利用选择性状态空间模型增强可制造多层惠更斯超表面的半解析设计：第一部分——基于场的半解析综合

Sherman W. Marcus，*IEEE*终身会员，Natanel Nissan，*IEEE*学生会员，Vinay K. Killamsetty，*IEEE*会员，Ravi Yadav，*IEEE*会员，Dan Raviv，*IEEE*会员，Raja Giryes，*IEEE*高级会员，以及 Ariel Epstein，*IEEE*高级会员

arXiv:2603.03837v1 [physics.app-ph] 4 Mar 2026

摘要——**平面超表面能够深刻调控电磁散射。在微波频率下，此类器件通常由图案化金属片的多层级联结构实现，其设计往往需要耗时的全波优化。本文将最初为稀疏加载线超光栅开发的解析模型加以扩展，以准确描述嵌入标准印刷电路板（PCB）介质叠层中的密集排列耶路撒冷十字超原子。该模型能够捕捉层内及层间的近场与远场耦合，从而高效预测双极化响应。借助这一框架，我们确定了透射率高、相位由耶路撒冷十字的臂长控制的超原子（微观设计阶段）。这一“相位—臂长”查找表可用于快速综合惠更斯超表面（宏观设计阶段）；我们通过一款经全波验证、能够实现低反射波束调控的超透镜展示了这一方法。值得注意的是，我们采用了一种审慎的缩放方法，进一步扩展模型，使其能够预测宽带超原子响应。在配套论文（第二部分）中，混合机器学习方法利用这一半解析框架提升精度，无需传统的穷举式全波训练，即可在整个参数空间实现超快速逆向设计。总之，本文提出的方法——独立的半解析方案（第一部分）及其经机器学习增强的版本（第二部分）——构成了一套有效的开源工具包，可用于灵活、快速且高度准确地综合可制造的双极化透射式惠更斯超原子与超表面。**

索引词—**超表面、超原子、惠更斯超表面、Floquet-Bloch分析、超透镜**

本研究得到了以色列创新局通过其超材料联盟提供的支持。Sherman W. Marcus 和 Ariel Epstein 任职于以色列海法以色列理工学院安德鲁与厄娜·维特比电气与计算机工程学院（电子邮箱：shermanm@technion.ac.il；epsteina@technion.ac.il）。Natanel Nissan、Dan Raviv 和 Raja Giryes 任职于以色列特拉维夫特拉维夫大学电气与计算机工程学院（电子邮箱：natanel.nissan@gmail.com；raviv.dan@gmail.com；raja@tauex.tau.ac.il）。Vinay K. Killamsetty 曾任职于以色列海法以色列理工学院安德鲁与厄娜·维特比电气与计算机工程学院（电子邮箱：vinay.killamsetty@gmail.com）。Ravi Yadav 曾任职于以色列海法以色列理工学院安德鲁与厄娜·维特比电气与计算机工程学院。他现任职于冰岛雷克雅未克大学（电子邮箱：raviyadav2100@gmail.com）。这部两部分合集的第一部分和第二部分中开发并使用的代码已公开发布于 https://github.com/nati223/metamamba。

一、引言

过去几十年来，超表面（MSs）作为传统（无源或自适应）笨重光学元件和微波波束成形器件的一种新兴替代方案蓬勃发展 [1]。与其三维超材料前身一样，超表面利用紧密排列的亚波长可极化粒子（超原子），赋予所设计的复合结构先进而新颖的宏观场操控功能。与传统超材料相比，超表面近年来日益占据主导地位、受欢迎程度更高，其中一个关键原因是它们能够全面控制电磁波前，并能以亚波长表面厚度实现多种多样的波前变换 [1]。

相位梯度超表面是最早出现且至今仍得到广泛应用的超表面类别之一。该类器件所包含的超原子经过设计，具有单位透射幅度；当这些超原子沿表面平面适当排布时，其透射相位将形成一个（空间变化的）相位分布，从而在局部补偿入射波与期望散射波之间的相位差 [2]–[6]。它们能够实现异常反射和折射、极化转换以及聚焦等多种功能，此外还有许多其他功能 [7]–[10]。

通过广义薄片过渡条件（GSTCs） [11], [12] 严格处理超表面的分析与综合——该条件将表面两侧的场与均匀化表面参数形式化地联系起来——近年来已逐渐明确，这类相位梯度超表面实际上属于更一般的惠更斯超表面（HMS）类别[13]。HMS 具有共定位的电响应和磁响应，并相应地以电表面阻抗 Z_{se} 和磁表面导纳 Y_{sm}分布作为构成参数；随后，可通过适当平衡这些电磁极化率，在正入射波条件下抑制反射，从而激发相位梯度超表面响应（惠更斯条件 [14], [15]）；同时，交互强度还可作为额外的自由度，在超原子层面产生任意指定的相移 [16]–[19]。尽管早期对相应的无反射波束操控 HMS 的演示遵循了这种电响应和磁响应共定位的（或许是最自然的）表现形式，即共定位的导线和环形超原子 [11], [12] [13]，但后来研究表明，采用阻抗片的对称级联结构 Z_{se} 同样能够实现这类惠更斯超原子所需的表面特性。这种结构具有显著优势：在实现层面完全兼容传统的无过孔多层印刷电路板（PCB）配置，并可通过标准制造技术 Y_{sm}– [14], [15]，在微波频率下便捷地转化为实用器件。

（或许是最自然的）表现形式，即共定位的导线和环形超原子 [16], [18]–[20], ，后来研究表明，采用阻抗片的对称级联结构 [17], [21]同样能够实现这类惠更斯超原子所需的表面特性。这种结构具有显著优势：在实现层面完全兼容传统的无过孔多层印刷电路板（PCB）配置，并可通过标准制造技术[22]–[28]，在微波频率下便捷地转化为实用器件。

为实现此类 HMS，通常遵循标准的超表面设计流程，主要分为两个步骤。首先，在宏观设计阶段 [13]，，通过结合广义切向场连续条件（GSTCs），考察实现目标变换所需的场不连续性，从而反演出 HMS 沿线所需的表面参数分布。所得随空间变化的超表面规范可表示为前述 $Z_{se}(\vec{\rho})$ 和 $Y_{sm}(\vec{\rho})$，其中 $\vec{\rho}$ 是 HMS 上的一点[16], [18], [29]；或者等价地，表示为局部反射和/或透射系数 [17], [22], [25], [26], [30], [31]，，例如相位梯度超表面中常用的透射幅度 $|T(\vec{\rho})|$ 和相位 $\angle T(\vec{\rho})$。随后，在微观设计阶段，设计合适的超原子几何结构（由金属和介电材料构成的亚波长图案），以便在 HMS 上的每一点 $\vec{\rho}$ 局部实现这些预先规定的抽象表面参数。通常，通过探测超原子嵌入由相同超原子组成的均匀阵列时对平面波照射的响应，建立给定构型与其有效表面参数之间的对应关系，并将记录到的散射参数与局部超原子响应 [13], [22], [32]关联起来。

尽管涉及 HMS 宏观设计概念和方法的考量如今已相当成熟 [13], [16]–[18], [29], [33]–[38], ，但仍有重大障碍阻碍微观设计任务的快速执行，而这对于生成适用于实际场操控器件和应用的实体印刷电路板布局至关重要。其中一个障碍在于，设计往往依赖耗时的全波优化 [29], [37]。事实上，近年来已有研究提出使用传输线模型（TLM）解析预测阻抗片级联（最终对应多层印刷电路板超表面）的散射 [17], [21], [32], [33], [39]。尽管这类方法大幅缩短了所需的设计时间（并且往往能提供宝贵的物理洞见），但由于忽略近场层间耦合，其准确性有限 [32], [36], [40]。当电厚度相对于超原子的横向尺寸减小时，这一问题会愈发显著；超紧凑超表面中常会出现这种情况。有时，可通过将单元限制在深亚波长尺寸，或采用介电常数极大的层压板来减轻此类误差 [25], [41], ，但这会大幅限制设计与实现的可能性。克服层间耦合问题的另一种方法，是在 TLM 中引入更复杂的电路模型，以考虑各层之间的互耦 [42], [43]。然而，这些组件必须迭代更新，或满足关于阻抗片响应的某些假设，从而降低这些更准确方法的通用性，并限制其适用范围。因此，在实践中，为了恰当设计超原子，通常无法避免使用全波求解器进行优化 [32]–[36], [40]。

本文针对这些不足，提出一种半解析方案，无需在设计的微观阶段进行全波优化。该方案基于一个严格的解析模型——我们将其编入自主开发的 Matlab 程序 LAYERS 中——用于确定具有蚀刻金属图案的介电基板多层周期结构的 Floquet散射，同时考虑倏逝模和传播模、实际的导体损耗与介质损耗，以及散射体之间的所有互作用。该公式是对先前用于分析稀疏加载线超光栅散射的解析模型的扩展；在该模型中，所采用的单向导电条几乎只与横电（TE）极化相互作用 [44]–[46]。由于 PCB惠更斯超表面的微观设计阶段，主要任务是将此类物理超原子构型与其嵌入均匀周期阵列并受到法向入射平面波照射时的透射系数关联起来，因此，对该模型进行适当调整，使其能够处理亚波长周期晶格中的紧密排列单元，便可构建适用于这一任务的有效理论框架。我们此前曾在会议上介绍过这一构想的初步版本 [47]–[48]，并将其应用于单极化 HMS 设计 [49], [50],；本文首次对完整方法进行推导并作详细阐述。

值得注意的是，本文提出并阐述了两项关键扩展：实现双极化器件的综合，以及频率响应分析。这两项扩展对于推动所提出的方法走向成熟、使其适用于实际应用至关重要。前者通过将单极化电容加载导线替换为双极化耶路撒冷十字（JC）图案来实现，并对半解析方案进行适当调整，以便利用各层压板中JC的臂长作为自由度，调节多层超原子的整体响应。后者则借助一种审慎的缩放方法实现，该方法控制所有长度参数相对于波长的尺寸，包括可据以推导等效导线阻抗的JC腿长，从而能够可靠地预测超原子的传输效率和相移，不仅适用于标称频率，也适用于整个频带。

考虑到这两项扩展，本文提出的半解析方法能够针对给定的多层印刷电路板叠层和工作频率，快速生成查找表（LUT）条目，将区间 $-\pi$ 至 π 内的每个目标相移与按指定层压级联定义的耶路撒冷十字（JCs）实际布局相匹配。使用全波求解器对各个超原子设计进行验证，结果表明解析预测与仿真性能吻合良好。随后，本文构建了一个双极化HMS超透镜作为代表性案例研究，采用所设计的查找表（微观设计），并遵循典型的相位梯度方法（宏观设计），展现出显著的

效率和优异的聚焦性能。

这些结果证明了所开发方案在按需设计多功能实用型 HMSs 方面的有效性及其优势。尽管如此，对已实现算法的经验表明，对于查找表中的某些超原子，若试图满足特定的透射相移值（这需要高度谐振的超原子构型），或用户定义的 PCB 叠层中的层间距（层压厚度）非常小，则解析模型所依据的近似可能会导致有效超原子散射参数的理论预测与这些参数的全波（“真实基准”）结果之间出现偏差。在这项两部分汇编的第一部分中，我们通过直接采用查找表中这类不超过 150 个超原子的全波（CST）结果，消除了其散射参数中偶尔出现的偏差；在标准个人计算机（PC）上，每个超原子的计算只需几分钟。整个流程——利用半解析模型寻找可提供高透射率并覆盖整个 2π 相移区间的超原子属性，同时借助 CST 确定最终透射率——足以支持 HMSs 的有效宏观设计。然而，无法预先保证达到特定相移值或实现绝对最优透射率（或者达到指定的透射率值）。

因此，在这部由两部分组成的论文集的第二部分 [51] 中，我们提出了一种互补的机器学习技术（MetaMamba），以进一步提高半解析方案的精度，从而减少对事后全波验证的需求。具体而言，我们采用了一种独特的混合方法：使用快速半解析算法（第一部分）进行密集训练，同时仅通过有限次数的全波求解器运行，对选择性状态空间模型进行“微调”，使其在整个参数空间内与全波真实结果近乎完美地吻合。因此，得益于可靠的解析模型，耗时的全波仿真得以降至最低（这与电磁超表面设计中常用神经网络的典型训练流程形成对比[52]–[56]），同时又不牺牲精度。此外，

如此定型后，最终的 MetaMamba 还带来了显著的额外计算优势，能够为任意所需的透射相位和扩展的透射率范围，对此类兼容印刷电路板的多层超原子进行超快速逆向设计。因此，这一完整的两部分系列——独立的半解析方法（第一部分）和机器学习增强版本（第二部分）——构建了一套有效的开源 [57] 工程工具，用于灵活、快速且高度准确地综合透射型惠更斯超原子和超表面，而这些工具此前难以获得。

II. 理论

A. 问题表述

为了在第 I 节所述微观设计阶段中构建所需的查找表，应评估与亚波长超原子几何结构相关的透射与反射系数，当每个特定

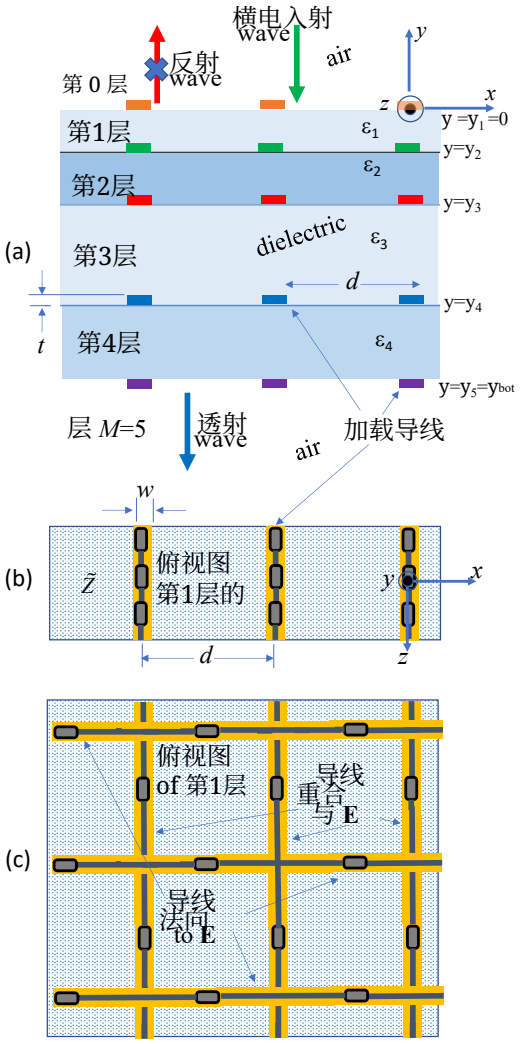


图1。(a) 在多层印刷电路板配置中，附着于层压板上的周期性电容加载导线平行阵列，受到横电（TE）极化平面波照射。消除反射传播波的目标以相应红色箭头上的叉号表示。~(b) 第1层的俯视图，显示其导线的分布阻抗 Z。图中虽将导线画成短小的离散无功元件，但模型将导线视为沿其长度具有连续分布的单位长度阻抗。对于横电极化，这些导线沿电场矢量方向排列。(c) 与(b)相同的表面，但增加了额外导线，使系统绕 y-轴具有 90° 旋转对称性。

超原子是相同超原子阵列的一部分。这需要对超原子构型进行精确描述。

考虑图1a所示的多层印刷电路板配置，其最顶面与 $x-z$平面重合。加载的铜导线以周期性排列方式蚀刻在每个介质层压板的顶面，以及最下层压板的底面。这些导线的宽度 w 相对于波长 λ较小，厚度 $t \ll w$更小，其中心横向位于 $x = 0$、 $x = \pm d$、 $x = \pm 2d$.....，其中 d 为周期（图1b）。如图所示，线阵位于各层压板之间的界面处，其中界面 n位于 $y = y_n$。该加载由分布阻抗（单位长度阻抗）表征，通过放-

置无功元件实现，这些元件沿导线布置，间距相对于 λ（非常）˜小。本文中，沿界面 n的分布阻抗 Z_n 通常用无量纲˜分布阻抗 Z_n表示，其中 $Z_n = Z_n\,(\eta/\lambda)$，且 η 为自由空间阻抗。第 n层层压板的介电常数为 ε_n，一般为复数。

该分层结构由从上方垂直入射的平面波照射。对于横电极化，电场沿 z 方向，因此入射波表示为

$$E_z^{\mathrm{inc}}(y)=E_0 e^{-iky}, \tag{1}$$

其中，$e^{-i\omega t}$ 时间依赖性被省略。由于该结构具有周期性，根据弗洛凯–布洛赫（FB）理论 [11]，场由离散的平面波谱组成。用于确定这些场的解析模型（详见附录，参见 [46]）考虑了超原子所有层中传播波与倏逝波的完全耦合，以及各介质层压板中的损耗[1]。沿反射和透射方向散射的波为：

$$E_z^{\mathrm{ref}}(x,y) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi px/d} B_p^{(0)} e^{ik_{yp}y}, y>0, \tag{2}$$

$$E_z^{\mathrm{tran}}(x,y) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi px/d} A_p^{(M)} e^{-ik_{yp}(y-y_{\mathrm{bot}})}, y<y_{\mathrm{bot}}, \tag{3}$$

其中，求和遍历整数 FB 模式编号 p，$k_{yp} = (2\pi/d)\sqrt{(d/\lambda)^2 - p^2}$ 是第 p 个模式的横向波数，而 $A_p^{(m)}$ 和 $B_p^{(m)}$ 属于未知系数集合，用于描述超原子每一层中E 和 H 场的离散谱 m。具体而言，参照（2）和（3）中的 $A_p^{(M)}$ 与 $B_p^{(0)}$，层 $m=0$ 是结构上方的最上层区域 $y>0$，而层 M是结构下方的最底层区域 $y<y_{\mathrm{bot}}$（见图1a）。通过对这些场施加所需的边界条件——考虑介电层之间的过渡、导线上感应的负载相关电流，以及切向场分量的相应不连续性[（A7）、（A8）、（A18）] ——即可通过所得的线性方程组求解这些未知系数（从而获得完整的散射场解）（详细推导见附录）。

式（2）和（3）中的部分平面波会传播，其余则会成为倏逝波，具体取决于 k_{yp} 是否为实数。传播波的数量取决于 d/λ：该比值越大，传播的 FB 波数量就越多。本文为符合传统超表面设计所依据的均匀化近似，选择足够小的 d/λ，使反射方向上仅有一个（$p=0$）波传播，该方向由反射系数 R（镜面反射）表征；同时，透射方向上也仅有一个（$p=0$）波传播，该方向由透射系数 T（直射透射）表征。由式（2）和（3）可知

$$T = A_0^{(M)}/E_0, \quad R = B_0^{(0)}/E_0. \tag{4}$$

R 和 T 均为复数；图1a中的红色向上箭头表示 $|R|\le 1$，蓝色向下箭头表示$|T|\le 1$。T 将是下文重点关注的对象。由于场解源于一种自洽设定，该设定根据欧姆定律 [(A16)、(A18)], 考虑了不同加载导线上感应的电流，因此相应求得的T 将取决于所有层中导线的阻抗：

$$T = T(Z_1, Z_2, ..., Z_N). \tag{5}$$

对于给定超原子构型，求解式（5）是附录中所述解析模型的主要目的。该解析模型已在 Matlab 中编写为 LAYERS，便于为目标微观 HMS 设计编制合适的查找表（II-D 节、III-B 节）。

B. 双极化

迄今为止，我们一直在考虑由简单加载导线构成的多层超原子（图1b），这与标准的光栅分析和综合形式体系 [46]相兼容。现在，我们将把讨论扩展到更复杂的导体走线几何结构，从而赋予超原子更强的场操控能力。

由于如前所述，电场沿 z方向，因此其方向与图1a和图1b中导线的取向相同。该电场将感应出这些沿 z方向排列的导线中的电流，而这些电流反过来又会产生沿z方向的次级电场 [11]。相反，如果存在一些附加导线，它们既垂直于图1a和图1b中的现有导线，又垂直于电场方向，那么这些附加导线（图1c）将不会与超原子的其余部分发生显著相互作用。因此，在数学模型中可以忽略这类交叉极化相互作用（即忽略这些沿 x方向排列的导线）。然而，如果这些附加导线以与原始导线相同的周期 d 周期性排列，并且在每个界面处具有与原始导线相同的Z_n，那么整个系统便具有90° 旋转对称性。因此，如果将整个系统旋转 90°，或者将极化从横电改为横磁（TM），则散射出的电场将与原始情况下散射出的电场完全相同。本文将研究这种“双极化”配置。

虽然迄今为止我们允许图 1b 和图 1c 中的导线上采用任意类型的负载，但现在我们将只考虑电容性[2] 负载。这种负载由平面（印刷）平行板电容器实现，其外观与图 2a 中棕色导线相同。在该图中，每根竖直导线的空间区域内、水平导线之间都放置了此类电容器

[1]导线条带厚度和有限电导率通过导线的分布阻抗隐式地加以考虑（见 II-C 节）

[2]虽然本文提出的形式体系适用于任何类型的负载（无论是电感性、电容性、电阻性，还是三者的组合 [44], [49]–[58]–[62]），但薄型 $w \ll \lambda$ 导电条带通常具有很强的电感性，因此需要进行电容性加载，使整个加载导线结构更接近谐振，从而能够通过负载自由度（在本例中为电容器宽度 W 参见图 2b）调节其响应，并获得足够的动态范围。

导线；同样，在各个区域中，位于竖直导线之间的每根水平导线上也是如此。

尽管所得二维阵列的单元可以定义为任意 $d \times d$ 面积，但将其定义为边界不与金属相交的形式更为方便。图2a和图2b中绿色虚线框所围出的即为这样的单元。如图2b所示，每个这样的单元内的金属呈耶路撒冷十字形状，其几何特征由导线宽度 w、厚度t、周期 d、支腿长度 W 以及相邻耶路撒冷十字的极板之间的间距 w_s 决定。为简化综合设计流程（第II-D节和第III-C节），我们将图1a中PCB叠层的所有 N 界面的这些参数均设为相同值，但支腿长度参数 $W = W_n$除外。该参数将作为我们的设计自由度，用于控制第 n层的有效负载阻抗 Z_n，从而便于设计整体多层超原子响应。具有五个界面的这种叠层的单元如图3a所示。

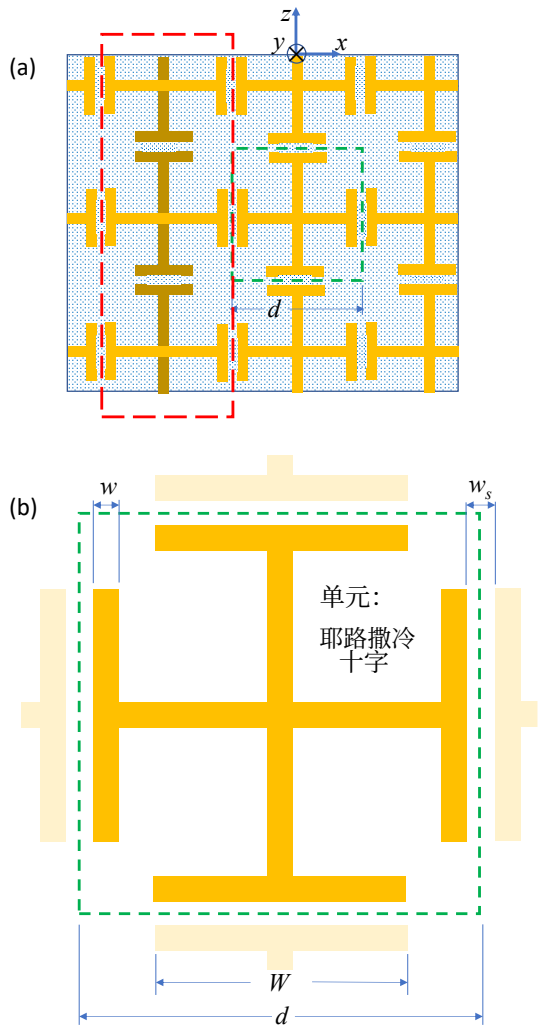


图 2. (a) 图 1c 中导线的电抗性加载由平面平行板电容器表示。单元围绕耶路撒冷十字形结构定义。红色虚线框中展示了一根新的“有效”加载导线。棕色导线表示图 1a 中原始电容性加载的实现。(b) 单元的放大图。“有效”导线的分布阻抗是耶路撒冷十字臂长 W 的函数。

C. 有效负载阻抗

为了在物理上实现 (5)，有必要将分布阻抗 Z_n 与实际导线几何结构联系起来。对于较简单的平行导线条带情形（图 1a 和 1b），这一点是通过将 Z_n 与等效平行板电容器的“极板”尺寸（图 2a 中棕色导线）联系起来实现的 [44] [65]。对于这里所讨论的 JC 几何结构而言，导线几何结构与 Z_n 之间这种“较简单”的关系并不适用，因为该几何结构具有众多电容通道，可能难以逐一明确考虑。相反，我们将采用一种改编自[58], 的、更为通用的半解析方法。该方法基于以下观察：尽管 JC 的结构看似错综复杂，亚波长超原子的主导散射仍源自入射波激发导线时产生的同极化偶极矩。换言之，我们可以将参考 JC 链沿极化轴产生的散射场近似为源自一个等效线源，而其上的感应电流同样由均匀分布的有效负载阻抗 Z_n决定。相应地，正如下文将详细说明的那样，我们可以通过在全波求解器中考察相关 JC 链的散射系数，并将其与.....的散射系数进行比较，来推导给定 JC 几何结构对应的有效 Z_n

对于抽象均匀加载构型，根据第 II-A 节和附录中提出的形式体系所预期的。

基于这一思路，本小节的具体目标是将 Z_n 与界面 n 处 JC 腿长的值 W_n 关联起来，即确定其函数形式

$$Z_n = Z_n(W_n), 1 \leq n \leq N. \tag{6}$$

由于可以预期，某一界面处导线的准静态（$d \ll \lambda$）分布阻抗 Z_n 仅会受到可忽略的影响

[3]尽管“耶路撒冷十字”指的是一种比图 2b 所示形状稍复杂的形状（参见 https://en.wikipedia.org/wiki/Jerusalem cross），但人们也已习惯用这个术语来称呼这种形状 [63], [64]。

取决于 Z_n 另一个界面处的情况，每个界面都将单独考虑[4]。不过，预计一个界面处的 Z_n 会 受到导线周围环境的影响，尤其是其所浸没于其中的介电材料 [32]。因此，在评估此有效负载阻抗$Z_n(W_n)$时，将独立考虑每个具有耶路撒冷十字单元的界面，同时纳入介电材料的所有层。图 3b 展示了位于 $y = y_2$处的界面。

对于每个界面，周期结构的单元都在全波求解器中定义。本研究采用了 CST

[4]该限制 $d \ll \lambda$ 意味着相互作用仅通过偶极矩发生，并忽略高阶多极子。这种建模方法仍比标准 TLM方法精度高得多，后者忽略了任何倏逝波现象（参见 第 I 节），因为在所考虑的偶极近似框架下，近场层间耦合得到了充分考虑。

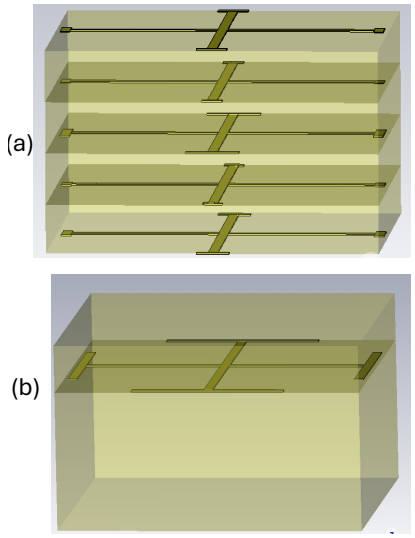


图 3. (a) 一种多层单元胞，在五个界面处各包含一个耶路撒冷十字。每个耶路撒冷十字的臂长 W_n 可调节，以控制 Z_n的值，进而控制 T 和 R。(b) 用于确定 $Z_n(W_n)$的单界面示例（$n = 2$）。

来实现这一目的 [66]。这类求解器只需定义单元，随后便会输出 S 参数——它们对应于弗洛凯-布洛赫级数中的各项，用于表示反射区和透射区中的场（4）。因此，与基模（零阶模）相关的反射和透射 S 参数分别等价于（4）中的 R（镜面反射）和 T（直接透射）。对于类似图 3b、仅考虑界面 n 的构型，反射系数和透射系数分别记为 $R^{(n)}$ 和 $T^{(n)}$。在 W_n 从 $W_{min} = 0$ 到 W_{max} 的增量取值范围内进行 CST 扫描（其范围根据单元尺寸确定），即可制成 $T^{(n)}{}_{\text{CST}}(W_n)$ 和 $R^{(n)}{}_{\text{CST}}(W_n)$ 的表格；其中添加下标是为了标明结果的计算来源。

由于我们可以利用 LAYERS（见附录）分析图 3a 所示形式的任意周期堆叠 [见式 (5)]，，因此当然也可以用它计算较简单配置下的 $T^{(n)}(Z_n)$，即每次仅包含一个单层的配置（例如图 3b）。随后，可通过求解下式，得到每个 W_n 对应的无量纲分布阻抗 Z_n

$$T^{(n)}(Z_n) - T^{(n)}_{\text{CST}}(W_n) = 0 \tag{7}$$

对 Z_n求解，这在 Matlab[5]中很容易实现。由此可得式 (6) 所示的完整函数关系，该关系对单层和多层超原子均适用。

通过与 (7) 相关的流程建立 (6) 后，我们可以使用第 II-A 节的形式体系来分析基于耶路撒冷十字的

[5]如第 II-A 节和附录中所述，透射系数$T^{(n)}$ 是 Z_n的线性函数；因此，式 (7) 可解析求解，正如文献 [58] 针对其中讨论的较简单单层反射情形所做的那样。这里，由于透射型分层介质配置中的多次反射更为复杂，我们直接采用隐式方程 (7)，以保持形式体系的通用性。

配置，并实现无缝衔接。具体而言，现在可以写成 (5)

$$T = T(W_1, W_2, ..., W_N) \equiv T(\mathbf{W}), \tag{8}$$

其中，向量 **W** 由支腿长度 W_n构成。（8）中的表达式确立了 LAYERS 确定我们多层双极化超原子的透射系数 T 的能力，其中层间界面由具有任意臂长组合的耶路撒冷十字表征 W_n。现在将利用这一能力构建相应的查找表，从而基于这些结构综合 PCB惠更斯超表面。

D. 查找表（*LUT*）

需要指出的是，要设计功能性 HMS，应采用能够实现宏观设计阶段所指定局部散射响应的超原子物理实现（见第 I 节）。为此，在当前微观设计阶段，我们旨在构建相关查找表，筛选出合适的超原子几何结构，并将其与相应的散射参数关联起来。将复透射系数 T 记为

$$T = |T| \exp(i\phi), \tag{9}$$

其中，ϕ 是 T 的相位，取值为 $-180° \leq \phi \leq 180°$，查找表中的超原子将以其高透射率为特征，

$$|T| = |T(\mathbf{W})| \approx 1. \tag{10}$$

因此，为填充我们的查找表，我们寻求满足(10)的向量 **W** 。更具体地说，我们遍历 ϕ的整个范围，并利用有效半解析模型（第 II-A 至 II-C 节）寻找对每个特定透射相位产生最高 $|T|$ 的组合**W** 。这是本工作的核心成果之一，提供了一条高保真且计算可行的路径来实现HMS微观设计阶段，在计入近场层间耦合的同时避免全波优化。所得查找表将由惠更斯超原子条目组成，每个超原子 ℓ由三个量表征：$\mathbf{W}_\ell$、$|T_\ell|$ 和 ϕ_ℓ。如第三节将展示的，这些超原子可在设计的宏观阶段用作并排构建块，构成一种新结构，用以将一种入射波散射为另一种透射波。

E. 频率响应

按照第 II-D 节所述获得查找表后，我们便可以着手为指定频率设计 HMS。不过，为了实现宽带工作——例如，通信系统中集成的超表面就需要具备这一特性——关键在于找出频率响应良好的超原子几何结构，并将其纳入查找表。为此，我们将在下文提出一种方法，以便轻松、高效地预测超原子在一个频带内的散射特性。事实上，正如第 I 节所强调的，这种能力的提升是我们扩展后的解析模型相较于先前工作的

主要进步之一。

当然，正如在 LAYERS 中实现的扩展解析模型能够针对一个频率计算 (8) 一样，它也能够针对任意其他频率进行计算。但对于该频率，原有的依赖关系$Z_n(W_n)$ [式 (6)] （使用原始工作频率计算得出）将不再成立。也就是说，式 (6) 中隐含地依赖于波长 λ，只是这一依赖关系被省略了，

$$Z_n = Z_n(W_n; \lambda), 1 \leq n \leq N, \tag{11}$$

这体现了电动力学现象固有地取决于所考虑构型的电长度。因此，如果改变 λ，就必须通过重新求解式 (7)（包括该方程中的全波 CST 计算），重新确定 Z_n 与 W_n 之间的依赖关系，这可能带来很大的计算负担（尤其是在带宽较大的情况下）。然而，LAYERS 在设计上能够避免这一问题，因为它采用单位波长，并以该单位波长为基准提供所有结构长度 $\lambda = 1$。因此，LAYERS 不会重新定义波长（或等效地，频率），而是保持单位波长不变，并按与新目标波长成反比的比例调整所有结构长度。例如，若 λ_a 是原始实际波长，且已据此求得 $T = T_a$，而我们希望使用 LAYERS 在不同波长 λ_b下求得 $T = T_b$，则新的结构长度应定义为原长度（相对于原始波长）乘以 λ_a/λ_b。这适用于参数 d，w，y_n，尤其适用于 W_n。由于假设层压板的介电常数在整个频带内相对恒定，且波长仍为单位值，因此式 (11) 仍然成立；由此，新的 $W_n = W_{nb} =(\lambda_a/\lambda_b)W_{na}$ 值可以直接代入现有关系式 $Z_n(W_n)$，以求得新的 $Z_n = Z_{nb}$ 值，以及对应于实际波长[6] λ_b的 $T = T_b$ 新值。这种在式 (6) 中将 W_n 用作自变量的方法，大大简化了从一个频率到另一个频率的转换，使 LAYERS 能够快速评估（并进一步优化）目标频带内的超原子性能。

III. 结果与讨论

为展示第 II 节提出的方法及其在 LAYERS 应用程序中编码的相应半解析模型的有效性，我们将其用于为图 1a所示的多层印刷电路板配置设计合适的双极化惠更斯超原子查找表，其中 $N = 5$ 在 $f = 20$ GHz 下有多个界面（即四个介电层）。每块层压板厚 30 密耳，其介电材料的特性为$\varepsilon_n = 3$，$\tan\delta_n = 0.001$ （例如，类似于 Rogers RO3003 或 Isola Astra MT77）；周期为 $d = \lambda/4.9 = 108.5$ 密耳；耶路撒冷十字迹线宽度和间距均为 $w = w_s = 4$ 密耳（图 2）。为将 PCB 粘合在一起，我们在图 1a 中的界面 $n = 2$、3、4 上方使用兼容的 2 密耳半固化片（$\varepsilon = 3$，$\tan\delta = 0.001$），使得 $y_1 - y_2 = y_2 - y_3 = y_3 - y_4 = 32$ 密耳，而$y_4 - y_5 = 30$ 密耳。

A. 有效负载阻抗

按照 II-C 节的内容为 LAYERS 的运行奠定基础，我们首先考察关系$Z_n = Z_n(W_n)$，该关系描述了由 W_n 表征的实际耶路撒冷十字几何结构与每个 N界面的有效负载阻抗 Z_n 之间的联系。为此，我们在 CST 中对图3b所示配置的五个界面分别进行仿真；对于每个界面n，将臂长 W_n 在 $W = 0$ 至 $W = 80$ 密耳之间取30个不同值进行扫描。整个配置（全部五个界面）的全波仿真在标准PC上总共耗时 ~ 7.5 小时；随后，通过求解式 (7)（II-C 节）即可轻松获得关系 $Z_n = Z_n(W_n)$，其中 Z_n。

各界面 n 的结果如图 4 所示。分布阻抗的实部（图 4a）表示导线中的欧姆损耗。由于假定的时间依赖关系为 $e^{-i\omega t}$，虚部（图 4b ）表示容性负载，因为图中的 $\Im(Z_n)$ 为正。

除了有助于构建半解析查找表以及开展第 II-D 节和第 II-E 节所讨论的频率响应分析之外，提取出的有效阻抗变化趋势也有助于深入了解 JC 几何结构在有效准静态负载方面的行为。先看图 4b，可以明显看出，$n = 1$ 的结果与$n = N = 5$的结果重合，而 $n = 2$，3，4 的结果彼此也基本相同。这源于有效 JC 电抗的容性特征，该特征主要受电容腿之间紧邻的介电环境影响 [32]。相应地，两个外部界面（$n = 1$，5）所处的有效介电常数为 $\varepsilon_{\text{eff}} = (1 + \varepsilon)/2 = 2$ [45]；而内部界面（$n = 2$，3，4）则深埋于基板中，所见介电常数均为$\varepsilon = 3$。通过考察深度容性工作区（$W \to 0$）中的有效电抗值，可以进一步验证这些观察结果；在该工作区，内部层与外部层提取出的数值之比趋近于预期的 $\varepsilon/\varepsilon_{\text{eff}} = 3/2$。还应注意，随着臂长增加，电容增大（容抗减小），而与导线延长相关的感性分量则逐渐占主导地位，使图 4b 中的有效电抗趋向串联 RLC谐振（内部层 $n = 2$，3，4 的谐振发生在约 $W_n \approx 80$ 密耳处），这也导致其偏离上述介电常数比值 [67]。

根据图 4a 所示的有效欧姆损耗，可以观察到所有考察的界面具有相似（且相当小）的数值；对于 $n = 1$ 和

[6]这种方法隐含地假设，(i) 铜厚度 t 和 (ii) 走线间距 $w_s = w$ （图 2b）的变化不会对分布阻抗产生很大影响。这些变化并未直接计入 LAYERS，而是仅通过评估得到的 Z_n （见附录）加以考虑。（在缩放过程中，分布阻抗被认为主要由腿长 W_n决定。）后一项假设 (ii) 得到以下事实的支持：主要的电容耦合仅取决于 w 与 w_s [65]的比值，而该比值确实在不同频率下保持恒定；前一项假设 (i) 则可能使近似模型的有效性局限于中等带宽。在实践中，对于第三节所述的 10% 分数带宽案例研究，这些假设被证明效果良好。

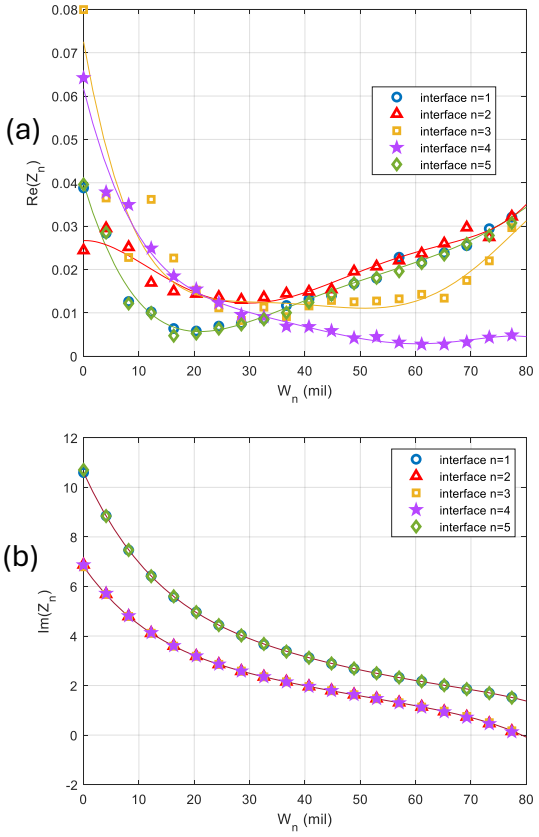


图 4. 超表面五个界面处导线的分布阻抗 $Z_n(W_n)$ 随耶路撒冷十字臂长 W_n 的变化，参数采用 II-C 节中的设定。(a) $\Re(Z_n)$。(b) $\Im(Z_n)$。标记表示使用 (7) 得到的数据。窄实线为该数据的五次多项式拟合，供 LAYERS 使用。W_n 值给出至 80 密耳，因为超过该值后，无法找到 (7) 的适当解。

$n=5$，基于对称性考量，提取出的 $n=5$（$n=2$）相同（由于引入了粘结半固化片层，PCB 层叠结构对称性略有偏差（图 3a），因此 $n=2$、3、4 的有效电阻存在细微差异）。如近期在 [67]，中提出的那样，我们认为 $\Re$（Z_n（W_n））随腿长变化的趋势主要源于介质损耗：在此深度容性工作区中，随着 $W_n \to 0$，有效电阻增大，这符合有损电容器的预期；当电容趋近于零（电抗趋于无穷大）时，$\Re(Z_n) \propto (\tan\delta)_{\text{eff}}\Im(Z_n)$；当 W_n 接近串联谐振腿长（以及超过该长度）时，有效电阻再次增大，这是因为远距离 JC 腿之间的次级电容耦合（例如图 2b 虚线绿色方框内的顶部和底部腿）在 W_n 较大时变得更加显著，从而形成并联 RLC 谐振条件 [67]。

回到我们的主要目标——建立关系式 (6)——图 4a 和 4b 中的每条数据曲线均采用最小二乘法拟合为五次多项式，以便更好地与 LAYERS 集成：

$$\Re(Z_n)=\sum_{\nu=0}^{5} a_\nu W_n^\nu, \quad \Im(Z_n)=\sum_{\nu=0}^{5} b_\nu W_n^\nu, \qquad (12)$$

其中，系数 a_ν，b_ν 通过标准 MATLAB 函数 polyfit 求得，并作为输入传入代码。在 LAYERS 中，将式 (12) 代入式 (5)，即可得到式 (8) 所示的透射系数，适用于任何有效的腿长组合$\mathbf{W}$；正如即将举例说明的，这使我们能够有效探索设计空间，从而确定用于填充查找表的最优超原子。

B. 微观设计：构建查找表

尽管我们已经表明，对于给定的一组耶路撒冷十字臂长 W_n，可以得到超原子阵列的透射系数 T，但我们感兴趣的是求解逆问题：如 II-D 节所述，我们要寻找满足 $|T_\ell(\mathbf{W}_\ell)| \approx 1$ 的集合$\mathbf{W}_\ell$，其中每个集合 $\mathbf{W}_\ell$ 都产生 T_ℓ 的不同相位 ϕ_ℓ。虽然可以通过对 LAYERS 模型应用优化例程来寻找这样的集合，但这通常需要用户多次交互，才能确保成功并充分覆盖 ϕ。因此，我们采用一种不那么复杂、但概念上更简单的方法来寻找感兴趣的 $\mathbf{W}_\ell$：对每个 N 个界面处的长度 W_n 进行“穷举”采样。采样按每隔 Δ_W 密耳的等间距进行，并由 LAYERS 确定每种组合对应的 T_ℓ。这些 T_ℓ 值将覆盖复 T 平面上的整个单位圆 $|T| \le 1$，但如下文所示，可以轻松检索所需点 $|T_\ell| \approx 1$。这种穷举采样几乎无需用户交互即可完成，也易于通过程序进行处理。我们关注的是 HMS，其超原子构型应具有对称性 [13], [17], [39],。考虑到除层压板之间存在极薄的黏结层外，II-C 节中假设的介质几何结构关于中心（$n=3$）界面对称，因此可以提高实现效率。为体现 HMS 所需的对称性，我们要求 W_n 对称，这样在穷举采样中便可令 $W_1=W_N, W_2=W_{N-1}$,....

因此，对于当前 $N=5$的情况，只需改变 W_1、W_2 和 W_3。采用 $\Delta_W=2$密耳的采样间隔，并根据图4，W_n 的范围为0至80密耳，因此每个界面有41个间隔；对于三个独立界面，总共生成 41^3 个$\mathbf{W}_\ell$ 样本。LAYERS 用不到30分钟（使用标准PC）便确定了与这些样本对应的 T_ℓ。图5a显示了这些值，其中 $|T|^2 > 0.2$，$|T|^2$是从入射波到透射波的功率耦合效率。图5a中的每个蓝点代表一个复数 $|T_\ell|^2 e^{i\phi_\ell}$，对应于一组由五个耶路撒冷十字臂长构成的 $\mathbf{W}_\ell$。

由于我们关注最大效率（即 $|T_\ell|^2$ 最接近1）的配置，且针对不同的相位 ϕ，因此会选择图5a中位于蓝点云外围的结果。图中每个 5° 间隔内$|T_\ell|^2$ 最大的两个值已用圆圈标出。选择这一数量的解，是因为它约为构建合理查找表所需数量的两倍，因此可以剔除其中若干解，具体原因将在下文说明。

尽管在超原子 PCB

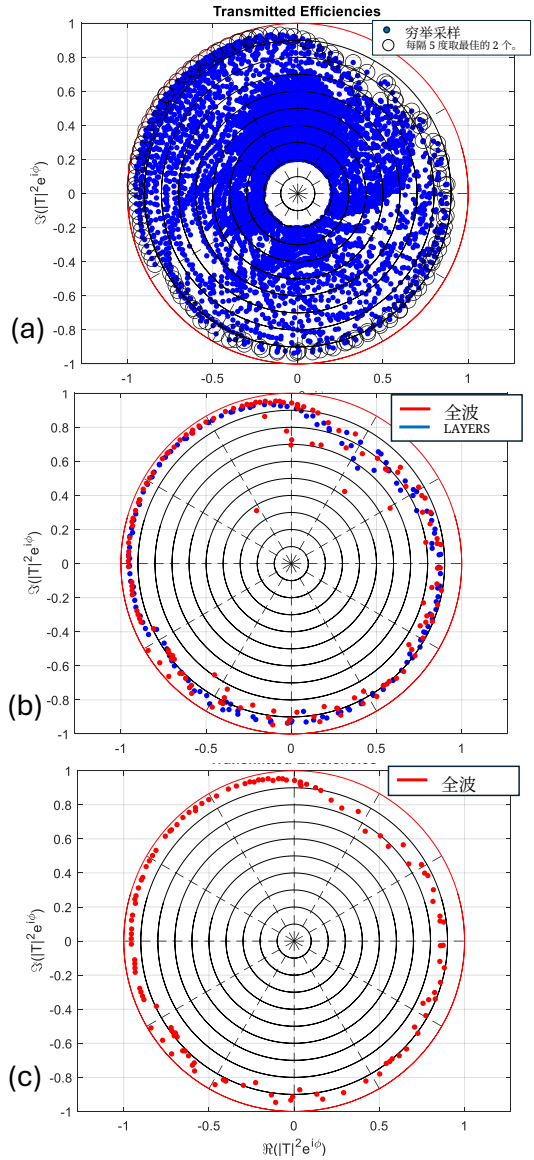


图5. 第 II-C 节中定义的超构原子在复单位圆上的 $|T_\ell|^2 e^{i\phi_\ell}$ 取值。虚线径向线每隔 30° 绘制，实线圆每隔 0.1 绘制。(a) LAYERS 通过穷举采样计算得出的结果，$\Delta_W = 2$ 密耳，仅显示 $|T_\ell|^2 > 0.2$。圆圈标出的点表示每个 5° 相位区间内 $|T_\ell|^2$ 的两个最大值（即最接近红色圆 $|T|^2 = 1$ 的两个值）。(b) (a) 中每个 5° 相位区间内被圈出的两个最大的 LAYERS 计算值 $|T_\ell|^2$（蓝点），以及相同集合 $\mathbf{W}_\ell$ 对应的全波计算值 $|T_\ell|^2 e^{i\phi_\ell}$。(c) 最终查找表由 (b) 中全波计算得出的 $|T_\ell|^2 e^{i\phi_\ell}$ 值组成，但已移除较小的 $|T_\ell|^2$ 值。

叠层中严格考虑了近场和远场的层间及层内耦合（见第 II 节和附录），但我们在分析方案中使用的均匀分布等效阻抗模型仅对偶极矩贡献有效；可能源自耶路撒冷十字上的精确电流分布的高阶多极项则被忽略。因此，我们可以预期，图5a中 $|T_\ell|^2$ 和ϕ_ℓ 的预测值与真实值之间会存在一些偏差。因此，本文所述方法的微观设计阶段的最后一步，是在正式登记候选超原子的参数之前进行全波验证。

在查找表中。

具体而言，我们采用全波求解器，针对产生带圈蓝点的同一组$\mathbf{W}_\ell$，确定$|T_\ell|^2$, ϕ_ℓ。这些全波（CST）结果在图5b中以红点表示，同时还显示了使用相同$\mathbf{W}_\ell$得到的LAYERS（Matlab）计算结果，即相同的蓝点（不带圆圈）。大多数情况下，全波结果（红点）与解析结果（蓝点）位于同一圆周上，但有些结果的幅度较小。由于查找表中只应纳入 $|T_\ell|^2$ 较大的结果，而且处理的解数量超过所需，因此在不对解的 ϕ密度造成不利影响时，可以剔除幅度较小的解。剔除较小的 $|T_\ell|^2$后，即可得到图5c中的查找表。值得注意的是，该查找表中仅包含全波结果，不再需要解析结果；因此，最终生成的查找表具有绝对精度（由CST生成）。然而，需要强调的是，若没有 LAYERS 提供$\mathbf{W}_\ell$各组数据，就无法如此高效地获得这些全波结果。从这个意义上说，尽管 LAYERS 本身采用解析方法，定义查找表的方法仍称为“半解析”。事实上，对查找表中所有 $\mathbf{W}_\ell$ 条目进行 $|T_\ell|^2$ 和 ϕ_ℓ 的全波计算，是本文所述微观设计流程中最耗时的部分，因此亟需进一步设法减轻这一负担。事实上，利用机器学习方法解决这一问题，正是这部两部分汇编的第二部分的重点 [51], , 该部分将阐述此类方案的开发过程并展示其有效性。

C. 宏观设计：利用查找表

现在查找表已创建（图 5c），接下来将利用其中的条目设计一个 HMS，将一种入射场转换为另一种透射场。具体而言，作为这一宏观设计的代表性案例研究，我们旨在合成一个超透镜，将垂直入射到 HMS 上的平面波转换为柱面波；该柱面波的 z 向轴与 HMS 平行，且位于 $x = 0, y = y_c > 0$，因此波的中心（超透镜的焦点）距表面[7] 为 y_c（图 6）。

为便于进行宏观设计 [13], , 我们需要确定所需的局部超原子属性如何随其沿 HMS 的位置变化。对于向圆柱轴会聚的波，沿 HMS 上方的相位（相差一个加性常数）为 $\phi^+(x) = 2\pi\sqrt{x^2 + y_c^2}/\lambda$。沿 HMS下方的相位则与垂直于表面传播的平面波相同，因此 $\phi^-(x)$ 应为常数。假设该常数等于上表面上 $x = 0$ 处的相位值，因此 $\phi^-(x) = 2\pi y_c/\lambda$。由此，在 x-z 平面内沿 x 轴以间隔 d 放置查找表中的单元，即可构建 HMS [13],[26], [27]。每个中心位于 x_ν 的单元 ν 将按以下方式选取

[7]这里提出的相同方法可用于设计标准的三维双极化金属透镜，将平面波转换为球面波。由于仿真资源受限，我们在此仅研究二维情形 $\partial/\partial z = 0$，无法展示最终金属透镜的完整三维性能。

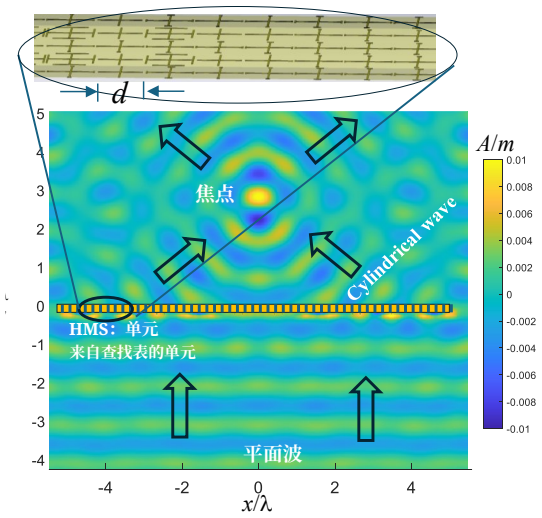


图6. TM平面波从下方入射到HMS，并由HMS转换为区域 $y > 0$中的柱面波时的 $\Re(H_z)$全波结果。HMS长度约为 10λ ，沿 z方向呈周期性排列，其上表面与 x-z 平面重合。HMS的中心位于 x=0，由查找表（图5c）中选出的51个单元组成，以满足式（13）和（14）。入射平面波的电场为1伏/米。HMS将波聚焦到一点，该点距HMS $y_c = 3\lambda$ 。彩色图像上方展示了HMS中8个单元的放大视图。

其相位 ϕ_ν 最接近 HMS 顶部与底部之间的相位差：

$$\phi_\nu = \phi^-(x_\nu) - \phi^+(x_\nu). \tag{13}$$

关于 $|T(x)|$的宏观设计要求，我们在此采用传统的超透镜（相位梯度）综合方法，旨在最大化HMS沿 [26], [27]各点处的传输系数幅度。虽然对于 f/D （焦距与直径之比）适中的超透镜应用，这可能会因入射“光线”与出射“光线”之间的波阻抗失配而造成一定的反射损耗 [13], [39], [69], [70], ，但整体效率应不会受到显著影响。因此，我们也采用这一方法，优先考虑设计简便性而非绝对性能，力求在每个 x_ν 处放置一个局部传输效率尽可能高的超原子，即

$$|T_\nu| = 1. \tag{14}$$

因此，要求 (13) 和 (14) 与图5c 中查找表所依据的准则完全兼容。该查找表由我们的 LAYERS 应用程序生成，因此可作为构建当前宏观 HMS 布局的微观设计资源。具体而言，对于每个单元 ν，我们在查找表（图5c）中确定最合适的超原子构型——该构型对应于可用于制造的实际印刷电路板金属介质叠层及所选$\mathbf{W}_\nu$ 腿长组合——并将其放置在 x_ν 处，以形成超透镜的一段。

将上述宏观设计流程应用于长度为 a10λ、采用 $y_c = 3\lambda$ 的超透镜，并使用第 III-B 节的查找表（图5c），接下来我们模拟从下方垂直入射到该超透镜上的横磁极化平面波对其进行照射。图6显示了全波计算得到的磁场，展示了

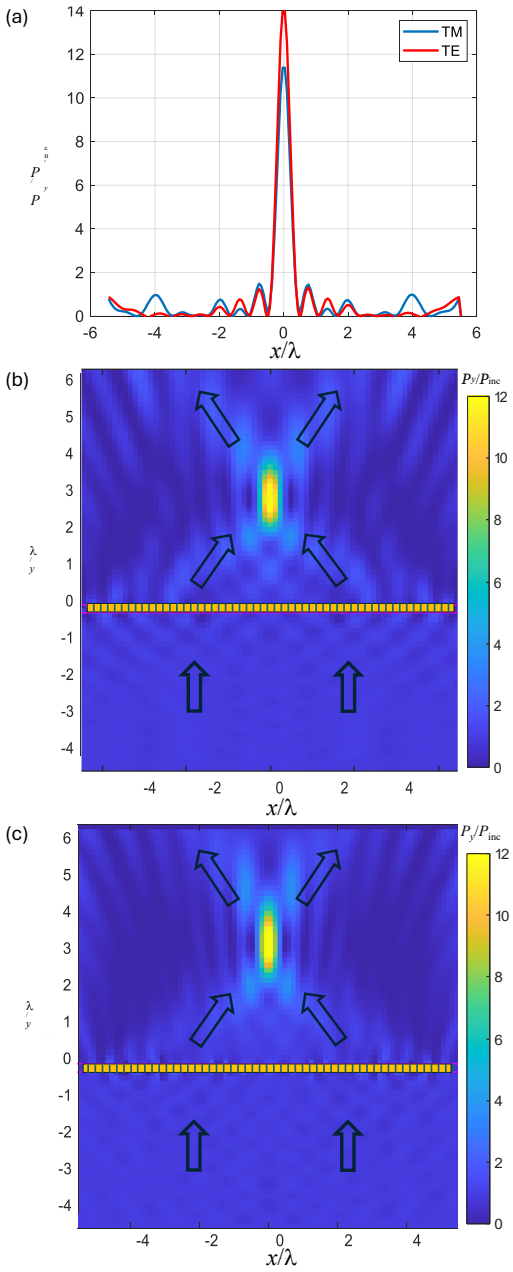


图7. 从下方入射到图6中同一 HMS 上的平面波的全波（CST）结果，其功率聚焦于 HMS 上方 $y = y_c = 3\lambda$ 处的一点。(a) 对于横电和横磁平面波入射，功率流的 y 分量 P_y 相对于 $y = y_c = 3$ 处的入射功率流 P_{inc} 随 x/λ 的变化。(b) 横磁情形下 x-y 平面中的功率流。(c) 横电情形下 x-y 平面中的功率流。

超透镜将入射平面波转换为HMS上方朝向位于 $x = 0, y = y_c$处焦点传播的“柱面”波。图7a展示了沿穿过该焦点且平行于 x轴的直线方向上的相对功率流，分别对应TE和TM入射平面波，凸显了我们设计成功实现的双极化工作。作为补充，图7b和图7c分别展示了TM和TE入射时 x-y 平面内的相对功率流。与图7a一致，这两幅图之间仅存在细微差异。对全波解的分析表明，对于TM极化，入射功率中约80.0%到达 $x = 0$处的焦平面，这是通过对该平面内金属透镜孔径范围上的功率流矢量法向分量进行积分确定的。约5.8%的入射功率被散射回入射区域，剩余的14.2%归因于损耗。对于TE偏振照明，平面波的入射功率中约83.2%传输至焦平面，4.8%被散射回入射区域，12.0%归因于损耗。

对于TE偏振照明，平面波的入射功率中约83.2%传输至焦平面，4.8%被散射回入射区域，12.0%归因于损耗。根据图7a分别得到的TM和TE极化对应的半峰全宽（FWHM）值为 0.462λ和 0.460λ，表明焦点已按预期实现了正确的（双极化）形成。

图6和图7及其相关分析表明，这些查找表条目成功构建了现实可行的全息超表面结构，能够有效控制透射波，从而验证了我们所提出的半解析方法。总体而言，所开发的方案及其编码实现 LAYERS 依托严谨的解析模型，该模型考虑了与印刷电路板兼容的实际构型，并纳入了相关的导体损耗和介质损耗，因此构成了一种有效的工程工具，可按需综合多种适用于制造的双偏振全息超表面。

D. 频率响应

截至目前，第三节讨论的结果均适用于单一频率（本例中为20 GHz）。然而，正如第二节E所述，许多应用都需要宽带工作，这反过来要求建立一个在一定频率范围内具有良好透射 T 特性的查找表。回顾一下，在第二节E中，我们提出了一种审慎的解析缩放规则，利用该规则，LAYERS 可用于预测本文所考虑类型的给定基于JC的超原子（图1a）的频率响应。因此，作为第一步验证，我们将其中介绍的方法应用于图5c中的单频查找表条目，并将预测得到的超原子频率相关散射特性与 CST 仿真值进行比较。

相应地，图8给出了在一段频率范围内，使用 LAYERS 和全波计算得到的 $|T|^2e^{i\phi}$ 结果对比。图中展示了入射波到透射波的耦合效率，所用结构来自图5b所示查找表中三个不同相位区域：$\phi \approx -150°$、$\phi \approx -30°$ 和 $\phi \approx 90°$（见图8a插图），考虑三个在标称20 GHz频率下LAYERS与CST表现出良好对应关系的单元。分别给出幅度（图8a）和相位（图8b）随频率变化的曲线，频率范围覆盖10%分数带宽，两者均显示半解析预测与全波结果之间具有良好一致性。

除了这项基本验证之外，展示如何利用我们开发的、嵌入 LAYERS 中的频率响应预测工具，进一步进行性能分析和优化，也很有意义。为此，我们希望定义一个可与图8中各条曲线相关联的品质因数，以便有效地

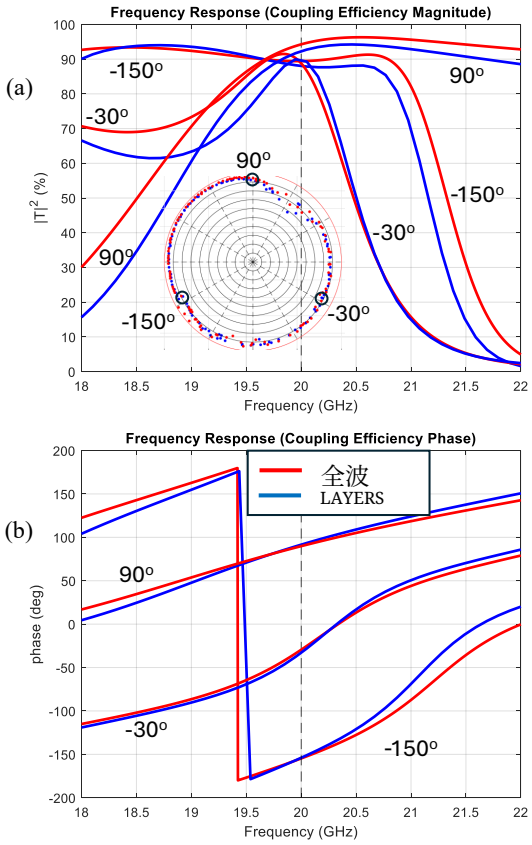


图8. 图5查找表中三组**W** 的频率响应，分别由LAYERS解析计算（蓝色曲线）和全波求解器数值计算（红色曲线）。这三组接近耦合效率相位 $\phi = -150°$、$\phi = -30°$ 和 $\phi = 90°$，如(a)插图所示。它们分别对应于 $W = \{16, 70, 10, 70, 16\}$ 密耳、$W = \{14, 8, 10, 8, 14\}$ 密耳和 $W = \{0, 58, 2, 58, 0\}$ 密耳。20 GHz标称频率以竖直虚线标出，频率范围为18至22 GHz。(a) 耦合效率幅度与频率的关系。(b) 耦合效率相位与频率的关系。

评估相应超原子对宽带HMS应用的适用性。在本案例研究中，我们选择将该频率范围内超原子的平均透射效率 $|T|^2$ 作为一个简单的品质因数，其定义为

$$\overline{|T|^2} = \frac{1}{f_2 - f_1}\int_{f_1}^{f_2} |T(\mathbf{W}; \lambda = c/f)|^2\, df, \qquad (15)$$

其中，T 的自变量已从式（8）中的定义推广为包含 λ，如式（11）所示。在式（15）中，f 表示以 GHz 为单位的频率，f_1 和 f_2 分别为其初始值和最终值（图8中为 18 和 22 GHz）。根据此定义，可以评估图5b和图5c查找表中各个结构的平均效率。由于每个结构均可通过其在标称频率 f_0（图8中为 20 GHz）下的透射效率和相位来表征，因此查找表中所有结构的平均效率可像图5中那样表示为“平均效率查找表”中的点，但其中径向分量表示频率范围 $[f_1\ f_2]$ 内的平均效率$|T|^2$，而非

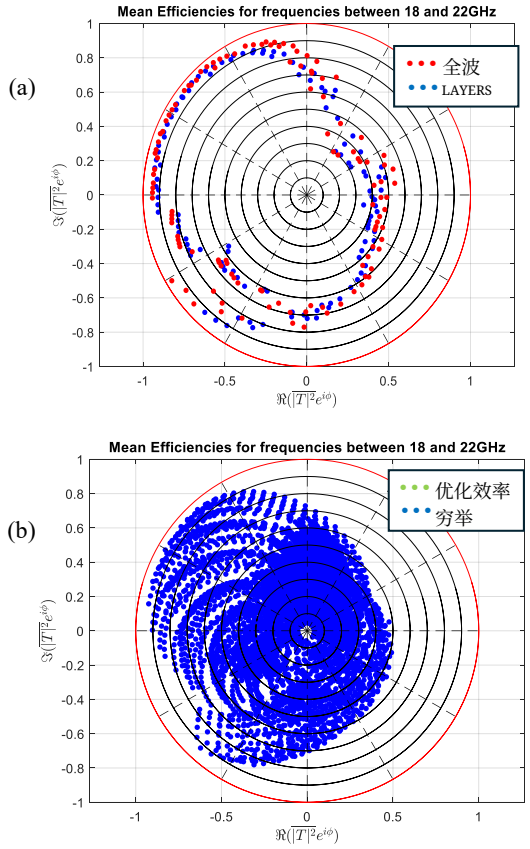


图9. 对适用于图5的**W** 配置，按照式（15）定义的平均效率，$f_1 = 18$ GHz、$f_2 = 22$ GHz。（a）适用于图5b和(c)的**W**配置的 LAYERS 和全波计算结果。这些配置是通过优化标称频率 $f_0 = 20$ GHz 处的效率 T 得到的。（b）适用于图5a的**W** 配置的 LAYERS 计算结果，这些配置代表了整个穷举搜索。

在 f_0处的效率 $|T|^2$。图9a展示了分别通过 LAYERS 和全波计算得到的结果。

从图9a可以明显看出，存在一个区域 $90° < \phi < 180°$，其中 $|T|^2$ 的值与 $|T|^2$ 相近，但在其余大多数相位角处则并非如此。想必，如果在标称频率以外的频率下使用这些配置，后面这些结果会对图6和图7所示的场质量产生不利影响。不过，需要记住，图9a中的数据点基于图5中优化 $|T|^2$ 的**W** 配置组，而非频率平均的平均效率$|T|^2$。那么问题是：能否找到其他数据点（即**W**配置组），以优化 $|T|^2$，从而在整个频段内有效工作，而不只是在标称频率下？可以通过评估穷举搜索中所考虑的各种超原子配置的 $|T|^2$ 值来确定；也就是说，将式（15）应用于与图 5a 相关联的**W**配置组即可。结果如图9b所示，$|T|^2$ 的最优值应位于蓝色点云的边界上或其附近。然而，即使这些最优值仍不尽如人意，因为某些相位下的值低至0.5。因此，作为 LAYERS 多功能性的最后一个示例，我们现在将展示如何通过以下方式改善这些 $|T|^2$ 的最优值

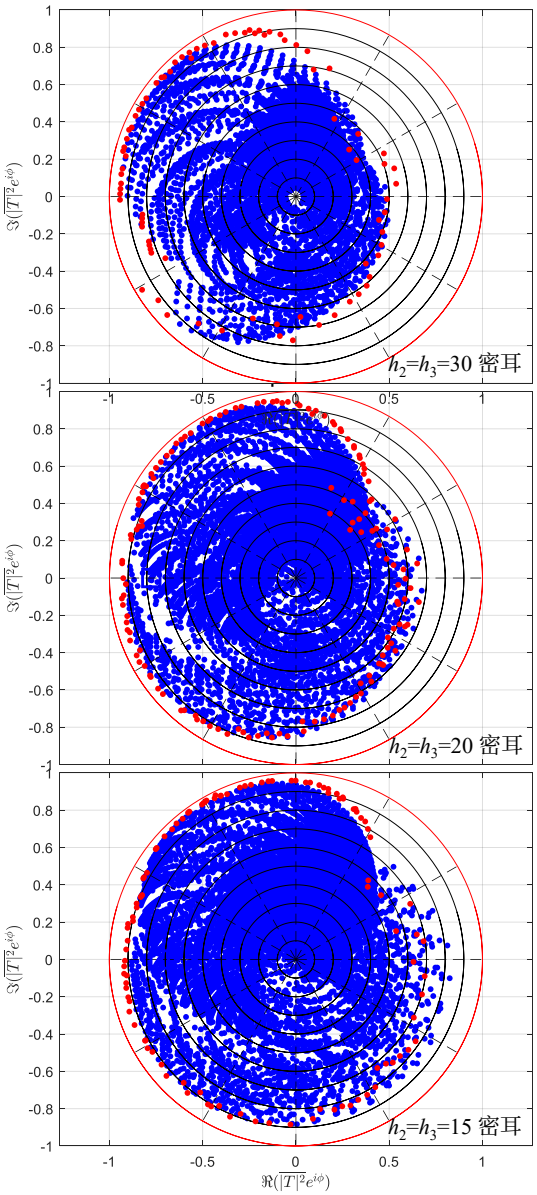


图 10. 对三种不同超原子结构（$h_2 = h_3 = 30$ 密耳、$h_2 = h_3 = 20$ 密耳和 $h_2 = h_3 = 15$ 密耳）进行穷举搜索得到的构型，在频带 [18 22] GHz 内由 LAYERS 计算的平均效率（蓝点）。红点表示 CST 计算的平均效率，对应于各自蓝点云周边上的蓝点所对应的超原子构型。

所提出的半解析方法。

我们的改进过程首先指出，图 9b 所示的穷举搜索结果是在特定的预设介质叠层下获得的；具体而言，每层层压板的厚度均为 30 密耳。然而，由于 LAYERS 背后的解析模型可以严格应用于任意分层介质配置（见附录），因此我们可以很容易地将各层厚度视为一个额外的自由度，这可能有助于改善超原子的其他属性，例如所考虑的频率响应。因此，将层 n 的层压板厚度记为 h_n（见图 1），我们将尝试实现这一

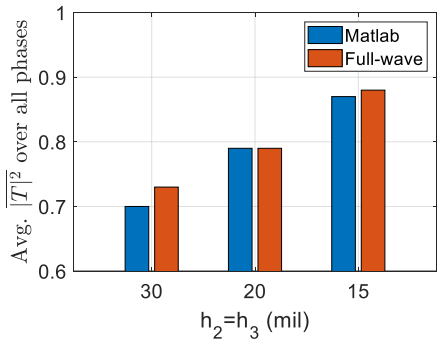


图 11. 全波方法与 LAYERS 计算得出的三种不同 $h_2 = h_3$ 值对应的、对所有相位取平均后的平均效率比较。

目标，具体方法是考虑内部层 $h_2 = h_3$ 的另外两种厚度取值：20 密耳和 15 密耳。

对于各个 $h_2 = h_3$ 值，对应的 LAYERS 计算所得平均效率的穷举搜索“云图”见图 10。当 $h_2 = 30$ 密耳时，蓝点完全未覆盖的单位圆区域会随着 h_2 减小而逐渐被填充，因此云图边界会更接近单位圆的边界，效率也相应提高。衡量平均效率查找表质量的一个指标，是查找表中平均效率 $|T|^2(\phi)$ 在所有 相位 ϕ上的平均值 $\mathcal{E}$：

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{|T|^2}(\phi)d\phi, \tag{16}$$

其中，查找表定义为云图边界上的超原子构型。利用式 (16)，图 10 所示三种结构的平均平均效率汇总于图 11。由图 11 可见，通过调整一个在 LAYERS 中易于改变的参数（此处为层压板厚度），平均平均效率可提高 15% 以上。图 10 和图 11 所示的全波数据验证了这些结果，至此我们完成了对半解析惠更斯超原子综合方案的阐述与验证，展示了该方案在生成适用于透射场调控的实际兼容印制电路板设计方面的灵活性和有效性——无论是针对中心工作频率，还是在中等带宽范围内。

IV. 结论

本文提出了一种半解析方案，可在无需全波优化的情况下设计透射式双极化多层超原子。该方案通过对原本用于加载线超光栅综合的解析模型进行改进，并严格考虑层内与层间耦合，从而能够可靠地预测周期排列的耶路撒冷十字形导体级联结构产生的散射场。基于这一框架，并将其整合到名为 LAYERS 的 HMS 微观设计应用程序中，可以创建由含有这些耶路撒冷十字蚀刻图案的真实印制电路板分层单元构成的查找表；每种配置都能在不同相位下提供较高的透射幅度。值得注意的是，利用已实现的波长缩放分析方法，查找表条目不仅可以按照标称频率下的效率进行分类，还可以按照频带内的平均效率进行分类。我们将所得查找表用于 K 波段的案例研究，成功完成了 HMS 超透镜的宏观设计；全波仿真验证表明，该超透镜对两种极化都具有出色的聚焦特性。

尽管这证明了所开发的半解析方法及其相应软件工具（LAYERS）在按需生成高效、可制造的印制电路板惠更斯超原子方面的有效性与通用性，但作为该流程的一部分，仍对所生成的查找表进行了最终全波验证，以应对由底层偶极近似导致的精度受限区域。配套论文（第二部分）中提出的机器学习方法利用本文所述进展来缓解这一障碍：通过将基于半解析LAYERS的快速训练与最少的全波微调相结合，其中提出的混合MetaMamba能够实现对惠更斯超原子的逆向设计，该方法资源高效——避免了训练通常所需的巨大全波工作量——同时在整个设计空间内达到接近真实值精度。第一部分和第二部分共同提供了一套高效的开源[57] 工具包，用于快速、准确地设计可制造的双极化透射式惠更斯超原子和超表面。

附录

LAYERS 的数学基础大部分已在先前文献中介绍过 [44]–[46]。为求完整，现对其作简要回顾，并进行少量修改。它通过求解由层间界面处的电磁场边界条件构成的线性方程组，并满足导线上的欧姆定律，计算超原子多层周期阵列的透射系数。在此过程中，它完整考虑了 Floquet 谱的倏逝分量。

尽管 LAYERS 适用于任意数量的层压层（见图1），但在此说明中仅考虑图12所示的部分层，其推广到一般情况很直接。请注意，图12与图1略有不同。在图1中，导线与电介质相邻；而在图12中，导线与电介质之间插入了空气间隙。这样做是为了能够统一求解导线处于空气中的电磁行为；之后会将空气间隙的宽度收缩至零。

那么，考虑图12中的结构，该结构由介电层和周期为 d 的电容加载导线周期阵列组成。第 m 层的介电常数为 $\varepsilon^{(m)}$，厚度为 $h^{(m)} = y^{(m+1)} - y^{(m)}$。该结构沿 z 方向保持不变，并省略了 $e^{-i\omega t}$ 时间因子。假设为横电极化，则电场沿 z 方向，且在每个区域 m 中均可表示为夫琅禾费模式之和：

$$E_z^{(m)}(x,y) = E_{z,\mathrm{inc}}\delta_{m0} + \sum_{p=-\infty}^{\infty} e^{ik_{xp}x}E_p^{(m)}(y), \tag{A1}$$

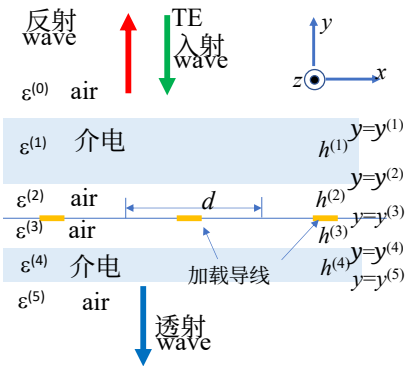


图12. 用于推导解析 LAYERS 模型基底的分层结构。入射波来自上方。图中所示的反射波和透射波假设周期 d 足够小，因此只有一个传播模式会发生散射。

其中

$$E_{z,\mathrm{inc}} = E_0 e^{ik_{x0}x} e^{-ik_{y0}^{(0)}(y-y^{(1)})}, \tag{A2}$$

$$E_p^{(m)}(y) = A_p^{(m)} e^{-ik_{yp}^{(m)}(y-y^{(m)})} + B_p^{(m)} e^{ik_{yp}^{(m)}(y-y^{(m)})}, \quad 1 \le m \le M, \tag{A3}$$

$$E_p^{(m)}(y) = B_p^{(m)} e^{ik_{yp}^{(m)}(y-y^{(1)})}, m = 0, \tag{A4}$$

$$k_{xp} = k\sin\theta_{\mathrm{inc}} + 2p\pi/d, k_{yp}^{(m)} = \sqrt{k^{(m)^2} - k_{xp}^2}, \tag{A5}$$

m 是介质的顺序索引，p是夫琅禾费模式索引，$k = 2\pi/\lambda$、$k^{(m)} = k\sqrt{\varepsilon^{(m)}}$、$\theta_{\mathrm{inc}} = 0$ 是入射角，$E_0 = 1$ 是入射平面波的振幅，$B_p^{(M)} = 0$ 满足辐射条件，其中 M 是最低（半无限）介质的索引。$A_p^{(m)}$和 $B_p^{(m)}$是未知系数。当 d 足够小时，k_{xp} 将很大，因此当 $p \neq 0$时，$k_{yp}^{(m)}$将为虚数，且 (A1) 中求和的所有项都会衰减，唯独 $p = 0$ 项除外。在这种情况下，唯一传播的透射波的振幅将为 $T = A_0^{(M)}$，其值待定。

通过求解沿界面的这些未知量之间的关系方程组，可得到 $A_p^{(m)}$和 $B_p^{(m)}$未知量的解。介电之间界面上的电场和磁场切向分量必须在这些表面上连续。对于假设的横电极化，如式（A1）所示，电场沿z方向，平行于这些界面。而磁场具有 x和 y分量，其中只有 x分量平行于这些界面。该分量为

$$H_x{}^{(m)} = -\frac{i}{k\eta}\frac{\partial E_z{}^{(m)}}{\partial y}, \tag{A6}$$

其中，η 为自由空间阻抗。因此，介质界面处的边界条件可写为

$$E_z^{(m)}(x, y^{(m)}) = E_z^{(m-1)}(x, y^{(m)}), 1 \le m \le M, \tag{A7}$$

$$H_x^{(m)}(x, y^{(m)}) = H_x^{(m-1)}(x, y^{(m)}), 1 \le m \le M. \tag{A8}$$

利用(A3)和(A4)，对于每个夫琅禾费模式 p，由此可得

$$A_p^{(m)} + B_p^{(m)} - B_p^{(m-1)} = \delta_{p0}, m = 1, \tag{A9}$$

$$A_p^{(m)} + B_p^{(m)} - A_p^{(m-1)} e^{ik_{yp}^{(m-1)}h^{(m-1)}} - B_p^{(m-1)} e^{-ik_{yp}^{(m-1)}h^{(m-1)}} = 0, 2 \le m \le M, \tag{A10}$$

$$-k_{yp}^{(m)}A_p^{(m)} + k_{yp}^{(m)}B_p^{(m)} - k_{yp}^{(m-1)}B_p^{(m-1)} = -k_{yp}^{(m-1)}\delta_{p0}, m = 1, \tag{A11}$$

$$-k_{yp}^{(m)}A_p^{(m)} + k_{yp}^{(m)}B_p^{(m)} + k_{yp}^{(m-1)}A_p^{(m-1)} e^{ik_{yp}^{(m-1)}h^{(m-1)}} - k_{yp}^{(m-1)}B_p^{(m-1)} e^{-ik_{yp}^{(m-1)}h^{(m-1)}} = 0, 2 \le m \le M, \tag{A12}$$

方程(A9)至(A12)是在介质界面处满足的边界条件。现在将讨论在包含线阵列的界面（$y = y^{(3)}$ 见图12）上必须满足的条件。将该界面记为 $y = y^{(m)}$，其上方以空气区域$m-1$为界，下方以空气区域 m为界，因此 $\varepsilon^{(m-1)} = \varepsilon^{(m)} = 1$、$k^{(m-1)} = k^{(m)} = k$、$k_{yp}^{(m-1)} = k_{yp}^{(m)} = \sqrt{k^2 - k_{xp}^2} \equiv k_{yp}$。

每根导线中都会感应出电流 I，这是由层 $m-1$ 和 m 中的场（A1）引起的。由于场是夫琅禾费模式分量之和，每个这样的分量 p都会在每根导线中感应出电流 I_p。反过来，载有电流 I_p 的导线阵列在相邻空气区域产生的场为

$$E_{zp}^{wire} = I_p F(x, y), \tag{A13}$$

其中

$$F(x,y) = -\frac{k\eta}{4}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}\left[k\sqrt{(x-\nu d)^2 + (y-y^{(m)})^2}\right] = -\frac{k\eta}{2d}\sum_{q=-\infty}^{\infty} e^{ik_{xq}x}\frac{e^{ik_{yq}|y-y^{(m)}|}}{k_{yq}}, \tag{A14}$$

且 $H_0^{(1)}(x)$ 是自变量为 x 的第一类零阶汉克尔函数。(A14) 中最后一个求和式由泊松公式推导而来，其收敛速度比汉克尔函数求和快得多。

在 (A3) 中，含有 $A_p^{(m)}$ 的项可视为“向下”波，而含有 $B_p^{(m)}$ 的项可视为“向上”波。由于 $y = y^{(m)}$ 处导线中的电流是由入射到导线上的波感应产生的，因此，来自层 $m-1$ 和 m 的入射波分别对应系数 $A_p^{(m-1)}$ 和 $B_p^{(m)}$。沿导线表面 $y = y^{(m)}$，夫琅禾费模式 p 的总场 E_{zp}^{tot} 是入射波与散射波之和。为了在欧姆定律中使用该总场，必须在导线表面上对其进行求值，该导线的有效半径为 $r_{\mathrm{eff}} = w/4$:

$$E_{zp}^{tot} = e^{ik_{xp}r_{\mathrm{eff}}}[A_p^{(m-1)}e^{-ik_{yp}(-h^{(m-1)})} + B_p^{(m)}] + I_p F(r_{\mathrm{eff}}, y^{(m)}) = I_p\tilde{Z}. \tag{A15}$$

最后一个等式由欧姆定律得出，其中 Z 是已知的导线分布阻抗。该方程可用于求解 I_p，随后所有夫琅禾费模式上的总电流为 $I = \sum_p I_p$:

$$I = \frac{\sum_{p=-\infty}^{\infty} e^{ik_{xp}r_{\mathrm{eff}}}[A_p^{(m-1)} + B_p^{(m)}]}{\tilde{Z} - F}, \tag{A16}$$

其中 $F = F(r_{\text{eff}},\ y^{(m)})$，并且 $h^{(m-1)} \to 0$ 已实施，以预期空气环境之后会消失。式 (A14) 在 (A16) 中的数值实现需要特殊处理，因为对于 $\nu = 0$、$y = y^{(m)}$、$x = r^{\text{eff}}$，$H_0^{(1)}$ 的自变量非常小 [44]–[46]。

介电界面处场的边界条件已在 (A7) 和 (A8) 中给出。对于与线阵列重合的界面，电场边界条件 (A7) 仍然成立，如式 (A10) 对夫琅禾费模式 p所示：

$$A_p^{(m)} + B_p^{(m)} - A_p^{(m-1)} - B_p^{(m-1)} = 0, \tag{A17}$$

其中，$h^{(m-1)} \to 0$ 已再次得到应用。然而，与 (A8) 不同，线阵列的磁场边界条件表明，边界两侧的 H_x 之差等于沿边界的表面电流密度：

$$H_x^{(m)}(x, y^{(m)}) - H_x^{(m-1)}(x, y^{(m)}) = \frac{I}{d}. \tag{A18}$$

利用 (A6)、(A1)、(A3) 和 (A16)，对于夫琅禾费模式 p，可将其写为：

$$k_{yp}[-A_p^{(m)} + B_p^{(m)} + A_p^{(m-1)} - B_p^{(m-1)}] = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \alpha_q [A_q^{(m-1)} + B_q^{(m)}], \tag{A19}$$

其中 $\alpha_q = \frac{k\eta}{d} \frac{e^{ik_{xq} r_{\text{eff}}}}{\hat{Z} - F}$。

方程 (A9) 至 (A12)、(A17) 和 (A19) 构成一个关于未知数 $A_p^{(m)}$、$B_p^{(m)}$ 的线性方程组。为求解该方程组，必须截断无穷和：∞ $P\sum$ $\to$ $\sum$，这意味着总共有 $2P+1$ 个 Floquet 模式。$p=-\infty$ $p=-P$考虑图12所示的六层结构。在入射$m = 0$ 区域中有 $2P+1$ 个未知数 $B_p^{(0)}$，在透射 $m = M = 5$ 区域中有 $2P+1$ 个未知数 $A_p^{(M)}$。其余区域 $1 \le m \le M-1$ 中，每个区域有 2($2P+1$) 个未知数：$A_p^{(m)}$和 $B_p^{(m)}$。因此，未知数总数为 $2M(2P+1)$。包含这些未知数的方程由各区域之间的界面推导而来。在 $y = y^{(m)}, 1 \le m \le M$ 处有 M 个这样的界面。每个界面都必须满足两个条件，一个与电场有关，另一个与磁场有关。每个方程都可以针对p的 $2P+1$ 个取值写出，因此方程数与未知数数目相同。因此，该问题可以唯一地求得 $A_p^{(m)}$和 $B_p^{(m)}$，尤其是透射系数$T = A_0^{(M)}$。

致谢

作者谨向 Doron Rainish、Heylal Mashaal、RoniAshkenazi、Dotan Goberman 和 Avi Freedman 致以诚挚谢意，感谢他们在“头脑风暴”方面的贡献、CST 计算及所提供的建议。

参考文献

[1] S. B. Glybovski、S. A. Tretyakov、P. A. Belov、Y. S. Kivshar 和 C. R. Simovski，“超表面：从微波到可见光”，*Phys.Rep.*，第 634 卷，第 1–72 页，2016 年。

[2] P. Lalanne、S. Astilean、P. Chavel、E. Cambril 和 H. Launois，“效率高于传统 阶梯光栅的闪耀二元亚波长光栅，”《光学快报》，第23卷，第1081页，1998年。[3] ——，“采样周期小于结构截止频率的闪耀二元衍射元件的设计与制备，”《美国光学学会会刊A》，第16卷，第1143页，1999年。[4] Z. Bomzon、V. Kleiner和E. Hasman，“利用亚波长光栅进行空间变化偏振态操控中的Pancharatnam–Berry相位，”《光学快报》，第26卷，第18期，第1424–1426页，2001年。[5] Z. Bomzon、G. Biener、V. Kleiner和E. Hasman，“由空间变化介质亚波长光栅产生的径向和方位角偏振光束，”《光学快报》，第27卷，第5期，第285–287页，2002年。[6] E. Hasman、V. Kleiner、G. Biener和A. Niv，“利用量化Pancharatnam-Berry相位衍射光学实现的偏振相关聚焦透镜，”《应用物理快报》，第82卷，第328–330页，2003年。[7] N. Yu、P. Genevet、M. A. Kats、F. Aieta、J.-P. Tetienne、F. Capasso和Z. Gaburro，“具有相位不连续的光传播：广义反射和折射定律，”《科学》，第334卷，第6054期，第333–337页，2011年。[8] F. Aieta、P. Genevet、N. Yu、M. A. Kats、Z. Gaburro和F. Capasso，“具有相位不连续的各向异性光学天线超表面对光的面外反射与折射，”《纳米快报》，第12卷，第3期，第1702–1706页，2012年。[9] D. Lin、E. Fan、E. Hasman和M. L. Brongersma，“介质梯度超表面光学元件，”《科学》，第345卷，302，2014 6194，298期，页–。[10] N. Yu和F. Capasso，“基于定制超表面的平面光学。”《自然·材料》，第13卷，第2期，第139–50页，2014年2月，出版者：Nature Publishing Group，Macmillan Publishers Limited的一个部门。版权所有。[11] S. Tretyakov，《应用电磁学中的解析建模》。Artech House，2003年。[12] E. F. Kuester、M. A. Mohamed、M. Piket-May和C. L. Holloway，“超薄膜处电磁场的平均过渡条件，”《IEEE天线与传播汇刊》，第51卷，第2641–2651页，2003年。[13] A. Epstein和G. V. Eleftheriades，“基于等效原理的惠更斯超表面：设计与应用，”《美国光学学会会刊B》，第33卷，第2期，第A31–A50页，2016年。[14] A. W. Love，“反射面天线发展中的若干亮点，”《无线电科学》，第11卷，第8-9期，第671–684页，1976年。[15] P. Jin和R. W. Ziolkowski，“受超材料启发的电小惠更斯源，”《IEEE天线与无线传播快报》，第9卷，第501–505页，2010年。[16] C. Pfeiffer和A. Grbic，“超材料惠更斯表面：利用无反射薄片裁剪波前，”《物理评论快报》，第110卷，第19期，第197401页，2013年。[17] F. Monticone、N. M. Estakhri和A. Al`u，“利用复合超表屏实现对纳米尺度光传输的完全控制，”《物理评论快报》，第110卷，第203903页，2013年。[18] M. Selvanayagam和G. V. Eleftheriades，“利用正交电流和磁流实现不连续电磁场以进行波前操控，”《光学快递》，第21卷，第14409–14429页，2013年。[19] M. Decker、I. Staude、M. Falkner、J. Dominguez、D. N. Neshev、I. Brener、T. Pertsch和Y. S. Kivshar，“高效介质惠更斯表面，”《先进光学材料》，第3卷，第6期，第813–820页，2015年。[20] J. P. Wong、M. Selvanayagam和G. V. Eleftheriades，“单元设计及合成惠更斯超表面方法的演示，”《光子学与纳米结构：基础与应用》，第12卷，第4期，第360–375页，2014年。[21] C. Pfeiffer和A. Grbic，“用于波前与偏振控制的毫米波透射阵列，”《IEEE微波理论与技术汇刊》，第61卷，第12期，第4407–4417页，2013年。[22] ——，“用于完全相位与偏振控制的级联超表面，”《应用物理快报》，第102卷，第23期，第231116页，2013年6月。[在线]。可获取：http://link.aip.org/link/APPLAB/v102/i23/p231116/ s1&Agg=doi [23] M. Jiang、Z. N. Chen、Y. Zhang、W. Hong和X. Xuan，“用于空间波束成形和多波束大规模 MIMO的基于超材料的薄型平面透镜天线，”《IEEE天线与传播汇刊》，第65卷，第2期，第464–472页，2017年。[24] Y. Kasahara、A. Al`u、M. Wu、K. Kosaka、H. Toyao和E. Hankui，“80 GHz频段中采用单槽源和超表面的低剖面透射阵列天线，”载于2018年IEEE天线与传播国际研讨会暨USNC-URSI无线电科学会议（APS/URSI）论文集，2018年，第521–522页。[25] M. Chen、A. Epstein和G. V. Eleftheriades，“用于提升频率扫描缝隙波导天线增益的无源惠更斯超表面透镜的设计与实验验证，”IEEE汇刊

天线与传播，第67卷，第7期，第4678–4692页，2019年7月，出版者：IEEE。[26] Y.-Q. Liu、J. Sun、Y. Che、K. Qi、L. Li和H. Yin，“高数值孔径微波金属透镜，”《光学快报》，第45卷，第22期，第6262–6265页，2020年11月。[27] Z. N. Chen、T. Li、X. Qing、J. Shi、S. Li、Y. Su、W. E. I. Liu、C. Xue、Q. Lou、Z. H. Jiang、R. Xu、P. Liu和H. Sheng，“微波金属透镜天线，”《IEEE会刊》，第111卷，第8期，第978–1010页，2023年。[28] Y.-Q. Liu、W. Dai、J. Sun、Y.-Y. Zhang和C.-H. Du，“具有超薄厚度的超高数值孔径微波金属透镜，”《IEEE天线与无线传播快报》，第24卷，第9期，第3064–3068页，2025年。[29] A. Epstein、J. P. Wong和G. V. Eleftheriades，“腔激励惠更斯超表面天线：由任意大孔径实现近乎一致的孔径照明效率，”《自然·通讯》，第7卷，第1期，第1–10页，2016年。[30] V. S. Asadchy、Y. Ra’di、J. Vehmas和S. A. Tretyakov，“利用双各向异性单元的功能性超镜，”《物理评论快报》，第114卷，第095503页，2015年。[31] N. Estakhri和A. Al`u，“利用梯度超表面进行波前变换，”《物理评论X》，第6卷，第041008页，2016年。[32] C. Pfeiffer和A. Grbic，“用于最优偏振控制的双各向异性超表面：分析与综合，”《物理评论应用》，第2卷，第4期，第044011页，2014年。[33] J. P. S. Wong、A. Epstein和G. V. Eleftheriades，“无反射宽角度折射超表面，”《IEEE天线与无线传播快报》，第15卷，第1293–1296页，2015年。[34] A. Epstein和G. V. Eleftheriades，“利用辅助场综合无源无损超表面，以实现无反射波束分束和完美反射，”《物理评论快报》，第117卷，第25期，第256103页，2016年。[35] V. S. Asadchy、M. Albooyeh、S. N. Tcvetkova、A. D´ıaz-Rubio、Y. Ra’di和S. A. Tretyakov，“利用空间色散超表面实现对反射和折射的完美控制，”《物理评论B》，第94卷，075142，2016页。[36] M. Chen、E. Abdo-S´anchez、A. Epstein和G. Eleftheriades，“用于宽角度折射的无反射双各向异性惠更斯超表面的理论、设计与实验验证，”《物理评论B》，第97卷，第12期，第125433页，2018年。[37] G. Lavigne、K. Achouri、V. Asadchy、S. Tretyakov和C. Coloz，“无杂散衍射折射超表面的极化率推导与实验演示，”《IEEE天线与传播汇刊》，第66卷，第3期，第1321–1330页，2018年。[38] V. G. Ataloglou和G. V. Eleftheriades，“通过表面波优化利用惠更斯超表面实现任意波变换，”《IEEE天线与无线传播快报》，第20卷，第9期，第1750–1754页，2021年。[39] A. Epstein和G. V. Eleftheriades，“利用无源无损ω型双各向异性超表面实现任意功率守恒场变换，”《IEEE天线与传播汇刊》，第64卷，3895，2016 9，3880期，页–。[40] M. A. Cole、A. Lamprianidis、I. V. Shadrivov和D. A. Powell，“惠更斯与双各向异性太赫兹超表面的折射效率，”arXiv预印本arXiv:1812.04725，2018 年。[41] E. Abdo-Sanchez 、 M. Chen 、 A. Epstein和G. V. Eleftheriades，“利用双各向异性惠更斯超表面实现可控辐射的漏波天线，”《IEEE天线与传播汇刊》，第67卷，第108–120页，2019年。[42] G. Xu、S. V. Hum和G. V. Eleftheriades，“一种设计多层多阻带频率选择表面的技术，”《IEEE天线与传播汇刊》，第66卷，第2期，第780–789页，2018年。[43] A. E. Olk和D. A. Powell，“计入近场耦合效应的精确超表面综合设计，”《物理评论应用》，第11卷，第6期，第064007页，2019年。[44] A. Epstein和O. Rabinovich，“通过详细解析模型揭示超光栅的综合与分析特性，”《物理评论应用》，第8卷，第5期，第054037页，2017年。[45] O. Rabinovich和A. Epstein，“用于完美异常反射的印刷电路板（PCB）超光栅解析设计，”《IEEE天线与传播汇刊》，第66卷，第4086–4095页，2018年。[46] ——，“利用多层多单元超光栅实现任意衍射工程，”《IEEE天线与传播汇刊》，第68卷，第3期，第1553–1568页，2020年。[47] S. Levy、Y. Kerzhner和A. Epstein，“计入层间耦合的超表面微观设计严格解析模型，”载于IEEE天线与传播国际研讨会暨USNC-URSI无线电科学会议（APS/URSI）论文集，2019年，第195–196页。[48] V. K. Killamsetty和A. Epstein，“按需多功能超表面的半解析综合方案，”载于第15届人工材料与新型波现象国际大会（超材料）论文集，2021年，第123–125页。[49] S. Kuznetsov、M. Tumashov、V. K. Killamsetty、P. Lazorskiy、A. Epstein 和 S. Glybovski，“利用多层金属-聚合物惠更斯超表面实现太赫兹波束的高效异常折射”，IEEE Trans. Terahertz Sci. Technol.，第 14 卷，第 1 期，第 109–121 页，2024 年。[50] P. Mateos-Ruiz、V. Kumar Killamsetty、A. Epstein 和 E. Abdo-S´anchez，“基于惠更斯超表面的漏波天线中任意且严格的孔径照明综合”，《IEEE天线与传播汇刊》，第 73 卷，第 7 期，第 4208–4223 页，2025 年。[51] N. Nissan、S. Marcus、D. Raviv、R. Giryes 和 A. Epstein，“利用选择性状态空间模型增强可制造多层惠更斯超表面设计的半解析方案：第二部分——生成式逆向设计（MetaMamba）”，审稿中，2026 年。[52] P. Naseri 和 S. V. Hum，“基于生成式机器学习的多层超表面逆向设计方法”，《IEEE天线与传播汇刊》，第 69 卷，第 9 期，第 5725–5739 页，2021 年 9 月。[53] G. Oliveri、M. Salucci 和 A. Massa，“迈向高效反射阵列数字孪生——电磁驱动机器学习视角”，《IEEE天线与传播汇刊》，第 70 卷，第 7 期，第 5078–5093 页，2022 年。[54] C. Niu、M. Phaneuf 和 P. Mojabi，“用于多层超表面单元综合的扩散模型”，IEEE Open J. Antennas Propag.，第 4 卷，第 654–666 页，2023 年。[55] H. P. Wang、D. M. Cao、X. Y. Pang、X. H. Zhang、S. Y. Wang、W. Y. Hou、C. C. Nie 和 Y. B. Li，“基于生成对抗网络、具有定制频带传输特性的超表面逆向设计”，Opt. Express，第 31 卷，第 23 期，第 37 763–37 777 页，2023 年 11 月。[56] X. Liu、X. Cao、T. Hong 和 W. Jiang，“深度卷积生成对抗网络辅助的四通道全空间超表面逆向设计”，Opt. Express，第 32 卷，第 26 期，第 46 542–46 555 页，2024 年。[57] Https://github.com/nati223/metamamba。[58] V. Popov、M. Yakovleva、M. Boust、J. Pelouard、F. Pardo 和 S. Burokur，“基于局域周期近似设计超光栅：从微波到红外”，《物理评论应用》，第 11 卷，第 4 期，文章号 044054，2019 年。[59] G. Xu、S. Hum 和 G. Eleftheriades，“采用交错超构线的双频反射超光栅”，《IEEE天线与传播汇刊》，第 69 卷，第 2181–2193 页，2021 年。[60] Y. Yashno 和 A. Epstein，“用于宽角度吸收的大周期多通道超光栅”，载于第 16 届人工材料与新型波现象国际大会（超材料），2022 年，arXiv：2206.09722。[61] F. Boust、T. Lepetit 和 S. N. Burokur，“超光栅吸收器：设计与实现”，《光学快报》，第 47 卷，第 20 期，第 5305 页，2022 年，出版方：Optica出版集团。[62] Z. Tan、J. Yi、Q. Cheng 和 S. N. Burokur，“基于超光栅的完美吸收器设计：理论与实验”，《IEEE天线与传播汇刊》，第 71 卷，第 2 期，第 1832–1842 页，2023 年，出版方：IEEE。[63] Y. R. Padooru、A. B. Yakovlev、P.-Y. Chen 和 A. Al`u，“利用亚波长印刷与开槽阵列对圆柱体的共形外覆层隐身衣进行解析建模”，J. Appl. Phys.，第 112 卷，第 3 期，文章号 034907，2012 年 8 月。[64] A. Armghan、A. Alshahir 和 S. Alshahr，“基于耶路撒冷十字超材料的纳米工程等离激元太阳能吸收器：具备偏振不敏感性和超宽带性能”，《等离激元学》，第 20 卷，第 3763–3773 页，2025 年。[65] R. Garg 和 I. J. Bahl，《微带线与槽线》。Artech House，2024 年。[66] Htt ps://www.3ds.com/products-services/simulia/products/cst-studio-suite/。[67] O. Diker 和 A. Epstein，“用于高效异常反射的低成本基板超光栅：应对介质损耗”，arXiv 预印本 arXiv:2601.11249，2026 年。[68] F. Costa 和 A. Monorchio，“微带反射阵天线反射损耗的闭式分析”，《IEEE天线与传播汇刊》，第 60 卷，第 10 期，第 4650–4660 页，2012 年。[69] J.P.S. Wong、A. Epstein、G.V. Eleftheriades，“无反射宽角度折射超表面”，《IEEE天线与无线传播快报》，第 15 卷，第 1293–1296 页，2016 年。[70] M. Kang、Y. Ra’di、D. Farfan 和 A. Al`u，“利用混合金属透镜实现大数值孔径高效聚焦”，《物理评论应用》，第 13 卷，第 4 期，文章号 044016，2020 年。