arXiv:2603.03845v1 [math.DS] 4 Mar 2026

具有不确定性与叠加的随机微分方程的稳态分布与稳定性分析：应用于捕食者-猎物模型

原创研究论文

Wolfgang Hoegele[1]

[1] 慕尼黑应用科学大学 HM 计算机科学与数学系 洛特街64号，80335 M¨unchen，德国

通讯邮箱：wolfgang.hoegele@hm.e du

ORCID：0000-0002-5303-9334

2026年3月5日

关于作者

H¨ogele 博士是德国慕尼黑应用科学大学 HM 计算机科学与数学系应用数学和计算科学教授。他的研究兴趣包括应用数学领域复杂系统的数学建模与随机建模、仿真和分析，尤其关注其在放射治疗、成像、光学计量和信号处理中的应用。

摘要

我们提出了一种计算框架，用于研究由参数不确定性驱动的随机常微分方程的稳态分布并进行稳定性分析。我们以非线性 Rosenzweig-MacArthur 捕食者-猎物模型为案例研究，刻画系统的非平凡平衡稳态，并研究当参数概率密度为具有部分重叠或彼此分离组分的多峰混合模型时，该稳态的复杂分布。因此，该应用同时涵盖系统参数的不确定性与叠加。此外，我们基于随机情形下系统雅可比矩阵的特征值分布，对稳态进行稳定性分析。稳态后验密度和稳定性指标采用近期发表的一种专为随机方程系统设计的蒙特卡罗数值方法计算 [Hoegele 2026]。我们特别展示了这种对动力系统的随机扩展十分简洁，并结合了广泛适用的计算方法。数值实验表明，捕食者-猎物模型会出现多峰稳态分布；我们还计算了这些分布的稳定区域，展示了该方法在动力系统不确定性量化中的适用性。

关键词：随机方程、混合模型、类量子建模、捕食者-猎物模型、Rosenzweig MacArthur 模型、稳定性分析

目录

1 引言 3

2 方法 **3**

2.1 一般方法.3 2.1.1 常微分方程系统稳态与稳定性的经典表述 . . . . . 3 2.1.2 随机变量参数向随机微分方程系统的一般扩展 . . . . . 4 2.2 Rosenzweig-MacArthur 模型.5 2.2.1 确定性稳态分析.5 2.2.2 随机微分方程的稳态分析.6 2.3 独立验证.7

3 结果 **7**

3.1 稳态分析.7 3.2 稳定性分析.8

4 讨论 ion 1 **1**

5 结论 **14**

1 引言

寻找常微分方程（ODE）的稳态解，通常是一项重要任务，以便探究动力系统在通常具有较高波动性的初始瞬态阶段之后将演化至何处。这些稳态的存在性与敏感性在很大程度上取决于所考虑的具体系统及其参数。由于不确定性或知识缺失而将概率密度函数引入常微分方程的参数，会使这一任务变得极为复杂，并由随机微分方程（RDE） [Jornet 2023]加以描述。在这种情况下，只能通过其概率密度函数对稳态进行随机描述，这属于动力系统不确定性量化的一部分。计算此类稳态密度函数在大多数情况下只能依靠大量数值模拟。本文的目标是展示如何针对一个已知存在稳态的示例系统高效完成这些计算，并阐明所得概率密度在解释上富有意义的多样性。

捕食者—猎物系统在生态学与流行病动力学的研究和认识中备受关注 [G´omez-Hern´andez 2024]。具体而言，Rosenzweig–MacArthur 捕食者—猎物常微分方程模型的随机扩展是当前的研究领域 [Stollenwerk 2022, Wyse 2022, Wang 2025], ，旨在探究随机影响对著名确定性系统的作用。这些随机扩展大多是在系统的动态演化过程中引入随机性，从而得到随机微分方程（SDE）。在这项简要研究中，我们关注另一类随机扩展，即研究关于模型参数的随机知识所产生的影响，并由此得到随机微分方程（参见 [Jornet 2023] ，了解其与 SDE 的区别），以获取系统非平凡稳态的信息。为此，我们采用近期提出的计算方法 [Hoegele 2026] ，并展示如何对其加以调整，以确定稳态密度。

近年来，类量子或量子启发式建模的理念备受研究关注 [Wichert 2021, Khrennikov 2023] ，这一领域也在迅速发展。本文采用广义的类量子建模范式，即将量子理论的某些特征（例如系统中参数状态的叠加）应用于非量子（如宏观）研究对象，例如种群动力学。不过，我们也想指出，为此并未采用量子理论和量子概率的完整数学工具，例如研究希尔伯特空间上自伴算子的谱理论。相反，我们采用非相干量子叠加的概念（即不含相位信息和潜在干涉图样），并通过经典混合模型的概率密度函数对其进行建模，这些函数可直接解释。据我们所知，这是从更广义的类量子建模视角出发，对动态系统连续参数的叠加进行建模的一种新颖思路（例如，参见 [Facco 2022] 关于该术语用法的讨论），从而能够直接应用经典概率论并得出结论。

稳态分布的直接计算，以及基于系统雅可比矩阵特征值对其进行的稳定性分析，都是本研究的重点。因此，第2.1节中的一般方法可作为对反应扩散方程进行一般稳态分析的蓝图。

2 方法

2.1 一般方法

2.1.1 常微分方程系统稳态与稳定性的经典表述

计算常微分方程组稳态的标准方法，首先是将系统重新表述为显式的一阶常微分方程系统，即 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ ($\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ 和 $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$)；其次，为了寻找稳态，必须求解 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$。通常，求解这样的（非线性）稳态方程组是一项艰巨的任务，因为其可解性尚不明确（动力系统不一定存在稳态）；此外，如果存在解，如何计算这些解（解析计算或数值计算），以及存在多少个稳态，仍有待研究。

假设稳态方程组有解 $\boldsymbol{x}^\star$ ，即 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^\star) = \boldsymbol{0}$，研究其局部稳定性的经典方法是求出系统线性化形式的特征值，也就是说，计算右端 $J_{\boldsymbol{f}}$ 的雅可比矩阵，并代入稳态 $J_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}^\star)$。

稳定性行为可通过该雅可比矩阵的特征值分布来判断，我们采用以下标准论证：若 $J_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}^\star) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 的所有特征值实部均为负，则该稳态是渐近稳定的，也就是说，非线性常微分方程组的解会收敛到这样的稳定稳态。若至少一个特征值的实部为正，则解是不稳定的，也就是说，即使只有微小偏差，解也会偏离该稳态 [Aulbach 2004]。若实部等于零，则有必要对非线性 $\boldsymbol{f}$ 作进一步分析，但这与本文的研究无关。因此，本文将重点考察特征值的实部。为了求得实矩阵的特征值 $\lambda \in \mathbb{C}$，我们需要求解特征多项式 $\det(J_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}^\star) - \lambda I) = 0$，其中 I 为单位矩阵。

总之，要研究稳态及其稳定性，需要求解稳态方程组 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$，以求得稳态 $\boldsymbol{x}^\star$；而要研究稳定性，则需要求解 $\det(J_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}^\star) - \lambda I) = 0$，从而得到 n 特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$，并考察其实部的符号。

2.1.2 随机微分方程系统中向随机变量参数的推广

下面我们将常微分方程组的右端视为依赖于参数随机变量 $A_1, \dots, A_k$，简写为随机变量向量 $\boldsymbol{A}$，即

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{A}) \,. \tag{1}$$

求稳态（现在取决于 $\boldsymbol{A}$ 中的密度）等价于求解下式所得解的概率分布：

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{0} \,. \tag{2}$$

对稳态方程的这一修改使其成为一个（非线性）随机方程组。最近提出了一种新颖的算法，用于计算一般随机方程 [Hoegele 2026] 的解空间的似然和后验密度。将这一框架应用于反应扩散方程的稳态问题时，需要在我们的具体问题中识别一般随机方程组 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x};\, \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{B}$，其中包含独立随机变量向量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$。这可以通过定义 $\boldsymbol{M}_{\text{稳态}}(\boldsymbol{x};\, \boldsymbol{A}) := \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x};\, \boldsymbol{A})$，并令 $\boldsymbol{B}$ 为一个零均值且标准差相较于其他随机变量较小的随机变量向量，轻松实现。由此可得到该随机方程组解的后验密度函数 $\pi_{\text{steady}}(\boldsymbol{x})$（采用非信息先验或弱信息先验），即稳态密度。

得到稳态密度后，下一步将关注高密度稳态区域中解的稳定性。为此，我们需要计算常微分方程组右端（现在还依赖于参数 $\boldsymbol{A}$）的雅可比矩阵，即 $J_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x};\, \boldsymbol{A})$，并利用特征多项式的根研究（通常为复数的）特征值的密度，即 $\det(J_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x};\, \boldsymbol{A}) - \lambda I) = 0$。这是关于 λ 的多项式，并取决于可能的稳态位置 $\boldsymbol{x}$ 以及参数密度$\boldsymbol{A}$。为简便起见，我们将复根 $\lambda \in \mathbb{C}$ 的搜索转化为在 $\mathbb{R}^2$ 中进行的等价搜索，方法是将 $\lambda = \sigma_1 + i\cdot\sigma_2$ 与 $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{R}^2$ 视为相同。这样，复特征值的搜索便可以利用

$$M_{\text{eig},1}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{A}) := \operatorname{Re}\left\{\det(J_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{A}) - (\sigma_1 + i\cdot\sigma_2)\, I)\right\} \tag{3}$$

$$M_{\text{eig},2}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{A}) := \operatorname{Im}\left\{\det(J_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{A}) - (\sigma_1 + i\cdot\sigma_2)\, I)\right\} \,, \tag{4}$$

随机方程组 $\boldsymbol{M}_{\text{eig}}(\boldsymbol{x};\, \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{C}$ 的解来确定，其中 $\boldsymbol{C}$ 是一个二维随机变量向量，其均值为零，且相较于其他随机变量具有较小的标准差（在稳态密度中起到与 $\boldsymbol{B}$ 类似的作用）。这将得到取决于给定位置 $\boldsymbol{x}$ 的特征值二维后验密度函数 $\pi_{\text{eig}}(\boldsymbol{\sigma}; \boldsymbol{x})$。

关于稳定性的解释如下：我们关注$\pi_{\text{steady}}(\boldsymbol{x})$的高密度区域，因为这对应于稳态区域；同时通过$\pi_{\text{eig}}(\boldsymbol{\sigma}; \boldsymbol{x})$探测可能的特征值密度。由于我们主要关注稳态的稳定性，因此对特征值实部为负的概率密度进行积分（即 $\sigma_1 < 0$），并定义新的量

$$\kappa(\boldsymbol{x}) := \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{\infty} \pi_{\text{eig}}(\boldsymbol{\sigma}; \boldsymbol{x})\, \mathrm{d}\sigma_2\, \mathrm{d}\sigma_1 \,, \tag{5}$$

该量概括了特征值实部为负的概率。将$\pi_{\text{steady}}(\boldsymbol{x})$和 $\kappa(\boldsymbol{x})$的密度图并排绘制，便于直接解读：我们可以看到对于哪些 $\boldsymbol{x}$，$\pi_{\text{steady}}(\boldsymbol{x})$中会出现稳态的高密度区域；随后查看 $\kappa(\boldsymbol{x})$中的相同位置，即可解读稳态稳定性的概率（从概率意义上说，只有非常接近 1 的值才表明渐近稳定性）。

正如我们所见，建模的主要部分是在稳态分析中识别形如 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{B}$ 的随机方程。正如 [Hoegele 2026] 所述，为了数值计算此类随机方程解空间的后验概率密度 $\pi(\boldsymbol{x})$（采用非信息先验），需要通过蒙特卡罗方法近似计算一个积分，具体而言：

$$\pi(\boldsymbol{x}) \propto \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(\prod_{r=1}^{R} f_{B_r}(M_r(\boldsymbol{x};\boldsymbol{s}_n))\right), \tag{6}$$

其中，R为方程数量，N为样本数量，$\boldsymbol{s}_n = (A_{1,\ n}、\ .....、\ A_{k,\ n})$（$n$ =1、.....、N）为样本向量（即根据各自密度独立抽取的参数集）。由于我们假设不存在会对解空间产生干扰的先验知识，因此只需将数值计算得到的右端归一化，使总概率质量为 1，即可得到后验密度的近似值。

2.2 Rosenzweig-MacArthur 模型

2.2.1 确定性稳态分析

具有Holling II 型功能反应的归一化Rosenzweig-MacArthur捕食者-猎物模型由 [Wang,2025]给出

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = x\left(1-\frac{x}{k}\right) - \frac{m\,x\,y}{1+x} \tag{7}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = -c\,y + \frac{m\,x\,y}{1+x}, \tag{8}$$

其中本质上 x 为归一化猎物种群，y 为归一化捕食者种群，k 为最大猎物种群的承载量常数，m 为捕食者与猎物之间的捕杀与繁殖率，c 为捕食者种群的死亡率。

为了求出具有$\mathrm{d}x\ \mathrm{d}s = \mathrm{d}y\ \mathrm{d}s = 0$的稳态，我们将其设为零，即

$$0 = x\left(1-\frac{x}{k}\right) - \frac{m\,x\,y}{1+x} \tag{9}$$

$$0 = -c\,y + \frac{m\,x\,y}{1+x}. \tag{10}$$

对于 k, m, c的所有固定正值，有两个平凡的稳态解，例如$(x, y) = (0, 0)$（两个总体均灭绝）以及$(x, y) = (k, 0)$（猎物处于最大承载量且捕食者灭绝）。有趣的是，还存在一个共存稳态，此时两个总体的规模均为大于0的常数。该确定性平衡解（对于 $m, c, k > 0$，其中 $m > c$且 $k > \frac{c}{m-c}$）由下式给出

$$x = \frac{c}{m-c},\ y = \frac{1}{m}\left(1+\frac{c}{m-c}\right)\left(1-\frac{c}{k\,(m-c)}\right). \tag{11}$$

当然，文献中对该模型还有许多进一步的扩展，其中最值得注意的是纳入总体的疾病与感染项，从而产生更多的稳态 [G´omez-Hern´andez 2024]。在这项简明的研究中，我们主要关注方程 11 所描述的单一非平凡稳态，并考察其在随机影响下的行为。

为了 t　要进一步研究稳定性，需要计算该系统右端的雅可比矩阵　m

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} 1-\frac{2\,x}{k}-\frac{m\,y}{(1+x)^2} & -\frac{m\,x}{1+x} \\ \frac{m\,y}{(1+x)^2} & -c+\frac{m\,x}{1+x} \end{pmatrix}. \tag{12}$$

例如，将第一个平凡稳态（$x,\ y$） = （0，0）代入后，会得到一个对角雅可比矩阵以及两个实特征值 $\lambda_1 = 1$ 和 $\lambda_2 = -c$，即一个正特征值和一个负特征值，从而得到一个不稳定的稳态。一般而言，特征值通过求特征多项式 $\det(J(x,\ y) - \lambda I) = 0$ 的根来确定，进而得到求根公式

$$0 = \lambda^2 - \left(1 - \frac{2\,x}{k} - \frac{m\,y}{(1+x)^2} - c + \frac{m\,x}{1+x}\right) \cdot \lambda \ldots \tag{13}$$

$$\cdots + \left(1 - \frac{2\,x}{k} - \frac{m\,y}{(1+x)^2}\right) \cdot \left(-c + \frac{m\,x}{1+x}\right) + \frac{m^2\,x\,y}{(1+x)^3}\ . \tag{14}$$

将方程 11 代入特征多项式并解析求根很容易。对于参数 $k = 1,\ m = 1,\ c = \frac{1}{4}$（与图 1 仿真中的模态相同），可得非平凡稳态 $(\frac{1}{3}, \frac{8}{9})$，其特征值为 $\lambda_{1,\ 2} = -\frac{1}{12} \pm i\frac{\sqrt{17}}{12}$，即二者实部均为负，因此该非平凡稳态是渐近稳定 的。

2.2.2 随机微分方程的稳态分析

下文将探讨如何扩展 Rosenzweig-MacArthur 问题：将参数 $k,\ m,\ c$ 视为服从概率密度函数的独立随机变量，并研究非平凡稳态解的行为。这一步可以理解为对这些参数真实取值引入不确定性。

此外，秉承近期研究的发展方向 [Hoegele 2026], ，我们希望对参数 m 和 c使用多模态混合模型密度。这可以理解为捕食者种群具有异质性，也就是说，其中存在适用不同参数值的亚种群，并且我们允许这些参数值进行所有可能的组合。本研究希望推广的新视角是，混合模型表示参数不同取值同时存在，即以直接的方式将它们叠加起来。关于这些解释（尤其是对仿真结果的解释）的更详细探讨，见第 4 节的讨论。

为了计算稳态，这可直接通过（参见第2.1节 .2)

$$M_{\text{steady},1}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{A}) := x_1\left(1 - \frac{x_1}{A_1}\right) - \frac{A_2\,x_1\,x_2}{1+x_1} \tag{15}$$

$$M_{\text{steady},2}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{A}) := -A_3\,x_2 + \frac{A_2\,x_1\,x_2}{1+x_1} \tag{16}$$

以及 $x_1 := x$、 $x_2 := y$，还有随机变量 $A_1 := k \sim f_k$、 $A_2 := m \sim f_m$ 和 $A_3 := c \sim f_c$。

为了分析稳态的稳定性，我们将研究雅可比矩阵的特征值。如前所示，我们寻找（使用与之前相同的 $A_1,\ A_2,\ A_3$ ）的解 $\lambda \in \mathbb{C}$

$$0 = \lambda^2 - \left(1 - \frac{2\,x_1}{A_1} - \frac{A_2\,x_2}{(1+x_1)^2} - A_3 + \frac{A_2\,x_1}{1+x_1}\right) \cdot \lambda \ldots \tag{17}$$

$$\cdots + \left(1 - \frac{2\,x_1}{A_1} - \frac{A_2\,x_2}{(1+x_1)^2}\right) \cdot \left(-A_3 + \frac{A_2\,x_1}{1+x_1}\right) + \frac{A_2^2\,x_1\,x_2}{(1+x_1)^3}\ . \tag{18}$$

由于 λ 一般而言为复数，我们将其等同于实部和虚部，即两个实数值$\lambda = \sigma_1 + i\cdot\sigma_2$，其中 $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{R}^2$，由此得到（参见第2.1.2节）

$$0 = \sigma_1^2 - \sigma_2^2 + i\cdot 2\sigma_1\sigma_2 - \left(1 - \frac{2\,x_1}{A_1} - \frac{A_2\,x_2}{(1+x_1)^2} - A_3 + \frac{A_2\,x_1}{1+x_1}\right) \cdot (\sigma_1 + i\cdot\sigma_2) \ldots \tag{19}$$

$$\cdots + \left(1 - \frac{2\,x_1}{A_1} - \frac{A_2\,x_2}{(1+x_1)^2}\right) \cdot \left(-A_3 + \frac{A_2\,x_1}{1+x_1}\right) + \frac{A_2^2\,x_1\,x_2}{(1+x_1)^2}\ , \tag{20}$$

这将进一步解释为，迫使右端的实部和虚部等于

零，即

$$M_{\mathrm{eig},1}(\boldsymbol{\sigma};\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}) := \sigma_1^2 - \sigma_2^2 - \left(1 - \frac{2\,x_1}{A_1} - \frac{A_2\,x_2}{(1+x_1)^2} - A_3 + \frac{A_2\,x_1}{1+x_1}\right)\cdot\sigma_1 \ldots \tag{21}$$

$$\cdots + \left(1 - \frac{2\,x_1}{A_1} - \frac{A_2\,x_2}{(1+x_1)^2}\right)\cdot\left(-A_3 + \frac{A_2\,x_1}{1+x_1}\right) + \frac{A_2^2\,x_1\,x_2}{(1+x_1)^3} \tag{22}$$

$$M_{\mathrm{eig},2}(\boldsymbol{\sigma};\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}) := 2\sigma_1\sigma_2 - \left(1 - \frac{2\,x_1}{A_1} - \frac{A_2\,x_2}{(1+x_1)^2} - A_3 + \frac{A_2\,x_1}{1+x_1}\right)\cdot\sigma_2\ . \tag{23}$$

给定参数集 $\boldsymbol{x}$ 时，特征值 $\pi_{\mathrm{eig}}(\boldsymbol{\sigma};\boldsymbol{x})$ 对应的后验密度函数同样可以通过公式 6 的蒙特卡罗模拟计算。基于此，可根据公式 5 计算稳定性概率 $\kappa(\boldsymbol{x})$。

2.3 独立验证

传统上有三种方法可以验证稳态计算。这三种方法都包括从所述分布中随机抽取参数集，并将其代入确定性系统，直至稳态密度得到近似。按照蒙特卡罗模拟的思路，随后需要重复这一过程，直到得到稳态的二维直方图。这三种方法是:

a) 如果可能，使用解析计算得到的平衡解。这在数值上是效率最高的方法，但需要说明的是，对于任意常微分方程，这类解析解通常很难获得。因此，本研究有意不采用这种验证方法。b) 使用确定性非线性稳态方程组。这实际上是反复使用迭代非线性方程求解器求解随机方程。这种方法不需要解析可解性，且具有普适性，但数值计算成本高于 a)，并且直接依赖求解器算法。c) 将常微分方程作为确定性系统。这种方法实际上是针对每个参数集反复使用常微分方程求解器来模拟随机微分方程，并寻找系统在初始瞬态阶段之后演化到的稳态。这种方法同样具有很强的普适性，但数值计算成本最高，并且取决于常微分方程求解器算法和系统的初始值。具体而言，如果模拟不是直接从不稳定稳态开始，这种方法自然只能找到稳定稳态。

3 结果

3.1 稳态分析

在结果部分，我们将探讨基于所述随机方程得到的非平凡稳态分布的不同仿真结果。以下图表左侧展示了用于计算 k、 m和 c（从上到下）的蒙特卡罗积分的参数概率密度，以样本直方图的形式呈现（详情参见 [Hoegele 2026]）。为简化起见，我们采用高斯混合模型，同时不限制这一通用方法的适用性。图表右侧展示了由此得到的稳态后验分布，并以颜色编码表示以 x_1 和 x_2 为坐标的稳态概率。蒙特卡罗积分的样本数为 $N = 24000$ （参见方程6），并通过拉丁超立方抽样生成。f_{B_1} 和 f_{B_2} 的标准差为 $\sigma_{B_1} = \sigma_{B_2} = 0.005$ ，显著小于仿真中的所有其他标准差（可在图中直接比较）；图5验证了该数值足够小，不会影响所得结果。

一般而言，需要在数值效率上取得折中——对于 $\boldsymbol{B}$，标准差设置得过小，会导致在方程 6 中，针对 $\boldsymbol{B}$ 在密度为零的位置 $M_r(\boldsymbol{x};\boldsymbol{s}_n)$ 进行更多评估；这些评估不会对最终密度函数产生贡献，却会增加计算成本，而且后验可能变得嘈杂（最终可能需要增加样本数量，以进行蒙特卡罗

积分）。若标准差设置得过大，结果通常会受到显著影响，导致后验密度变得模糊。可以先采用相对较大的标准差，再逐步减小（必要时同时因噪声而增加样本量），直至最终后验不再出现明显差异，从而找到合适的折中。以下模拟采用了这种方法。

具体而言，在图 1 中，我们展示了单峰参数密度对应的三个稳态解（两个平凡稳态解和一个非平凡稳态解）。在后续所有图中，我们仅关注非平凡稳态。由于引入了不确定性，我们得到的本质上是第 2.2.1 节中确定性解的模糊版本。在图 2 中，我们展示了混合模型中 m和 c的明显分离模态所产生的影响。这会使稳态密度呈现复杂结构，本质上包含模态的所有可能组合。在图 3 中，我们展示了 m 和 c对应的非明显分离多峰密度所产生的稳态分布。在图 4 中，我们展示了 m 包含明显分离的模态而 c不包含时所产生的影响。总体而言，参数中混合模型的组合复杂度与捕食者-猎物方程的非线性相互作用，导致非平凡稳态密度呈现复杂结构。

作为验证，在图5中，通过第2.3节所述的验证方法，使用迭代求解器对抽取的 $N = 240000$ 确定性方程进行数值求解，独立计算近似后验的二维直方图（方法 (b)）。可以看出，除少量数值伪影外，后验的整体形态得到了很好的近似，从而验证了基于方程 6 的计算结果。可以得出结论：尽管图5中的模拟比基于方程 6 的结果耗时显著更长，但稳态密度的详细结构仍未完全显现，且需要更长的运行时间。

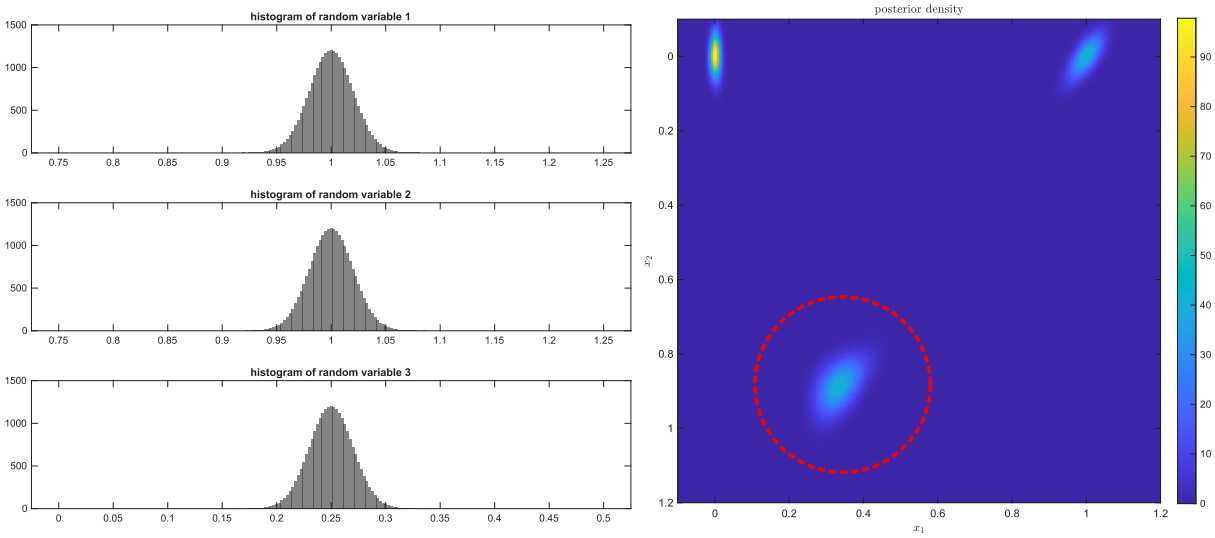


图 1：左：包含较大参数不确定性的单峰参数密度。右：$\pi_{\text{steady}}(\boldsymbol{x})$ 的强度图。预期的三个稳态（上方两个为平凡解），红圈标出的密度区域为非平凡平衡态。该密度呈现出的形状显示了参数不确定性如何传播至平衡稳态；由于方程具有非线性，其形状并非平凡。

3.2 稳定性分析

我们将图 1 所示的第一种情况和图 2 所示的第二种情况作为两个独立示例进行稳定性分析。图 6 展示了第一种情况下的 Kappa概率图，其中显示了有保证的渐近稳定区域（黄色）和不同程度的不稳定区域（其他所有区域）。由于稳定性仅在稳态概率较高的区域内才重要，因此图中还标出了与图 1 稳态密度中非平凡稳态周围相同的虚线圆圈。据此可以得出结论，在整个非平凡稳态区域内，渐近

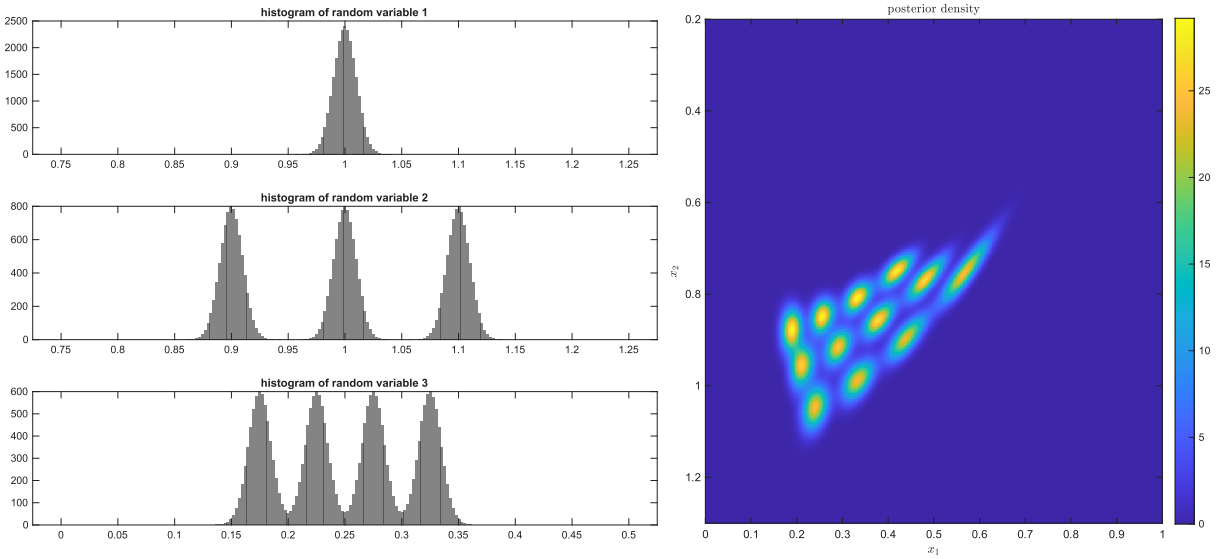


图 2：左：参数 m 和 c（第二行和第三行）呈现出明显甚至彼此分离的多模态模式。右：$\pi_{\text{steady}}(\boldsymbol{x})$ 的强度图。这形成了具有 12 个峰的非平凡稳态分布，其中 m 有 3 个模态，c（$3 \times 4 = 12$ 个参数组合）有 4 个模态。

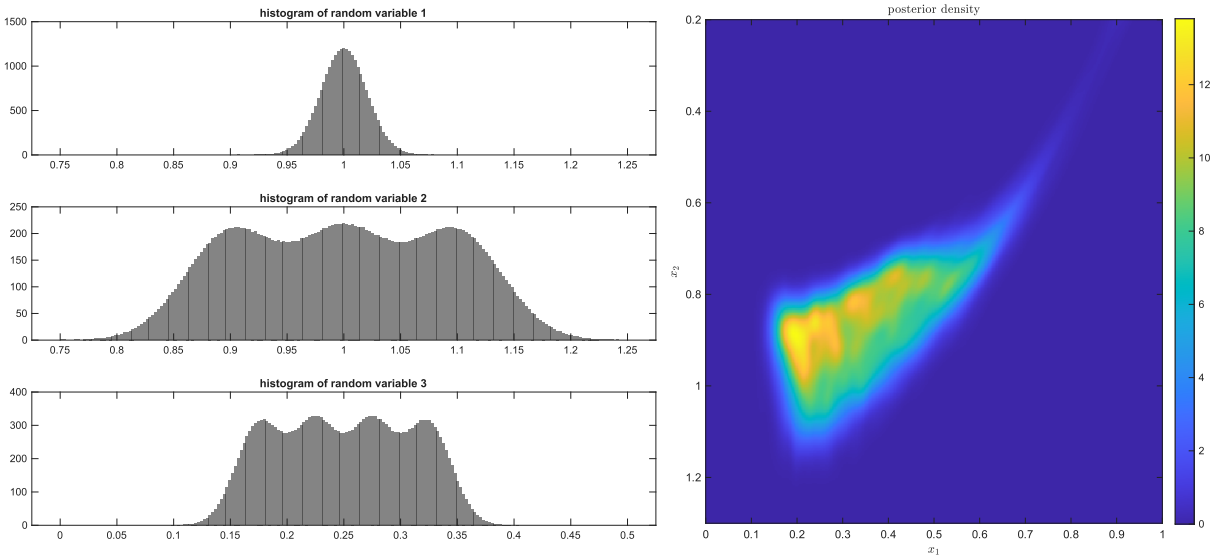


图 3：左：参数 m 和 c 同样呈多模态，但不占主导，因此产生宽广且不明显的参数密度。右：$\pi_{\text{steady}}(\boldsymbol{x})$ 的强度图。非平凡稳态分布呈现出一大片具有特征形状的模糊区域，其中各个模态几乎难以辨认。

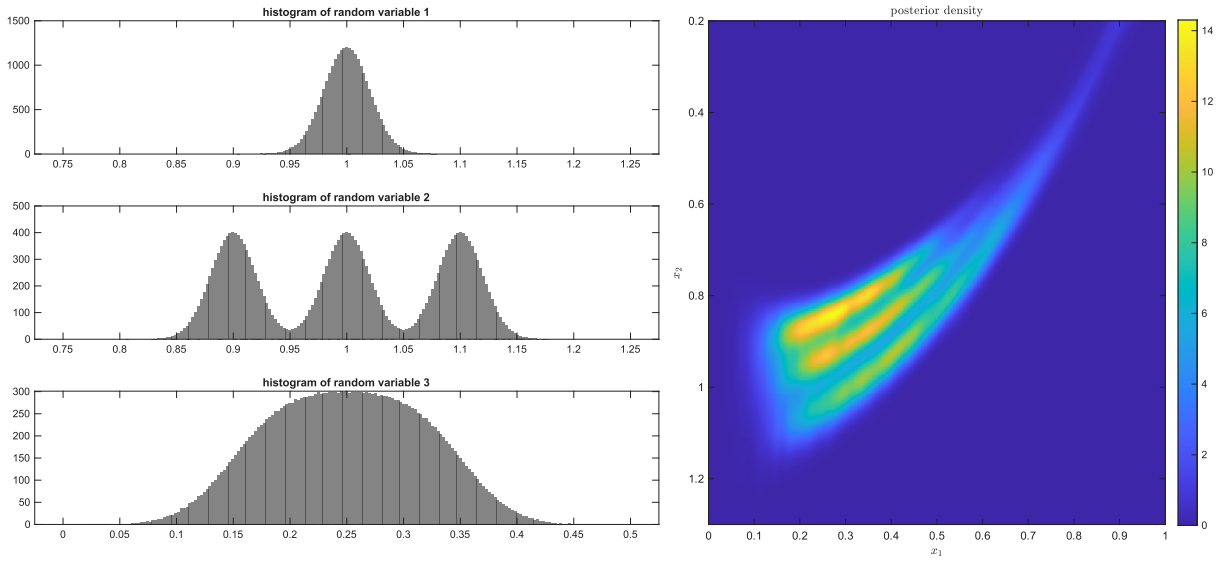


图4：左：参数 m 呈现出明显的模态，而 c仅为由四个高斯分布构成的宽泛且不显著的概率分布。右：$\pi_{\text{steady}}(\boldsymbol{x})$ 的强度图。非平凡稳态分布展示了这些混合参数如何传播至各稳态，并再次因非线性而呈现出非平凡模式。

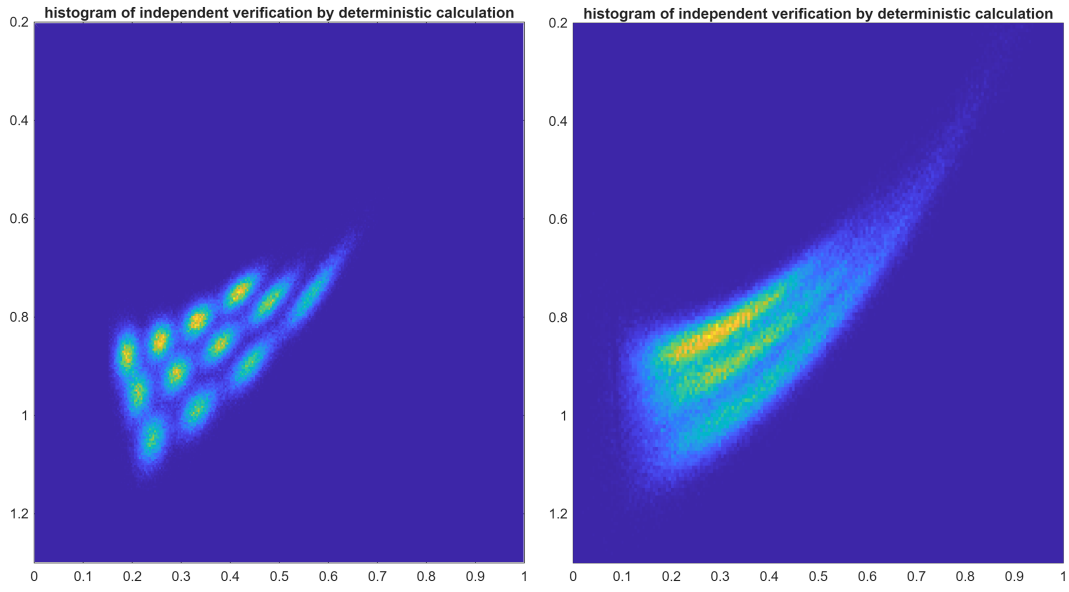


图5：对图 2（左）和图4（右）所示仿真实例进行验证计算所得的二维直方图，采用了 $N = 240000$ 个按第2.3节所述对采样确定性稳态方程求得的数值解。使用了 Matlab 的 fsolve 迭代求解器，并以常数起始值 $x = [0.3, 0.9]$。

稳定性得以保证。此外，位于 (0，0) 和 (k，0) 附近的另外两个平凡稳态是不稳定的，这也符合预期。Kappa概率图中的每个像素都是通过计算完整的特征值后验密度得到的。对于一个15点网格（以红点表示），相应的特征值密度在图 7 中以强度图显示。由于在第一个案例中，A_i 的概率密度均为单峰分布，因此我们基本上预期会看到各个特征值位置的模糊版本。需要注意的是，在这个具体问题中，特征多项式仅包含实值系数，且次数为2。这意味着，根据代数基本定理，我们要么只有两个实特征值（位于实数轴上，即 $\sigma_2 = 0$），要么有两个共轭复特征值（关于σ_1-轴对称）；这一点可以直接观察到，同时也可用于验证特征值密度计算的正确性。

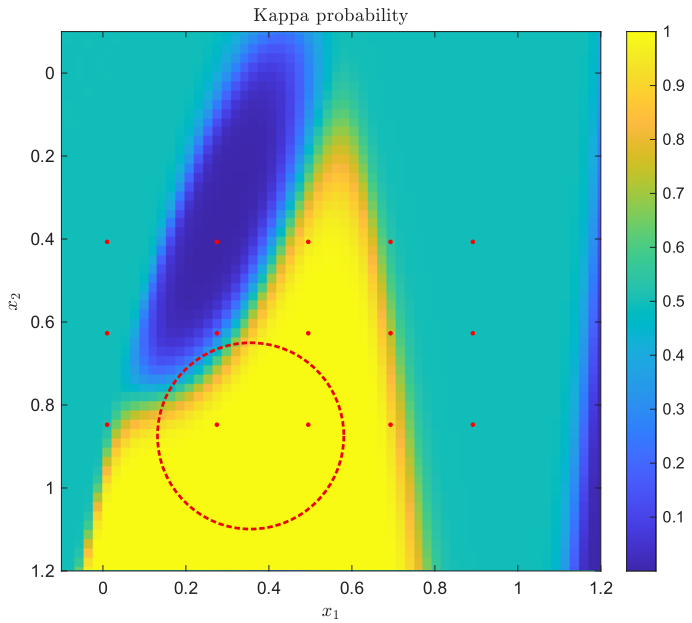


图 6：图 1 所示案例的 Kappa 概率图 $\kappa(\boldsymbol{x})$。概率为 1 表明可保证渐近稳定性。此外，还展示了所选案例研究中相应特征值的 15点网格。此外，为了显示稳态分布的高强度区域，还展示了与图 1 中相同的红色虚线圆。

图 8 展示了第二种情况的 Kappa 概率图，类似于图 6，其中包含参数的叠加。这一次，图 2 中稳态的高强度区域具有特征性的外部形状，并以虚线图形表示。可以看出，在整个区域内，稳态基本上都是渐近稳定的。这意味着，尽管非平凡稳态的位置对参数密度相当敏感，但这些稳态的稳定性是稳健的。此外，还以红点标出了与图 6 相同的特征值计算网格。图 9 展示了相应的特征值分布，其中呈现出更复杂的结构，因为 A_i 具有多峰密度，从而也产生了形状各异的特征值密度。尽管如此，关于 σ_1轴的对称性验证了数值计算。

4 讨论

对于下列关于捕食者-猎物模型稳态密度结果的解读，有几种需要加以区分的方式。除了展示数值结果之外，这些解读也是该研究的重点，并应拓展其视角。

- 在第一种解读中，我们不知道具体的参数值，但总体中实际起作用的真实参数集只有一个。参数密度呈现多峰混合模型这一事实，反映了人们对这些参数拥有不同的（可能彼此不相容的）信息来源。由此，结果展示了概率分布

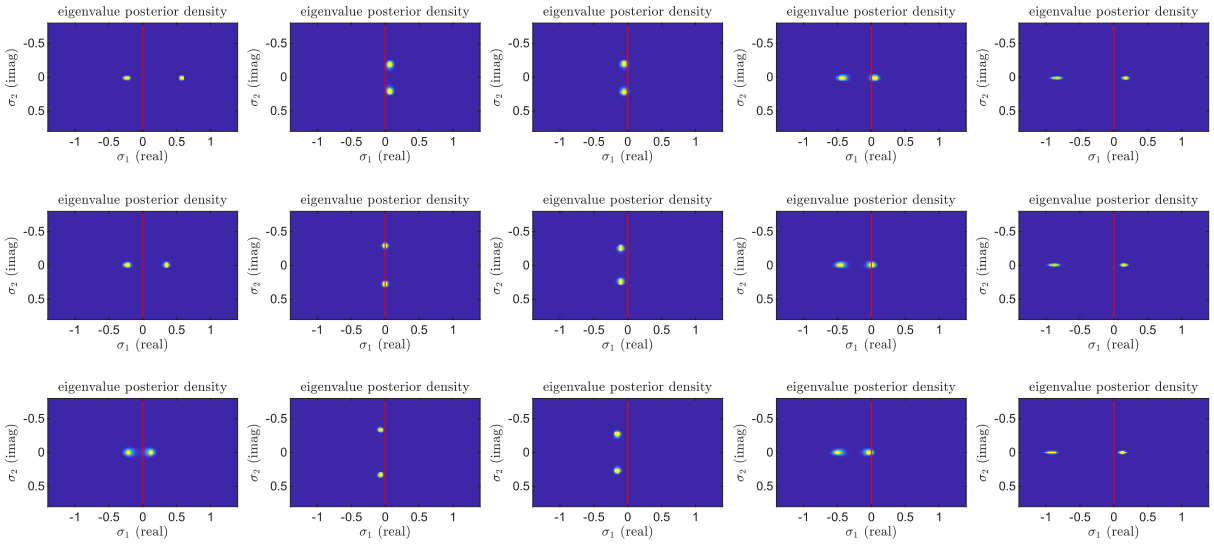


图 7：图 6 所示的 $\boldsymbol{x}$ 对应的 15点网格的特征值密度 $\pi_{\text{eig}}(\boldsymbol{\sigma}; \boldsymbol{x})$ 强度图。如果所有强度都位于红线左侧（特征值的负实部，即 $\sigma_1 < 0$），则可保证渐近稳定性。

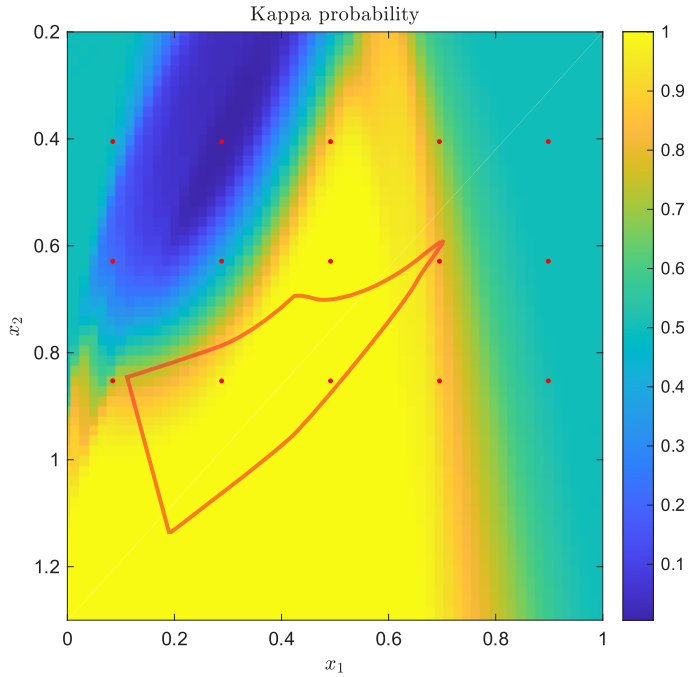


图 8：图 2 所示案例的 Kappa概率图 $\kappa(\boldsymbol{x})$。概率为 1 表明可保证渐近稳定性。此外，还展示了与图 6 相同的 15点网格，用于对应特征值的一个选定案例研究。另以红色虚线形状标示图 2 中稳态分布的高强度区域。

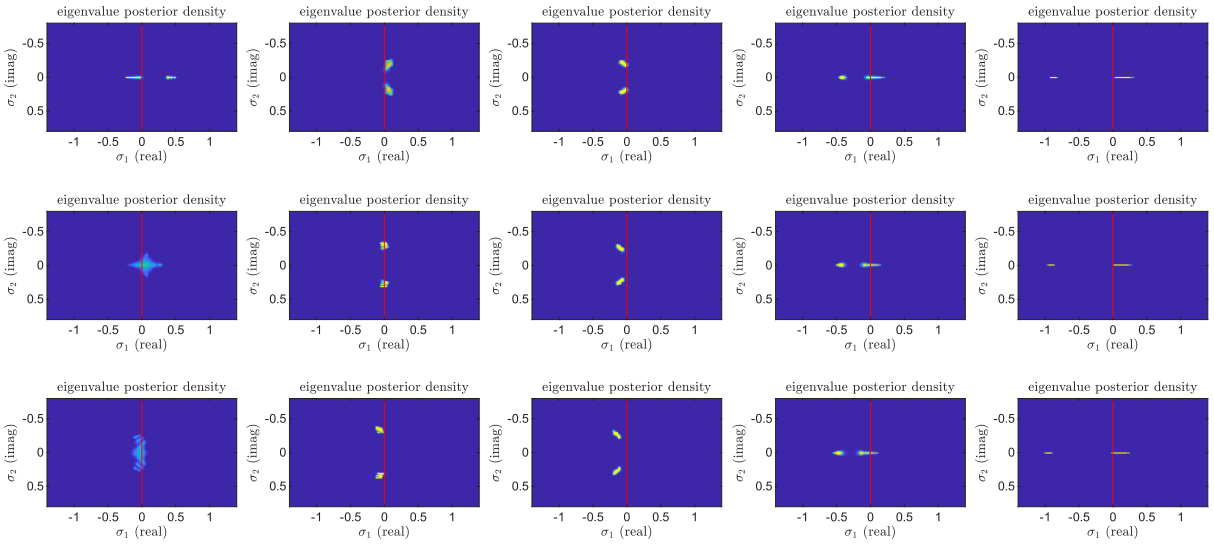


图 9：图 8 所示 15点网格对应的特征值密度 $\pi_{\text{eig}}(\boldsymbol{\sigma}; \boldsymbol{x})$ 的强度图。如果所有强度都位于红线左侧（特征值的实部为负，即 $\sigma_1 < 0$），则可保证渐近稳定性。

关于真实参数集对应的非平凡稳态概率密度函数。备注：尽管关于可能参数集的随机信息可能存在彼此分离且不兼容的来源，有效稳态分布仍可能相互重叠，也就是说，它未必会呈现这些彼此分离的可能组合（例如图 3 中所示）。

- 其次，与第一种解释类似，对于所研究总体中的某一位置和任一时刻，只有一个真实参数集；但该参数集可能随时间和/或空间变化，并且可能存在许多相邻的（本质上互不作用的）亚种群，其中包含参数密度模态的所有组合。计算得到的分布由此展示了与不同时间和位置对总体进行采样相关的稳态总体（平均）分布。

- 第三，我们认为总体本身具有非均质性，其成员的行为分别从参数密度中抽取（并不一定是在时间和/或空间上彼此分离的总体），因此，采用涵盖总体时空平均所有尺度的混合分布来表示它们最为恰当（不存在一个隐藏的、未知的、属于整个亚总体的真实参数集）。于是，结果显示了预期的稳态种群分布；对于每一次完整抽取的总体参数，我们实际上只观测到该稳态分布的一种可能实现。由此可以认为，在观测中，后验密度的某个特征值（例如期望值或众数）平均而言应当是可预期的。但必须谨慎解读这一点，因为期望值的后验密度可能为零，例如本文示例中所呈现的多峰后验就是如此。

- 第四，在最后一种解释的基础上更进一步，我们假设总体中的每个成员都根据参数集密度有效地采取行动；也就是说，我们完全放弃这样的假设：个体会始终遵循单一的真实参数集，而我们作为观察者只是不知道哪个才是真实的参数集。明确地说，这意味着我们将概率分布视为唯一的基本真实情况，因此每个成员会同时处于多个处于活动状态的不同参数状态中——这是真正的行为叠加。在此背景下，由此得到的整体稳态分布就是真实的稳态。

最后一种解释较为少见，也最值得关注，尤其是在问题的非线性导致复杂分布模式时，例如本文展示的例子。此外，这与近期将量子理论应用于生态系统时对概率的一些解释相近：其基本事实是分布本身，而非参数背后隐藏的真实状态 [Angeler 2024, H¨ubsch 2024,

Bernardini 2023]。有趣的是，因此可以将稳态方程的解直接解释为作用于这些叠加变量的非线性运算。在此背景下，我们并不关注量子理论中测量或波函数坍缩这一方面；相应地，这可以解释为对特定时刻总体数量的计数。

最重要的是，不应将这些解释视为必然相互排斥，因为它们可能同时成立，也可以被视为部分互补的视角。例如，参数概率分布的某些部分可能源于不确定性或知识缺失，另一些部分则可能源于个体间的非均质性，或总体中个体参数值的真实叠加。重要的是，这些只是对用于确定假设参数密度的概率的一种解释。一旦这些密度确定下来，应用经典概率论的论证即可直接进行数学处理。

关于稳定性分析，本文展示了如何利用 [Hoegele 2026] 中的框架，对这些稳态密度进行更深入的分析。一项主要障碍是，求解特征多项式可能得到复特征值；对此，可令特征多项式的实部和虚部同时为零，从而得到两个实值随机方程。由于这种方法具有普适性，稳态强度计算及其稳定性分析都可以轻松推广到任意常微分方程系统。

从数学建模和数值计算的角度来看，在 [Hoegele 2026] 中应用概率方法，可以高效地计算随机微分方程的稳态，而无需通过计算成本高昂的仿真来求得随时间变化的解趋于稳态的过程，也无需像图5中的验证那样迭代求解非线性稳态方程组。本研究的目标之一，就是展示该方法在所给示例中的高效与简洁。

众所周知，捕食者-猎物模型的研究发现往往可直接应用于流行病动力学 [G´omez-Hern´andez 2024] 。在这一背景下，当部分疾病参数和/或康复参数存在不确定性，或因总体的多样性而呈现多峰特征时，所计算出的分布有助于估算公共卫生需求。

此外，显而易见的是，这一用于计算稳态分布及其稳定性分析的框架可直接应用于任何希望扩展为随机微分方程的常微分方程组，因为所有显式常微分方程系统都可以改写为一阶形式；将所有时间导数设为零后，即可通过求解文中所述的剩余代数（通常为非线性）随机方程组，得到稳态解。只需确定随机方程组 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{B}$ 的组成要素，并建立参数密度模型即可。因此，本研究也可视为一个示例，说明如何计算其他领域中结合动力学行为与不确定性或叠加的系统的稳态。这种方法如何扩展到求解具有参数不确定性的偏微分方程（PDE）的稳态解，或许可留待未来研究；不过，若在数值近似过程中将偏微分方程改写为大型常微分方程组，便可建立直接联系。

5 结论

在这项简明的研究中，我们展示了关于 Rosenzweig-MacArthur 捕食者-猎物模型参数的随机信息如何导出非平凡稳态的概率分布。此外，我们还说明，当系统的参数密度采用混合模型时，这种扩展会产生复杂的稳态分布。此外，我们还展示了如何基于这些随机分布的参数进行稳定性分析。我们对这类系统及其相应结果作出了多种解读，包括从非相干叠加的角度运用类量子方法这一概念；我们认为，这是看待这类系统的一种真正新颖的方式。研究表明，利用近期开发的方法即可高效完成所有数值计算。

声明

数据可用性

本研究期间生成和/或分析的数据集目前未公开，但可在合理请求下向通讯作者索取。

利益冲突

作者没有需要披露的相关财务利益或非财务利益。

经费资助

作者声明，在本稿件撰写过程中未获得任何资金、资助或其他支持。

作者贡献

不适用，因采用单人署名。

致谢

不适用。

伦理审批

不适用。

参考文献

[Jornet 2023] Jornet, M. 随机微分方程理论与方法：综述。SeMA 80, 549–579, 2023. https://doi.org/10.1007/s40324-022-00314-0

[G´omez-Hern´andez 2024] Enith A. G´omez-Hern´andez, Felipe N. Moreno-G´omez, Fernando C´ordova-Lepe, Mois´es Bravo-Gaete, Nelson A. Vel´asquez, Hugo A. Ben´ıtez, 生态流行病学捕食者–猎物模型：常微分方程模型综述，Ecological Complexity 57, 101071, 2024. https://doi.org/10.1016/j.ecocom.2023.101071.

[Stollenwerk 2022] N. Stollenwerk, M. Aguiar, B.W. Kooi, 含质量守恒的确定性与随机食物链模型中的 *Holling II* 型功能反应建模，Ecological Complexity 49, 100982,2022, https://doi.org/10.1016/j.ecocom.2022.100982.

[Wyse 2022] Sarah K. Wyse、Maria M. Martignoni、May Anne Mata、Eric Foxall、Rebecca C. Tyson，捕食者–猎物模型功能反应的结构敏感性，Ecological Complexity 51，101014，2022，https://doi.org/10.1016/j.ecocom.2022.101014。

[Wang 2025] Louis Shuo Wang、Jiguang Yu，具有内部随机性的 *Rosenzweig-MacArthur* 模型的适定性，arXiv:2505.16904 [math.PR], 2025, https://doi.org/10.48550/arXiv.2505.16904

[Hoegele 2026] Wolfgang Hoegele，具有混合模型的随机方程的组合潜力：建模与仿真，Mathematics and Computers in Simulation 239，第 696-715 页，2026，https://doi.org/10.1016/j.matcom.2025.07.033。

[Angeler 2024] Angeler, D.G., Fried-Petersen, H.B.生态模型中量子叠加的相似之处：从反直觉模式到对隐存种的生态进化解释.BMC EcolEvo 24, 15 (2024).https://doi.org/10.1186/s12862-024-02206-5

[H¨ubsch 2024] Tristan H¨ubsch, Djordje Minic, Konstantin Nikolic, Sinisa Pajevic, 论复杂适应系统中涌现的“量子”理论, Annals of Physics 464, 169641, 2024, https://doi.org/10.1016/j.aop.2024.169641.

[Bernardini 2023] Bernardini, A.E., Bertolami, O. 量子捕食者—猎物动力学：高斯系综分析. Found Phys 53, 63 (2023). https://doi.org/10.1007/s10701-023-00703-z[Wichert 2021] Wichert, A. 类量子高斯混合模型. Soft Comput 25, 10067–10081, 2021. https://doi.org/10.1007/s00500-021-05941-9[Khrennikov 2023] Khrennikov, A. 用于生物学、认知与决策中类量子建模的开放系统、量子概率与逻辑. Entropy 2023, 25, 886. https://doi.org/10.3390/e25060886[Facco 2022] Facco, E., Fracas, F. 论（不确定的）自然：对“类量子”概念的尝试性探讨. Symmetry 2022, 14, 480. https://doi.org/10.3390/sym14030480[Aulbach 2004] Aulbach, B. 常¨微分方程. Spektrum Akademischer Verlag 海德堡, 2004. https://link.springer.com/book/9783827414922