}^1(\mathbb{T}^n)$ 可被视为（4.2）的一个不变空间。此外，[31] 还证明了问题（4.2）在次临界空间 $\mathrm{h}^{1+\vartheta}(\mathbb{T}^n)$ 中具有局部适定性，其中 $\vartheta\in(0,1)$ 可任意接近 0。此外，在图的设定下，允许函数具有线性增长且其梯度属于 $\mathrm{C}^\vartheta(\mathbb{R}^n)$，$\vartheta>\sigma$，局部适定性最近也已在 [3] 中得到证明。

关于（4.2）中平衡态的稳定性性质，我们注意到，平稳解恰好是常值函数 [3,31]，，它们构成一维线性流形

$$\mathcal{E} = \mathbb{R}. \tag{4.3}$$

我们指出，对于（4.2），是否存在流不变量并不明确；尤其是，积分平均值

$$\langle u\rangle := \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{T}^n} u\,\mathrm{d}x$$

是否在流作用下守恒。这使得稳定性分析更加复杂。因此，我们为此采用定理 1.3 。

定理 4.1。 任取 $\sigma,\vartheta\in(0,1)$，并选择 $\eta\in(0,1)$ 使得

$$\max\{\sigma,\vartheta\} < \eta < \sigma+\vartheta. \tag{4.4}$$

那么，给定 $u^0\in \mathrm{h}^{1+\vartheta}(\mathbb{T}^n)$，存在唯一极大解 $u=u(\cdot;u^0)$ 满足 (4.2)，并且

$$u\in \mathrm{C}\big([0,t^+),\mathrm{h}^{1+\vartheta}(\mathbb{T}^n)\big)\cap \mathrm{C}\big((0,t^+),\mathrm{h}^{1+\eta}(\mathbb{T}^n)\big)\cap \mathrm{C}^1\big((0,t^+),\mathrm{h}^{\eta-\sigma}(\mathbb{T}^n)\big), \tag{4.5}$$

其中 $t^+=t^+(u^0)\in(0,\infty]$ 表示最大存在时间。

此外，每个常数都是 $\mathrm{h}^{1+\vartheta}(\mathbb{T}^n)$ 中的稳定平衡态。此外，存在一个常数 $\omega_0>0$，并且对每个 $\omega\in(0,\omega_0)$，还存在常数 $\delta>0$ 和 $K\geq 1$，使得对每个满足

$$\|u^0-\langle u^0\rangle\|_{\mathrm{h}^{1+\vartheta}}\leq\delta,$$

the 极大解 $u=u(\cdot;u^0)$ 在全局上有定义，并且存在 $\hat{}u_*\in\mathbb{R}$ 使得

$$\|u(t)-\hat{u}_*\|_{\mathrm{h}^{1+\vartheta}}\leq Ke^{-\omega t}\|u^0-\langle u^0\rangle\|_{\mathrm{h}^{1+\vartheta}},\qquad t\geq 0. \tag{4.6}$$

证明。 方程 (4.2) 在类 (4.5) 中的局部适定性，由应用 [1,30] 中的拟线性理论可得；这是基于该性质（见 [31, 方程 (1.6)]）

$$A\in \mathrm{C}^\infty\big(\mathrm{h}^{1+\vartheta}(\mathbb{T}^n),\mathcal{H}(\mathrm{h}^{1+\eta}(\mathbb{T}^n),\mathrm{h}^{\eta-\sigma}(\mathbb{T}^n))\big),\qquad \max\{\sigma,\vartheta\}<\eta<\sigma+\vartheta, \tag{4.7}$$

以及小 Hölder 空间在连续插值下保持稳定这一事实，即

$$(\mathrm{h}^{s_1}(\mathbb{T}^n),\mathrm{h}^{s_2}(\mathbb{T}^n))^0_{\theta,\infty}=\mathrm{h}^{(1-\theta)s_1+\theta s_2}(\mathbb{T}^n)$$

对满足 $(1-\theta)s_1+\theta s_2\notin\mathbb{N}$ 的 $0\leq s_1<s_2$，其中 $(\cdot,\cdot)^0_{\theta,\infty}$ 是指数为 $\theta\in(0,1)$ 的连续插值函子，见 [11]。详细内容参见 [31] 。

接下来，我们转而讨论（4.6）中所述的指数收敛。为此，我们对（4.2）进行适当改写。首先注意到，我们可以将讨论限制在平衡态 $u_*=0$，因为

$$u(\cdot;u^0+c)=u(\cdot;u^0)+c,\qquad c\in\mathbb{R},\ u^0\in\mathrm{h}^{1+\vartheta}(\mathbb{T}^n), \tag{4.8}$$

这是以下事实的推论：

$$A(u+c_1)[v+c_2]=A(u)[v],\qquad c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

设 $\sigma,\vartheta,\eta\in(0,1)$ 满足 (4.4)，并定义 $E_0:=\mathrm{h}^{\eta-\sigma}(\mathbb{T}^n)$ 和 $E_1:=\mathrm{h}^{1+\eta}(\mathbb{T}^n)$。选取指数 $\vartheta'\in(\eta-\sigma,\vartheta)$ 和 $\eta'\in(\max\{\vartheta,\sigma\},\eta)$，由 (4.4) 可推得

$$\max\{\sigma,\vartheta'\}\leq\max\{\sigma,\vartheta\}<\eta'<\eta<\sigma+\vartheta'<\sigma+\vartheta. \tag{4.9}$$

因此，令

$$0<\beta:=1-\frac{\eta-\vartheta'}{1+\sigma}<\alpha:=1-\frac{\eta-\vartheta}{1+\sigma}<\zeta:=1-\frac{\eta-\eta'}{1+\sigma}<1,$$

这由（4.1），结合 $E_\theta:=(E_0,\ E_1)_{\theta,\ \infty}^0$ 对于 $\theta\in[0,1]$，可得

$$E_\zeta=\mathrm{h}^{1+\eta'}(\mathbb{T}^n)\hookrightarrow E_\alpha=\mathrm{h}^{1+\vartheta}(\mathbb{T}^n)\hookrightarrow E_\beta=\mathrm{h}^{1+\vartheta'}(\mathbb{T}^n).$$

这与（4.7）保证假设（1.2）成立。此外，由（4.3）可知，假设（1.4）也成立。

接下来，我们考虑线性化算子 $A_*(0)=A(0)\in\mathcal{L}(E_1,\ E_0)$，它是符号为 $m(k)=-\omega_0|k|^{1+\sigma},\ k\in\mathbb{Z}$ 的傅里叶乘子，其中 $\omega_0>0$ 是一个正常数，见 [31, 第 4] 节。特别地，$A_*(0)$的核是常值函数，0是 $A_*(0)$ 的半单特征值，且

$$\sigma(A_*(0))\setminus\{0\}=\{-\omega_0|k|^{1+\sigma}\ :\ k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\}\subset(-\infty,-\omega_0],$$

因此（1.8）也成立。

最后，为了验证假设（1.10），我们注意到，与谱集 $\{0\}$ 对应的投影 $A_*(0)$ 由下式给出

$$Pu:=\langle u\rangle=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{T}^n}u\,\mathrm{d}x,\qquad u\in E_0.$$

此外，鉴于（4.7）和（4.9），我们还可得

$$A\in\mathrm{C}^\infty(\mathrm{h}^{1+\vartheta'}(\mathbb{T}^n),\mathcal{H}(\mathrm{h}^{1+\eta'}(\mathbb{T}^n),\mathrm{h}^{\eta'-\sigma}(\mathbb{T}^n))).$$

因此，令 $F:=\mathrm{h}^{\eta'-\sigma}(\mathbb{T}^n)$ 和 $G=E_\zeta:=\mathrm{h}^{1+\eta'}(\mathbb{T}^n)$，并选取 O_β 为 0 在 $E_\beta=\mathrm{h}^{1+\vartheta'}(\mathbb{T}^n)$中的一个充分小邻域，则由此性质可知（1.10）成立（其中 $P\in\mathcal{L}(F)$ 如上所定义）。

因此，我们可以将定理 1.3 应用于演化问题（4.2），并得出结论：0 （因此其他所有常数解也）是（4.2）的稳定平衡态。此外，给定任意 $\omega\in(0,\omega_0)$，存在常数 $\delta>0$ 和 $K\geq1$，使得对每个 $u^0\in\mathbb{B}_{E_\alpha}(0,\delta)$，（$u(\cdot;u^0)$ 关于（4.2）的极大解在全局上有定义，并且存在 $\hat{}u_*\in\mathbb{R}$ 使得

$$\|u(t;u^0)-\hat{u}_*\|_{E_\alpha}\leq Ke^{-\omega t}\|u^0\|_{E_\alpha},\qquad t\geq0.$$

估计（4.6）现在可由该估计和性质（4.8）直接推出。□

指数收敛（4.6）也已在 [31,定理 1。3]中通过直接证明得出，该证明基于 [30,定理 1。3]中的线性化稳定性原理。不过，本文给出的证明技术性要低得多。关于通过能量方法使 $\mathrm{C}^{1+\vartheta}(\mathbb{T}^n)$（其中 $\vartheta>\sigma$）中的有界整体解收敛至平坦图像，参见 [8]。

如上文证明所示，由于 (1.10) 中参数的选择具有给定的自由度，验证过程相当简单。也就是说，这是因为拟线性部分在一系列插值空间上具有生成性质。值得指出的是，这是以下一般观察的一个特例，其中 (4.10) 反映了 (4.7) 的情形：

命题 4.2。 考虑一对稠密且紧嵌入的巴拿赫对 $\mathsf{F}_1 \hookrightarrow \mathsf{F}_0$，并对任意可容许插值函子 $(\cdot,\cdot)_\theta$，其中 $\theta \in [0,1]$，令 $\mathsf{F}_\theta := (\mathsf{F}_0, \mathsf{F}_1)_\theta$。固定

$$0 \le \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \theta_4 < \theta_5 \le 1, \tag{4.10a}$$

令 $\mathsf{O}^{\mathsf{F}_{\theta_2}}$ 是 F_{θ_2} 中的开集，并设 $\mathsf{O}^{\mathsf{F}_{\theta_3}} := \mathsf{O}^{\mathsf{F}_{\theta_2}} \cap \mathsf{F}_{\theta_3}$。假设

$$\mathsf{A} \in \mathrm{C}^1\big(\mathsf{O}_{\mathsf{F}_{\theta_3}}, \mathcal{H}(\mathsf{F}_{\theta_5}, \mathsf{F}_{\theta_1})\big) \cap \mathrm{C}^1\big(\mathsf{O}_{\mathsf{F}_{\theta_2}}, \mathcal{H}(\mathsf{F}_{\theta_4}, \mathsf{F}_{\theta_0})\big) \tag{4.10b}$$

and

$$\mathsf{f} \in \mathrm{C}^1\big(\mathsf{O}_{\mathsf{F}_{\theta_3}}, \mathsf{F}_{\theta_1}\big). \tag{4.11}$$

令 $u_* \in \mathsf{F}_{\theta_5} \cap \mathsf{O}^{\mathsf{F}_{\theta_2}}$，设

$$\mathsf{A}_* := \mathsf{A}(u_*) + (\partial \mathsf{A}(u_*)[\cdot])u_* + \partial \mathsf{f}(u_*) \in \mathcal{H}(\mathsf{F}_{\theta_5}, \mathsf{F}_{\theta_1}) \cap \mathcal{H}(\mathsf{F}_{\theta_4}, \mathsf{F}_{\theta_0}), \tag{4.12}$$

并假设 0 是 $\mathsf{A}_* \in L(\mathsf{F}_{\theta_5}, \mathsf{F}_{\theta_1})$ 的半单特征值。那么，0 也是 $\mathsf{A}_* \in L(\mathsf{F}_{\theta_4}, \mathsf{F}_{\theta_0})$ 的半单特征值。

若 $P \in L(F_{\theta_0}) \cap L(F_{\theta_1})$ 表示对应于谱集 $\{0\}$、投影到 $\ker(A_*)$ 上的谱投影，则 *(1.10)* 对于 $(E_0, E_1) = (F_{\theta_1}, F_{\theta_5})$ 以及 $(F, G) = (F_{\theta_0}, F_{\theta_4})$ 均成立。

证明。 我们首先注意到

$$\mathsf{A}(u_*) \in \mathcal{H}(\mathsf{F}_{\theta_5}, \mathsf{F}_{\theta_1}) \cap \mathcal{H}(\mathsf{F}_{\theta_4}, \mathsf{F}_{\theta_0}), \qquad (\partial \mathsf{A}(u_*)[\cdot])u_* + \partial \mathsf{f}(u_*) \in \mathcal{L}(\mathsf{F}_{\theta_3}, \mathsf{F}_{\theta_1}),$$

因此，近似重迭性质 [2,I.Remarks2.11.2(a)]连同（4.10a）以及扰动结果 [2,I.Theorem1.3.1 (ii)]可推出（4.12）。

接下来，由于 0 是 $\mathsf{A}_* \in \mathcal{L}(\mathsf{F}_{\theta_5},\mathsf{F}_{\theta_1})$的半单特征值，根据 [27, 命题 A.2.2] 可知，0 是 $\lambda \mapsto (\lambda - \mathsf{A}_*)^{-1}$ 的单极点（视其为到 (F_{θ_1})的映射），或者等价地，

$$0 = \mathsf{A}_* \mathsf{P} \in \mathcal{L}(\mathsf{F}_{\theta_1}) \tag{4.13}$$

根据 [27, 命题 A.2.1]。注意到 $\mathsf{A}_* \in \mathcal{L}(\mathsf{F}_{\theta_5},\mathsf{F}_{\theta_1})$ 和 $\mathsf{A}_* \in \mathcal{L}(\mathsf{F}_{\theta_4},\mathsf{F}_{\theta_0})$ 都具有紧预解式；由于它们的预解集仅由特征值组成，因此二者的预解集相同。因此，0 也是 $\mathsf{A}_* \in \mathcal{L}(\mathsf{F}_{\theta_4},\mathsf{F}_{\theta_0})$ 的孤立特征值，从而

$$\mathsf{P} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (\lambda - \mathsf{A}_*)^{-1} \, \mathrm{d}\lambda \in \mathcal{L}(\mathsf{F}_{\theta_0}) \cap \mathcal{L}(\mathsf{F}_{\theta_1}),$$

其中 Γ 是一条绕 0 的预解集曲线，见 [27,附录 A]。由于 F_{θ_1} 在 F_{θ_0} 中稠密，由 (4.13) 可知 $0 = \mathsf{A}_*\mathsf{P} \in \mathrm{L}(\mathsf{F}_{\theta_0})$，因此根据 [27, 命题 A.2.2]，$0$ 是 $\mathsf{A}_* \in \mathrm{L}(\mathsf{F}_{\theta_4},\mathsf{F}_{\theta_0})$ 的半单特征值。

另请注意，由 [27, 命题 A.2.2] 可知

$$\mathsf{P}(\mathsf{F}_{\theta_0}) = \ker\Big(\mathsf{A}_*\big|_{\mathcal{L}(\mathsf{F}_{\theta_4},\mathsf{F}_{\theta_0})}\Big), \qquad \mathsf{P}(\mathsf{F}_{\theta_1}) = \ker\Big(\mathsf{A}_*\big|_{\mathcal{L}(\mathsf{F}_{\theta_5},\mathsf{F}_{\theta_1})}\Big).$$

为确定这些核，设 $x \in \mathrm{F}_{\theta_4}$ 满足 $\mathrm{A}_* x = 0$。那么对于任意 $\omega \in \Gamma$，都有 $(\omega - \mathrm{A}_*) x = \omega x \in \mathrm{F}_{\theta_1}$，这意味着 $x \in \mathrm{F}_{\theta_5}$。因此，这些核相同，故 $\mathrm{P}(\mathrm{F}_{\theta_0}) = \mathrm{P}(\mathrm{F}_{\theta_1})$。这证明了 (1.10a)，而 (1.10b) 则直接由 (4.10b) 得出。命题 4.2 的证明至此完成。□

在命题 4.2 中，可以将要求 $\mathrm{F}_1 \hookrightarrow \mathrm{F}_0$ 是紧 嵌入替换为假设：0 也是 $\mathrm{A}_* \in \mathcal{L}(\mathrm{F}_{\theta_4},\mathrm{F}_{\theta_1})$ 的孤立特征值。

我们还指出，在应用命题 P时，具体例子中并不需要显式计算投影4.2，参见例4.3。

4.2. **例（毛细作用驱动的赫尔-肖问题）**。毛细作用驱动的赫尔-肖问题 [20] 描述了不可压缩流体团在两块平行板之间的狭窄通道内的二维运动。设$\Omega(t) \subset \mathbb{R}^2$ 为时刻 $t \geq 0$ 流体所占据的有界区域，并设 $\Gamma(t) := \partial\Omega(t)$ 为其边界。于是，其演化由以下系统支配

$$\left.\begin{aligned} \Delta u(t) &= 0 && \text{in } \Omega(t), \\ u(t) &= \kappa_{\Gamma(t)} && \text{on } \Gamma(t), \\ V(t) &= -\partial_{\mathrm{n}_{\Gamma(t)}} u(t) && \text{on } \Gamma(t) \end{aligned}\right\} \tag{4.14a}$$

对于 $t > 0$。这里，$u(t)$ 表示流体压力。假设速度场满足达西定律 [13]，并利用不可压缩性将其从方程组中消去。此外，$V(t)$ 表示 $\Gamma(t)$的法向速度，$\mathrm{n}^{\Gamma(t)}$ 表示其外单位法向量，而 $\kappa_{\Gamma(t)}$ 表示其曲率。在 (4.14a) 中，所有材料参数均归一化为1。此外，我们施加初始条件

$$\Omega(0) = \Omega_0. \tag{4.14b}$$

流动 (4.14) 的一个重要特征是，它同时保持流体域的面积和质心不变，即，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\Omega(t)| = -\int_{\Gamma(t)} \partial_{\mathrm{n}_{\Gamma(t)}} u(t)\, \mathrm{d}\Gamma = 0, \tag{4.15}$$

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega(t)} z\, \mathrm{d}z = \int_{\Gamma(t)} z\partial_{\mathrm{n}_{\Gamma(t)}} u(t)\, \mathrm{d}\Gamma = \int_{\Gamma(t)} u(t)\mathrm{n}_{\Gamma(t)}\, \mathrm{d}\Gamma = \int_{\Gamma(t)} \kappa_{\Gamma(t)}\mathrm{n}_{\Gamma(t)}\, \mathrm{d}\Gamma = 0, \tag{4.16}$$

其中 $z = (x, y)$ 是 $\mathbb{R}^2$中的变量；例如参见 [33, 35]。通过最大值原理，可以将 (4.14) 的平稳解识别为一个三维光滑流形 $\mathcal{E}$，它仅由圆组成（半径和圆心各不相同）。

为研究（4.14）的圆形平衡态以及相关几何自由边界问题的稳定性，已发展出一系列广泛的分析技术。对于两相赫尔-肖（穆斯卡特）情形，[9] 借助复解析方法并结合能量估计，证明了小解析扰动收敛到圆。基于中心流形方法，在赫尔德型框架中得到了稳定性结果：[16] 在穆林斯-塞克尔卡问题的背景下处理了小 Hölder 空间 $\mathrm{h}^{2+\alpha}(\Sigma)$ 中球面的扰动（其中 Σ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的球面，$n \geq 2$），而 [15]将该方法用于正则性类 $\mathrm{h}^{4+\alpha}(\mathbb{T})$ 中的非牛顿赫尔-肖流。在穆林斯-塞克尔卡问题的框架下，[37, 38] 利用基于 L_p–极大正则性的广义线性化稳定性原理，证明了 $W_p^{4-4/p}(\Sigma) \to \mathrm{C}^2(\Sigma)$，$p > n + 2$ 中扰动的指数稳定性。环面 $\mathbb{T}$ 上（临界）维纳空间中穆斯卡特气泡的稳定性在 [17, 18] 中借助位势理论与能量方法得到了讨论。

现在我们证明，方程（4.14）的平衡态稳定性可以在贝塞尔势空间尺度 $H^r(\mathbb{T})$ 上的定理 $\mathbb{T}$ 1.3 推导得出，该框架具有（几乎）最优正则性。具体而言，利用尺度不变性，可以确定 $r = 3/2$ 是（4.14）在贝塞尔势空间尺度 [33]中的临界指数。

为做好铺垫，我们引入

$$\mathcal{V}_r := \{\rho \in H^r(\mathbb{T}) : \rho > 0\}, \qquad r \in (3/2, 2],$$

并对给定的函数 $\rho \in \mathcal{V}_r$，定义周期曲线

$$\Gamma_\rho := \{\rho(\tau)\, e^{i\tau} : \tau \in \mathbb{R}\}$$

包围一个有界星形区域$\Omega_\rho \subset \mathbb{R}^2$。假设$\Omega(t) = \Omega_{\rho(t)}$ 对于 $t > 0$并利用位势理论和调和分析工具，将演化问题（4.14）在 [33] 中重新表述为关于 ρ 的如下形式的拟线性问题：

$$\rho' = A(\rho)\rho, \quad t > 0, \qquad \rho(0) = \rho^0, \tag{4.17}$$

其中

$$A \in \mathrm{C}^\infty(\mathcal{V}_r,\, \mathcal{L}(H^{r+1}(\mathbb{T}),\, H^{r-2}(\mathbb{T}))), \qquad r \in (3/2, 2]. \tag{4.18}$$

聚焦于半径为1、以原点为中心的圆的稳定性，也就是定常解 $\rho_* = 1$ (类似的论证可得出，任意半径为 $r > 0$ 且以 $z \in \mathbb{R}^2$为中心的圆都具有指数稳定性），鉴于不变量（4.15）–（4.16），自然要考察满足以下恒等式的解的渐近行为：

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\rho^2 - 1)\, \mathrm{d}s = 0, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \rho^3 \cos s\, \mathrm{d}s = \int_{-\pi}^{\pi} \rho^3 \sin s\, \mathrm{d}s = 0, \tag{4.19}$$

这恰好表示流体团的面积为 π （第一个恒等式），且其质心位于(0，0）（第二和第三个恒等式）。应用定理1.3 可得如下结果：

定理4.3。 设 $3/2 < \bar{r} < r < 2$。那么问题 (4.17) 对每个 $\rho^0 \in \mathcal{V}_r$ 都有唯一极大解 $\rho = \rho(\cdot; \rho^0)$，使得

$$\rho \in \mathrm{C}([0, t^+), \mathcal{V}_r) \cap \mathrm{C}((0, t^+), H^{\bar{r}+1}(\mathbb{T})) \cap \mathrm{C}^1((0, t^+), H^{\bar{r}-2}(\mathbb{T})) \tag{4.20}$$

并且，对某个 $\eta \in (0,\ (r - \bar{r})/3]$,

$$\rho \in \mathrm{C}^\eta([0, t^+), H^{\bar{r}}(\mathbb{T})), \tag{4.21}$$

其中， $t^+ = t^+(\rho^0) > 0$ 是该解的最大存在时间。

此外， $\rho_* = 1$ 是 $H^r(\mathbb{T})$中的稳定平衡态；对于任意给定的 $\omega \in (0,\ 6)$，存在常数 $\delta > 0$和 $K \geq 1$，使得对每个满足 $\rho^0 \in \mathbb{B}_{H^r}(1,\ \delta)$条件 (4.19)的 $\rho(\cdot; \rho^0)$，问题 的 (4.17) 极大解在全局上有定义，并且

$$\|\rho(t; \rho^0) - 1\|_{H^r} \leq K e^{-\omega t} \|\rho^0 - 1\|_{H^r}, \qquad t \geq 0. \tag{4.22}$$

证明。 (4.17)的适定性已在 [33,定理1。1]中得到证明，该证明基于（4.18）和抽象拟线性抛物理论（见定理1.1）。此处省略细节。

至于稳定性陈述，我们令 $E_0 := H^{\bar{r}-2}(\mathbb{T})$ 以及 $E_1 := H^{\bar{r}+1}(\mathbb{T})$，并选取

$$0 < \beta := \frac{2}{3} < \alpha := \frac{2 + r - \bar{r}}{3} < \zeta := \frac{3 + r' - \bar{r}}{3} < 1 \qquad \text{with} \qquad 3/2 < r' < \bar{r} < r < 2.$$

我们回顾插值性质

$$[H^{r_0}(\mathbb{T}), H^{r_1}(\mathbb{T})]_\theta = H^{(1-\theta)r_0 + \theta r_1}(\mathbb{T}), \qquad \theta \in (0,1),\ -\infty \leq r_0 \leq r_1 < \infty, \tag{4.23}$$

其中 $[\cdot,\ \cdot]_\theta$指指数为 $\theta \in$（0，1）的复插值函子。令$E_\theta := [E_0, E_1]_\theta$，对 $\theta \in [0,1]$，我们由（4.23）推得

$$E_\zeta = H^{1+r'}(\mathbb{T}) \hookrightarrow E_\alpha = H^r(\mathbb{T}) \hookrightarrow E_\beta = H^{\bar{r}}(\mathbb{T}),$$

并且（4.18）保证了 $\Phi \in \mathrm{C}^\infty(O_\beta,\ \mathcal{L}(E_1,\ E_0))$ 其中 $O_\beta := \mathcal{V}_{\bar{r}}$。因此，我们验证了假设（1.2）。

关于单位圆附近的平衡点集，我们沿用 [16] 并求解方程

$$|\rho e^{i\tau}-(a,b)|^2=r^2$$

当 $\rho\in(0,\infty)$ 时。因此，对于足够小的邻域 U 中的 (a,b,r)，其中 0 位于 $\mathbb{R}^3$ 中，以 (a,b) 为圆心、$1+r$ 为半径的圆与曲线 Γ_ρ 重合，其中 ρ 由下式给出

$$\rho=a\cos+b\sin+\sqrt{(a\cos+b\sin)^2+(1+r)^2-a^2-b^2}=:\Psi(a,b,r)\in E_1.$$

则 $\Psi\in C^\infty(U,E_1)$ 满足 $\Psi(0)=1$，并且

$$\mathrm{rg}(\partial\Psi(0))=\mathrm{span}\{1,\sin,\cos\},\tag{4.24}$$

这表明 (1.4) 成立。

为验证 (1.8)，注意由 [33,第 5]节可知

$$A_*(0)=A(1)=H\circ\Big(\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}\tau^3}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\Big),$$

其中 H 表示周期希尔伯特变换。特别地，$A_*(0)\in\mathcal{L}(E_1,E_0)$ 是一个符号为 $m(k):=|k|(1-|k|^2)$，$k\in\mathbb{Z}$ 的傅里叶乘子。也就是说，

$$A_*(0)\rho=\sum_{k\in\mathbb{Z}}m(k)a_ke^{ik\tau},\qquad \rho=\sum_{k\in\mathbb{Z}}a_ke^{ik\tau}\in E_1.$$

因此，

$$\sigma(A_*(0))=\{|k|(1-|k|^2)\,:\,k\in\mathbb{Z}\}$$

仅由孤立特征值组成。结合（4.24），即可验证（1.8）。我们还注意到 $-\omega_0=\sup\{|k|(1-|k|^2):|k|\geq 2\}=-6$。

最后，关于定理 1.3 的最后一个假设（1.10），我们注意到，对应于 P 的谱集 $\{0\}$ 的投影 $A_*(0)$ 由下式给出：

$$P\rho=\sum_{|k|\leq 1}a_ke^{ik\tau},\qquad \rho=\sum_{k\in\mathbb{Z}}a_ke^{ik\tau}\in E_1.$$

因此，令 $G:=E_\zeta=H^{1+r'}(\mathbb{T})$，并令 $F=H^{r'-2}(\mathbb{T})$，由（4.18）（将 r 替换为 r'）可知，适当减小 O_β 后，（1.10）成立。

因此，我们可以将定理 1.3 应用于（4.17），从而证明平衡态 $\rho_*=1$ 的稳定性，并利用（4.19）得到所需的估计（4.22）。□

收敛性（4.22）也已通过应用一个抽象稳定性结果 [33, 定理 1。4] 并利用流不变量（4.15）–（4.16）得以证明。不过，本文给出的证明要简短得多，技术性也较低。我们指出，在这个例子中，假设（1.10）也可由命题 4.2结合（4.18）推出。

4.3. **例（具有尺度不变性的拟线性问题）**。在本例中，我们将把定理 1.6 应用于拟线性演化方程 [42,43]

$$\partial_t u=\mathrm{div}(a(u)\nabla u)+|\nabla u|^\kappa\qquad \text{in }\Omega,\ t>0,\tag{4.25a}$$

满足齐次诺伊曼边界条件

$$\partial_\nu u=0\qquad \text{on }\partial\Omega,\ t>0,\tag{4.25b}$$

以及初始条件

$$u(0) = u^0 \qquad \text{in } \Omega, \tag{4.25c}$$

其中 $\kappa > 3$, $a \in \mathrm{C}^{3-}(\mathbb{R})$ 是一个严格正函数，且 $u^0 : \Omega \to \mathbb{R}$ 是光滑有界区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上的给定函数，并满足 $n \geq 1$。对于 $p \in (1, \infty)$，我们令

$$H^{2\theta}_{p,N}(\Omega) := \begin{cases} \{u \in H^{2\theta}_p(\Omega) : \partial_\nu u = 0 \text{ on } \partial\Omega\}, & 1 + \frac{1}{p} < 2\theta \leq 2, \\ H^{2\theta}_p(\Omega), & -1 + \frac{1}{p} < 2\theta < 1 + \frac{1}{p}, \end{cases}$$

并注意到，取 a 为常数并运用尺度不变性论证，空间 $H^{s_c}_{p,N}(\Omega)$ 在

$$s_c := \frac{n}{p} + \frac{\kappa - 2}{\kappa - 1} \tag{4.26}$$

是 (4.25) 的临界空间，见 [28, 42]。(4.25) 在临界尺度不变空间中的局部适定性已在 [42, 例 2] 中讨论，随后又在 [28, 例 4]中讨论。此外，将 (4.25b) 替换为齐次狄利克雷边界条件时，(4.25) 的零解的指数稳定性（此时 0 是 (4.25a) 的唯一常数解）已在指数为 (4.26) 的相应临界贝塞尔势空间中于 [29, 例 3]中得到证明。对于齐次诺伊曼边界条件，所有常数都是 (4.25) 的平衡解，这使得稳定性分析更为复杂。下述定理据我们所知是新的，它确立了 (4.25) 的常数解在由 (4.26) 所确定的临界空间中的稳定性。为简便起见，在定理 4.4 中我们考虑在该相空间中初始时接近 $u_* = 0$ 的解的渐近行为（尽管 0 可被任意其他常数替换）。

定理 4.4。设 $\kappa > 3$、$p \in (2n, (\kappa - 1)n)$ 满足 $p \neq (n-1)(\kappa-1)$，且 $\tau \in (0, 1)$ 满足

$$\frac{1}{2} < 2\tau < 1 - \frac{n}{p}.$$

进一步设

$$0 < \bar{s} := 2\tau + \frac{n}{p} < s_c < s := 1 + \frac{n(\kappa-1)}{p\kappa} < 2 - 2\tau$$

and

$$\mu := \frac{1}{2(\kappa-1)} - \frac{n}{2p\kappa} \in (0,1), \qquad \vartheta := \frac{\kappa-2}{2(\kappa-1)} - \tau \in (0,1).$$

那么，对于任意给定的 $u^0 \in H^{s_c}_{p,N}(\Omega)$，存在唯一极大解 $u = u(\cdot; u^0)$ 满足 (4.25)，使得

$$\begin{aligned} u \in \mathrm{C}((0,t^+), H^{2-2\tau}_{p,N}(\Omega)) \cap \mathrm{C}^1((0,t^+), H^{-2\tau}_p(\Omega)) \cap \mathrm{C}([0,t^+), H^{s_c}_{p,N}(\Omega)) \\ \cap \mathrm{C}^\vartheta([0,t^+), H^{\bar{s}}_p(\Omega)) \end{aligned} \tag{4.27a}$$

and

$$\lim_{t \to 0} t^\mu \|u(t)\|_{H^s_p} = 0, \tag{4.27b}$$

其中 $t^+ := t^+(u^0) \in (0, \infty]$ 是该解的最大存在时间。

此外， $u_*=0$ 是 $H_p^{s_c}$ 中的稳定平衡态，$N(\Omega)$，并且存在 $\omega_0>0$，且对每个 $\omega\in(0,\omega_0)$，存在常数 $\delta>0$ 和 $K\geq 1$，使得对所有 $\|u^0\|_{H_p^{s_c}}\leq\delta$，解 $u=u(\cdot;u^0)$ 对于 (4.25) 均为全局定义，并且存在 $\hat{}u_*\in\mathbb{R}$ 使得

$$\|u(t;u^0)-\hat{u}_*\|_{H_p^{s_c}}+t^{\mu}\|u(t;u^0)-\hat{u}_*\|_{H_p^{s}}\leq K\,e^{-\omega t}\,\|u^0\|_{H_p^{s_c}},\qquad t>0. \tag{4.28}$$

在给出定理4.4 的证明之前，我们先说明如下内容：

注 4.5. 任意满足(4.25)的解，其积分平均值都是时间的严格递增函数，且其极限为$\hat{}u_*$ 中给出的渐近极限(4.28)。

定理*4.4*的证明。 我们仿照 [28] 中的做法，并令

$$F_0:=L_p(\Omega),\qquad F_1:=W^2_{p,N}(\Omega)=H^2_{p,N}(\Omega),$$

回顾 [1, §4]，有

$$B_0:=\Delta_N:=\Delta|_{W^2_{p,N}(\Omega)}\in\mathcal{H}(W^2_{p,N}(\Omega),L_p(\Omega)).$$

Let

$$\{(F_\theta,B_\theta)\,:\,-1\leq\theta<\infty\}$$

为由 (F_0,B_0) 生成的插值-外推尺度，以及复插值函子 $[\cdot,\cdot]_\theta$（见 [1, §6] 和 [2, §V.1]），即，

$$B_\theta\in\mathcal{H}(F_{1+\theta},F_\theta),\qquad -1\leq\theta<\infty,$$

（见 [1,定理 7.1；方程 (7.5)]）

$$F_\theta\doteq H^{2\theta}_{p,N}(\Omega),\qquad 2\theta\in\Big(-1+\frac{1}{p},2\Big]\setminus\Big\{1+\frac{1}{p}\Big\}. \tag{4.29}$$

此外，由于 Δ_N-1 具有有界虚幂（见 [2, III. 示例 4.7.3 (d)]），根据 [1, 备注 6.1 (d)]，我们可推得

$$[F_\beta,F_\alpha]_\theta\doteq F_{(1-\theta)\beta+\theta\alpha},\qquad -1\leq\beta<\alpha,\ \theta\in(0,1). \tag{4.30}$$

现在定义

$$E_\theta:=H^{2\theta-2\tau}_{p,N}(\Omega),\qquad 2\tau+1+\frac{1}{p}\neq 2\theta\in[0,2].$$

我们进一步设定 $q:=\kappa>3$ 并且

$$0<\gamma:=\tau<\beta:=\tau+\frac{\bar{s}}{2}<\alpha:=\tau+\frac{s_c}{2}<\xi:=\tau+\frac{s}{2}<1. \tag{4.31}$$

Then

$$\vartheta=\alpha-\beta,\qquad \mu=\xi-\alpha,\qquad \alpha_{\rm crit}=\frac{\kappa\xi-1-\gamma}{\kappa-1}=\alpha\in(\beta,\xi),$$

并且，注意到常数 $\bar{s}$、 s或 s_c在定理 4.4中固定的常数均不等于 $1+1/p$，我们有

$$E_\xi=H^s_{p,N}(\Omega)\hookrightarrow E_\alpha=H^{s_c}_{p,N}(\Omega)\hookrightarrow E_\beta=H^{\bar{s}}_{p,N}(\Omega)\hookrightarrow E_\gamma=L_p(\Omega).$$

（4.25）的适定性已在 [28, 示例 3] 中得到证明，方法是注意到（4.25）可以重新表述为一个拟线性演化问题

$$u'=A(u)u+f(u),\quad t>0,\qquad u(0)=u^0, \tag{4.32}$$

其中 $A\colon\ H^{\bar{s}}_{p,\,N}(\Omega)\ \to\mathcal{L}(H^{2-2\tau}_{p\,N},\,(\Omega)\,H^{-2\tau}_{p\,N},\,(\Omega))$ 定义为

$$A(u)v := \operatorname{div}(a(u)\nabla v), \qquad u \in H^{\bar{s}}_{p,N}(\Omega),\ v \in H^{2-2\tau}_{p,N}(\Omega),$$

以及 $f\colon\ H^{s}_{p,\,N}(\Omega)\ \to L_p(\Omega)$ 定义为

$$f(u) := |\nabla u|^{\kappa}, \qquad u \in H^{s}_{p,N}(\Omega).$$

关于半线性项 f，我们注意到 $H^{s-1}_{p\,N},\,(\Omega)\ \to L_{p\kappa}(\Omega)$，并且涅米茨基算子 $w \mapsto |w|^{\kappa}$ 属于 $\mathrm{C}^1(L_{p\kappa}(\Omega)\ L_p(\Omega))$，这可由基于以下估计的标准论证得到

$$\big|\,x|x|^{\alpha} - y|y|^{\alpha}\big| \le (1+\alpha)(|x|^{\alpha}+|y|^{\alpha})|x-y|, \qquad x,y\in\mathbb{R},\ \alpha>-1.$$

结合这些性质，我们立即得出

$$f \in \mathrm{C}^1(H^{s}_{p,N}(\Omega), L_p(\Omega)).$$

此外，存在一个常数 $C>0$ 使得

$$\|f(u)-f(v)\|_{L_p} \le C(\|u\|^{\kappa-1}_{H^s_p} + \|v\|_{H^s_p})^{\kappa-1}\|u-v\|_{H^s_p}, \qquad v,w\in H^{s}_{p,N}(\Omega).$$

关于拟线性项 $u\mapsto A(u)$，我们注意到，由于 $a\in\mathrm{C}^{3-}(\mathbb{R})$，类似于 [32, 引理 4.1] 中的标准论证可确保，对于每个 $r\in(0,1)$，涅米茨基算子 $u\mapsto a(u)$ 属于 $\mathrm{C}^1(L_\infty(\Omega)\cap W^r_p(\Omega)\ L_\infty(\Omega)\cap W^r_p(\Omega))$。固定 $2\varepsilon\in(0,4\tau-1)$，并回顾 [1, 方程 (5.2)–(5.6)]中的嵌入

$$H^{\bar{s}}_p(\Omega)\hookrightarrow W^{\bar{s}-\varepsilon}_p(\Omega)\hookrightarrow H^{\bar{s}-2\varepsilon}_p(\Omega)\hookrightarrow H^{1-2\tau}_p(\Omega),$$

由于 $1-2\tau>n/p$，所有这些空间关于逐点乘法都是代数。由此可知，涅米茨基算子 $u\mapsto a(u)$也属于$\mathrm{C}^1(H^{\bar{s}}_p(\Omega)\ H^{\bar{s}-2\varepsilon}_p(\Omega))$并且

$$A \in \mathrm{C}^1(H^{\bar{s}}_{p,N}(\Omega), \mathcal{L}(H^{2-2\tau}_{p,N}(\Omega), H^{-2\tau}_{p,N}(\Omega))).$$

此外，注意到对于 $u\in H^{\bar{s}}_{p,N}(\Omega)$，函数 $a(u)$位于 $H^{\bar{s}-2\varepsilon}_{p\,N},(\Omega)\ \to\mathrm{C}^{\rho}(\Omega)$中，且 $\rho=2(\tau-\varepsilon)\ -\!\!-\!\!>1-2\tau$，并且也是严格正的，我们由 [1, 定理8.5]推知 $A(u)\in\mathcal{H}(H^{2-2\tau}_{p\,N},(\Omega)H^{-2\tau}_{p\,N},(\Omega))$。因此，

$$A \in \mathrm{C}^1(H^{\bar{s}}_{p,N}(\Omega), \mathcal{H}(H^{2-2\tau}_{p,N}(\Omega), H^{-2\tau}_{p,N}(\Omega))). \tag{4.33}$$

因此，我们同样验证了（1.12）连同 $q=\kappa$ 和（1.13）。

接下来，由 (4.25a) 和 (4.25b) 可立即得出，平衡态为常数，即 $\mathcal{E}\ =\mathbb{R}$，因此 (1.4) 成立。为了验证 (1.8)，我们注意到 0 是

$$A_*(0) = A(0) = a(0)\Delta_N \in \mathcal{L}(W^2_{p,N}(\Omega), L_p(\Omega)))$$

并且，利用与命题 4.2证明中类似的论证可知，0 是 $A_*(0)\ \in\mathcal{L}(H^{2-2\tau}_{p\,N},(\Omega)H^{-2\tau}_{p\,N},(\Omega))$ 的单特征值。条件 (1.10) 随后由命题 4.2和 (4.33) 得出，其中 τ替换为某个 $\tau'\in(1/4,\tau)$。

因此，我们可以运用定理 1.6 推导出定理4.4。 □

参考文献

[1] *H. Amann*，非齐次线性与拟线性椭圆及抛物型边值问题，载于《函数空间、微分算子与非线性分析》（弗里德里希罗达，*1992*年），*Teubner-Texte Math.* 第*133*卷，*Teubner*，斯图加特，*1993*年，第*9–126*页。[2] ，《线性与拟线性抛物型问题》第一卷：抽象线性理论，数学专著丛书第*89*卷，*Birkhäuser Boston, Inc.*，波士顿，马萨诸塞州，*1995*年。[3] *A. Attiogbe*、*M. M. Fall* 和 *T. Weth*，图上的非局部平均曲率流的短时存在性与光滑性，*Math. Ann.*，*389*（*2024*年），第*3769–3807*页。[4] *C.-M. Brauner*、*J. Hulshof* 和 *A. Lunardi*，自由边界问题稳定性的一种一般方法，*J. Differential Equations*，*164*（*2000*年），第*16–48*页。[5] *L. A. Caffarelli* 和 *P. E. Souganidis*，非局部阈值动力学近似收敛至前沿传播，*Arch. Ration. Mech. Anal.*，*195*（*2010*年），第*1–23*页。[6] *J. Carr*，《中心流形理论的应用》，应用数学科学第*35*卷，*Springer-Verlag*，纽约—柏林，*1981*年。[7] *F. Cellarosi*、*A. Dutta* 和 *G. Mazzone*，巴拿赫空间中半线性演化方程解的渐近稳定性，（*https://arxiv.org/abs/2506.21437*）。[8] *A. Cesaroni* 和 *M. Novaga*，保体积分数阶平均曲率流下球的稳定性，*Adv. Calc. Var.*，*17*（*2024*年），第*503–520*页。[9] *P. Constantin* 和 *M. Pugh*，赫勒-肖问题的小初值全局解，*Nonlinearity*，*6*（*1993*年），第*393–415*页。[10] *S. Cui*，李群作用与描述肿瘤生长的自由边界问题的定常解稳定性分析，*J. Differential Equations*，*246*（*2009*年），第*1845–1882*页。[11] *G. Da Prato* 和 *P. Grisvard*，抛物型非线性抽象演化方程，*Ann. Mat. Pura Appl. (4)*，*120*（*1979*年），第*329–396*页。[12] *G. Da Prato* 和 *A. Lunardi*，巴拿赫空间中完全非线性自治抛物型方程的稳定性、不稳定性与中心流形定理，*Arch. Rational Mech. Anal.*，*101*（*1988*年），第*115–141*页。[13] *H. Darcy*，《第戎市公共喷泉》，*Dalmont*，巴黎，（*1856*年）。[14] *A.-K. Drangeid*，拟线性抛物型演化方程的线性化稳定性原理，*Nonlinear Anal.*，*13*（*1989*年），第*1091–1113*页。[15] *J. Escher*、*A.-V. Matioc* 和 *B.-V. Matioc*，斯托克斯型赫勒-肖流的经典解与稳定性结果，*Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*，*9*（*2010*年），第*325–349*页。[16] *J. Escher* 和 *G. Simonett*，穆林斯-塞克卡模型的中心流形分析，*J. Differential Equations*，*143*（*1998*年），第*267–292*页。[17] *F. Gancedo*、*E. García-Juárez*、*N. Patel* 和 *R. M. Strain*，重力不稳定穆斯卡特气泡的全局正则性，*Mem. Amer. Math. Soc.*，*292*（*2023*年），第*v*+87页。[18] *F. Gancedo*、*E. García-Juárez*、*N. Patel* 和 *R. M. Strain*，穆斯卡特气泡的非线性稳定性，*Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*，*194*（*2025*年），第*103664*页。[19] *D. Guidetti*，拟线性抛物型方程解收敛到稳态及其稳定性，*Ann. Mat. Pura Appl. (4)*，*151*（*1988*年），第*331–358*页。[20] *H. S. Hele-Shaw*，水流，*Nature*，*58*（*1898*年），第*33–36*页。[21] *D. Henry*，《半线性抛物型方程的几何理论》，数学讲义第*840*卷，*Springer-Verlag*，柏林—纽约，*1981*年。[22] *T. Hytönen*、*J. van Neerven*、*M. Veraar* 和 *L. Weis*，《巴拿赫空间分析》第三卷：调和分析与谱理论，数学及其应用成果第*76*卷。[数学及相关领域成果丛书第三辑：现代综述丛书], *Springer*，*Cham*，[2023] ©*2023*。[23] *Y. Latushkin*、*J. Prüss* 和 *R. Schnaubelt*，具有完全非线性边界条件的拟线性抛物型系统的稳定与不稳定流形，*J. Evol. Equ.*，*6*（*2006*年），第*537–576*页。[24] ，具有完全非线性边界条件的拟线性抛物型系统平衡态附近的中心流形与动力学，*Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*，*9*（*2008*年），第*595–633*页。[25] *J. LeCrone* 和 *G. Simonett*，拟线性抛物型方程与连续最大正则性，*Evol. Equ. Control Theory*，*9*（*2020*年），第*61–86*页。

[26] *A. Lunardi*，拟线性抛物型方程中的渐近指数稳定性，*Nonlinear Anal.*，*9*（*1985*年），第*563–586*页。[27] ，《抛物型问题中的解析半群与最优正则性》，非线性微分方程及其应用进展，第*16*卷，*Birkhäuser Verlag*，巴塞尔，*1995*年。[28] *B.-V. Matioc*、*L. Roberti* 和 *C. Walker*，临界空间中具有超线性非线性的拟线性抛物型方程，*J. Differential Equations*，*429*（*2025*年），第*283–317*页。[29] *B.-V. Matioc*、*L. S. Schmitz* 和 *C. Walker*，时间加权空间中拟线性演化方程的线性化稳定性原理，*Math. Nachr.*，*298*（*2025*年），第*3939–3959*页。[30] *B.-V. Matioc* 和 *C. Walker*，插值空间中拟线性演化方程的线性化稳定性原理，*Monatsh. Math.*，*191*（*2020*年），第*615–634*页。[31] ，周期图像的非局部的分数阶平均曲率流，*Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.*（*5*），*26*（*2025*年），第*91–130*页。[32] ，时间加权空间中拟线性抛物型方程的适定性，*Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*，（*https://arxiv.org/abs/2312.07974*），第*1–33*页。[33] *B.-V. Matioc* 和 *C. Walker*，毛细作用驱动的赫勒-肖问题的位势理论方法，（*https://arxiv.org/abs/2508.15491*）。[34] *A. Mielke*，拟线性抛物型方程的局部不变流形，第*21*卷，*1991*年，第*707–714*页。非线性偏微分方程的当前方向（犹他州普罗沃，*1987*年）。[35] *Q. Nie* 和 *F. R. Tian*，赫勒-肖流中的奇点，*SIAM J. Appl. Math.*，*58*（*1998*年），第*34–54*页。[36] *M. Potier-Ferry*，拟线性抛物型方程解的稳定性线性化原理。*I*，*Arch. Rational Mech. Anal.*，*77*（*1981*年），第*301–320*页。[37] *J. Prüss* 和 *G. Simonett*，《移动界面与拟线性抛物型演化方程》，数学专著第*105*卷，*Birkhäuser/Springer*，[*Cham*], 2016。[38] *J. Prüß*、*G. Simonett* 和 *R. Zacher*，拟线性抛物问题的解向平衡态收敛，*J. Differential Equations*，*246*（*2009*年），第*3902–3931*页。[39] *J. Prüss*、*G. Simonett* 和 *R. Zacher*，非线性抛物型方程的正规稳定性，*Discrete Contin. Dyn. Syst.*，（*2009*年），第*612–621*页。[40] *J. Prüss* 和 *M. Wilke*，论文《加权 L_p空间中的拟线性抛物型演化方程 *II*》的补遗 *[MR3250797]*, *J. Evol. Equ.*，*17*（*2017*年），第*1381–1388*页。[41] *J. Prüss*，L_p空间中演化方程的极大正则性，*Conf. Semin. Mat. Univ. Bari*，（*2002*年），第*1–39*页（*2003*年）。[42] *J. Prüss*、*G. Simonett* 和 *M. Wilke*，拟线性抛物型演化方程的临界空间及其应用，*J. Differential Equations*，*264*（*2018*年），第*2028–2074*页。[43] *P. Quittner* 和 *P. Souplet*，《超线性抛物型问题》，*Birkhäuser* 高级文本：巴塞尔教材。[*Birkhäuser* 高级文本：巴塞尔教材], *Birkhäuser/Springer*，*Cham*，第二版，*2019*年。《爆破、整体存在性与稳态》。[44] *G. Simonett*，拟线性反应扩散系统的中心流形，*Differential Integral Equations*，*8*（*1995*年），第*753–796*页。

数学系 ，雷根斯堡大学 ，93053 雷根斯堡 ，德国。
电子邮件地址： bogdan.matioc@ur.de

汉诺威莱布尼茨大学，应用数学研究所，韦尔芬花园1号，30167 汉诺威，德国电子邮件地址：
walker@ifam.uni-hannover.de