arXiv:2603.03847v1 [math.NA] 4 Mar 2026

对流扩散方程局部间断伽辽金方法的最优收敛

刘文杰[1], 谢瑞怡[1], 王立廉[2] 和张志敏[3]

Abstract. 由 Castillo 等人提出的 hp 局部间断伽辽金（LDG）方法[《数学计算》71（238）：455–478, 2002] 已被证明是求解对流–扩散方程的一种高效方法。然而，理论分析表明，对于空间正则性有限的解，该方法呈现次优收敛 p，与数值实验相比会损失一个阶。本文旨在弥合理理论估计与数值证据之间的差距。为此，我们针对适当函数空间中的函数，建立了相关高斯–拉东投影的新逼近结果；这些函数空间能够最优地刻画奇异解的正则性。我们证明，这一框架自然形成，并可用于研究各种类型的奇异解，使理论分析与数值结果完全一致。本研究为解决文献中不同情形下其他几类 DG 格式所观察到的次优性 p 提供了思路。

1. Introduction

间断Galerkin（DG）有限元方法最早于 20 世纪 70 年代初被提出，用于求解中子输运方程 [16], ，此后发展成为数值求解各类偏微分方程（PDE）的强大框架。Cockburn 和 Shu [11] 提出的局部间断伽辽金（LDG）方法通过引入适当的辅助变量和数值通量，将 DG 技术推广至一般的对流扩散算子；该方法以早期对黏性项进行 DG 离散的工作为基础，例如 Bassi 和 Rebay [2]为可压缩纳维–斯托克斯方程提出的格式。DG 方法在实践中应用广泛，因为它们能够灵活处理任意非结构网格，在并行实现中效率很高，并且能够处理复杂几何和界面，还支持一般的 hp-自适应。

在理论分析层面，关于网格尺寸 h 与多项式次数 p的最优收敛率结果之间存在显著差异。对于前者，最优 h-收敛——甚至超收敛（对于 Q_k）——的理论问题，对于采用 P_k 多项式空间的三角形网格以及采用 Q_k多项式空间的张量积网格，早已得到解决（见 [4, 5, 7, 8]）。最近，对于 P_k 空间也取得了新进展

2020 *Mathematics Subject Classification.* 41A10、41A25、65M60、65N30。*Key words and phrases.* 局部间断伽辽金方法，对流扩散方程，高斯–拉东投影，最优收敛，奇异解。[1]中国哈尔滨市哈尔滨工业大学数学学院，邮编 150001。第一作者的研究获国家自然科学基金委员会资助（项目编号：12271128），以及黑龙江省自然科学基金资助（项目编号：YQ2023A002）。电子邮箱：liuwenjie@hit.edu.cn，22B912009@stu.hit.edu.cn。第一作者为通讯作者。[2]新加坡南洋理工大学理学院数学科学部，邮编 637371。该作者的研究部分获新加坡教育部学术研究基金一级资助（项目编号：RG95/23）和新加坡教育部学术研究基金二级资助（项目编号：MOE-T2EP20224-0012）。电子邮箱：lilian@ntu.edu.sg。[3]美国密歇根州底特律市韦恩州立大学数学系，邮编 48202。电子邮箱：ag7761@wayne.edu。

在张量积网格上（见 [6]）。相比之下，即使在一维情形中，关于多项式次数 p 的最优收敛阶仍未解决。Castillo等人2002年的工作 [9] 仅得到了次优结果，此后一直没有新的理论进展。我们的工作正是在这一背景下产生的。

我们关注的是 Castillo 等人 [9]提出的用于对流–扩散问题的原型 hp-DG 格式。该方法基于对局部通量的精心构造，并结合对相关高斯–拉杜投影的细致分析来完成收敛性证明。事实上，这一方法启发了算法开发和相关分析领域的大量后续研究。例如，Perugia 和 Sch¨otzau [22] 针对二维和三维空间中带有悬挂节点的非结构网格上的扩散问题，引入了 hp-LDG方法，并进一步将其发展用于低频时谐麦克斯韦方程 [23]。Sch¨otzau、Schwab 和 Toselli [24] 构造了用于不可压缩流的混合 hp-DGFEM，并推导了斯托克斯问题的先验 hp-误差估计。此外，Celiker 和 Cockburn [10] 研究了一维对流–扩散问题中更广泛的一类 DG 型方法和杂交方法的数值迹超收敛性。Houston、Sch¨otzau 和 Wihler [13] 在网格相关能量范数下，推导了椭圆边值问题的内罚 DG 离散的 hp-版本后验误差界。作为 DG 方法用于双曲问题的相关工作，Meng、Shu 和 Wu [20] 证明了时间相关线性输运问题中偏上风通量的最优先验误差估计；而 Meng 和 Ryan [19] 则利用差商误差估计，获得了一维非线性标量守恒律的超收敛和后处理结果。上述列表远非穷尽。

然而，理论上早已知道，某些 hp-局部间断Galerkin格式对于空间正则性有限的解，可能在 p 中损失收敛阶。事实上， [9] 中的误差分析表明在 p中呈次优收敛，并如数值测试中所观察到的那样损失一个阶。相关的 p-次优性也在 [22, 23], 中被报道，其中误差估计关于网格尺寸 h是最优的，但关于 p 略次优（在一般网格上于 [22],中损失半阶，并在 [23]中损失 p 的半次幂）。其他间断Galerkin格式在有限正则性下表现出类似的 p-次优行为。对于对流–扩散–反应问题，Houston、Schwab与S¨uli [14]证明了在双曲区域中 hp-最优、但在椭圆情形中 $p^{1/2}$-次优的界，而Georgoulis等人 [12] 表明，在标准索伯列夫正则性假设下，二阶椭圆边值问题的 p版本内罚间断Galerkin方法在 p 中损失半阶。

本工作的目标是弥合 [9] 中的误差估计与其中数值证据之间的理论差距。更准确地说，我们为适当空间中的奇异函数建立了一种新的高斯–拉东投影逼近框架，该框架能够最优地刻画其正则性。我们证明，这种框架自然地产生，并使我们能够研究各种类型的奇异解（例如与网格对齐或不对齐的内部奇异性），并获得局部间断Galerkin格式在 p 中的最优阶收敛。尽管我们的分析仅限于 [9], 中的一维情形，所提出的框架也为解决其他情形中观察到的 p次优性提供了思路。这些扩展将在后续工作中报告。

本文组织如下。第2节回顾对流-扩散方程的局部间断Galerkin方法，以及 [9] 中给出的误差估计结果。第3节基于勒让德展开系数的分数阶正则性刻画，推导具有端点奇异性的解的最优 p–版本误差估计。我们将局部间断Galerkin分析扩展至内部

奇异性，并在第4节区分拟合与非拟合情形。最后，在第5节中，我们以一些评述作为本文的结尾。

2. The hp-LDG scheme and its a priori estimates in [9]

本节介绍针对 [9] 中研究的模型对流扩散方程的 hp-LDG 方法，并陈述其中的主要收敛结果。随后，我们讨论该方法对奇异解的次优性，这也促使我们在下一节引入一种新的框架，以获得最优估计。

我们考虑具有 [9] 中所示初始条件和狄利克雷边界条件的对流扩散方程:

$$u_t + (c\,u - d\,u_x)_x = f \quad \text{in} \quad Q_T := I \times J, \tag{2.1a}$$

$$u(x,0) = u_{\mathrm{ic}}(x) \quad \text{on} \quad I := (a,b), \tag{2.1b}$$

$$u(a,t) = g_a(t), \quad u(b,t) = g_b(t) \quad \text{on} \quad J := (0,T), \tag{2.1c}$$

其中，速度为 $c > 0$ ，扩散系数为 $d \geq 0.$ 。注意，在纯对流情形（$d = 0$）下，仅施加 $x = a$ 处的狄利克雷边界条件。

为构造局部间断Galerkin格式，我们将区间 I 划分为互不重叠的子区间:

$$\mathcal{T} = \big\{ I_j := (x_{j-1}, x_j) : \ j = 1, \ldots, M \big\},$$

节点为: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{M-1} < x_M = b.$ 记作 $h_j := |I_j| = x_j - x_{j-1}$ 和 $h := \max\{h_j\}$. 对于网格 $\mathcal{T}$，我们定义所谓的分片Sobolev空间

$$H^1(I;\mathcal{T}) := \big\{ v : I \to \mathbb{R} \ : \ v|_{I_j} \in H^1(I_j), \ j = 1, \ldots, M \big\}$$

令 $(u,v)^{I_j} := \int_I u(x)v(x)\mathrm{d}x$ 表示 $L^2(I_j)$, 上的内积，并记 $u(x_j^{\pm}) := \lim^{x \to x_j^{\pm}} u(x)$.我们进一步定义分片多项式的近似空间:

$$V_h^p = \big\{ \phi : I \to \mathbb{R} \ : \ \phi|_{I_j} \in \mathcal{P}_{p_j}, \ j = 1, \ldots, M \big\},$$

其中 $\mathcal{P}_p$ 表示次数至多为 p的多项式集合。文献 [9]中针对 (2.1) 提出的局部间断Galerkin格式是求解 $u_h^p(\cdot,t)$ $q_h^p(\cdot,t) \in V_h^p$，使得对于 $t \in (0,T)$，满足

$$\begin{aligned} ((u_h^p)_t, v)_{I_j} - (c\,u_h^p - \sqrt{d}\,q_h^p, v_x)_{I_j} + \hat{h}_u v \Big|_{x_{j-1}^+}^{x_j^-} &= (g,v)_{I_j}, \\ (q_h^p, r)_{I_j} + \sqrt{d}(u_h^p, r_x)_{I_j} + \hat{h}_q r \Big|_{x_{j-1}^+}^{x_j^-} &= 0, \\ (u_h^p(\cdot,0), v)_{I_j} &= (u_{\mathrm{ic}}, v)_{I_j}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

对于所有 $v, r \in V_h^p$ 以及 $j = 1, \ldots, M,$ 其中 [9] 中的数值通量选为

$$(\hat{h}_u, \hat{h}_q)^\top = \begin{cases} \big(c\,g_a(t) - \sqrt{d}\,q(a^+), -\sqrt{d}\,g_a(t)\big)^\top, & \text{for } j = 0, \\ \big(c\,u(x_j^-) - \sqrt{d}\,q(x_j^+), -\sqrt{d}\,u(x_j^-)\big)^\top, & \text{for } j = 1, \ldots, M-1, \\ \big(\hat{u}(b) - \sqrt{d}\,q(b^-), -\sqrt{d}\,g_b(t)\big)^\top, & \text{for } j = M, \end{cases} \tag{2.3}$$

with

$$\hat{u}(b) = c\,u(b^-) - \max\{c/2, \max\{1, p_M\}d/h_M\}(g_b(t) - u(b^-)). \tag{2.4}$$

再次注意，在纯对流情形 $d = 0$ 下，此数值通量就是原始间断Galerkin方法所使用的标准迎风通量。

我们回顾一下 [9, 定理 3.4] 中陈述的先验误差估计。

定理 2.1。（见 [9, 定理 3。4]）。设 u 为 (2.1) 的解，且 $q = \sqrt{d}\, u_x$，并设$(u_h^p, q_h^p)^\top$ 为 (2.2)-(2.4) 的局部间断伽辽金解。假设 u 具有正则性$\|u^{(s+1)}\|_{\mathcal{E},\, T} < \infty$其中 $s \geq 0$，范数$\|\cdot\|_{\mathcal{E},\, T}$定义为

$$\|w\|_{\mathcal{E},T} := 2 \sup_{0\leq t\leq T} \|w(\cdot,t)\| + \int_0^T \|w_t(\cdot,t)\|\,\mathrm{d}t + 3\sqrt{d}\,\|w_x\|_{Q_T}\,.$$

则我们有如下误差估计

$$\|(u-u_h^p)(\cdot,T)\| + \|q-q_h^p\|_{Q_T} \leq C(s)\frac{h^{\min\{s,p\}+1}}{\max\{1,p\}^{s+1}}\big\|u^{(s+1)}\big\|_{\mathcal{E},T}, \tag{2.5}$$

其中 p =最小值$\{p_j\}$，且 $C(s)$ 依赖于 s，但与 h、p 和 u无关。

为阐明我们的分析，我们概述证明定理 2.1 的两个主要要素。第一是引入高斯–拉杜投影（见 [9, (3.1)-(3.2)]）。令 $\pi^{\pm}$: $H^1(I;\mathcal{T}) \to V_h^p$ 为由 $\pi^{\pm}u|_{I_j} = \pi_{p_j}^{\pm}(u|_{I_j})$ 在每个子区间 $I_j = (x_{j-1},\ x_j)$ $j = 1,\ \ldots,\ M$，上定义的投影，其中局部投影满足以下 $p_j + 1$ 条件:

$$\begin{aligned} &(\pi_{p_j}^{\pm}\omega - \omega, v)_{I_j} = 0, \quad \forall\, v \in \mathcal{P}_{p_j-1}(I_j), \\ &\pi_{p_j}^{-}\omega(x_j) = \omega(x_j^-), \quad \pi_{p_j}^{+}\omega(x_{j-1}) = \omega(x_{j-1}^+). \end{aligned} \tag{2.6}$$

然后在分析中，$(\pi^- u, \pi^+ q)$ 分别应用于 (u,q)，第二个是以下重要估计（见 [9,第 460-461] 页）：

$$\begin{aligned} \|(u-u_h^p)(\cdot,T)\| + \|q-q_h^p\|_{Q_T} \leq \sqrt{A(T)} &+ \int_0^T \|(\pi^- u_t - u_t)(\cdot,t)\|\,\mathrm{d}t \\ &+ \sup_{0\leq t\leq T}\|(\pi^- u - u)(\cdot,t)\| + \|\pi^+ q - q\|_{Q_T}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

其中

$$A(T) = \|\pi^- u_{\mathrm{ic}} - u_{\mathrm{ic}}\|^2 + \|\pi^+ q - q\|_{Q_T}^2 + \frac{d}{c_{11}(b)}\|(\pi^+ q - q)(b^-,\cdot)\|_{(0,T)}^2, \tag{2.8}$$

其中 $c_{11}(b)$ =max$\{c/2, \max\{1, p_M\}d/h_M\}$. 借助 (2.7)，可以根据 $\pi^{\pm}$ 在 [9, 引理 3.1-3.2]中给出的逼近结果，推导出先验估计 (2.5)。

正如 [9], 所指出的，估计 (2.5) 对光滑解在 h 和 p方面都是最优的，但对于奇异解，在 p 方面则不是最优的。 [9] 中考察的一个典型例子是将该格式应用于精确解 $u(x,t) = x^\pi t$. 其中的主要理论预测和数值观察总结如下。

(i) 对于 h-版本（固定 p），定理 2.1 预测 h中的预期阶数分别为 min$\{\pi + 0.5, p+1\}$ 和 min $\{\pi - 0.5, p+1\}$，对应于 $d = 0$ 和 $d \neq 0$，该结果是最优的，并得到多项数值证据的验证。

（ii）对于 p 版本（固定 h），定理 2.1 在双曲情形（即 $d = 0$）下只能得到 2π 的收敛阶，在对流扩散情形（即 $d \neq 0$）下只能得到 $2\pi - 2$ 的收敛阶，但预计最优阶分别为 $2\pi + 1$（对于 $d = 0$）和 $2\pi - 1$（对于 $d \neq 0$）（数值验证另见 [9, 图 3]）。因此，对于两种情形，即 $d = 0$ 和 $d \neq 0$，均声称定理 2.1 中的估计存在一个阶的损失： p。

与关于 $d \neq 0$ 情形的说法（ii）不同，我们进行了与 [9, 图 3] 中相同的数值测试，发现 p 中的阶数损失实际上应为 $1/2$ 。换言之，对于 $d \neq 0.$，最优收敛阶应为 $2\pi - \frac{3}{2}$，而不是 $2\pi - 1$。为便于比较，我们将 [9, 图 3] 中的结果截图展示在图 2.1（左）中（其中未描绘误差曲线的斜率），并在图 2.1（右）中绘制了带有斜率的恢复结果，这些结果清楚地表明了最优阶：$2\pi + 1$ 对于 $d = 0$，以及 $2\pi - \frac{3}{2}$ 对于 $d \neq 0.$。我们特别指出，采用了与 [9] 中相同的设置（固定均匀网格，包含四个单元，同时增加 p），因此在所有实验中，我们都采用了 TVD Runge–Kutta时间步进方法 [27]，并使用足够小的时间步长，使总体数值误差由空间误差主导。

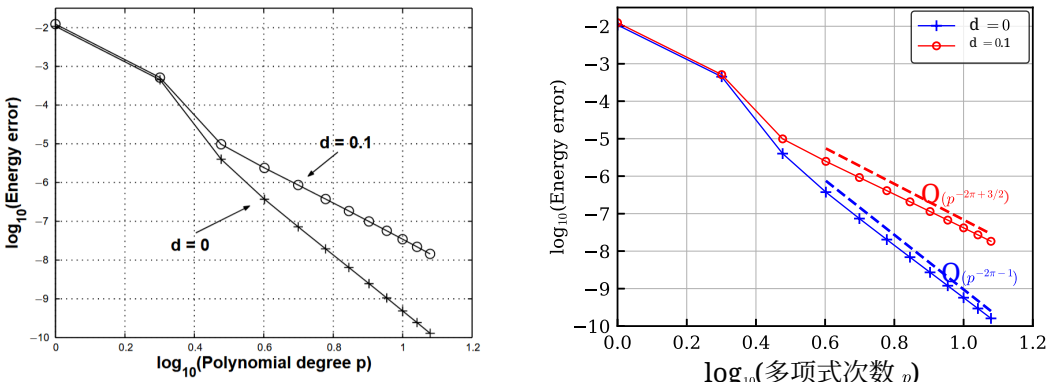

FIGURE 2.1. 奇异解 $u(x,t)$ 的 p 版本 LDG 误差图 $=x^{\pi}t$，对流系数：$c = 0.1$，扩散系数：$d = 0.1$ 和 $d = 0$。左：[9, 图 3] 的快照。右：利用误差图的斜率复现相同结果。

本文其余部分旨在弥合这一差距。我们将建立一个新框架，以推导奇异解的最优估计，并探讨其推广。

3. OPTIMAL ERROR ESTIMATES FOR SINGULAR SOLUTIONS

本节重点分析端点奇异性。关键在于对勒让德多项式展开的系数进行精细分析，从而给出分数阶正则性的最优刻画，其思路遵循 [17]。

3.1. 启发性例子。为说明这一思想，我们考虑更一般的奇异解$u(x,t) = x^{\alpha}(c_1 + c_2 x^{\beta} + \cdots)$ $x \in \hat{}$ $I := (0,1)$ $0 < t \leq T$，其中 $\alpha > 0$ 为非整数，$\beta > 0$，且c_1、c_2 是 $t.$ 的光滑函数。因此，$u(x,t)$ 呈现出阶为 α 的主导代数奇异性，特别地包含 $u(x,t) = \mu(x,t)\, x^{\alpha}$ 这一特例，其中 $\mu(x,t)$ 是光滑的（因而可在 $x = 0$ 处作泰勒展开）。设 $\alpha \in (k-1, k)$，其中 $k \geq 1.$ 为整数。于是，直接计算可得

$$\partial_x^i u = \left(c_1 \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-i+1)} + c_2 \frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta-i+1)} x^{\beta} + \cdots \right) x^{\alpha-i}, \quad i = 1, \ldots, k,$$

这意味着 u，$\partial_x u$，$\cdots$，$\partial_x^k u \in L^1(\hat{}I)$。接下来我们证明，$u(x,\ t)$ 存在一个阶为 $k < \alpha + 1 < k + 1$ 的“分数阶导数”，这是恢复最优阶 $2\alpha + 1$ (对于 $d = 0$) 的关键

in p （见定理 3.2）。实际上，利用黎曼-刘维尔分数阶积分公式（例如参见[15,第 81] 页）：

$$\mathcal{I}_{0+}^{s} x^{\nu} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^x \frac{y^{\nu}}{(x-y)^{1-s}} \, \mathrm{d}y = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+s+1)} x^{\nu+s}, \quad \nu > -1, \ \ s > 0,$$

我们立即推导出

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{0+}^{k-\alpha} \partial_x^k u &= c_1 \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-k+1)} \mathcal{I}_{0+}^{k-\alpha} x^{\alpha-k} + c_2 \frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta-k+1)} \mathcal{I}_{0+}^{k-\alpha} x^{\alpha+\beta-k} + \cdots \\
&= c_1 \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-k+1)} \Gamma(\alpha-k+1) + c_2 \frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta-k+1)} \frac{\Gamma(\alpha+\beta-k+1)}{\Gamma(\beta+1)} x^{\beta} + \cdots \\
&= c_1 \Gamma(\alpha+1) + c_2 \frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\beta+1)} x^{\beta} + \cdots = {}^{C}\mathcal{D}_{0+}^{\alpha} u,
\end{aligned}$$

这实际上就是 [15] 等文献中定义的 u 的 α 阶（左）卡普托分数阶导数。显然，我们至少还可以再求一个导数： $\partial_x({}^{C}\mathcal{D}_{0+}^{\alpha} u) = \mathcal{O}(x^{\beta-1}) \in L^1(I)$。有趣的是，如果我们重新考察 [9], 中的例子 $u(x, \ t) = x^{\pi} t$ ，那么 ${}^{C}\mathcal{D}_{0+}^{\pi} u = \Gamma(\pi+1) t \in C^{\infty}$。事实上，正如定理 3.2 的证明中将要说明的（见 (3.15)），可微性性质 $\partial_x^m({}^{C}\mathcal{D}_{0+}^{\alpha} u)$ 以及 $|\partial_x^i({}^{C}\mathcal{D}_{0+}^{\alpha} u)(0+)|$ 对所有 $0 \le i \le m$ 的有界性，直接决定了高斯–拉杜投影误差在 p 中的阶。更重要的是，尽管记号看起来有些繁复，所涉及的函数空间和范数却由通过整数阶与分数阶分部积分得到的勒让德展开系数精确公式自然决定（见 (3.15)）。

基于上述认识，我们现在引入函数空间，以最优地刻画奇异解的ˆ分数阶正则性。令 $\Lambda := (\hat{a}, b)$ 为任意有限区间，稍后将取为 $I_1 = (a, x_1)$ 和 $I_{\mathrm{ref}} = (-1, 1)$, 等。令 $W^{k,1}(\Lambda) \subset L^1(\Lambda)$ 表示整数$k \ge 1$ 时的通常索伯列夫空间，如 Admas [1] 中所述。从上述例子可以看出，我们需要刻画 u 及其分数阶导数的正则性，由此得到下面具有两个正则性指标的空间。更确切地，对于 $\alpha \in (k-1, k)$ 和 $k, m \in \mathbb{N},$ ，我们定义空间

$$\mathcal{U}_{\hat{a}+}^{\alpha,m}(\Lambda) := \big\{ u \, : \, u \in W^{k,1}(\Lambda) \ \text{ and } \ {}^{C}\mathcal{D}_{\hat{a}+}^{\alpha} u \in W^{m,1}(\Lambda) \big\}, \tag{3.1}$$

其半范数为:

$$U_{\hat{a}+}^{\alpha,m}(u; \Lambda) := \big\| \mathcal{D}^m \big({}^{C}\mathcal{D}_{\hat{a}+}^{\alpha} u \big) \big\|_{L^1(\Lambda)} + \sum_{i=0}^{m-1} \big| \mathcal{D}^i \big({}^{C}\mathcal{D}_{\hat{a}+}^{\alpha} u \big)(\hat{a}+) \big|, \tag{3.2}$$

其中， $\mathcal{D}^m$ 是 m 阶整数阶导数算子。注意，对于任意 $u \in \mathcal{U}^{\alpha}{}_{,m\,\hat{a}+}$, $\mathcal{D}^i \big({}^{C}\mathcal{D}_{\hat{a}+}^{\alpha} u \big)(\hat{a}+)$，当 $i = 0, 1, \ldots, m-1$ 时，由索伯列夫嵌入性质（见 [3, P. 212]）可知它们均为有限值。

3.2. 主要结果。 现在，我们可以给出具有（左）端点奇异性的解类的最优收敛结果。定义与网格 $\mathcal{T}$ 相关的分片Sobolev空间:

$$\mathcal{W}_{a+}^{\alpha,m,s}(I; \mathcal{T}) := \big\{ v : I = (a, b) \to \mathbb{R} \, : \, v|_{I_1} \in \mathcal{U}_{a+}^{\alpha,m}(I_1), \ v|_{I_j} \in H^{s+1}(I_j), \ j = 2, \ldots, M \big\}, \tag{3.3}$$

配备以下半范数:

$$\|u\|_{\mathcal{W}} := \|u\|_{\mathcal{W}_{a+}^{\alpha,m,s}(I;\mathcal{T})} := U_{a+}^{\alpha,m}(u; I_1) + \sum_{j=2}^{M} \|u^{(s+1)}\|_{L^2(I_j)}. \tag{3.4}$$

定理 3.1。 令 u 为 (2.1) 的解，且令 $q=\sqrt{d}\,u_x$，并令$(\overline{u}_h^p, q_h^p)^\top$ 为 (2.2)–(2.4)的局部间断伽辽金解。记并假设

$$|||u|||_{\mathcal{E},T} := 2\sup_{0\le t\le T}\|u(\cdot,t)\|_{\mathcal{W}} + 3\sqrt{d}\Big(\int_0^T \|u(\cdot,t)\|_{\mathcal{W}}^2\,\mathrm{d}t\Big)^{1/2} + \int_0^T \|u_t(\cdot,t)\|_{\mathcal{W}}\,\mathrm{d}t < \infty. \tag{3.5}$$

则对于 $h=$最大值$\{h_j\}$ 以及 $p=$最小值$\{p_j\}$，当 $p>\alpha+m-1$时，有

(i) 对于 $d=0$ 和 $p\ge s$,

$$\|(u-u_h^p)(\cdot,T)\| \le C\Big(\frac{h^{\alpha+1/2}}{p^{\min\{2\alpha+1,\alpha+m-1/2\}}} + \frac{h^{s+1}}{p^{s+1}}\Big)|||u|||_{\mathcal{E},T}; \tag{3.6}$$

(ii) 对于 $d\neq 0$ 和 $p\ge s-1$,

$$\|(u-u_h^p)(\cdot,T)\| + \|q-q_h^p\|_{Q_T} \le C\Big(\frac{h^{\alpha-1/2}}{p^{\min\{2\alpha-3/2,\alpha+m-3/2\}}} + \frac{h^{s}}{p^{s}}\Big)|||u|||_{\mathcal{E},T}, \tag{3.7}$$

其中常数 C 取决于 α、s，但与 h、p 和 u无关。

注 3.1。 我们重新考察这个动机示例：$u(x,t)=x^\alpha(c_1+c_2x^\beta+\cdots)$ $x\in I=(a,b)=(0,1)$，其中 $\alpha>0$为非整数，$\beta>0$，且 c_1，c_2是 $t\in[0,T]$，的光滑函数，在第 3.1 小节中进行了研究。根据定义 (3.1)-(3.2) 及之前的分析可以验证，对于固定的$t>0$，，首项 $c_1x^\alpha\in\mathcal{U}^{\alpha,\ 0+}{}^{\infty}(I_1)$ 和第二项 $c_2x^{\alpha+\beta}\in\mathcal{U}^{\alpha+\beta,\ 0+}{}^{\infty}(I_1)$，因此在 p 中的相应阶分别为 $\mathcal{O}(p^{-(2\alpha+1)})$（对于 $d=0$）和 $\mathcal{O}(p^{-(2\alpha-3/2)})$（对于 $d\neq 0$）。事实上，如图 2.1 所示，理论预测与数值误差吻合良好。

由 (3.6)（分别由 (3.7)）可知，若 $m+\alpha-1/2\le 2\alpha+1$，即 $m\le\alpha+3/2$（分别为 $m\le\alpha$），则 ${}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{\hat{a}+}u$ 的正则性占主导，因此对于 $d=0$，收敛阶为 $\mathcal{O}(p^{-(\alpha+m-1/2)})$（分别对于 $d\neq 0$，收敛阶为 $\mathcal{O}(p^{-(\alpha+m-3/2)})$。在第 4.3 小节中，我们将通过一些数值结果展示这种收敛行为，见图 4.2（右）。□

为证明上述定理中陈述的主要结果，我们先做一些必要的准备。

3.3. 高斯–拉杜投影的最优估计。对于任意满足 $I_{\mathrm{ref}}=(-1,1)$，的 $\omega\in L^1(I_{\mathrm{ref}})$，其勒让德展开系数及相应的 L^2-正交投影定义如下

$$\hat{\omega}_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}\omega(\xi)L_n(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \quad (\Pi_p\,\omega)(\xi)=\sum_{n=0}^{p}\hat{\omega}_n\,L_n(\xi), \tag{3.8}$$

其中 $L_n(\xi)$ 是 $n.$ 次勒让德多项式。与（2.6）中一样，我们定义参考区间上的高斯–拉杜投影：$\Pi_p^{\pm}$: $W^{1,\ 1}(I_{\mathrm{ref}})\to\mathcal{P}_p(I_{\mathrm{ref}})$，使得

$$(\Pi_p^{\pm}\omega-\omega,v)_{I_{\mathrm{ref}}}=0, \quad \forall\, v\in\mathcal{P}_{p-1}(I_{\mathrm{ref}}); \quad \Pi_p^{\pm}\omega(\mp1)=\omega(\mp1). \tag{3.9}$$

我们将使用以下基本恒等式（参见 [9, 命题 3.12]）。

引理3.1. 对任意 $\omega\in W^{1,1}(I_{\mathrm{ref}})$，我们有

$$\|\omega-\Pi_p^{\pm}\omega\|^2_{L^2(I_{\mathrm{ref}})} = \|\omega-\Pi_p\omega\|^2_{L^2(I_{\mathrm{ref}})} + \frac{2}{2p+1}\Big(\frac{\hat{\omega}'_p}{2p+1}\mp\frac{\hat{\omega}'_{p+1}}{2p+3}\Big)^2, \tag{3.10}$$

and

$$|(\omega-\Pi_p^{\pm}\omega)(\pm1)| = \frac{2}{2p+1}|\hat{\omega}'_p|, \quad \hat{\omega}'_p=\frac{2p+1}{2}\int_{-1}^{1}\omega'(\xi)L_p(\xi)\,\mathrm{d}\xi. \tag{3.11}$$

上述引理表明，我们可以通过估计 L^2-投影以及 $\omega'(\xi)$的最后两个展开系数来推导高斯-拉道投影误差，如下所示。

定理 3.2. 设 $\alpha \in (k-1,k)$ 与 $k,m \in \mathbb{N}.$。则对任意 $\omega \in \mathcal{U}^{\alpha,\ m}_{-1+}(I_{\mathrm{ref}})$，在 $1/2 < \alpha+m < p+1$ 的条件下，我们有

$$\|\omega - \Pi_p^- \omega\|_{L^2(I_{\mathrm{ref}})} \le C p^{-\min\{2\alpha+1,\alpha+m-1/2\}} U^{\alpha,m}_{-1+}(\omega; I_{\mathrm{ref}}), \tag{3.12}$$

$$\|\omega - \Pi_p^+ \omega\|_{L^2(I_{\mathrm{ref}})} \le C p^{-\min\{2\alpha+1/2,\alpha+m-1/2\}} U^{\alpha,m}_{-1+}(\omega; I_{\mathrm{ref}}), \tag{3.13}$$

and

$$|\omega(\pm 1) - \Pi_p^{\pm} \omega(\pm 1)| \le C p^{-\min\{2\alpha,\alpha+m-1/2\}} U^{\alpha,m}_{-1+}(\omega; I_{\mathrm{ref}}), \tag{3.14}$$

其中 C 是与 p 和 ω无关的正常数。

证明. 该证明主要依赖于对由整数阶与分数阶分部积分导出的勒让德展开系数精确公式的精细分析（见 [18, 定理 4.1]）：对于 $n > \alpha+m$,

$$\begin{aligned}\hat{\omega}_n = {} & \frac{2n+1}{2^{\alpha+m+1}\Gamma(\alpha+m+1)} \int_{-1}^{1} (1-\xi^2)^{\alpha+m}\, {}^{r}G^{(\alpha+m+1/2)}_{n-\alpha-m}(\xi)\, v^{(m)}(\xi)\, \mathrm{d}\xi \\ & - \sin(\alpha\pi) \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{n+i}\, \widehat{C}_{n,\alpha+i}\, v^{(i)}(-1+),\end{aligned} \tag{3.15}$$

其中

$$v(\xi) := {}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{-1+}\omega(\xi), \quad \widehat{C}_{n,\beta} := 2^{\beta}\Gamma(\beta+1)\frac{2n+1}{\pi}\frac{\Gamma(n-\beta)}{\Gamma(n+\beta+2)}, \tag{3.16}$$

且 ${}^{r}G^{(\alpha+m+1/2)}_{n-\alpha-m}(\xi)$ 是分数阶广义 Gegenbauer 函数（GGF-F），它通过超几何函数定义（参见 [17, 定义 2.1]）：对于实数 $\lambda > -1/2$ 与实数 $\nu \ge 0$,

$${}^{r}G^{(\lambda)}_{\nu}(\xi) := {}_2F_1\Big[\begin{matrix} -\nu, \nu+2\lambda \\ \lambda+\frac{1}{2} \end{matrix}; \frac{1-\xi}{2}\Big], \quad \xi \in (-1,1).$$

显然，只要 $v^{(m)} \in L^1(I_{\mathrm{ref}})$ 和求和项有限，(3.15) 就成立。这自然促使我们在 (3.1) 中引入精细分数阶空间 $\mathcal{U}^{\alpha,\ m}_{-1+}(I_{\mathrm{ref}})$，从而扩展了 [17, 18] 中建立的框架。事实上，我们保留了含有因子 $\sin(\alpha\pi)$ 的项，以将整数阶情形作为特例纳入其中。此外，由于 $\alpha \to 0$，下面的新界更为精确。具体而言，利用 [17,(4.30)] 估计其中涉及的 GGF-F，可得

$$|\hat{\omega}_n| \le \left\{ \frac{(2n+1)\Gamma((n-\alpha-m+1)/2)}{2^{\alpha+m+1}\sqrt{\pi}\Gamma((n+\alpha+m)/2+1)} + |\sin(\alpha\pi)| \sum_{i=0}^{m-1} \widehat{C}_{n,\alpha+i} \right\} U^{\alpha,m}_{-1+}(\omega; I_{\mathrm{ref}}). \tag{3.17}$$

根据 (3.16)，经直接计算可得

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{m-1} \frac{\widehat{C}_{n,\alpha+i}}{\widehat{C}_{n,\alpha}} &= 1 + \sum_{i=1}^{m-1} \Big(\prod_{r=1}^{i} \frac{2(\alpha+r)}{(n-\alpha-r)(n+\alpha+r+1)} \Big) \\ &\le \sum_{i=0}^{m-1} \Big(\frac{2(\alpha+m-1)}{n+\alpha+m} \Big)^i < \sum_{i=0}^{\infty} \Big(\frac{2(\alpha+m-1)}{n+\alpha+m} \Big)^i = \frac{n+\alpha+m}{n-\alpha-m+2},\end{aligned} \tag{3.18}$$

其中我们用到了以下事实：对于 $1 \le r \le i \le m-1$ 和 $n > \alpha+m$,

$$(n-\alpha-r)(n+\alpha+r+1) \ge (n-\alpha-m+1)(n+\alpha+m) \ge n+\alpha+m.$$

因此，由（3.17）和（3.18）可得

$$|\hat{\omega}_n| \le \left\{ \frac{(2n+1)\Gamma((n-\alpha-m+1)/2)}{2^{\alpha+m+1}\sqrt{\pi}\Gamma((n+\alpha+m)/2+1)} + |\sin(\alpha\pi)| \frac{n+\alpha+m}{n-\alpha-m+2} \widehat{C}_{n,\alpha} \right\} U_{-1+}^{\alpha,m}(\omega; I_{\mathrm{ref}}). \quad (3.19)$$

因此，采用与 [18, (E.16)], 类似的论证，我们可以得到精细的 L^2界：

$$\begin{aligned} \|\omega - \Pi_p\omega\|_{L^2(I_{\mathrm{ref}})} \le \Bigg\{ & \frac{4}{(2\alpha+2m-1)\pi} \frac{\Gamma(p-\alpha-m+2)}{\Gamma(p+\alpha+m+1)} + \frac{(2p+3)\,\Gamma^2((p-\alpha-m)/2+1)}{2^{2(\alpha+m)}\pi\,\Gamma^2((p+\alpha+m+3)/2)} \\ & + |\sin(\alpha\pi)| \frac{2^{2(3\alpha+2)}\Gamma^2(\alpha+1)}{\pi^2(2\alpha+1)} \frac{(p+\alpha+m+1)^2}{(p-\alpha-m+3)^2} \frac{p+3/2}{p+1} \frac{\Gamma(2p-2\alpha+1)}{\Gamma(2p+2\alpha+3)} \Bigg\}^{1/2} U_{-1+}^{\alpha,m}(\omega; I_{\mathrm{ref}}). \end{aligned} \quad (3.20)$$

We接下来估计引理3.1中 $\omega'(\xi)$的展开系数。由(3.15)，我们ha ve

$$\begin{aligned} \hat{\omega}'_n = & \frac{2n+1}{2^{\alpha+m}\Gamma(\alpha+m)} \int_{-1}^{1} (1-\xi^2)^{\alpha+m-1}\, {}^rG_{n-\alpha-m+1}^{(\alpha+m-1/2)}(\xi)\, v^{(m)}(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\ & + \sin(\alpha\pi) \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{n+i} \widehat{C}_{n,\alpha+i-1}\, v^{(i)}(-1+). \end{aligned} \quad (3.21)$$

利用(3.21)，取$(1-\xi^2)^{\alpha+m-1}\, {}^rG_{n-\alpha-m+1}^{(\alpha+m-1/2)}(\xi)$，的最大值，并采用与(3.19)的证明类似的步骤，我们得到

$$\begin{aligned} |\hat{\omega}'_n| \le \Bigg\{ & \frac{1}{2^{\alpha+m}\sqrt{\pi}} \frac{(2n+1)\Gamma((n-\alpha-m)/2+1)}{\Gamma((n+\alpha+m+1)/2)} \\ & + |\sin(\alpha\pi)| \frac{n+\alpha+m-1}{n-\alpha-m+3} \widehat{C}_{n,\alpha-1} \Bigg\} U_{-1+}^{\alpha,m}(\omega; I_{\mathrm{ref}}). \end{aligned} \quad (3.22)$$

在(3.22)中取 $n=p$ 并利用(3.11)，我们得到

$$|\omega(-1) - \Pi_p^- \omega(-1)| \le \widehat{\Phi}_p^{(\alpha,m)}\, U_{-1+}^{\alpha,m}(\omega; I_{\mathrm{ref}}), \quad (3.23)$$

其中我们记

$$\widehat{\Phi}_p^{(\alpha,m)} := \frac{1}{2^{\alpha+m-1}\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma((p-\alpha-m)/2+1)}{\Gamma((p+\alpha+m+1)/2)} + |\sin(\alpha\pi)| \frac{2^\alpha\Gamma(\alpha)}{\pi} \frac{p+\alpha+m-1}{p-\alpha-m+3} \frac{\Gamma(p-\alpha+1)}{\Gamma(p+\alpha+1)}.$$

由 (3.21),

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\omega}'_p}{2p+1} + \frac{\hat{\omega}'_{p+1}}{2p+3} = & \frac{1}{2^{\alpha+m}\Gamma(\alpha+m)} \int_{-1}^{1} (1-\xi^2)^{\alpha+m-1} \big({}^rG_{p-\alpha-m+1}^{(\alpha+m-1/2)}(\xi) \\ & + {}^rG_{p-\alpha-m+2}^{(\alpha+m-1/2)}(\xi) \big)\, v^{(m)}(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \sin(\alpha\pi) \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{p+i} \widetilde{C}_{p,\alpha+i} v^{(i)}(-1+), \end{aligned} \quad (3.24)$$

其中

$$\widetilde{C}_{p,\beta} := \frac{2^\beta\Gamma(\beta+1)}{\pi} \frac{\Gamma(p-\beta+1)}{\Gamma(p+\beta+2)}.$$

同样，利用 [17, (4.30)] 可得

$$\frac{(1-\xi^2)^{\alpha+m-1}}{2^{\alpha+m}\Gamma(\alpha+m)} \big| {}^rG_{p-\alpha-m+1}^{(\alpha+m-1/2)}(\xi) + {}^rG_{p-\alpha-m+2}^{(\alpha+m-1/2)}(\xi) \big| \le \frac{1}{2^{\alpha+m-1}\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma((p-\alpha-m)/2+1)}{\Gamma((p+\alpha+m+1)/2)}. \quad (3.25)$$

与 (3.18) 的推导类似，我们可以得到

$$\sum_{i=0}^{m-1}\frac{\widetilde{C}_{p,\alpha+i}}{\widetilde{C}_{p,\alpha}}=1+\sum_{i=1}^{m-1}\left(\prod_{r=1}^{i}\frac{2(\alpha+r)}{(p-\alpha-r+1)(p+\alpha+r+1)}\right)<\frac{p+\alpha+m}{p+1}. \tag{3.26}$$

因此，由 (3.24)–(3.26) 可得，

$$\begin{aligned}\Big(\frac{\hat{\omega}'_p}{2p+1}+\frac{\hat{\omega}'_{p+1}}{2p+3}\Big)^2\le&\left\{\frac{1}{2^{\alpha+m-1}\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma((p-\alpha-m)/2+1)}{\Gamma((p+\alpha+m+1)/2)}\right.\\&\left.+|\sin(\alpha\pi)|\frac{p+\alpha+m}{p+1}\widetilde{C}_{p,\alpha}\right\}^2\big(U^{\alpha,m}_{-1+}(\omega;I_{\mathrm{ref}})\big)^2.\end{aligned} \tag{3.27}$$

由 (3.10)、(3.20) 和 (3.27)，我们有

$$\|\omega-\Pi_p^-\omega\|_{L^2(I_{\mathrm{ref}})}\le\widehat{\Upsilon}_p^{(\alpha,m)}\,U^{\alpha,m}_{-1+}(\omega;I_{\mathrm{ref}}), \tag{3.28}$$

其中记

$$\begin{aligned}\widehat{\Upsilon}_p^{(\alpha,m)}:=&\left\{\frac{4}{(2\alpha+2m-1)\pi}\frac{\Gamma(p-\alpha-m+2)}{\Gamma(p+\alpha+m+1)}+\frac{(2p+3)\,\Gamma^2((p-\alpha-m)/2+1)}{2^{2(\alpha+m)}\pi\,\Gamma^2((p+\alpha+m+3)/2)}\right.\\&+|\sin(\alpha\pi)|\frac{2^{2(3\alpha+2)}\Gamma^2(\alpha+1)}{\pi^2(2\alpha+1)}\frac{(p+\alpha+m+1)^2}{(p-\alpha-m+3)^2}\frac{p+3/2}{p+1}\frac{\Gamma(2p-2\alpha+1)}{\Gamma(2p+2\alpha+3)}\\&\left.+\frac{2}{2p+1}\left\{\frac{1}{2^{\alpha+m-1}\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma((p-\alpha-m)/2+1)}{\Gamma((p+\alpha+m+1)/2)}+|\sin(\alpha\pi)|\frac{p+\alpha+m}{p+1}\widetilde{C}_{p,\alpha}\right\}^2\right\}^{1/2}.\end{aligned}$$

对于 Π_p^+，将 (3.10) 取相反符号使用，可估计新的组合；利用 (3.21)，该组合可表示为，

$$\begin{aligned}\frac{\hat{\omega}'_p}{2p+1}-\frac{\hat{\omega}'_{p+1}}{2p+3}=&\frac{1}{2^{\alpha+m}\Gamma(\alpha+m)}\int_{-1}^{1}(1-\xi^2)^{\alpha+m-1}\big({}^rG^{(\alpha+m-1/2)}_{p-\alpha-m+1}(\xi)\\&-{}^rG^{(\alpha+m-1/2)}_{p-\alpha-m+2}(\xi)\big)\,v^{(m)}(\xi)\,\mathrm{d}\xi+\sin(\alpha\pi)\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^{p+i}\breve{C}_{p,\alpha+i}v^{(i)}(-1+),\end{aligned} \tag{3.29}$$

其中

$$\breve{C}_{p,\gamma}:=\frac{2^\gamma(p+1)\Gamma(\gamma)}{\pi}\frac{\Gamma(p-\gamma+1)}{\Gamma(p+\gamma+2)}.$$

类似地，利用 [17, (4.30)] 可得

$$\frac{(1-\xi^2)^{\alpha+m-1}}{2^{\alpha+m}\Gamma(\alpha+m)}\big|{}^rG^{(\alpha+m-1/2)}_{p-\alpha-m+1}(\xi)-{}^rG^{(\alpha+m-1/2)}_{p-\alpha-m+2}(\xi)\big|\le\frac{1}{2^{\alpha+m-1}\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma((p-\alpha-m)/2+1)}{\Gamma((p+\alpha+m+1)/2)}. \tag{3.30}$$

类似于（3.18）的推导，我们可以得到

$$\sum_{i=0}^{m-1}\frac{\breve{C}_{p,\alpha+i}}{\breve{C}_{p,\alpha}}=1+\sum_{i=1}^{m-1}\left(\prod_{r=1}^{i}\frac{2(\alpha+r-1)}{(p-\alpha-r+1)(p+\alpha+r+1)}\right)<\frac{p+\alpha+m}{p+2}. \tag{3.31}$$

因此，由 (3.29)–(3.31)，

$$\begin{aligned}\Big(\frac{\hat{\omega}'_p}{2p+1}-\frac{\hat{\omega}'_{p+1}}{2p+3}\Big)^2\le&\left\{\frac{1}{2^{\alpha+m-1}\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma((p-\alpha-m)/2+1)}{\Gamma((p+\alpha+m+1)/2)}\right.\\&\left.+|\sin(\alpha\pi)|\frac{p+\alpha+m}{p+2}\breve{C}_{p,\alpha}\right\}^2\big(U^{\alpha,m}_{-1+}(\omega;I_{\mathrm{ref}})\big)^2.\end{aligned} \tag{3.32}$$

由 (3.10)、(3.20) 和 (3.32)，可得

$$\|\omega-\Pi_p^+\omega\|_{L^2(I_{\rm ref})}\le\Upsilon_p^{(\alpha,m)}\,U_{-1+}^{\alpha,m}(\omega;I_{\rm ref}),\tag{3.33}$$

其中记

$$\begin{aligned}\Upsilon_p^{(\alpha,m)}:=\Bigg\{&\frac{4}{(2\alpha+2m-1)\pi}\frac{\Gamma(p-\alpha-m+2)}{\Gamma(p+\alpha+m+1)}+\frac{(2p+3)\,\Gamma^2((p-\alpha-m)/2+1)}{2^{2(\alpha+m)}\pi\,\Gamma^2((p+\alpha+m+3)/2)}\\&+|\sin(\alpha\pi)|\frac{2^{2(3\alpha+2)}\Gamma^2(\alpha+1)}{\pi^2(2\alpha+1)}\frac{(p+\alpha+m+1)^2}{(p-\alpha-m+3)^2}\frac{p+3/2}{p+1}\frac{\Gamma(2p-2\alpha+1)}{\Gamma(2p+2\alpha+3)}\\&+\frac{2}{2p+1}\Bigg\{\frac{1}{2^{\alpha+m-1}\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma((p-\alpha-m)/2+1)}{\Gamma((p+\alpha+m+1)/2)}+|\sin(\alpha\pi)|\frac{p+\alpha+m}{p+2}\breve{C}_{p,\alpha}\Bigg\}^2\Bigg\}^{1/2}.\end{aligned}$$

在上述估计中，我们力求使估计对较小的 p, 也一致有效，因此界的表达式略显复杂。为明确展示较大 p,时的阶，我们使用以下公式（例如参见 [21,(5.11.13)]）：对于 $a<b$,

$$\frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z+b)}=z^{a-b}+\frac{1}{2}(a-b)(a+b-1)z^{a-b-1}+O(z^{a-b-2}),\quad z\gg1,\tag{3.34}$$

即可得到所需的估计。 □

注 3.2. 从上述证明可以看出，式 (3.15) 中勒让德展开系数的精确公式是分析的出发点，也是关键。事实上，若 $\alpha\to0,$，则可化简为

$$\hat{\omega}_n=\frac{2n+1}{2^{m+1}m!}\int_{-1}^{1}(1-\xi^2)^m\,G_{n-m}^{(m+1/2)}(\xi)\,\omega^{(m)}(\xi)\,\mathrm{d}\xi,\tag{3.35}$$

与分数阶情形不同，盖根鲍尔多项式 $\{G_{n-m}^{(m+1/2)}(\xi)\}$ 在 $L^2_{\rho^m}(I_{\rm ref})$ 中两两正交，且 $\rho=1-\xi^2$.因此，若 $\omega\in L^2_{\rho^m}(I_{\rm ref}),$，我们可以利用帕ɪśɪʊ瓦尔恒等式和式 (3.35) 推导出

$$\int_{-1}^{1}|\omega^{(m)}(\xi)|^2(1-\xi^2)^m\,\mathrm{d}\xi=\sum_{n=m}^{\infty}\frac{2(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!}\,|\hat{\omega}_n|^2.\tag{3.36}$$

然后我们可以估计 L^2-投影误差:

$$\begin{aligned}\|\omega-\Pi_p\omega\|^2_{L^2(I_{\rm ref})}&=\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{2}{2n+1}\,|\hat{\omega}_n|^2\le\max_{n\ge p+1}\Big\{\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\Big\}\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{2(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!}\,|\hat{\omega}_n|^2\\&\le\frac{(p-m+1)!}{(p+m+1)!}\int_{-1}^{1}|\omega^{(m)}(\xi)|^2(1-\xi^2)^m\,\mathrm{d}\xi\le Cp^{-2m}\|\omega^{(m)}\|^2_{L^2_{\rho^m}(I_{\rm ref})},\end{aligned}\tag{3.37}$$

从而通过略有不同的方法得到与 [25, 26], 中类似的估计。随后，我们可以利用引理3.1进一步估计高斯–拉东投影。□

3.4. 定理 3.1 的证明。 利用新的逼近结果，我们估计式 (2.7)–(2.8) 中的四项。注意，高斯-拉道投影 $\pi^{\pm}u|_{I_j}=\pi^{\pm}_{p_1}u|_{I_j}$ 是逐段构造的，因此我们可以对每个 I_j. 分别估计式 (2.7)–(2.8) 中的四项。这里，我们重点考虑存在解的奇异性的第一个子区间 $I_1=(a,\ x_1)$；对于满足给定正则性假设的其他子区间，可按照 [9]中的方法进行估计。 I_1 与 $I_{\rm ref}=(-1,\ 1)$之间的线性变换为

$$x=\chi(\xi;I_1):=x_0+\frac{h_1}{2}(1+\xi);\ \ \xi\in I_{\rm ref},\quad \xi=\chi^{-1}(x;I_1)=2\frac{x-x_0}{h_1}-1,\ \ x\in I_1.\tag{3.38}$$

Set $\omega(\xi,\ t) := u(\chi(\xi;\ I_1)\ t)\ = u|_{I_1} \circ \chi$，以及 $\Pi^{\pm}_{p_1}\omega = (\pi^{\pm}_{p_1}u|_{I_1})\ \circ \chi$. 由式 (3.12) 得到

$$\begin{aligned}\|(u-\pi^-_{p_1}u)(\cdot,t)\|_{I_1} &= \Big(\frac{h_1}{2}\Big)^{1/2}\|\omega-\Pi^-_{p_1}\omega\|_{L^2(I_{\mathrm{ref}})}\\ &\le Ch_1^{1/2}p_1^{-\min\{2\alpha+1,\alpha+m-1/2\}}U^{\alpha,m}_{-1+}(\omega;I_{\mathrm{ref}}),\end{aligned}\tag{3.39}$$

由（3.2）可得,

$$U^{\alpha,m}_{-1+}(\omega;I_{\mathrm{ref}}) = \big\|\mathcal{D}^m\big({}^C\mathcal{D}^{\alpha}_{-1+}\omega\big)\big\|_{L^1(I_{\mathrm{ref}})} + \sum_{i=0}^{m-1}\big|\mathcal{D}^i\big({}^C\mathcal{D}^{\alpha}_{-1+}\omega\big)(-1+)\big|.$$

作变量代换并利用 Caputo导数 的定义，可得

$$\begin{aligned}{}^C\mathcal{D}^{\alpha}_{-1+}\omega(\xi) &= \Big(\mathcal{I}^{k-\alpha}_{-1+}\frac{\mathrm{d}^k\omega(\xi)}{\mathrm{d}\xi^k}\Big) = \frac{1}{\Gamma(k-\alpha)}\int_{-1}^{\xi}(\xi-\tau)^{k-\alpha-1}\frac{\mathrm{d}^k\omega(\tau)}{\mathrm{d}\tau^k}\mathrm{d}\tau\\ &= \Big(\frac{h_1}{2}\Big)^{\alpha}\frac{1}{\Gamma(k-\alpha)}\int_{x_0}^{x}(x-y)^{k-\alpha-1}\frac{\mathrm{d}^k u(y)}{\mathrm{d}y^k}\mathrm{d}y\\ &= \Big(\frac{h_1}{2}\Big)^{\alpha}{}^C\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}u(x),\end{aligned}\tag{3.40}$$

其中用到了

$$\mathrm{d}\tau = \frac{2}{h_1}\mathrm{d}y,\quad \frac{\mathrm{d}^k\omega(\tau)}{\mathrm{d}\tau^k} = \Big(\frac{h_1}{2}\Big)^k\frac{\mathrm{d}^k u(y)}{\mathrm{d}y^k},\quad (\xi-\tau)^{k-\alpha-1} = \Big(\frac{h_1}{2}\Big)^{1+\alpha-k}(x-y)^{k-\alpha-1}.$$

进一步求整数阶导数，可直接得到，对于 $1\le i\le m$,

$$\partial^i_\xi\,{}^C\mathcal{D}^{\alpha}_{-1+}\omega(\xi) = \Big(\frac{h_1}{2}\Big)^{\alpha}\partial^i_\xi\,{}^C\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}u(x) = \Big(\frac{h_1}{2}\Big)^{\alpha+i}\partial^i_x\,{}^C\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}u(x),\quad x\in I_1.\tag{3.41}$$

因此，对于 $0<h_1<2$,

$$\begin{aligned}U^{\alpha,m}_{-1+}(\omega;I_{\mathrm{ref}}) &= \big\|\mathcal{D}^m\big({}^C\mathcal{D}^{\alpha}_{-1+}\omega\big)\big\|_{L^1(I_{\mathrm{ref}})} + \sum_{i=0}^{m-1}\big|\mathcal{D}^i\big({}^C\mathcal{D}^{\alpha}_{-1+}\omega\big)(-1+)\big|\\ &= \Big(\frac{h_1}{2}\Big)^{\alpha+m}\big\|\mathcal{D}^m\big({}^C\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}u\big)\big\|_{L^1(I_1)} + \sum_{i=0}^{m-1}\Big(\frac{h_1}{2}\Big)^{\alpha+i}\big|\mathcal{D}^i\big({}^C\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}u\big)(a+)\big|\\ &= \Big(\frac{h_1}{2}\Big)^{\alpha}\Big\{\Big(\frac{h_1}{2}\Big)^{m}\big\|\mathcal{D}^m\big({}^C\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}u\big)\big\|_{L^1(I_1)} + \sum_{i=0}^{m-1}\Big(\frac{h_1}{2}\Big)^{i}\big|\mathcal{D}^i\big({}^C\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}u\big)(a+)\big|\Big\}\\ &\le \Big(\frac{h_1}{2}\Big)^{\alpha}U^{\alpha,m}_{a+}(u(\cdot,t);I_1).\end{aligned}$$

因此，估计式 (3.39) 变为

$$\|(u-\pi^-_{p_1}u)(\cdot,t)\|_{I_1} \le Ch_1^{\alpha+1/2}p_1^{-\min\{2\alpha+1,\alpha+m-1/2\}}U^{\alpha,m}_{a+}(u(\cdot,t);I_1).\tag{3.42}$$

同样，我们可以证明

$$\big\|(\pi^-_{p_1}u_t-u_t)(\cdot,t)\big\|_{I_1} \le Ch_1^{\alpha+1/2}p_1^{-\min\{2\alpha+1,\alpha+m-1/2\}}\,U^{\alpha,m}_{a+}(u_t(\cdot,t);I_1).\tag{3.43}$$

(i) When $d = 0$, all terms involving q in (2.7) vanish. Hence, using (3.42) and (3.43) we obtain

$$\begin{aligned}\sup_{0\le t\le T}\|(\pi^- u-u)(\cdot,t)\|_{I_1}+\int_0^T\|(\pi^- u_t-u_t)(\cdot,t)\|_{I_1}\,\mathrm{d}t+\|\pi^- u_{\mathrm{ic}}-u_{\mathrm{ic}}\|_{I_1}\\ \le C\frac{h_1^{\alpha+1/2}}{p_1^{\min\{2\alpha+1,\alpha+m-1/2\}}}\Big(\sup_{0\le t\le T}U_{a+}^{\alpha,m}(u(\cdot,t);I_1)+\int_0^T U_{a+}^{\alpha,m}(u(\cdot,t);I_1)\,\mathrm{d}t\Big),\end{aligned}\tag{3.44}$$

which contributes the error on the first interval to the desired estimate (3.6).

(ii) When $d \neq 0$, there exists diffusion, so we must use approximation results on $\pi^+ q|_{I_1}$, where $q = \sqrt{d}\,u_x$. Since $u \in \overline{W}^{k,1}(I_1)$, we have $u_x \in W^{k-1,1}(I_1)$, and

$${}^{C}\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-1}(u_x) = \mathcal{I}_{a+}^{(k-1)-(\alpha-1)}(u_x)^{(k-1)} = \mathcal{I}_{a+}^{k-\alpha}u^{(k)} = {}^{C}\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}u \in W^{m,1}(I_1).$$

Therefore, $u_x(\cdot,t) \in \mathcal{U}^{\alpha-1}{}_{,a+}{}^{m}(I_1)$. Following (3.42), replacing α by $\alpha-1$, and using the estimate of $\Pi_{p_1}^+$ in Theorem 3.2, we get

$$\|(\pi_{p_1}^+ q-q)(\cdot,t)\|_{I_1} \le C\sqrt{d}\,h_1^{\alpha-1/2}p_1^{-\min\{2\alpha-3/2,\alpha+m-3/2\}}U_{a+}^{\alpha,m}(u(\cdot,t);I_1).\tag{3.45}$$

Using the above related estimates, we can obtain

$$\begin{aligned}\sup_{0\le t\le T}\|(\pi^- u-u)(\cdot,t)\|_{I_1}+\int_0^T\|(\pi^- u_t-u_t)(\cdot,t)\|_{I_1}\,\mathrm{d}t+\|\pi^+ q-q\|_{L^2(I_1\times(0,T))}\\ +\|\pi^- u_{\mathrm{ic}}-u_{\mathrm{ic}}\|_{I_1}\le C\frac{h^{\alpha-1/2}}{p^{\min\{2\alpha-3/2,\alpha+m-3/2\}}}\Big(\sup_{0\le t\le T}U_{a+}^{\alpha,m}(u(\cdot,t);I_1)\\ +\int_0^T U_{a+}^{\alpha,m}(u(\cdot,t);I_1)\,\mathrm{d}t+\sqrt{d}\,\|U_{a+}^{\alpha,m}(u(\cdot,t);I_1)\|_{L^2(0,T)}\Big),\end{aligned}\tag{3.46}$$

which gives the error bound on I_1. in (3.7).

For other subintervals I_j, $j = 2, \ldots, M$, we assume the solution has the usual Sobolev regularity, and we can refer to [9] (see also Remark 3.2) for the projection approximation results, thus we have for $p \ge s$,

$$\|\omega-\Pi_p^{\pm}\omega\|_{L^2(I_{\mathrm{ref}})} \le C\,p^{-s-1}\|\omega^{(s+1)}\|_{L^2(I_{\mathrm{ref}})},$$

and

$$|\omega(\pm1)-\Pi_p^{\pm}\omega(\pm1)| \le C\,p^{-s-1/2}\|\omega^{(s+1)}\|_{L^2(I_{\mathrm{ref}})},\tag{3.47}$$

where C depends on s, but not on p and ω. Then, using the same argument as before, we can get the optimal order $\mathcal{O}(\frac{h^{s+1}}{p^{s+1}})$ (for $d = 0$) and $\mathcal{O}(\frac{h^s}{p^s})$ (for $d \neq 0$) in (3.6)–(3.7). We omit the details here.

4. Extensions to interior singularities: Fitted and unfitted cases

本节将局部间断Galerkin格式的分析扩展到具有内部奇异点的奇异解，假设奇异点位于 $x = \theta \in (a,\ b)$。我们展示两种情况下不同的收敛行为： θ与网格对齐（拟合情形），或位于某个子区间 I_j 内（非拟合情形）。

4.1. 拟合情形。为简单起见，我们假设奇异点位于 $\theta = x_1.$ 。在这种情况下，我们需要使用高斯–拉杜投影来处理左端点和右端点奇异性。注意，在 $I_2 = (x_1,\ x_2)$，奇异性属于左端点类型，可由 (3.1)–(3.2) 描述。而在 $I_1 = (a,\ x_1)$，奇异性则属于右端点类型，因此只需在 (3.1)–(3.2) 中将 ${}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{\hat{a}+}$ 替换为 ${}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{\hat{b}-}$：对于 $\alpha \in (k-1,\ k)$ 和 $k,\ m \in \mathbb{N}$，我们定义空间

$$\mathcal{U}^{\alpha,m}_{\hat{b}-}(\Lambda) := \big\{u : u \in W^{k,1}(\Lambda) \ \text{ and } \ {}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{\hat{b}-}u \in W^{m,1}(\Lambda)\big\}, \tag{4.1}$$

相应地，我们记

$$U^{\alpha,m}_{\hat{b}-}(u;\Lambda) := \|\mathcal{D}^m({}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{\hat{b}-}u)\|_{L^1(\Lambda)} + \sum_{i=0}^{m-1} |\mathcal{D}^i({}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{\hat{b}-}u)(\hat{b}-)|. \tag{4.2}$$

通过类似于定理 3.2 证明的论证，我们可以得到右端点奇异性情形下的以下 Gauss–Radau 投影误差估计。

引理4.1. 设 $\alpha \in (k-1,k)$ 且 $k,m \in \mathbb{N}.$。那么，对于任意 $\omega \in \mathcal{U}^{\alpha,}{}^{m}_{1-}(I_{\mathrm{ref}})$ 满足 $1/2 < \alpha + m < p+1$，我们有

$$\|\omega - \Pi^{-}_{p}\omega\|_{L^2(I_{\mathrm{ref}})} \le Cp^{-\min\{2\alpha+1/2,\alpha+m-1/2\}} U^{\alpha,m}_{1-}(\omega;I_{\mathrm{ref}}), \tag{4.3}$$

$$\|\omega - \Pi^{+}_{p}\omega\|_{L^2(I_{\mathrm{ref}})} \le Cp^{-\min\{2\alpha+1,\alpha+m-1/2\}} U^{\alpha,m}_{1-}(\omega;I_{\mathrm{ref}}), \tag{4.4}$$

and

$$|\omega(\pm1) - \Pi^{\pm}_{p}\omega(\pm1)| \le Cp^{-\min\{2\alpha,\alpha+m-1/2\}} U^{\alpha,m}_{1-}(\omega;I_{\mathrm{ref}}), \tag{4.5}$$

其中 C 是一个与 p 和 ω 无关的正常数。

采用证明定理 3.1 时所用的标准缩放论证（见第 3.4 节），可将上述估计从参考单元推广到一般单元。由此得到以下推论。

推论4.1。假设奇异点位于 $\theta = x_1$，且 $\tilde{\omega}|_{I_1} \in \mathcal{U}^{\alpha,}{}^{m}_{x_1-}(I_1)$ 其中 $\alpha > 0$、$0 < h \le 2$和 $\alpha + m < p+1.$。则有以下估计：

$$\big\|\pi^{-}_{p}\tilde{\omega} - \tilde{\omega}\big\|_{I_1} \le Ch^{\alpha+1/2}p^{-\min\{2\alpha+1/2,\alpha+m-1/2\}}\, U^{(\alpha,m)}_{x_1-}(\tilde{\omega};I_1),$$

$$\big\|\pi^{+}_{p}\tilde{\omega} - \tilde{\omega}\big\|_{I_1} \le Ch^{\alpha+1/2}p^{-\min\{2\alpha+1,\alpha+m-1/2\}}\, U^{(\alpha,m)}_{x_1-}(\tilde{\omega};I_1),$$

and

$$\big|\big(\pi^{+}_{p}\tilde{\omega} - \tilde{\omega}\big)(x_1)\big| \le Ch^{\alpha}p^{-\min\{2\alpha,\alpha+m-1/2\}}\, U^{(\alpha,m)}_{x_1-}(\tilde{\omega};I_1),$$

$$\big|\big(\pi^{-}_{p}\tilde{\omega} - \tilde{\omega}\big)(a)\big| \le Ch^{\alpha}p^{-\min\{2\alpha,\alpha+m-1/2\}} U^{(\alpha,m)}_{x_1-}(\tilde{\omega};I_1),$$

其中，C 取决于 α，但与 p 和 $\tilde{\omega}$无关。

将与网格 $\mathcal{T}$ 相关的分片Sobolev空间定义为式（3.3）–（3.4）针对拟合网格上的奇异解的推广：

$\mathcal{W}^{\alpha,}{}^{m}_{x_1}{}^{,s}(I;\mathcal{T}) := \big\{v\colon I\to\mathbb{R}\colon\ v|_{I_1} \in \mathcal{U}^{\alpha,}{}^{m}_{x_1-}(I_1)\ \ v|_{I_2} \in \mathcal{U}^{\alpha,}{}^{m}_{x_1+}(I_2)\ \ v|_{I_j} \in H^{s+1}(I_j)$ $j = 3,\ \ldots\ldots,\ M\big\}$，并记

$$\|u\|_{\mathcal{W}^{\alpha,m,s}_{x_1}(I;\mathcal{T})} := U^{\alpha,m}_{x_1-}(u;I_1) + U^{\alpha,m}_{x_1+}(u;I_2) + \sum_{j=3}^{M} \|u^{(s+1)}\|_{L^2(I_j)}.$$

定理 4.1。 设 u 是(2.1) 的解，且 $q=\sqrt{d}\,u_x$，并设$(u_h^p,\bar{q}_h^p)^\top$ 是(2.2)–(2.4) 的局部间断伽辽金解，其正则性为$|||u|||_{\mathcal{E},\,T}<\infty$，其中$|||u|||_{\mathcal{E},\,T}$表示(3.5)中的范数，但将 $\|\cdot\|_{\mathcal{W}}$替换为$\|\cdot\|_{\mathcal{W}^{\alpha,\,x_1^-}{}^{m,\,s}_{,\,(I;\mathcal{T})}}$。则对于 $h=$最大$\{h_j\}$ 和 $p=$最小$\{p_j\}$，若满足 $p>\alpha+m-1$，则对于 $d=0$ 和 $p\ge s$，有：

$$\|(u-u_h^p)(\cdot,T)\|\le C\Big(\frac{h^{\alpha+1/2}}{p^{\min\{2\alpha+1/2,\alpha+m-1/2\}}}+\frac{h^{s+1}}{p^{s+1}}\Big)|||u|||_{\mathcal{E},T}. \tag{4.6}$$

对于 $d\neq 0$ （以及 $p\ge s-1$），在相同的正则性假设$|||u|||_{\mathcal{E},T}<\infty$ 下，扩散情形具有与定理 *3.1* (ii) 中相同的 h–和 p–收敛阶。这里，常数 C 取决于 α 和 s，但与 h、p 和 u 无关。

证明。 证明可将定理 3.1 的证明直接推广到网格节点 x_1处的拟合内部奇异性。与小节 3.4 中一样，我们使用逐单元高斯–拉东投影 $\pi^{\pm}u|_{I_j}=\pi^{\pm}_{p_j}(u|_{I_j})$ 估计 (2.7)–(2.8) 中的各项，唯一的新问题是控制与 x_1 相邻的两个单元，即 $I_1=(a,x_1)$ 和 $I_2=(x_1,x_2)$。在 I_1 上，奇异性位于端点 x_1 的右侧，因此 $u(\cdot,t)|_{I_1}\in\mathcal{U}^{\alpha,\,m}_{,\,x_1^-}(I_1)$，由推论4.1可得，对于 $0\le t\le T$，

$$\|(u-\pi^-_{p_1}u)(\cdot,t)\|_{I_1}\le C\,h_1^{\alpha+1/2}\,p_1^{-\min\{2\alpha+1/2,\alpha+m-1/2\}}\,U^{\alpha,m}_{x_1^-}(u(\cdot,t);I_1), \tag{4.7}$$

并且，将 u 替换为 u_t 后，同样的界仍然成立。在 I_2 上，奇异性附着于 x_1 处的左端点，因此 $u(\cdot,t)|_{I_2}\in\mathcal{U}^{\alpha,\,m}_{,\,x_1^+}(I_2)$，并且根据小节 3.4 中相同的缩放论证，我们得到

$$\|(u-\pi^-_{p_2}u)(\cdot,t)\|_{I_2}\le C\,h_2^{\alpha+1/2}\,p_2^{-\min\{2\alpha+1,\alpha+m-1/2\}}\,U^{\alpha,m}_{x_1^+}(u(\cdot,t);I_2), \tag{4.8}$$

同样，将 u 替换为 u_t 后，仍有相同的界。

(i) 当 $d=0$ 时，(2.7) 中所有涉及 q 的项均不存在。将上述关于 I_1 和 I_2 的投影估计代入 (2.7)–(2.8)，即可得到 (4.6) 中的奇异贡献。结合 I_j、$j=3,\dots,M$ 上的标准估计，如定理 3.1 中所示，即可完成 (4.6) 的证明。

(ii) 当 $d\neq 0$ 时，令 $q=\sqrt{d}\,\bar{u}_x$。论证与将定理 3.1 (ii) 推广到当前拟合情形相同：h–和 p–阶数保持不变（将范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{W}}$ 替换为$\|\cdot\|_{\mathcal{W}^{\alpha,x_1^-}{}^{m,\,s}_{,(I;\mathcal{T})}}$）。因此省略细节。□

4.2. **非拟合情形**。 众所周知，如果奇异点的位置与网格不吻合，其收敛阶会低于拟合情形。通常，对于端点奇异性，p中的收敛阶至少会损失一倍。为明确起见，我们假设奇异点位于 $x=\theta\in I_1=(a,x_1)$。记 $I_\theta^-:=(a,\theta)$ 和 $I_\theta^+:=(\theta,x_1)$。为了最优地刻画这类奇异性（例如，$u(x,t)=|x-\theta|^\alpha t$），我们首先将 (3.1)-(3.2) 中的分数阶框架扩展到这种情形。更准确地说，对于带有整数 $k\ge 1$ 的 $\alpha\in(k-1,k)$，我们定义分数阶空间

$$\mathcal{U}^\alpha_\theta(I_1):=\big\{u:\,u\in W^{k,1}(I_1),\ {}^C\mathcal{D}^\alpha_{\theta-}u\in W^{1,1}(I_\theta^-)\ \text{and}\ {}^C\mathcal{D}^\alpha_{\theta+}u\in W^{1,1}(I_\theta^+)\big\}, \tag{4.9}$$

与以下半范数相关联：

$$U^\alpha_\theta(u;I_1):=\big\|\mathcal{D}\,{}^C\mathcal{D}^\alpha_{\theta-}u\big\|_{L^1(I_\theta^-)}+\big\|\mathcal{D}\,{}^C\mathcal{D}^\alpha_{\theta+}u\big\|_{L^1(I_\theta^+)}+\big|{}^C\mathcal{D}^\alpha_{\theta-}u(\theta^-)\big|+\big|{}^C\mathcal{D}^\alpha_{\theta+}u(\theta^+)\big|. \tag{4.10}$$

下面关于高斯–拉东投影的定理，其证明与定理 3.2 的证明非常相似，因此我们仅概述要点以避免重复。

引理 4.2。 设$\hat{}$ $\theta = \chi^{-1}(\theta; I_1) \in I_{\mathrm{ref}}$ 为由(3.38)确定的奇异性映射位置。则对于任意 $\omega \in \mathcal{U}^{\alpha}_{\hat{\theta}}(I_{\mathrm{ref}})$ 且满足 $0 < \alpha \le p+1$，有

$$\|\omega - \Pi^{\pm}_{p}\omega\|_{L^2(I_{\mathrm{ref}})} \le C p^{-\alpha-1/2} U^{\alpha}_{\hat{\theta}}(\omega; I_{\mathrm{ref}}), \tag{4.11}$$

and

$$|\omega(\pm 1) - \Pi^{\pm}_{p}\omega(\pm 1)| \le C p^{-\alpha-1/2} U^{\alpha}_{\hat{\theta}}(\omega; I_{\mathrm{ref}}), \tag{4.12}$$

其中 C 取决于 α，但独立于 p 和 ω。

证明。 回顾 [18, (3.30)和推论 3.1] 可知，对于每个 $n \ge \alpha$，勒让德展开系数满足

$$|\hat{\omega}_n| \le \frac{(2n+1)}{2^{\alpha+2}\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma((n-\alpha)/2+1)}{\Gamma((n+\alpha+3)/2)} U^{\alpha}_{\hat{\theta}}(\omega; I_{\mathrm{ref}}). \tag{4.13}$$

通过类似于 [18, (3.30)], 中的论证，我们得到导数$\omega'(\xi)$的如下估计，

$$|\hat{\omega}'_n| \le \frac{(2n+1)}{2^{\alpha+1}\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma((n-\alpha+1)/2)}{\Gamma((n+\alpha)/2+1)} U^{\alpha}_{\hat{\theta}}(\omega; I_{\mathrm{ref}}). \tag{4.14}$$

通过类似于定理 3.2 证明中的论证，并结合 (4.13) 和 (4.14)，我们得到 (4.11)。□

采用定理 3.1 证明中使用的标准缩放论证（见小节 3.4），可将上述估计从参考单元推广到一般单元。由此得到以下推论。

推论 4.2。 假设内部奇异点位于 $x = \theta \in I_1 = (a, x_1)$，且$\tilde{\omega}|_{I_1} \in \mathcal{U}^{\alpha}_{\theta}(I_1)$，其中 $0 \le \alpha \le p+1$。则有以下估计：

$$\left\|\pi^{\pm}_{p}\tilde{\omega} - \tilde{\omega}\right\|_{I_1} \le C h^{\alpha+1/2} p^{-\alpha-1/2}\, U^{\alpha}_{\theta}(\tilde{\omega}; I_1), \tag{4.15}$$

and

$$\left|\left(\pi^{+}_{p}\tilde{\omega} - \tilde{\omega}\right)(x_1)\right| \le C h^{\alpha} p^{-\alpha-1/2}\, U^{\alpha}_{\theta}(\tilde{\omega}; I_1), \tag{4.16a}$$

$$\left|\left(\pi^{-}_{p}\tilde{\omega} - \tilde{\omega}\right)(a)\right| \le C h^{\alpha} p^{-\alpha-1/2}\, U^{\alpha}_{\theta}(\tilde{\omega}; I_1), \tag{4.16b}$$

其中 C 取决于 α，但与 p 和 $\tilde{\omega}$无关。

现在，我们准备给出具有位于 $\theta \in I_1$ 处内部奇异点的解类的最优收敛结果。将与网格 $\mathcal{T}$ 相关的分片Sobolev空间定义为对非拟合网格上奇异解的（3.3）–（3.4）的扩展：

$$\mathcal{W}^{\alpha,s}_{\theta}(I; \mathcal{T}) := \left\{ v : I \to \mathbb{R} \,:\, v|_{I_1} \in \mathcal{U}^{\alpha}_{\theta}(I_1),\ v|_{I_j} \in H^{s+1}(I_j),\ j = 2, \dots, M \right\},$$

并记

$$\|u\|_{\mathcal{W}^{\alpha,s}_{\theta}(I;\mathcal{T})} := U^{\alpha}_{\theta}(u; I_1) + \sum_{j=2}^{M} \|u^{(s+1)}\|_{L^2(I_j)}.$$

定理 4.2。 设 u 是 (2.1) 的解，且 $q = \sqrt{d}\, u_x$；设 $(u_h^p, q_h^p)^{\top}$ 是 (2.2)–(2.4) 的局部间断伽辽金解，其正则性为 $|||u|||_{\mathcal{E},T} < \infty$，其中 $|||u|||_{\mathcal{E},T}$表示 (3.5)中的范数，但将 $\|\cdot\|_{\mathcal{W}}$替换为 $\|\cdot\|_{\mathcal{W}^{\alpha,\theta}\ {}^{s}(I;\mathcal{T})}$。那么，对于 $h = \max\{h_j\}$ 和 $p = \min\{p_j\}$，若 $p > \alpha - 1$，则有

(i) 对于 $d=0$ 和 $p\ge s$,

$$\|(u-u_h^p)(\cdot,T)\| \le C\Big(\frac{h^{\alpha+1/2}}{p^{\alpha+1/2}}+\frac{h^{s+1}}{p^{s+1}}\Big)|||u|||_{\mathcal{E},T}; \tag{4.17}$$

(ii) 对于 $d\neq 0$ 和 $p\ge s-1$,

$$\|(u-u_h^p)(\cdot,T)\| + \|q-q_h^p\|_{Q_T} \le C\Big(\frac{h^{\alpha-1/2}}{p^{\alpha-1/2}}+\frac{h^{s}}{p^{s}}\Big)|||u|||_{\mathcal{E},T}, \tag{4.18}$$

其中常数 C 取决于 α、s，但与 h、p 和 u无关。

证明。 证明思路与定理 3.1 类似。利用引理 4.2 中的逼近结果，我们还通过高斯-拉道投影 $\pi^{\pm}u|_{I_j}=\pi_{p_1}^{\pm}u|_{I_j}$ 估计 (2.7)–(2.8) 中的项，重点关注第一个子区间 $I_1=(a,\ x_1)$。 事实上，由定理 4.2 和 (4.15) 可得

$$\begin{aligned}\|(u-\pi_{p_1}^{-}u)(\cdot,t)\|_{I_1} &= \Big(\frac{h_1}{2}\Big)^{1/2}\|\omega-\Pi_{p_1}^{-}\omega\|_{L^2(I_{\mathrm{ref}})}\\ &\le C\,h_1^{1/2}\,p_1^{-\alpha-1/2}\,U_{\hat\theta}^{\alpha}(\omega;I_{\mathrm{ref}})\\ &\le C\,h_1^{\alpha+1/2}\,p_1^{-\alpha-1/2}\,U_{\theta}^{\alpha}(u(\cdot,t);I_1),\end{aligned} \tag{4.19}$$

其中我们对 $0<h_1<2$，使用了

$$U_{\hat\theta}^{\alpha}(\omega;I_{\mathrm{ref}}) \le \Big(\frac{h_1}{2}\Big)^{\alpha} U_{\theta}^{\alpha}(u(\cdot,t);I_1).$$

对 u_t 应用相同的论证可得

$$\|(\pi_{p_1}^{-}u_t-u_t)(\cdot,t)\|_{I_1} \le C\,h_1^{\alpha+1/2}\,p_1^{-\alpha-1/2}\,U_{\theta}^{\alpha}(u_t(\cdot,t);I_1). \tag{4.20}$$

(i) 当 $d=0$ 时，(2.7) 中所有涉及 q 的项均不存在。因此，利用 (3.42) 和 (3.43) 可得

$$\begin{aligned}&\sup_{0\le t\le T}\|(\pi^{-}u-u)(\cdot,t)\|_{I_1}+\int_0^T\|(\pi^{-}u_t-u_t)(\cdot,t)\|_{I_1}\,\mathrm{d}t+\|\pi^{-}u_{\mathrm{ic}}-u_{\mathrm{ic}}\|_{I_1}\\ &\quad\le C\frac{h_1^{\alpha+1/2}}{p_1^{\alpha+1/2}}\Big(\sup_{0\le t\le T}U_{\theta}^{\alpha}(u(\cdot,t);I_1)+\int_0^T U_{\theta}^{\alpha}(u(\cdot,t);I_1)\,\mathrm{d}t\Big),\end{aligned} \tag{4.21}$$

这将　　给出首个区间上的误差对所需估计 (4.17 的贡献　　).

(ii) 当 $d\neq 0$ 时，令 $q=\sqrt{d}\,u_x$，证明过程与定理 3.1 (ii) 相同。利用 (4.11)，可得

$$\|(\pi_{p_1}^{+}q-q)(\cdot,t)\|_{I_1} \le C\sqrt{d}\,h_1^{\alpha-1/2}p_1^{-\alpha+1/2}U_{\theta}^{\alpha}(u(\cdot,t);I_1). \tag{4.22}$$

借助上述相关估计，可得

$$\begin{aligned}&\sup_{0\le t\le T}\|(\pi^{-}u-u)(\cdot,t)\|_{I_1}+\int_0^T\|(\pi^{-}u_t-u_t)(\cdot,t)\|_{I_1}\,\mathrm{d}t+\|\pi^{+}q-q\|_{L^2(I_1\times(0,T))}\\ &\quad+\|\pi^{-}u_{\mathrm{ic}}-u_{\mathrm{ic}}\|_{I_1}\le C\frac{h^{\alpha-1/2}}{p^{\alpha-1/2}}\Big(\sup_{0\le t\le T}U_{\theta}^{\alpha}(u(\cdot,t);I_1)\\ &\qquad+\int_0^T U_{\theta}^{\alpha}(u(\cdot,t);I_1)\,\mathrm{d}t+\sqrt{d}\,\|U_{\theta}^{\alpha}(u(\cdot,t);I_1)\|_{L^2(0,T)}\Big),\end{aligned} \tag{4.23}$$

由此得到 I_1. 上的误差界 (4.18)

对于其他子区间 I_j, $j = 2$、……、 M，分析过程与定理 3.1 的证明相同。因此我们略去细节，并得到相同的估计。证明至此完成。 □

4.3. 数值结果。 我们以补充图 2.1 的更多数值结果作为本节的结尾，以进一步展示局部间断Galerkin格式对于上述奇异性的最优收敛行为。在以下所有测试中，我们取 $\Omega = (0,1)$ 和 $T = 1$, ，并使用与图 2.1 相同的时间步进格式。

作为比较，我们首先考察定理 3.1 中的奇异解： $u(x, t) = x^{\pi} e^{2+\sin(x)-t}$，其中 $m = \infty$ 见图 4.1（左），并观察到 p 中的最优收敛阶与定理 3.1 的估计一致（相同的收敛行为亦见图 2.1）。如注 3.1 所述，对于 $d = 0$，可能会损失 $(2\pi + 1)$ 阶，但若 $m \le \pi + 3/2$，则只能达到 $\pi + m - 1/2$ 阶；$d \neq 0$. 的情况也类似。为说明这一点，我们采用以下精确解测试局部间断Galerkin格式：

$$u(x,t) = \mathcal{I}_{0+}^{\pi} H(\zeta - x)\, t = \frac{1}{\Gamma(\pi+1)} \big(x^{\pi} - (x-\zeta)_{+}^{\pi+1}\big) t,$$

其中 H 是 Heaviside 函数，且 $(x-\zeta)_{+} := \max\{x-\zeta, 0\}$. 。注意，对于 $\zeta > 0$, ${}^{C}\mathcal{D}_{0+}^{\pi} u = H(\zeta - x)$ $t \in W^{1,1}(I_1)$，因此有 $u \in \mathcal{U}^{\pi, m}_{0+}(I_1)$，其中 $m = 1$. 。由此，根据定理 3.1 可推知， p 中的收敛阶在 $d = 0$ 时为 $\mathcal{O}(p^{-\pi-1/2})$，在 $d \neq 0$ 时为 $\mathcal{O}(p^{-\pi-1/2})$，与图 4.1（右）中的数值结果吻合良好。

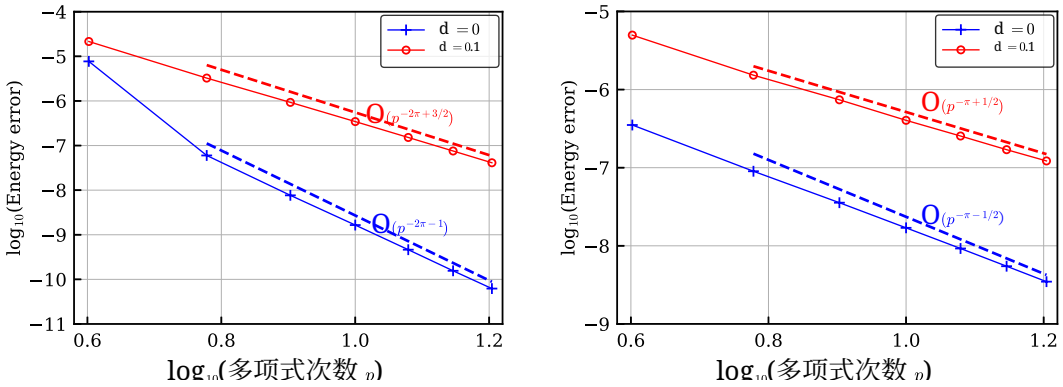

FIGURE 4.1. p版本对非光滑精确解的收敛性，其中 $u(x, t) = x^{\pi} e^{2+\sin(x)-t}$ （左），以及 $u(x, t) = \mathcal{I}_{0+}^{\pi} H(\zeta - x)\, t$，其中对流系数为 $c = 0.1$，扩散系数为 $d = 0.1$，且 $d = 0$.

接下来，我们进行一些数值测试，以验证定理 4.1–4.2。我们选取精确解： $u(x, t) = |x - \zeta|^{\pi} e^{2+\sin(x)-t}$ 并考虑 (i) 拟合情形： $\zeta = x_1$ 以及 (ii) 非拟合情形：$\zeta = (x_0 + x_1)/2$. 我们在图 4.2 中展示了两种情形下的收敛情况，结果再次与预测阶数完全吻合。事实上，拟合情形的收敛阶高于非拟合情形。令人意外的是，从图 4.1（左）和图 4.2（左）中可以观察到，对于 $d \neq 0$，当左端点奇异性和内部奇异点位于网格上时，收敛阶会损失半阶。

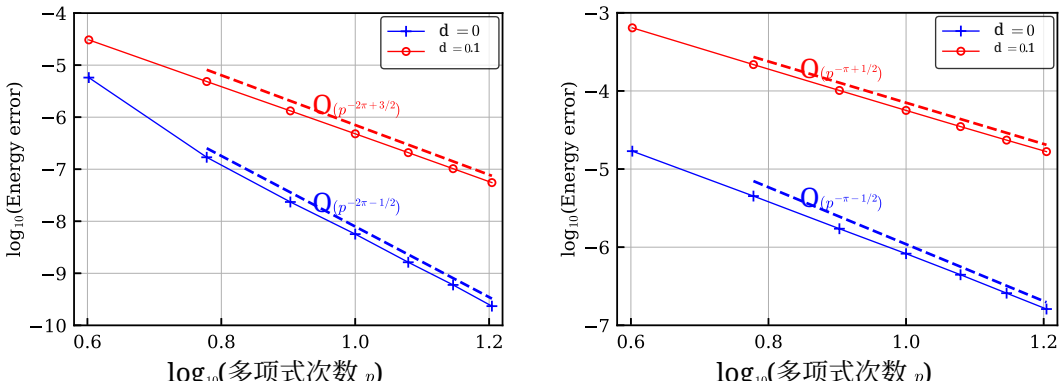

FIGURE 4.2. p 版本对非光滑精确解的收敛性$u(x,\ t) = |x-\zeta|^{\pi} e^{2+\sin(x)-t}$，其中左侧为 $\zeta = x_1$，右侧为 $\zeta = (x_0+x_1)/2$。对流系数为 $c = 0.1$，扩散系数为 $d = 0.1$，且 $d = 0$.

TABLE 5.1. p–版本的主导奇异项 收敛率（固定 h）。

奇异性	$d = 0$	$d \neq 0$
左端点（定理 3.1）	$\min\{2\alpha+1,\ \alpha+m-\frac{1}{2}\}$	$\min\{2\alpha-\frac{3}{2},\ \alpha+m-\frac{3}{2}\}$
拟合内部（定理 4.1）	$\min\{2\alpha+\frac{1}{2},\ \alpha+m-\frac{1}{2}\}$	$\min\{2\alpha-\frac{3}{2},\ \alpha+m-\frac{3}{2}\}$
非拟合内部（Thorem 4.2）	$\alpha+\frac{1}{2}$	$\alpha-\frac{1}{2}$

α: $u(x,t) = \mathcal{O}(|x-x_j|^{\alpha})$ 中靠近 x_j 的奇异性指数。m: 一个附加的正则性指标。

5. CONCLUDING REMARKS

Castillo 等人的局部间断 Galerkin（LDG）方法是一种求解对流–扩散方程的高效格式，但现有针对非光滑解的分析表明，p–收敛会损失一个阶。本文在一维情形下重新探讨这一问题，并通过为相关的分数阶 Sobolev 空间中的高斯–拉东投影推导新的逼近结果，弥合理论与计算之间的差距。在此框架下，我们分析奇异解的勒让德多项式展开，并得到精确的投影估计；进而针对左端点奇异性，给出 p–最优的先验 LDG 误差界；对于拟合内部和非拟合内部情形，则根据奇异点位于网格节点上还是严格位于单元内部，得到不同的 p–收敛率。

对于主导奇异项，在固定 h时得到的 p-版本收敛阶汇总于表 5.1。对于纯对流情形（$d = 0$）和对流–扩散情形（$d \neq 0$），该表报告了 p 中的可达阶数，并将其表示为奇异性指数 α、附加正则性指标 m以及奇异点位置的函数。第 4.3 小节中的数值实验验证了这些收敛率，并表明理论分析与观测到的 LDG 误差完全一致。本文提出的逼近框架源于高斯–拉东投影的结构，为研究间断伽辽金方法中的奇异解提供了有用工具，也阐明了在更一般的情形下如何解决其他 DG 格式中所报告的 p–次优性。

References

[1] R.A. Adams 和 J.J.F. Fournier。 *Sobolev Spaces, 2rd Ed*。Academic Press，纽约，2003。[2] F. Bassi 和 S. Rebay。用于数值求解可压缩纳维–斯托克斯方程的高阶精度间断有限元方法。 *J. Comput. Phys.*，131(2)：267–279，1997。[3] H. Brezis。 *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*。Springer，纽约，2011。[4] W.X. Cao、C.-W. Shu、Y. Yang 和 Z.M. Zhang。间断伽辽金方法求解二维双曲方程的超收敛。 *SIAM J. Numer. Anal.*，53(4)：1651–1671，2015。[5] W.X. Cao、C.-W. Shu、Y. Yang 和 Z.M. Zhang。间断伽辽金方法求解标量非线性双曲方程的超收敛。 *SIAM J. Numer. Anal.*，56(2)：732–765，2018。[6] W.X. Cao、C.-W. Shu 和 Z.M. Zhang。利用 $\mathbb{P}^k$ 单元对笛卡尔网格上二维双曲方程的半离散间断伽辽金方法进行统一分析：最优误差估计与超收敛。*Math. Comp.*，95(359)：1225–1250，2026。[7] W.X. Cao 和 Z.M. Zhang。局部间断伽辽金方法求解一维线性抛物方程的超收敛。 *Math. Comp.*，85(297)：63–84，2016。[8] W.X. Cao、Z.M. Zhang 和 Q.S. Zou。间断伽辽金方法求解线性双曲方程的超收敛。 *SIAM J. Numer. Anal.*，52(5)：2555–2573，2014。[9] P. Castillo、B. Cockburn、D. Sch¨otzau 和 C. Schwab。对流扩散问题中局部间断伽辽金方法 hp-版本的最优先验误差估计。 *Math. Comp.*，71(238)：455–478，2002。[10] F. Celiker 和 B. Cockburn。一维对流扩散问题中间断伽辽金方法和杂交方法的数值迹超收敛。 *Math. Comp.*，76(257)：67–96，2007。[11] B. Cockburn 和 C.-W. Shu。用于时变对流扩散系统的局部间断伽辽金方法。 *SIAM J. Numer. Anal.*，35(6)：2440–2463，1998。[12] E.H. Georgoulis、E. Hall 和 J.M. Melenk。关于 p-版本内罚间断伽辽金方法的次优性。 *J. Sci. Comput.*，42(1)：54–67，2010。[13] P. Houston、D. Sch¨otzau 和 T. Wihler。椭圆问题中 hp-自适应间断伽辽金方法的能量范数后验误差估计。 *Math. Models Methods Appl. Sci.*，17(1)：33–62，2007。[14] P. Houston、C. Schwab 和 E. S¨uli。用于对流扩散反应问题的间断 hp有限元方法。 *SIAM J. Numer. Anal.*，39(6)：2133–2163，2002。[15] A.A. Kilbas、H.M. Srivastava 和 J.J. Trujillo。 *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*。Elsevier Science B.V.，阿姆斯特丹，2006。[16] P. Lasaint 和 P.-A. Raviart，关于求解中子输运方程的一种有限元方法，载于 *Mathematical aspects of finite elements in partial differential equations (Proc. Sympos., Math. Res. Center, Univ. Wisconsin, Madison, Wis., 1974)* 89 123 1974 ，第 – 页。Academic Press，纽约 – 伦敦，[17] 。W.J. Liu 、 L.-L. Wang 和 H.Y. Li。分数阶索博列夫型空间中有限正则性函数的切比雪夫逼近最优误差估计。 *Math. Comp.*，88(320)：2857–2895，2019。[18] W.J. Liu、L.-L. Wang 和 B.Y. Wu。有界变差分数阶导数奇异函数的勒让德展开最优误差估计。 *Adv. Comput. Math.*，47(79)，2021。[19] X. Meng 和 J. Ryan。非线性标量双曲守恒律的间断伽辽金方法：差商估计与精度提升。 *Numer. Math.*，136(1)：27–73，2017。[20] X. Meng、C.-W. Shu 和 B.Y. Wu。基于偏上风通量的间断伽辽金方法求解线性双曲方程的最优误差估计。 *Math. Comp.*，85(299)：1225–1261，2016。[21] F.W.J. Olver、D.W. Lozier、R.F. Boisvert 和 C.W. Clark。 *NIST Handbook of Mathematical Functions*。Cam-bridge University Press，纽约，2010。[22] I. Perugia 和 D. Sch¨otzau。局部间断伽辽金方法用于扩散问题的 hp分析。*J. Sci. Comput.*，17(1-4)：561–571，2002。[23] I. Perugia 和 D. Sch¨otzau。用于低频时谐麦克斯韦方程的 hp-局部间断伽辽金方法。 *Math. Comp.*，72(243)：1179–1214，2003。[24] D. Sch¨otzau、C. Schwab 和 A. Toselli。用于不可压缩流的混合 hp-DGFEM。 *SIAM J. Numer. Anal.*，40 6 2171 2194，2002 ( )：–。[25] C. Schwab。 *p- and hp-FEM. Theory and Application to Solid and Fluid Mechanics*。Oxford University Press，纽约，1998。[26] J. Shen、T. Tang 和 L.-L. Wang。 *Spectral Methods: Algorithms, Analysis and Applications*。Springer-Verlag，纽约，2011。[27] C.-W. Shu 和 S. Osher。本质无振荡激波捕捉格式的高效实现。 *J.* ，( )：–。 *Comput. Phys.* 77 2 439 471, 1988