arXiv:2603.03858v1 [math.AC] 4 Mar 2026

Gorenstein局部环上的模具有有理庞加莱级数的一个判别准则

Anjan Gupta

摘要。我们证明，阿廷-戈伦斯坦局部环R 上的模具有共享公分母的有理庞加莱级数，如果R/底(R) 是 Golod环。如果 R 是极大理想的平方至多由两个元素生成的戈伦斯坦局部环，则我们证明 R 上的模具有共享公分母的有理庞加莱级数。根据 Sega 的一个结果，可知 R 满足 Auslander-Reiten猜想。我们给出一个不同的证明，针对 Rossi 与Sega [28]关于压缩 Gorenstein 局部环上模的庞加莱级数有理性的一个结果。我们还给出一个新证明：余深度至多为三的 Gorenstein局部环上的模具有共享公分母的有理庞加莱级数，该事实最初归功于 Avramov、Kustin 与 Miller [7]。

数学主题分类：*13D02, 13D40, 13H10.*
关键词：庞加莱级数、戈洛德环、*DG* 代数、纤维积、连通和。

1. 引言

设 R 为具有极大理想 m 和剩余域 $k = R/\mathfrak{m}$ 的交换诺特局部环。设 M 为 R 上的有限生成模。M 在 R 上的庞加莱级数是 $\mathbb{Z}[|t|]$ 中的形式幂级数，定义如下：

$$P_M^R(t) = \sum_{i\geq 0} \beta_i^R(M) t^i \in \mathbb{Z}[|t|],$$

其中 $\beta_i^R(M) = \dim_k \operatorname{Tor}_i^R(M,k)$ 表示 M 的第 i 个贝蒂数。我们称形式幂级数 $P(t) \in \mathbb{Z}[|t|]$ 为有理函数，如果存在多项式 $g(t) \in \mathbb{Z}[t]$，使得 $g(t)P(t)$ 是 $\mathbb{Z}[t]$中的多项式。Anick 给出的一个例子表明，庞加莱级数 $P^R{}_k(t)$ 一般不是有理函数，参见 [5]。Bøgvad 观察到，即使 R 是 Gorenstein 环，$P^R{}_k(t)$ 也可能不是有理函数，参见 [11]。

沿用 Roos 的说法，若存在一个多项式$d_R(t) \in \mathbb{Z}[t]$，使得对每个有限生成的R-模 M，都有$d_R(t)P_M^R(t) \in \mathbb{Z}[t]$，则称环 R 是良好的；否则称其为不良的，参见 [27, 定义 2.1]。Roos 证明了不良环确实存在，参见 [27, 定理 2.4]。尽管如此，良好环为数众多，例如正则局部环和局部完全交，参见 [20, 推论 4.2]。更多良好环的例子，以及庞加莱级数有理性的应用详述，见 [7], [8] 。

在本文中，我们用 μ(–) 表示最小生成元个数。R (= $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$) 的嵌入维数记为 edim($R$)。令 $\hat{R}$ 表示R的 m进完备化。根据 Cohen结构定理，存在一个带有极大理想 n 的正则局部环Q 以及一个满射

通讯作者：Anjan Gupta；电子邮箱：*agmath@gmail.com*。

环同态 $\eta : Q \to \hat{R}$，使得 $\ker \eta = I \subset \mathfrak{n}^2$。该映射称为$R$的极小Cohen表示。$R$ 的 Loewy 长度定义为 $\mathrm{ll}(R) = \max\{i : \mathfrak{m}^i \neq 0\}$，如果$R$ 是阿廷环；否则为无穷大。

我们再回顾几个从现有文献中收集到的良好环的例子。每个例子都附有准确的参考文献。

例子。设 R 是一个戈伦斯坦局部环，满足 嵌入维数$(R) = n \geq 2$、长度$(R) = s$ 且$\mu(I) = r$。若 R 满足下列条件 *(1)–(3)* 之一，则对某个多项式 $d_R(t) \in \mathbb{Z}[t]$，有 $P^R{}_k(t) = (1+t)^n\, d_R(t)$，并且对每个有限生成 R-模 M，$d_R(t)P^R_M(t) \in \mathbb{Z}[t]$。

(1) R 是一个压缩阿廷戈伦斯坦环（见定义 *4.3*），且 $s \geq 2$、$s \neq 3$。若$\eta : Q \to R$ 是 R 的极小*Cohen*表示，则多项式 $d_R(t)$ 由$1 - t(P^Q R\,(t) - 1) + t^{n+1}(1 + t)$ 给出；参见 *Rossi* 和 *Sega* [28, 定理 *5.1*],*(2)* R 是一个 *Artin Gorenstein*环，且 $\mu(m^2) = 1$。多项式 $d_R(t)$ 由 $1 - nt + t^2$ 给出；参见 *Sally* [29, 定理 2], *Croll* 等人 [1, 定理 *5.4*],*(3)* R 不是完全交，且余深度(R) = 嵌入维数(R) −深度$(R) \leq 3$。多项式 $d_R(t)$ 等于 $1 - rt^2 - rt^3 + t^5$；参见 *Wiebe* [31, 定理 9], *Avramov* 等人 [7, 定理 *6.4*]。

本文的主要目标是为 Gorenstein局部环是否为良环提供一个判据，从而为证明上述各个例子中的良性提供一种通用方法。作为一项新的应用，我们证明：若 R 是 Artin Gorenstein环，且 $\mu(\mathfrak{m}^2) = 2$，则R 是一个良环。

我们回顾几个定义。设 $\phi : R \to S$ 是局部环之间的满同态，且k是R 和S的公共剩余域。根据标准的 Tor 换环谱序列，Serre 证明了以下幂级数逐项不等式：

$$P^S_k(t) \prec \frac{P^R_k(t)}{1 - t(P^R_S(t) - 1)}.$$

该同态 ϕ称为 Golod同态，如果上述不等式取等号。证明环 R 是良环的最常用方法，是运用 Levin 的一个结果（定理 2.2），该结果指出：若存在一个从完全交到环 R 上的满 Golod同态，则环 R是良环。

设 $\eta : Q \twoheadrightarrow R$ 为 R 的极小Cohen表示。若 η 是 Golod同态，则称 R 为 Golod环。设嵌入维数(R) = n，且 K^R 表示 R 关于极大理想 m 的一组极小生成元的 Koszul复形。由此可知，只要有 $P^R k\,(t) = \left(\dfrac{1 + {}^n t)\, i \dim H_i(K^R)t^{i+1}}{1 - \sum_{=1}^{n}}\right)^k$，则 R 为 Golod环。关于戈洛德环与 Golod同态的更多细节，参见 [9, §3]。本文的主要结果如下：

定理 I. 设 R 为嵌入维数 $n \geq 2$ 的阿廷-戈伦斯坦局部环，使得 $R/$底(R) 为 *Golod*环。设 $\eta : Q \to R$ 为极小 *Cohen* 表示，$\mathfrak{n}$ 表示 Q 的极大理想，且 $I = \ker(\eta) \subset \mathfrak{n}^2$。则下列结论成立。

(1) 对任意 $f \in I \setminus \mathfrak{n}I$，诱导映射 $Q/(f) \twoheadrightarrow R$ 是一个 *Golod*同态。*(2)* 令 $d_R(t) = 1 - t(P^Q{}_R(t) - 1) + t^{n+1}(1 + t)$。那么对任意 R-模 M，我们有 $d_R(t)P^R_M(t) \in \mathbb{Z}[t]$.

值得注意的是，若 R 是一个 Artin Gorenstein环，嵌入维数$(R) \geq 2$ 且 R/底(R) 是一个 Golod环，那么采用上述定理中的记号，可得 $P^R{}_k(t) = (1+t)^n\, d_R(t)$，这是 Rossi 和 Sega 的一个结果，参见 [28, 命题 6。2]因此，陈述 (2) 是由陈述 (1) 和 Levin 的结果直接得到的。

以下内容是作为定理 I 的一个推论证明的。

定理 II. 设 R 是一个阿廷-戈伦斯坦局部环，其极大理想为 $\mathfrak{m}$，剩余域为 k。设 M 是一个有限生成 R-模。假设 $\operatorname{edim}(R) = n$ 且 $\mu(\mathfrak{m}^2) \leq 2$。则有以下结论。

(1) 若 $n = 1$，则 $P^R{}_k(t) = \dfrac{1}{1-t}$ 且 $(1-t)P^R_M(t) \in \mathbb{Z}[t]$,*(2)* 若 $n \geq 2$，则 $P^R{}_k(t) = \dfrac{1}{1-nt+t^2}$，且 $(1+t)^n(1-nt+t^2)P^R_M(t) \in \mathbb{Z}[t]$,*(3)* 若对所有 $i \geq 1$，$\operatorname{Ext}^i(M,M) = 0$，则 M 是自由 R-模。

结论 (3) 可由结论 (1) 和 (2) 通过 Sega 的一个论证推出，参见 [30]。这意味着 R 满足 Auslander-Reiten猜想，参见 [26]。

当 $\mu(\mathfrak{m}^2) = 1$ 时，定理 II 中考虑的环称为拉伸环；当 $\mu(\mathfrak{m}^2) = 2$ 时，则称为几乎拉伸环（见定义 3.11）。Sally 在 [29] 引入了拉伸 Cohen-Macaulay 局部环。她证明，对于这样的环 R，P^R k (t) 是有理函数，参见 [29, 定理2]。后来，Elias 和 Valla 引入了几乎拉伸 Cohen-Macaulay 局部环。他们证明，如果 R 是几乎拉伸 Gorenstein 局部环，且 R 的剩余域 k 的特征为零，那么 P^R k (t) 是有理函数，参见 [16, 定理 1.1]。在一篇近期文章中，[1, 推论 5.6], 证明了拉伸 Cohen-Macaulay 局部环是良好的。利用定理 II，我们证明了拉伸 Cohen-Macaulay 环和几乎拉伸 Gorenstein 环都是良好的，且无需对剩余域作任何假设。我们还证明，这类环满足 Auslander-Reiten猜想。

现在简要介绍本文的组织结构。在 §2 中，我们证明定理 I。证明大量运用了 Golod代数的一个刻画定理（见定理 2.1），以及无环闭包上的链导子；无环闭包的构造可追溯到 Gulliksen 的工作。戈伦斯坦局部环的连通和在 [3] 中引入（见定义 3.2）。在 §3 中，我们给出戈伦斯坦局部环连通和分解的一个判据。我们证明，若 R 是一个阿廷-戈伦斯坦局部环，其极大理想为 m，且 $\mu(\mathfrak{m}^2) \leq 2$，则除非 $\mu(\mathfrak{m}) \leq 2$，否则 R 可分解为一个连通和（Corollary 3.5）。我们利用这一分解证明，环 R 对极大理想 m 的非零幂取商所得的环都是戈洛德环（引理 3.8）。这一事实对于定理 II 的证明至关重要。最后一节 §4 运用定理 I，为例 (1) 和 (3) 给出了新的证明。我们为阿廷-戈伦斯坦环 R 的 Koszul代数 K^R 确定了一个特定的商 C；只要 C 是 Golod DG代数，R 就是某个完全交在一个 Golod同态下的满射像（§2.2）。我们证明，在例 (1) 和 (3) 中所讨论的环，其商是一个 Golod代数。值得特别指出的是，我们的版本在这两个例子中都略强于早先的版本，因为我们构造了从超曲面出发的 Golod同态，而这些超曲面可由定义理想的极小生成集中的任意一个生成元给出。

最后要指出，我们的方法只能构造从超曲面环出发的 Golod同态。我们希望这一方法今后能够进一步推广，从而为存在从更高余维数的完全交出发的 Golod同态提供判据。

本文中的所有环都是带有 $1 \neq 0$的诺特局部环。所有模均非零且有限生成。在本文中，表达式“局部环 (R, m, k)”指具有极大理想 m 和剩余域 $k = R/\mathrm{m}$ 的交换诺特局部环 R。当不需要有关剩余域的信息时，我们将具有极大理想 m 的局部环 R 简记为 (R, m)。

2. 主要结果

设 (R, m, k) 是一个局部环。环 R 上的 DG 代数 (A, ∂) 由一个非负分次、严格反交换的 R- 代数 $A = \oplus_{i\geq 0} A_i$ 组成，满足 $A_0 = R/I$，其中 R 的某个理想为 I，并带有一个次数为 -1 的 R- 线性微分映射 ∂，满足莱布尼茨法则。DG 代数同态 $\phi : A \to B$ 是复形之间的链映射，它诱导环同态 $\phi^{\#} : A^{\#} \to B^{\#}$，该同态作用于底层反交换环$A^{\#}$、$B^{\#}$，此时忽略$A$和$B$上的微分映射。若$B^{\#}$ 是$A^{\#}$上的自由模，则称 DG 代数B是A 的半自由扩张。

如果赋予满射 DG 代数同态 $\epsilon : \mathrm{A} \twoheadrightarrow \mathrm{k}$，则 DG 代数 (A, ∂) 称为增广的。若 $\tilde{\epsilon} : \mathrm{H(A)} \to \mathrm{k}$ 是同调上的诱导映射，我们定义 $\mathrm{I\,A} = \ker \epsilon$、$\mathrm{I\,H(A)} = \ker \tilde{\epsilon}$ 以及 $\mathrm{I\,Z(A)} = \mathrm{I\,A} \cap \mathrm{Z(A)}$。若 $\partial(\mathrm{A}) \subset \mathrm{mA}$，则称 DG 代数 (A, ∂) 为极小的。极小 DG 代数 A 自然带有增广，其满射映射为 $\epsilon = \mathrm{q} \circ \mathrm{pr}$，其中 $\mathrm{pr} : \mathrm{A} \twoheadrightarrow \mathrm{A}_0$ 是投影，$\mathrm{q} : \mathrm{A}_0 \twoheadrightarrow \mathrm{k}$ 是自然商映射。关于 DG 代数及相关术语的更多信息，请参阅 [9]。

2.1. **Tate 分解**。Tate 描述了一种构造剩余域 k 在R上的 DG 代数分解的方法。该方法从R开始，反复添加外变量以消去偶数次数的圈，并添加分幂变量以消去奇数次数的圈。在文献中，这种构造称为 Tate 分解。后来，Gulliksen 证明，若在每一步消去某个次数的圈时所添加的变量数均为可能的最小值，则所得的 Tate 分解将成为剩余域k的极小自由分解。在这种情况下，该 DG 代数称为k 在R 上的无环闭包，它在 DGΓ代数的同构意义下唯一。更多详情请参阅 [9, §6], [19,第 1] 章。

本文中，Tate分解指一个满射的R-线性拟同构 $\epsilon : R\langle X\rangle \twoheadrightarrow k$，其中$R\langle X\rangle$是$k$的无环闭包。添加的变量集合$X = \{X_i : i \geq 1\}$按以下方式排序：$1 \leq \deg(X_i) \leq \deg(X_j)$，其中$i < j$。注意，根据构造，无环闭包$R\langle X\rangle$ 是R的半自由扩张。

无环闭包$R\langle X\rangle$上的次数为n的R-线性导子，是一个次数为n 的R-线性映射 $\eta : R\langle X\rangle \to R\langle X\rangle$，满足以下性质：

(1) $\eta(\mathrm{R}) = 0$（R-线性）；(2) η满足莱布尼茨法则，即 $\eta(\mathrm{uv}) = \eta(\mathrm{u})\mathrm{v} + (-1)^n \deg(\mathrm{u})\mathrm{x}\eta(\mathrm{v})$，其中 $\mathrm{u}、\mathrm{v} \in \mathrm{R\langle X\rangle}$；(3) $\eta(\mathrm{X}^{(i)}\,\mathrm{i}) = \eta(\mathrm{X}_i)\mathrm{X}^{(i-1)}\,\mathrm{i}$，其中 $\mathrm{X}^{(i)}\,\mathrm{i}$ 是偶数正次数变量 X_i 的第 i 个除幂。

若导子 η 在分次意义下与$R\langle X\rangle$ 的微分 ∂可交换，即 $\eta \circ \partial = (-1)^n \partial \circ \eta$，则称其为链导子。

Gulliksen 在 [19, 定理 1.6.2] 在无环闭包$R\langle X\rangle$上构造了一列R-线性链导子 η_j，使得 $\eta_j(X_j) = 1$ 且 $\eta_j(X_i) = 0$，其中$i < j$。

2.2. **Golod代数**。带增广映射 $\epsilon : A \twoheadrightarrow k$的 R 上的增广DG代数$A$ 称为 Golod代数，如果A 存在平凡的马西运算；也就是说，存在一个分次k-基 $\mathrm{b}_R = \{h_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$（属于 I H($A$)），以及一个函数 μ : $\sqcup^{\infty}{}_{i=1}$ $\mathrm{b}_R^i \to A$，使得 μ(h_λ) ∈I Z(A)，且h_λ的 cls(μ(clsh$_\lambda$)) $= h_\lambda$；并且令 $\bar{}a$ $(-1)^{i+1}a$，对于$a \in A_i$，有

$$\partial\mu(h_{\lambda_1},\dots,h_{\lambda_p}) = \sum_{j=1}^{p-1} \overline{\mu(h_{\lambda_1},\dots,h_{\lambda_j})}\mu(h_{\lambda_{j+1}},\dots,h_{\lambda_p}).$$

下面　的结论在 [24,定理 1.5] 中得到证明，也可由 [25, 定理 1.1]推出　　.

定理 2.1。设 $f : (R, \mathfrak{m}) \twoheadrightarrow (S, \mathfrak{n})$ 是具有公共剩余域 k 的局部环之间的满同态，并设 $\epsilon : R\langle X\rangle \twoheadrightarrow k$ 是 k 在 R 上的 DG代数分解。令 $A = R\langle X\rangle \otimes_R S$。考虑 A 配备增广 $\epsilon \otimes_R S$。则以下条件等价：

*(1) DG*代数 A 是 *Golod*代数。*(2)* 映射 f 是 *Golod*同态。*(3)* 诱导映射 $\mathrm{Tor}^R(k, k) \to \mathrm{Tor}^S(k, k)$和 $\mathrm{Tor}^R(\mathfrak{n}, k) \to \mathrm{Tor}^S(\mathfrak{n}, k)$ 均为单射。

我们回顾 Levin 在 [7, 命题 5.18] 中记载的以下结果。

定理 2.2. 设$(R, \mathfrak{m}, k)$ 是一个局部环，且 $\phi : P \twoheadrightarrow R$ 是从嵌入维数为 n 的局部完全交 P 到 R 的满射 *Golod*同态。则存在一个多项式 $d_R(t) \in \mathbb{Z}[t]$，使得对于任意有限生成 R-模 M，均有 $d_R(t)P^R_M(t) \in \mathbb{Z}[t]$。此外，$d_R(t)P^R{}_k(t) = (1 + t)^n$。

现在我们已具备证明主要结果的条件。

2.3. **定理I的证明**。

证明。设 R 的极大理想为 m，且 k = R/m 表示 R 的剩余域。我们知道 $\mathrm{H}_1(\mathrm{K}^R) \cong \mathrm{I}/\mathrm{nI}$。因此，I 的极小生成元与 $\mathrm{H}_1(\mathrm{K}^R)$ 的生成元一一对应。设 Q 的极大理想 n 的极小生成元为 $\mathrm{y}_1, \dots, \mathrm{y}_n$。Q 的 Koszul复形为 $\mathrm{K}^Q = \mathrm{Q}\langle \mathrm{X}_i : \partial(\mathrm{X}_i) = \mathrm{y}_i, 1 \le \mathrm{i} \le \mathrm{n}\rangle$。令 $\mathrm{f} = \sum^n \mathrm{i}_{=1}\, a_i y_i$，并令 P = Q/(f)。注意，$\mathrm{K}^P = \mathrm{K}^Q \otimes_Q \mathrm{P}$ 和 $\mathrm{K}^R = \mathrm{K}^Q \otimes_Q \mathrm{R}$ 分别是 P 和 R 的 Koszul复形。令 $\mathrm{z} = \sum^n \mathrm{i}_{=1} a_i X_i \in \mathrm{K}^Q_1$。则其剩余类 $\bar{}\mathrm{z}$ 是 $\mathrm{Z}_1(\mathrm{K}^P)$ 中的一个圈。令 $\mathrm{V} = \mathrm{K}^P\langle \mathrm{T} : \partial(\mathrm{T}) = \bar{}\mathrm{z}\rangle$，它是通过添入一个次数为二的除幂变量 T 来消去圈 $\bar{}\mathrm{z}$ 而得到的 K^P 的扩张。根据 [9, 定理 7.3.3],，自然增广 V ↠ k 是 k 在 P 上的 Tate分解。

设$U = V \otimes_R R = K^R\langle T : \partial(T) = \bar{}z\rangle$。由于$f \in I \setminus \mathrm{n}I$，我们有 $\bar{}z \in \mathrm{Z}_1(K^R) \setminus B_1(K^R)$。因此，我们可以向 U 中添入变量，从而得到剩余域k 在R上的无环闭包X。增广映射 $\epsilon : \mathrm{X} \twoheadrightarrow k$ 是k 在R上的Tate分解。

根据定理 2.1，要证明 P ↠ R 是 Golod同态，我们需要证明诱导映射 $\mathrm{Tor}^P(\mathrm{k}, \mathrm{k}) \to \mathrm{Tor}^R(\mathrm{k}, \mathrm{k})$ 和 $\mathrm{Tor}^P(\mathrm{m}, \mathrm{k}) \to \mathrm{Tor}^R(\mathrm{m}, \mathrm{k})$ 是单射。V 和 X 都是极小代数。因此，第一个映射是 $\mathrm{U} \otimes_R \mathrm{k} \to \mathrm{X} \otimes_R \mathrm{k}$，它显然是单射，因为

X 是U的半自由扩张。第二个映射是i_* : H(mU) → H(mX)，它由包含映射 i : mU → mX 诱导。我们证明 i$_*$ 是单射。

我们有一个次数为 −2 的 R-线性链导子 v : X → X，满足 v(T) = 1。设 R = R/ socle(R)。注意，socle(R) ⊂ m^2, ，因此 K^R = R$\otimes_R$K^{R}是 R 的 Koszul复形。现在，K^{R}可以扩张为 R 上的无环闭包 Y。令 j : K^R → Y 表示包含映射。增广映射$\epsilon_{\mathfrak{Y}}$: Y ↠ k 是 K^{R}上的代数同态。无环闭包 X 是 K^{R}上的半自由对象。因此，增广映射 $\epsilon_{\mathfrak{X}}$: X ↠ k 可提升为 K^{R}上的 DG代数同态 β : X → Y，参见[9, 命题 2.1.9]。令 α : K^R → K^R 表示商映射。滥用记号，我们用同一符号表示映射的限制。我们有如下交换图。

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{m}K^R & \xrightarrow{\mathrm{i}} & \mathfrak{m}\mathfrak{X} \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \beta} \\ \mathfrak{m}K^{\bar{R}} & \xrightarrow{\mathrm{j}} & \mathfrak{m}\mathfrak{Y} \end{array}$$

一个圈 y 在 mU 中可以写成 $y = \sum^m{}_{k=0}\, a_k T^{(m-k)}$, $a_i \in \mathfrak{m}K^R$. 假设 i(y) 位于 mX 的边界中。我们通过对 m 作归纳法，证明y 位于 mU的边界中。

首先假设 m = 0。那么 y ∈ mK^R。由于 i(y) 位于 mX 的边界中，由交换图可知，j ∘ α(y) 位于 mY 的边界中。现在R是一个 Golod环，因此 j 诱导出一个单射 j$_*$: H(mK^R) → H(mY)。因此，α(y) 位于 mK^R的边界中。这意味着 $y = sy_1 + \partial(y_2)$，其中 $y_1 \in K^R$，$y_2 \in \mathfrak{m}K^R$，且 socle(R) = (s)。

根据 [23, 引理 1.2]，我们知道，对于 1 ≤ i ≤ n − 1，socle(R)K$_i^R$ ⊂ (0 : m^2) B$_i$(K^R)。如果 deg(y) = deg(y$_1$) < n，则 sy$_1$ ∈ (0 : m^2) B(K^R)，因此 y ∈ m B(K^R) ⊂ m B(U)。另一方面，如果 deg(y) = n，则 y$_2$ = 0 and y = sy$_1$ = asX$_1$ ... X$_n$，a ∈ R。由于 H(K^R) 是一个庞加莱代数[6], ，存在 z′ ∈ Z$_{n-1}$(K^R)，使得 zz′ = sX$_1$ ... X$_n$。由此得出 y = a zz′ = ∂(aT z′) ∈ m B(U)。因此，m = 0时归纳步骤 = 0成立。

现在我们假设 m > 0。注意 $a_0 = v^m$(i(y))。由于 i(y) ∈ m B(X)，且链导子v 与 X 的微分可交换，因此我们有 $a_0 \in \mathfrak{m}K^R \cap$B(mX)。我们分两种情况讨论。

假设 deg(a$_0$) = n。那么 a$_0$ ∈ Z$_n$(mK^R) = R 的底 K$_n^R$。因此，a$_0$ = asX$_1$ ... X$_n$，a ∈ R。注意到 a$_0$ T (m) = a zz′T (m) = ∂(az′T (m$_{+1}$)) ∈ m B(U)。因此，i($\sum^{m-1}_{=0}$ k a$_k$T$^{(m-k)}$) = i(y) − a$_0$T$^{(m)}$位于 mX 的边界中。由归纳假设，$\sum^{m-1}_{=0}$ k a$_k$T (m-k) 位于 mU 的边界中。由此可知，y 位于 mU 的边界中。

假设 deg(a_0) < n。那么，根据归纳步骤 m = 0 中的论证，可得 $a_0 = \partial(y_3)$ 对$y_3 \in \mathfrak{m}K^R$成立。我们可以写作

$$y = \partial(y_3)T^{(m)} + \sum_{k=0}^{m-1} a_k T^{(m-k)} = \partial(y_3 T^{(m)}) + [(-1)^{\deg(y_3)+1} y_3 \bar{z} T^{(m-1)} + \sum_{k=0}^{m-1} a_k T^{(m-k)}].$$

第一个加项属于 m B(U)。这意味着第二个加项属于 mX 的边界，因此根据归纳假设，也属于 mU 的边界。由此可得，y 属于 mU的边界。这就完成了归纳步骤。因此，i$_*$ 是一个单射，结论 (1) 得证。

环 $\bar{R}$ 是 Golod 环。 R 的庞加莱级数计算如下： $P^{R}{}_{k}(t) = (1 + t)t(P_R(t))\,t^{n+1}$ 见 [28, 命题 6。2], 因此， 根据定理 2.2， 结论 (2) 得证。 □

3. 拉伸环与几乎拉伸环

本节旨在证明， 拉伸的和几乎拉伸的 Gorenstein 环都是良好的。关键步骤是证明这类环可分解为连通和。若剩余域是无限域， 则下面的引理3.1可由 [14, 定理 1]推出。该引理的证明思路由匿名审稿人提出。

引理 3.1。 设$(R, \mathfrak{m}, k)$ 是一个局部环， 满足$\mu(\mathfrak{m}^2) \leq 2$。则存在一个 $x \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$， 使得$\mathfrak{m}^2 = x\mathfrak{m}$。此外， 若$\mathrm{ll}(R) \geq 3$， 则 $x^2 \notin \mathfrak{m}^3$。

证明。 若 $\mathfrak{m}^2 = x\mathfrak{m} + \mathfrak{m}^3, x \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2,$， 则由中山引理可得$m^2 = x\mathfrak{m}$。因此， 为证明第一个断言， 只需假设 $\mathfrak{m}^3 = 0$， 即 $\mathfrak{m}^2$ 是一个k-向量空间。若 $\mathfrak{m}^2 = 0$， 则对于所有$x \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$， 都有 $\mathfrak{m}^2 = x\mathfrak{m} = 0$。若 $\mu(\mathfrak{m}^2) = 1$， 则对任意$x \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$ 且满足$x\mathfrak{m} \neq 0$的 x， 都有 $\mathfrak{m}^2 = x\mathfrak{m}$。因此， 我们只需考虑 $\mu(\mathfrak{m}^2) = 2$ 的情形， 即 $\mathfrak{m}^2$ 是一个维数为二的向量空间。

设 $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n$ 是 $\mathfrak{m}$ 的一个极小生成集。设 r 满足： 对所有满足$1 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{r}$ 的 i， $\mathrm{x}_i\mathfrak{m} \neq 0$， 但当 $\mathrm{i} > \mathrm{r}$ 时， $\mathrm{x}_i\mathfrak{m} = 0$。反设 $\mathfrak{m}^2 \neq \mathrm{x}\mathfrak{m}$ 对所有 $\mathrm{x} \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$ 都成立。因此， 若 $\mathrm{i} \leq \mathrm{r}$， 则 $\mathrm{x}_i\mathfrak{m}$ 是一个一维向量空间。我们还可以假设 $\mathfrak{m}^2 = \mathrm{x}_1\mathfrak{m} + \mathrm{x}_2\mathfrak{m}$。显然 $\mathrm{x}_1\mathfrak{m} \neq \mathrm{x}_2\mathfrak{m}$； 否则 $\mathfrak{m}^2 = \mathrm{x}_1\mathfrak{m}$， 这与我们的假设矛盾。

若 $\mathrm{i} \leq \mathrm{r}$、$\mathrm{j} \leq \mathrm{r}$ 且 $\mathrm{x}_i\mathrm{x}\,\mathrm{j} \neq 0$， 则可看出 $\mathrm{x}_i\mathfrak{m} = \mathrm{x}\,\mathrm{j}\mathfrak{m}$。这是因为 $\mathrm{x}_i\mathfrak{m}$ 和 $\mathrm{x}\,\mathrm{j}\mathfrak{m}$ 都是一维向量空间， 且它们共有非零元素 $\mathrm{x}_i\mathrm{x}\,\mathrm{j}$。由于 $\mathrm{x}_1\mathfrak{m} \neq \mathrm{x}_2\mathfrak{m}$， 因此必有 $\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2 = 0$。现在 $\mathrm{x}_1\mathfrak{m} \neq 0$ 且 $\mathrm{x}_2\mathfrak{m} \neq 0$， 所以存在 i、j， 使得 $\mathrm{i} \leq \mathrm{r}$、$\mathrm{j} \leq \mathrm{r}$， 且 $\mathrm{x}_1\mathrm{x}_i \neq 0$、$\mathrm{x}_2\mathrm{x}\,\mathrm{j} \neq 0$。这意味着 $\mathrm{x}_1\mathfrak{m} = \mathrm{x}_i\mathfrak{m}$ 且 $\mathrm{x}_2\mathfrak{m} = \mathrm{x}\,\mathrm{j}\mathfrak{m}$。特别地， $\mathrm{x}_i\mathfrak{m} \neq \mathrm{x}\,\mathrm{j}\mathfrak{m}$， 因此 $\mathrm{x}_i\mathrm{x}\,\mathrm{j} = 0$。我们有 $(\mathrm{x}_2 + \mathrm{x}_i)\mathrm{x}_1 = \mathrm{x}_1\mathrm{x}_i \neq 0$， 且 $(\mathrm{x}_2 + \mathrm{x}_i)\mathrm{x}\,\mathrm{j} = \mathrm{x}_2\mathrm{x}\,\mathrm{j} \neq 0$， 于是 $(\mathrm{x}_2 + \mathrm{x}_i)\mathfrak{m} = \mathrm{x}_1\mathfrak{m}$ 且 $(\mathrm{x}_2 + \mathrm{x}_i)\mathfrak{m} = \mathrm{x}_j\mathfrak{m} = \mathrm{x}_2\mathfrak{m}$。这推出 $\mathrm{x}_1\mathfrak{m} = \mathrm{x}_2\mathfrak{m}$， 矛盾。因此， 引理的第一部分得证。

若$x^2 \in \mathfrak{m}^3,$， 则 $\mathfrak{m}^3 = x^2\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}^4$。由中山引理， $\mathfrak{m}^3 = 0$， 这意味着 $\mathrm{ll}(R) \leq 2$。因此， 当 $\mathrm{ll}(R) \geq 3$时， $x^2 \notin \mathfrak{m}^3$。 □

我们回顾纤维积和连通和的定义， 参见 [3]。

定义 3.2。 设$(R, \mathfrak{m}_R, k)$、$(S, \mathfrak{m}_S, k)$ 为具有公共剩余域 k 的局部环。令 $\pi_R: R \to k$、$\pi_S: S \to k$ 分别为从 R、S 到 k 的自然商映射。R 与 S 的纤维积定义为环 $R \times_k S = \{(r, s) \in R \times S: \pi_R(r) = \pi_S(s)\}$。环 $R \times_k S$ 是局部环， 其极大理想为 $\mathfrak{m}_R \oplus \mathfrak{m}_S$。

现在假设 R、S 都是阿廷-戈伦斯坦局部环， 并且具有一维底底$(R) = \langle\delta_R\rangle$、底$(S) = \langle\delta_S\rangle$。那么， R 与 S 的连通和定义为

$$R\#S = \frac{R \times_k S}{\langle(\delta_R, -\delta_S)\rangle}.$$

若存在环 R、S， 使得 $Q = R\#S$， 且 $l(R) < l(Q)$， 并且 $l(S) < l(Q)$， 则称 *Gorenstein*局部环 Q 可分解为连通和。这里， $l(-)$ 表示长度函数。

在环 S $=k[X_1,\ldots,X_n]$, $X_i=Y_i^{-1}$上，为多项式环 T $=k[Y_1,\ldots,Y_n]$ 定义左模结构：若 X_i M $\in$T，则将 X_i 作用于单项式 M $\in$T 定义为通常的乘法；否则定义为零。Macaulay 逆系统建立了局部阿廷-戈伦斯坦代数 R $=k[X_1,\ldots,X_n]$ I（其中 I $\subset(X_1,\ldots,X_n)$）与环 T 中的多项式（相差一个单位倍）之间的一一对应关系。该对应关系~~由 I = ann~~ F 给出，参见[17,定理 21.6]。若 Gorenstein局部环 R、S 分别对应于多项式 F $\in k[Y_1,\ldots,Y_m]$ 和 G $\in k[Y_{m+1},\ldots,Y_n]$，则连通和 R#S 对应于多项式 F +G $\in k[Y_1,\ldots,Y_n]$，参见 [2, 注 4.24]。

下述结果由 [4, 命题4.1] 推出，并且对于阿廷k-代数，可利用 Macaulay 逆系统容易地证明。

Theorem 3.3. 设 (Q, n, k) 为正则局部环，且 $I \subset n^2$ 为理想，使得 $R = Q/I$ 为阿廷-戈伦斯坦局部环。设 n 由 $x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n$ 极小生成，使得 $(x_1,\ldots,x_m)(y_1,\ldots,y_n) \subset I$。设 $max\{i : (x_1,\ldots,x_m)^i \not\subset I\} = s$，$max\{i : (y_1,\ldots,y_n)^i \not\subset I\} = t$。则在 Q 中存在分别包含 $(x_1,\ldots,x_m)$、$(y_1,\ldots,y_n)$ 的理想 I_1, I_2，使得下列结论成立。

(1) 环 $S = Q/I_1$, $T = Q/I_2$ 是 *Gorenstein* 环。嵌入维数$(S) = n$, 嵌入维数$(T) = m$, 长度$(S) = t$,长度$(T) = s$。*(2)* $R = S\#_k T$。

下一个定理是将一个满足 $\mu(\mathfrak{m}^2) \le 2$ 的阿廷-戈伦斯坦局部环 $(R,\mathfrak{m},k)$ 分解为连通和的关键。当嵌入维数$(R) = 2$ 且 char$(k) = 0$时，该定理可由[15, 定理 4.1]推出。

定理 3.4。 设$(R,\mathfrak{m},k)$ 是一个局部阿廷戈伦斯坦环。设嵌入维数$(R) = n$, 长度$(R) \ge 3$ 且维数$_k\mathfrak{m}^2/\mathfrak{m}^3 = m < n$。假设$\mathfrak{m}$ 存在一个生成元 x_1，使得$\mathfrak{m}^2 = x_1\mathfrak{m}$。则存在一个极小生成集 $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ 生成 $\mathfrak{m}$ 且包含 x_1，并满足以下条件。

(1) $\mathfrak{m}^2 = (x_1^2, x_1x_2, \ldots, x_1x_m)$,*(2)* $(x_1, \ldots, x_m)(x_{m+1}, \ldots, x_n) = 0$,*(3)* $(x_{m+1}, \ldots, x_n)^2 =$ 底 (R)。

环 R 可分解为连通和 $R = S\#T$，使得 嵌入维数$(S) = m$，嵌入维数$(T) = n - m$，长度$(S) =$ 长度(R) 且长度$(T) = 2$。

证明。 由于长度$(R) \ge 3$，我们有 $x_1^2 \notin \mathfrak{m}^3$。因此，可以选取 m 的一个极小生成集$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$，使得 $\mathfrak{m}^2 = (x_1^2, x_1x_2, \ldots, x_1x_m)$。命题 (1) 得证。

我们有 $x_1x_j = \alpha_{1j}x_1^2 + \alpha_{2j}x_1x_2 + \ldots + \alpha_{mj}x_1x_m, \alpha_{ij} \in R$，其中 $1 \le i \le m$ 且 $m+1 \le j \le n$。因此 $x_1(x_j - \alpha_{1j}x_1 - \alpha_{2j}x_2 - \ldots - \alpha_{mj}x_m) = 0$。将 $x_j - \alpha_{1j}x_1 - \alpha_{2j}x_2 - \ldots - \alpha_{mj}x_m$替换为 x_j 后，我们假设对 $m+1 \le j \le n$ 有 $x_1x_j = 0$。

若$m = 1$，性质 (2) 成立。我们假设 $\mu(\mathfrak{m}^2) = m \ge 2$。由于 $\mathfrak{m}^2$ 由 $\{x_1^2, x_1x_2, \ldots, x_1x_m\}$ 和 $x_1(x_{m+1}, \ldots, x_n) = 0$极小生成，因此我们有

$$(0 : x_1) \subset \mathfrak{m}(x_1, \ldots, x_m) + (x_{m+1}, \ldots, x_n).$$

这意味着，元素$x_{m+1}, \ldots, x_n$的剩余类构成 $(0 :_R x_1) + \mathfrak{m}^2 \mathfrak{m}^2$的$k$-基。因此，$\dim_k (0 :_R x_1) + \mathfrak{m}^2 \mathfrak{m}^2 = n - m$。

断言 - 1：$\mathfrak{m}[(0 :_R x_1) \cap \mathfrak{m}^2] = R$ 的底。

注意到 $\mathfrak{m}^2(0 :_R x_1) = x_1\mathfrak{m}(0 :_R x_1) = 0$。这意味着 $\mathfrak{m}[(0 :_R x_1) \cap \mathfrak{m}^2] \subset R$ 的底。因此，只需证明 $\mathfrak{m}[(0 :_R x_1) \cap \mathfrak{m}^2] \neq 0$。我们有 $\mathfrak{m}^{i+1} = x_1\mathfrak{m}^i$，对任意 $i \geq 1$ 均成立。这意味着 $\mu(\mathfrak{m}^{i+1}) \leq \mu(\mathfrak{m}^i)$，对任意 $i \geq 1$ 均成立。令 $t = \max\{i : \mu(\mathfrak{m}^i) = m\}$。则 $t \geq 2$。由于 $m \geq 2$，我们有 $ll(R) \geq t + 1$。映射 $\mathfrak{m}^t/\mathfrak{m}^{t+1} \xrightarrow{\cdot x_1} \mathfrak{m}^{t+1}/\mathfrak{m}^{t+2}$ 不是单射，因为 $\dim_k(\mathfrak{m}^t/\mathfrak{m}^{t+1}) > \dim_k(\mathfrak{m}^{t+1}/\mathfrak{m}^{t+2})$。因此，我们可以找到 $y \in \mathfrak{m}^t \setminus \mathfrak{m}^{t+1}$，使得 $yx_1 \in \mathfrak{m}^{t+2}$。注意到 $\mathfrak{m}^{t+2} = x_1\mathfrak{m}^{t+1}$。由此可知，对于某个 $m \in \mathfrak{m}^{t+1}$，有 $yx_1 = x_1m$。因此 $x_1(y - m) = 0$。显然，$y - m \in (0 :_R x_1) \cap \mathfrak{m}^2]$，且 $y - m \notin \mathfrak{m}^{t+1}$。由于 $\operatorname{socle}(R) \subset \mathfrak{m}^{t+1}$，我们有 $y - m \notin R$ 的底。因此，$[(0 :_R x_1) \cap \mathfrak{m}^2] \not\subset R$ 的底。由此得出 $\mathfrak{m}[(0 :_R x_1) \cap \mathfrak{m}^2] \neq 0$，断言得证。

断言 - 2：$\dim_k [(0 :_R x_1) \cap \mathfrak{m}^2]\, \mathfrak{m}[(0 :_R x_1) \cap \mathfrak{m}^2] = m - 1$。

我们知道 $(0 :_R x_1) = \operatorname{Hom}_R(R/(x_1), R)$。我们有 $\mathfrak{m}^2 = x_1\mathfrak{m} \subset (x_1)$。根据 Matlis 对偶，$l(0 :_R x_1) = l(R/x_1R) = l(R/\mathfrak{m}^2) - l(x_1R + \mathfrak{m}^2) = 1 + n - 1 = n$。现在我们有

$$l[(0 :_R x_1) \cap \mathfrak{m}^2] = l(0 :_R x_1) + l(\mathfrak{m}^2) - l[(0 :_R x_1) + \mathfrak{m}^2] = l(0 :_R x_1) - l[\frac{(0 :_R x_1) + \mathfrak{m}^2}{\mathfrak{m}^2}] = n - (n - m) = m.$$

因此，$\dim_k [(0 :_R x_1) \cap \mathfrak{m}^2]\, \mathfrak{m}[(0 :_R x_1) \cap \mathfrak{m}^2] = l([(0 :_R x_1) \cap \mathfrak{m}^2]\, \mathfrak{m}[(0 :_R x_1) \cap \mathfrak{m}^2]) = l[(0 :_R x_1) \cap \mathfrak{m}^2] - 1 = m - 1$。

断言 - 3：配对 $(x_2, \ldots, x_m)\, \mathfrak{m}(x_2, \ldots, x_m) \times [(0 :_R x_1) \cap \mathfrak{m}^2]\, \mathfrak{m}[(0 :_R x_1) \cap \mathfrak{m}^2] \to$ 环 R 的底，由 $(\bar{x}, \bar{y}) \to xy$ 给出，定义良好且非退化。

我们有 $\mathfrak{m}(x_2, \ldots, x_m)(0 :_R x_1) = 0$，因为 $\mathfrak{m}^2 = x_1\mathfrak{m}$。这意味着 $(x_2, \ldots, x_m)[(0 :_R x_1) \cap \mathfrak{m}^2] \subset R$ 的底。因此，上述配对存在。注意，$\mathfrak{m}^2(x_{m+1}, \ldots, x_n) = 0$。因此，如果 $y \in [(0 :_R x_1) \cap \mathfrak{m}^2]$，且 $y(x_2, \ldots, x_m) = 0$，则有 $y \in R$ 的底 $= \mathfrak{m}[(0 :_R x_1) \cap \mathfrak{m}^2]$。这意味着映射

$$\frac{[(0 :_R x_1) \cap \mathfrak{m}^2]}{\mathfrak{m}[(0 :_R x_1) \cap \mathfrak{m}^2]} \to \operatorname{Hom}\Big(\frac{(x_2, \ldots, x_m)}{\mathfrak{m}(x_2, \ldots, x_m)}, \operatorname{socle}(R)\Big)$$

由上述配对诱导的映射是单射。我们有 $\dim_k (x_2, \ldots, x_m)\, \mathfrak{m}(x_2, \ldots, x_m) = \dim_k [(0 :_R x_1) \cap \mathfrak{m}^2]\, \mathfrak{m}[(0 :_R x_1) \cap \mathfrak{m}^2] = m - 1$。因此，上述映射是同构，进而该配对是非退化的。

注意，$\mathfrak{m}(x_2, \ldots, x_m)(x_{m+1}, \ldots, x_n) = 0$ so $(x_2, \ldots, x_m)(x_{m+1}, \ldots, x_n) \subset R$ 的底。乘以 x_j 定义了一个映射 $(x_2, \ldots, x_m)\, \mathfrak{m}(x_2, \ldots, x_m) \to R$ 的底，其中 $m + 1 \leq j \leq n$。由于断言 - 3 中的配对是非退化的，我们有 $\hat{x}_j \in [(0 :_R x_1) \cap \mathfrak{m}^2]$，使得 $x_j x_i = \hat{x}_j x_i$，其中 $2 \leq i \leq m$ 且 $m + 1 \leq j \leq n$。我们还有 $x_1 x_j = x_1 \hat{x}_j = 0$，其中 $m + 1 \leq j \leq n$。由此可得 $(x_j - \hat{x}_j)(x_1, \ldots, x_m) = 0$，其中 $m + 1 \leq j \leq n$。因此，将 $(x_j - \hat{x}_j)$ 替换为 x_j 后，我们有 $(x_1, \ldots, x_m)(x_{m+1}, \ldots, x_n) = 0$，且性质 (2) 成立。

设 socle$(R) = \langle \delta \rangle$，且 $K = (x_{m+1}, \ldots, x_n)$。我们有 $\mathfrak{m}^2 K = x_1 K \mathfrak{m} = 0$，因此 $K^2 \subset \mathfrak{m}K \subset R$ 的底。注意，$K^2 \neq 0$，否则每个 x_j、$m+1 \leq j \leq n$ 都属于 socle$(R) \subset \mathfrak{m}^2$,，这就矛盾了。因此，$K^2 = \mathfrak{m}K =$ socle(R)，且性质 (3) 成立。

最后一个结论由定理3.3得出。 □

以下结论是引理3.1和定理3.4的推论。

Corollary 3.5. 设 (R, m) 是一个阿廷-戈伦斯坦局部环，满足 $\ell\ell(R) \geq 3$ 且 $\mu(m^2) \leq min\{2,$ 嵌入维数$(R) - 1\}$。则 $R = S \# T$，其中 (S, p)、(T, q) 是 *Gorenstein*局部环，嵌入维数$(S) = \mu(m^2)$，$\ell\ell(S) = \ell\ell(R)$，且 $\ell\ell(T) = 2$。

引理3.6。 设$(R, \mathfrak{m})$ 是一个阿廷-戈伦斯坦局部环，满足嵌入维数$(R) \geq 2$ 且$\ell\ell(R) = s$。则商环 $R/\mathfrak{m}^i$ 不是 *Gorenstein* 环，其中 $2 \leq i \leq s$。

证明。反设对于某个满足 $2 \leq i \leq s$ 的 i，$R/\mathfrak{m}^i$ 是一个 Gorenstein 环。那么 k 在 $R/\mathfrak{m}^i$ 上的内射包是 $E_{R/\mathfrak{m}^i}(k) \cong R/\mathfrak{m}^i$。我们知道 $E_{R/\mathfrak{m}^i}(k) \cong \mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{m}^i, R) = (0 :_R \mathfrak{m}^i)$。因此，对于某个 $x \in R$，有 $(0 :_R \mathfrak{m}^i) = (x)$，这是一个主理想。现在 $\mathfrak{m}^{s-i+1} \subset (0 :_R \mathfrak{m}^i)$ 且 $\mathfrak{m}^{s-i+1} \notin \mathfrak{m}(0 :_R \mathfrak{m}^i)$；否则 $\mathfrak{m}^{s-i+1} \subset \mathfrak{m}(0 :_R \mathfrak{m}^i) \subset (0 :_R \mathfrak{m}^{i-1})$，这意味着 $\mathfrak{m}^s = \mathfrak{m}^{s-i+1}\mathfrak{m}^{i-1} = 0$，矛盾。由于 $(0 :_R \mathfrak{m}^i)$ 是主理想，我们有 $(0 :_R \mathfrak{m}^i) = \mathfrak{m}^{s-i+1} = (x)$。

将刻画 Hilbert 函数的 Macaulay 定理 [12, 定理 4.2.10] 应用于关联分次环 $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(R)$。我们得到，对于所有 $n \geq 1$，$\mu(\mathfrak{m}^{n+1}) \leq \mu(\mathfrak{m}^n)^{\langle n \rangle}$。我们已经有 $\mu(\mathfrak{m}^{s-i+1}) = 1$。这意味着，对于满足不等式 $s - i + 1 \leq j \leq s$ 的 j，$\mathfrak{m}^j$ 是主理想，因此 $\ell(0 :_R \mathfrak{m}^i) = \ell(\mathfrak{m}^{s-i+1}) = i$。由 Matlis 对偶，$\ell(R/\mathfrak{m}^i) = \ell\,\mathrm{Hom}(R/\mathfrak{m}^i, R) = \ell(0 :_R \mathfrak{m}^i) = i$。我们还有 $\sum_{j=0}^{s-1} [\ell(\mathfrak{m}^j/\mathfrak{m}^{j+1}) - 1] = \ell(R/\mathfrak{m}^i) - i = 0$，且每一项都非负。这表明 $\mathrm{edim}(R) = \ell(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = 1$，矛盾。

□

以下定理由 Dress 和 Krämer 在 [13, 定理 2] 中证明。

T定理 3.7. 设 $(S, \mathfrak{m}_S, k)$、$(T, \mathfrak{m}_T, k)$ 是两个局部环，且 $R = S \times_k T$。则

$$\frac{1}{P_k^R(t)} = \frac{1}{P_k^S(t)} + \frac{1}{P_k^T(t)} - 1.$$

若 M 是一个 S-模，则

$$\frac{1}{P_M^R(t)} = \frac{P_k^S(t)}{P_M^S(t)}\left(\frac{1}{P_k^S(t)} + \frac{1}{P_k^T(t)} - 1\right) = \frac{P_k^S(t)}{P_M^S(t) P_k^R(t)}.$$

以下结论是引理 3.1 和定理 3.4的推论。

引理 3.8. 设 $(R, \mathfrak{m}, k)$ 是一个阿廷-戈伦斯坦局部环，满足 $\mu(\mathfrak{m}) = n$，长度$(R) \geq 2$且 $\mu(\mathfrak{m}^2) \leq 2$。设 i 是满足 $2 \leq i \leq$ 长度(R) 的整数。则 $R/\mathfrak{m}^i$ 是一个 *Golod*环，且 $P^{R/\mathfrak{m}^i}{}_k(t) = \frac{1}{1 - nt}$。——

证明。 固定 i 满足 $2 \leq i \leq \ell\ell(R)$，并令 $\bar{R} = R/\mathfrak{m}^i$。当 $n = 1$ 或 $\ell\ell(R) = 2$时，结论显然成立。 首先假设 且 $\ell\ell(R) > 2$Scheja 的一个结果 [18] 表明，一个余深度为 2 的局部环10

$\bar{}$要么是 Gorenstein 环（等价地说，是完全交），要么是 Golod环。环 R不可能是$\bar{}$ Gorenstein 环，依据引理 3.6 因此 R 是 Golod环。由于 R是完全交，定义$\bar{}$ $\bar{}$理想 $\bar{}R$ 由 3 个元素极小生成。由此可得， $\kappa^R(t) = \sum_{i\geq 0}\dim_k \mathrm{H}_i(K^R)t^i = 1 + 3t + 2t^2$ 并且

$$(1 - t(\kappa^{\bar{R}}(t) - 1)) = 1 - t(1 + 3t + 2t^2 - 1) = (1 + t)^2(1 - 2t).$$

我们有 $P_{\bar{R}k}(t) = \frac{(1+t)}{1-t^2}(\kappa_{\bar{R}}(t) - 1) = 1 - 2t$。

现在我们假设 $n > 2$ 且 $\mathrm{ll}(R) > 2$。由 Corollary 3.5 可知，$R = S\#T$，其中 (S, p)、(T, q) 是 Gorenstein局部环，$\mathrm{edim}(S) = \mu(m^2) \leq 2$，，$\mathrm{ll}(S) = \mathrm{ll}(R) \geq 3$ 且 $\mathrm{ll}(T) = 2$。有$\bar{}R = \bar{}S \times_k \bar{}T$，其中 $\bar{}S = S/p^i$ 且 $\bar{}T = T/q^2$。$\bar{}S$ 和 $\bar{}T$ 都是戈洛德环。环 $\bar{}R$ 是戈洛德环，因为戈洛德环的纤维积仍是 Golod，参见[22, 定理 4.1]。

我们有 $P_{\bar{S}k}(t) = \frac{1}{1-}$嵌入维数$(\bar{}S)t$由情形 $n = 2$ 以及 $P_{\bar{T}k}(t) = \frac{1}{1-}$嵌入维数$(\bar{}T)t$ ([9,例 4.2。2])。庞加莱级数的公式由定理 3.7得出。 □

以下是一个众所周知的事实。

引理 *3.9*。设 *(R, m, k)* 是一个局部环，*x* 是 *R* 的非零因子，且 $S = R/(x)$。如果存在一个多项式 $d(t) \in Z[t]$，使得对于所有 *S*-模 *M*，都有 $d(t)P^S M(t) \in \mathbb{Z}[t]$，那么对于所有 *R*-模 *M*，都有 $d(t)P^R_M(t) \in \mathbb{Z}[t]$。现在进一步假设 $x \in m \setminus m^2$，，则 $P^S k(t) = P^R k(t)1 + t$。环 *S* 是 *Golod* 环，当且仅当 *R* 是 *Golod* 环。

证明。 设 *M* 为一个*R*-模，且 *N* 为 *M* 的第一 syzygy。我们有如下正合序列:

$$0 \to N \to R^{\mu(M)} \to M \to 0.$$

由此可得 $P^R_M(t) = \mu(M) + tP^R_N(t)$。因此，只需证明 $d(t)P^R_N(t) \in \mathbb{Z}[t]$。设 $F_* \twoheadrightarrow N$ 为 N 在 R 上的极小自由分解。注意 x 也是 N 的非零因子。$\bar{}$由此可得 $S \otimes_R F_* \twoheadrightarrow S \otimes_R N$ 是 $S \otimes_R N = N$ 作为 S 模的极小自由分解。因此，我们有 $P^R_N(t) = P^S_{\bar{N}}(t)$。于是，引理的第一部分由假设得出。

关于庞加莱级数和 Golod 性质的断言由 [9, 命题3.3.5.(1)],[9,命题 5.2。4]分别得出。 □

以下结果归于 ,Sega [30, 命题 1.5]。

命题 3.10。 设 *R* 是一个局部环，存在一个 $d_R(t) \in \mathbb{Z}[t]$，满足对每个有限生成 *R*-模 *M*，$d_R(t)P^R_M(t) \in \mathbb{Z}[t]$。设 $d_R(t) = p(t)q(t)r(t)$，其中 $p(t)$ 是1 或不可约多项式；$q(t)$ 的系数非负；$r(t)$ 是1 或不可约多项式，并且在其复根中绝对值最小者之中没有正实根。则对于每一对 *R*-模 *M*、*N*，以下结论成立。

(1) 如果$\mathrm{Tor}^R_i(M,N) = 0$ 对 $i \gg 0$成立，则 *M* 或 *N* 的投射维数有限。*(2)* 如果$\mathrm{Ext}^i_R(M,N) = 0$ 对 $i \gg 0$成立，则 *M* 的投射维数有限，或 *N* 的内射维数有限。

我们已准备好证明定理II。

3.1. **定理II的证明。**

证明。情形$n = 1$ 很简单。细节从略。

现在假设 $n \geq 2$。商映射 $R \twoheadrightarrow R$ socle(R) 是 Golod同态，并且$P^{R/\operatorname{socle}(R)}{}_k(t) = P^R{}_k(t)(1 - t^2 P^R{}_k(t))$，参见 [23, 定理 2]。因此，我们有

$$P_k^R(t) = \frac{P_k^{R/\operatorname{socle}(R)}(t)}{1 + t^2 P_k^{R/\operatorname{socle}(R)}(t)} = \frac{1}{\frac{1}{P_k^{R/\operatorname{socle}(R)}(t)} + t^2} = \frac{1}{1 - nt + t^2}.$$

最后一个等式由引理 3.8得出。同一引理指出 $R/\operatorname{socle}(R)$ 是一个 Golod环。根据定理I，环 R 是完全交在 Golod同态下的满射像。(2) 的第二部分是定理 2.2的推论。

现在证明 (3)。若 M 的投射维数 $\mathrm{pd}_R(M)$ 有限，则 $\mathrm{Ext}^{\mathrm{pd}_R}(M)$ R (M, M) $\neq 0$。因此，只需证明 $\mathrm{pd}_R(M) < \infty$。当 $n \leq 2$ 时，R 是一个完全交。该结论由 Avramov 和 Buchweitz 的一个结果得出，参见 [10, 定理 4.2]。当 $n \geq 3$ 时，多项式 $(1 - nt + t^2)$ 不可约。该结论由命题 3.10 得出（取 $p(t) = (1 - nt + t^2)$、$q(t) = (1 + t)^n$ 和 $r(t) = 1$）。这里用到了这样一个事实：Gorenstein 环上的模具有有限投射维数，当且仅当它具有有限内射维数。□

伸展环和几乎拉伸环分别由 Sally [29] 以及 Elias、Valla [15] 引入。

定义 3.11。 称极大理想为$\mathfrak{m}$的 *Artinian* 局部环 R 是拉伸的，如果$\mathfrak{m}^2$ 是主理想；如果 $\mathfrak{m}^2$ 由两个元素最小生成，则称其为几乎拉伸。

设 R 是维数为 d、极大理想为$\mathfrak{m}$的 *Cohen-Macaulay* 局部环。若存在$\mathfrak{m}$ 的极小约化 $x = x_1, \ldots, x_d$，使得 $R/(x)$是拉伸（几乎拉伸）*Artin*环，则称 R 是拉伸的（几乎拉伸的）。这里，极小约化是指对于某个非负整数 r，x 满足$\mathfrak{m}^{r+1} = (x_1, \ldots, x_d)\mathfrak{m}^r$。

最近的一篇文章 [1, Corollary 5.6] 证明了拉伸Cohen-Macaulay局部环具有良好性质。我们概述一种不同的方法。在下述推论的陈述 (2) 中，我们为这类环上的模的庞加莱级数找到了一个更有效的公分母。

推论 3.12。 设$(R, \mathfrak{m}, k)$ 是一个 d 维拉伸的 *Cohen-Macaulay* 局部环，M 是一个 R-模。令 $n =$ 维数$_k\, \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$，并令 $r =$ 维数$_k \operatorname{Ext}^d{}_R(k, R)$ 表示 R 的型。则以下结论成立。

(1) If $r = n - d$, then R is a Golod ring, $P_k^R(t) = \dfrac{(1+t)^d}{1-(n-d)t}$ and $(1-(n-d)t)P_M^R(t) \in \mathbb{Z}[t]$.

(2) If $r \neq n - d$, then $P_k^R(t) = \dfrac{(1+t)^d}{1-(n-d)t+t^2}$ and $(1+t)^{n-d-r+1}(1-(n-d)t+t^2)P_M^R(t) \in \mathbb{Z}[t]$.

(3) If $\operatorname{Ext}^i(M, M \oplus R) = 0$ for all $i \geq 1$, then M is a free R-module.

证明。为证明陈述 (1)、(2)，只需假设R 是一个拉伸阿廷环，即$d = 0$（见引理 3.9）。我们有嵌入维数$(R) = n$ 且 $\dim_k$ 底$(R) = r$。令 $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_n)$，并且

长度$(R) = s$。理想 $\mathfrak{m}^i, i \geq 2$ 均为主理想。若底$(R) \subset \mathfrak{m}^2$, , 则底$(R) = \mathfrak{m}^s$ 是一个主理想, 因此 R 是一个 Gorenstein 环。定理 II推出陈述 (1)、(2)。

否则，假设 $x_1 \in \text{socle}(R) \setminus \mathfrak{m}^2$。注意到 $(x_1) \cap (x_2, \ldots, x_n) = 0$，且 $(x_1) + (x_2, \ldots, x_n) = \mathfrak{m}$。对于环 R 中的任意两个理想 I、J，我们知道 $R = R/I \times_{R/I+J} R/J$。因此可得，$R = R/(x_1) \times_k R/(x_2, \ldots, x_n)$。

环 $R/(x_2, \ldots, x_n)$ 的极大理想由 x_1, 的剩余类生成，因此其平方为零，因为 $x_1 \in \text{socle}(R)$。另一方面，环 $R/(x_1)$ 是一个拉伸阿廷环。如果 $R/(x_1)$ 的底包含于其极大理想的平方中，那么它是一个 Gorenstein 环。否则，我们像之前一样再次分解$R/(x_1)$。

经过有限步，我们得到 $R = S \times_k T$，其中 $(S, \mathfrak{m}_S)$ 是一个拉伸的阿尔廷戈伦斯坦环，而 $(T, \mathfrak{m}_T)$ 是一个满足 $\mathfrak{m}_T^2 = 0$ 的局部环。显然，$r = 1 +$嵌入维数(T)。这意味着嵌入维数$(T) = r - 1$，并且嵌入维数$(S) =$嵌入维数$(R) -$嵌入维数$(T) = n - r + 1$。根据定理 II，我们有

$$P_k^S(t) = \begin{cases} \frac{1}{1-t(n-r+1)+t^2} & \text{when } n \geq r+1, \\ \frac{1}{1-t} & \text{when } n = r. \end{cases}$$

另一方面，T是一个 Golod环，并且 $P^T{}_k(t) = \frac{1}{1-(r-1)t}$。$P^R{}_k(t)$ 的有理表达式可通过以下计算得到:

$$\frac{1}{P_k^R(t)} = \frac{1}{P_k^S(t)} + \frac{1}{P_k^T(t)} - 1 = \begin{cases} (1-t) + 1 - (r-1)t - 1 & \text{when } n = r \\ (1 - t(n-r+1) + t^2) + 1 - (r-1)t - 1 & \text{when } n \geq r+1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 - nt & \text{when } n = r \\ 1 - nt + t^2 & \text{when } n \geq r+1. \end{cases}$$

如果 $n = r$，则嵌入维数$(S) = 1$。这意味着 S 是一个 Golod环。因此，R 也是一个 Golod环，因为 Golod环的纤维积仍是 Golod环，参见 [22,定理 4。1]。

现在我们找出一个多项式 $d_R(t) \in \mathbb{Z}[t]$，使得对于任意 R-模 M，都有 $d_R(t)P_M^R(t) \in \mathbb{Z}[t]$。M 的第二 syzygy 是两个模的直和，一个是 S 上的模，另一个是 T 上的模，参见 [13,备注 3]。因此，只需假设 $M = M_1 \oplus M_2$，其中 M_1 和 M_2 分别是 S 和 T 上的模。由定理3.7可得

$$\frac{P_M^R(t)}{P_k^R(t)} = \frac{1}{P_k^R(t)}(P_{M_1}^R(t) + P_{M_2}^R(t)) = \frac{P_{M_1}^S(t)}{P_k^S(t)} + \frac{P_{M_2}^T(t)}{P_k^T(t)}.$$

我们注意到 $P_{M_2}^T(t)\, P^T k\,(t) = \frac{1}{P^T k\,(t)}(1 + tP^T \text{Syz}_1^T(M_2)(t)) = 1 - (r-1)t + t\, P^T \text{Syz}_1^T(M_2)(t)\, P^T k\,(t)$。由于 T 的极大理想的平方为零，第一 syzygy $\text{Syz}_1^T(M_2)$ 是一个 k-向量空间。因此，$P_{M_2}^T(t)\, P^T k\,(t)$ 是关于 $\mathbb{Z}[t]$ 的多项式。

若 $n = r$，则 $\operatorname{edim}(S) = 1$。根据定理 II 的 (1)，$P^{S}{}_{M_1}(t)\, P^{S}{}_{k}(t)$ 是一个多项式。因此我们得出 $(1-nt)P^{R}_{M}(t) = P^{R}_{M}(t)\, P^{R}{}_{k}(t) \in \mathbb{Z}[t]$ 若 $n = r$。

若 $\mathrm{n} \geq \mathrm{r}+1$，则有 $\operatorname{edim}(\mathrm{S}) = \mathrm{n}-\mathrm{r}+1$。由定理 II 的 (2)，可得 $(1+\mathrm{t})^{(n-r+1)}\, \mathrm{P}^{S}\, \mathrm{M}_{1}(\mathrm{t})\, \mathrm{P}^{S}\, \mathrm{k}\,(\mathrm{t}) \in \mathbb{Z}[\mathrm{t}]$。因此我们得出结论：若 $\mathrm{n} \geq \mathrm{r}+1$，则 $(1+\mathrm{t})^{(n-r+1)}(1-\mathrm{nt}+\mathrm{t}^{2})\mathrm{P}^{R}_{M}(\mathrm{t}) = (1+\mathrm{t})^{(n-r+1)}\, \mathrm{P}^{R}_{M}(\mathrm{t})\, \mathrm{P}^{R}\, \mathrm{k}\,(\mathrm{t}) \in \mathbb{Z}[\mathrm{t}]$。

因此，结论 (1) 和 (2) 均成立。为证明结论 (3)，只需证明 $\mathrm{pd}_{R}(\mathrm{M}) < \infty$。若 $\mathrm{n}-\mathrm{d} = 2$，则 R 要么是完全交，要么是 Golod环，参见 [18]。这两种情况下，众所周知环均满足结论 (3)；例如，R 为完全交时见 [10, 定理 4.2]，R 为 Golod环时见 [21, 命题 1.4]。若 $\mathrm{n}-\mathrm{d} > 2$，则根据命题 3.10，我们立即可知 $\mathrm{pd}_{R}(\mathrm{M}) < \infty$。这里要注意，如果 $\mathrm{M} \oplus \mathrm{R}$ 的内射维数有限，则 R 是 Gorenstein 环，且 M 的投射维数和内射维数均有限。□

以下结果由引理 3.9 和定理 II直接得出。

推论 3.13. 设 $(R, \mathfrak{m}, k)$ 是一个维数为 d、嵌入维数为 n 的几乎拉伸 *Gorenstein* 局部环。设 M 是一个有限生成 R-模。则有以下结论。

(1) 若 $n-d = 1$，则 $P^{R}\, k(t) = (1+t)^{d}$，且 $(1-t)P^{R}_{M}(t) \in \mathbb{Z}[t]$,*(2)* 若 $n-d \geq 2$，则 $P^{R}\, k(t) = (1+t)^{d}/(1-(n-d)t+t^{2})$ 且 $(1+t)^{n-d}(1-(n-d)t+t^{2})P^{R}_{M}(t) \in \mathbb{Z}[t]$,*(3)* 若对所有 $i \geq 1$ 均有 $Ext^{i}(M, M) = 0$，则 M 是自由 R-模。

4. 重新审视已知结果

本节将证明引言中的例 (1) 和 (3)。正如本节标题所示，这些例子由其他作者发现。我们的证明有所不同，并且使用定理 I 得出。此外，我们的版本稍强一些，参见注4.7。我们回顾以下已在 [23, 定理 1]中证明的结论。

定理 *4.1.* 设 (R, m) 是嵌入维数为 n 的阿廷-戈伦斯坦局部环，K^{R} *be* 是极大理想 m 的一组最小生成元上的 *Koszul* 复形。令 $socle(R) = (s)$，$\bar{R} = R/sR$，且 $K\bar{R} = \bar{R} \otimes_{R} K^{R}$ 为 $\bar{R}$ 的 *Koszul* 复形。在 $K^{R} \oplus K^{R} m K^{R}[-1]$ 上定义 *DG* 代数结构，其乘法为：$(k, \bar{l})(k', \bar{l}') = (kk', lk' + (-1)^{\deg(k)} kl')$，微分为：$\partial(k, \bar{l}) = (\partial(k) + sl, 0)$。那么，链映射 $K^{R} \oplus K^{R} m K^{R}[-1] \to K\bar{R}$，$(k, \bar{l}) \mapsto \bar{k}$ 是拟同构。若 $\bar{H} = H(K^{R}) H_{n}(K^{R})$，$\bar{K} = K^{R} \otimes_{R} k\, K^{R}_{n} \otimes_{R} k[-1]$，则 $H(K\bar{R}) = \bar{H} \ltimes \bar{K}$。

引理 4.2. 设 $(R, \mathfrak{m})$ 是嵌入维数为 n 的阿廷-戈伦斯坦局部环 ≥ 2。设 K^{R} 表示由属于 $\mathfrak{m}$ 的一组极小生成元所构成的 *Koszul*复形，且 C 表示 K 的商$^{R}14$

由下式定义

$$C_i = \begin{cases} K_i^R & for\ 0 \le i \le n-2, \\ \frac{K_{n-1}^R}{\mathrm{B}_{n-1}(K^R)} & for\ i = n-1, \\ 0 & for\ i = n. \end{cases}$$

那么，C 具有 *DG*代数结构。假设 C 是具有自然增广的 *Golod DG*代数。那么 R/R 的底(R) 是一个 *Golod*环，且 R 满足定理 *I*的断言 *(1)*、*(2)*。

证明。C 是 DG代数这一点显而易见，因为 $\mathrm{K}_n^R \oplus \mathrm{B}_{n-1}(\mathrm{K}^R)$ 是 Koszul代数 K^R 的一个 DG理想。令 $\mathrm{q} : \mathrm{K}^R \twoheadrightarrow \mathrm{C}$ 为商映射，并令 $\mathrm{socle(R)} = (\mathrm{s})$。令 $\mathrm{G} : \mathrm{K}^R\ \mathrm{m}\mathrm{K}^R \xrightarrow{} \mathrm{K}^R$、$\mathrm{H} : \mathrm{C}\ \mathrm{m}\underline{\mathrm{C} \to}\ \mathrm{C}$ 分别表示由 s 在 K^R 和 C 上的乘法诱导的链映射。我们有 $\mathrm{q} \circ \mathrm{G} = \mathrm{H} \circ \bar{}\mathrm{q}$，其中 $\bar{}\mathrm{q} : \mathrm{K}^R\ \mathrm{m}\mathrm{K}^R \twoheadrightarrow \overline{\mathrm{C}}\ \mathrm{m}\mathrm{C}$ 是由 q 诱导的映射。令 $\mathrm{c(G)} = \mathrm{K}^R \oplus \mathrm{K}^R\ \mathrm{m}\mathrm{K}^{R\ [-1]}$、$\mathrm{c(H)} = \mathrm{C} \oplus \mathrm{C}\ \mathrm{m}\mathrm{C}[-1]$ 分别为 G、H 的锥。定义 $\alpha : \mathrm{c(G)} \twoheadrightarrow \mathrm{c(H)}$，使得 $\alpha(\mathrm{k}, \bar{}\mathrm{l}) = (\mathrm{q(k)}, \bar{}\mathrm{q}(\bar{}\mathrm{l}))$。c(G) 和 c(H) 都具有 DG代数结构，且 α 是一个满射 DG代数同态。α 的核是复形

$$0 \to \frac{K_n^R}{\mathfrak{m}K_n^R} \xrightarrow{\cdot s} K_n^R \xrightarrow{\partial} \mathrm{B}_{n-1}(K^R) \to 0$$

这正是一个正合序列。因此，α 是 DG 代数之间的拟同构。由定理 4.1，$\mathfrak{c}(G)$ 与 $K^{R/\,\mathrm{socle}(R)}$ 拟同构。因此，要证明 $R/\,\mathrm{socle}(R)$ 是 Golod环，只需证明 $\mathfrak{c}(H)$ 是 Golod代数。

由于C 是 Golod代数，存在一个k-基 $\mathrm{b}_C = \{h_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$，它是 $\mathrm{H}_{\ge 1}(C)$ 的基，并存在一个函数（平凡 Massey 运算）$\mu : \sqcup^{\infty}{}_{i=1}\mathrm{b}_C^i \to C$，使得 $\mu(h_\lambda) \in \mathrm{Z}_{\ge 1}(C)$，且$cls(\mu(h_\lambda)) = h_\lambda$ 对所有 $\lambda \in \Lambda$均成立，并且

$$\partial\mu(h_{\lambda_1}, \ldots, h_{\lambda_p}) = \sum_{j=1}^{p-1} \overline{\mu(h_{\lambda_1}, \ldots, h_{\lambda_j})}\mu(h_{\lambda_{j+1}}, \ldots, h_{\lambda_p}).$$

由 [9, 引理 4.1 的 (2)6], $\{\mathrm{x} \in \mathrm{C} : \partial(\mathrm{x}) \in \mathrm{m}^2\mathrm{C}\} \subset \mathrm{mC}$。由于 $\mu(\mathrm{h}_\lambda) \in \mathrm{mC}$，根据归纳法对 p 作归纳，可得 $\mu(\mathrm{h}_{\lambda_1}, \ldots, \mathrm{h}_{\lambda_p}) \in \mathrm{mC}$。

由 [23, 引理 1.2], 我们有 R 的底 $\mathrm{K}_i^R \subset (0 : \mathrm{m}^2)\ \mathrm{B}_i(\mathrm{K}^R)$，对于 $1 \le \mathrm{i} \le \mathrm{n} - 1$，因此我们有 $\mathrm{sC} \subset (0 : \mathrm{m}^2)\ \mathrm{B(C)}$。设 $\mathrm{z} \in \mathrm{Z(C)}$ 使得 $(\mathrm{z}, 0) = \partial(\mathrm{y1}, \bar{}\mathrm{y}_2)$，其中 $(\mathrm{y1}, \bar{}\mathrm{y}_2) \in \mathrm{c(H)}$。则 $\mathrm{z} = \partial(\mathrm{y}_1) + \mathrm{sy}_2 \in \mathrm{B(C)}$。因此，包含映射 $\mathrm{C} \hookrightarrow \mathrm{c(H)}$ 诱导一个单射 $\mathrm{H(C)} \hookrightarrow \mathrm{H(c(H))}$。滥用记号，我们将 (c, 0) 记为 c。由此可知，$\mathrm{b}_C = \{\mathrm{h}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是 $\mathrm{H}_{\ge 1}(\mathrm{c(H)})$ 中的一个线性无关集，并且 $\mu(\mathrm{h}_{\lambda_1}, \ldots, \mathrm{h}_{\lambda_p}) \in \mathrm{m\ c(H)}$, $\mathrm{p} \ge 1$ 满足上述性质。

我们将 b_C 扩充为 $\mathrm{H}_{\ge 1}(\mathrm{c(H)})$ 的一组基 $\mathrm{b}_{\mathfrak{c}(H)} = \{\mathrm{h}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda\sqcup\Lambda'}$。令 $\mathrm{h}_{\lambda'}$, $\lambda' \in \Lambda'$ 为 $(\mathrm{c}_{\lambda'}, \mathrm{d}_{\lambda'}) \in \mathrm{Z}_{\ge 1}(\mathrm{c(H)})$ 的同调类$\bar{}$。现在，$\partial(\mathrm{c}_{\lambda'}, \mathrm{d}_{\lambda'}) = 0$ 意味着 $\partial(\mathrm{c}_{\lambda'}) + \mathrm{sd}_{\lambda'} = 0$。对于某个 $\mathrm{e}_{\lambda'} \in (0 : \mathrm{m}^2)\mathrm{C}$，我们有 $\mathrm{sd}_{\lambda'} = \partial(\mathrm{e}_{\lambda'})$。我们写作 $(\mathrm{c}_{\lambda'}, \bar{}\mathrm{d}_{\lambda'}) = (\mathrm{c}_{\lambda'} + \mathrm{e}_{\lambda'}, 0) + (-\mathrm{e}_{\lambda'}, \bar{}\mathrm{d}_{\lambda'})$。注意，$\mathrm{c}_{\lambda'} + \mathrm{e}_{\lambda'} \in \mathrm{Z(C)}$。因此，必要时从每个 $\mathrm{h}_{\lambda'}$, $\lambda' \in \Lambda'$ 中减去适当的 R-线性组合 h_λ, $\lambda \in \Lambda$ 后，我们可以假设 $\mathrm{h}_{\lambda'}$ 是 $(0 : \mathrm{m}^2)\mathrm{C} \oplus \mathrm{C}\ \mathrm{m}\mathrm{C}$ 中某个圈的同调类。

我们定义 $\mu(h_{\lambda'})$，$\lambda' \in \Lambda'$ 为 $(0 : \mathrm{m}^2)C \oplus C\ \mathrm{m}C$ 中的一个元素，其同调类为$h_{\lambda'}$。我们将 μ 从 b_C^i 扩展为 $\mathrm{b}^{i}{}_{\mathfrak{c}(H)}$上的马西运算，$i > 1$ 使得 $\mu : \mathrm{b}^{i}{}_{\mathfrak{c}(H)} \setminus \mathrm{b}_C^i \to (0 : \mathrm{m}^2)C$，$i > 1$

对 i 使用归纳法。注意，对于 $\overline{(\lambda,\lambda')} \notin \Lambda\times\Lambda$，$\mu(h_\lambda)\mu(h_{\lambda'}) \in sC \subset (0:m^2)\, B(C)$。我们选取 $\mu(h_\lambda, h_{\lambda'}) \in (0:m^2)C$，使得 $\partial(\mu(h_\lambda, h_{\lambda'})) = \mu(h_\lambda)\mu(h_{\lambda'})$。现在假设，对于所有 $i \le p$，$\mu(h_{\delta_1},\dots,h_{\delta_i}) \in (0:m^2)C$，$(h_{\delta_1},\dots,h_{\delta_i}) \in b^i c(H)\setminus b^i_C$ 满足所需关系的元素均已构造。我们选取 $(h_{\delta_1},\dots,h_{\delta_{p+1}}) \in b^{p+1} c(H)\setminus b^{p+1}C$，并注意到 $\sum^p_{j=1}\mu(h_{\delta_1},\dots,h_{\delta_j})\mu(h_{\delta_{j+1}},\dots,h_{\delta_{p+1}})$ 是 sC 中的一个元素。因此，我们可以选取 $\mu(h_{\delta_1},\dots,h_{\delta_{p+1}}) \in (0:m^2)C$，使得 $\partial(\mu(h_{\delta_1},\dots,h_{\delta_{p+1}})) = \sum^p_{j=1}\mu(h_{\delta_1},\dots,h_{\delta_j})\mu(h_{\delta_{j+1}},\dots,h_{\delta_{p+1}})$。于是，由归纳法可知，$\mu$ 可扩展为 $b^{c(H)}$ 上的平凡 Massey 运算。因此，$c(H)$ 是一个 Golod代数，结论得证。□

我们回顾压缩 Gorenstein 局部环的定义。

定义 4.3. 设 $(R,\mathfrak{m},k)$ 是一个 *Loewy* 长度为 s、嵌入维数为 n 的阿廷-戈伦斯坦局部环 ≥ 2。令 $\varepsilon_i = \text{最小值}\left\{\binom{n-1+s}{s-1-i}n,\ \binom{n-1+in-1}{i}\right\}$ 对所有满足 $0 \le i \le s$ 的 i 均成立。文献 [28, 命题 4.2] 证明了 $l(R) \le \sum^n_{i=0}\varepsilon_i$。若等号成立，则称环 R 为压缩 *Gorenstein* 环。

We p提供 Rossi 和 ,Sega [28, 定理 5.1] 的结果的另一种证明 .

定理 4.4. 设 R 是一个压缩戈伦斯坦局部环，满足 嵌入维数$(R) = n \ge 2$ 且长度$(R) = s$, $s \ge 2, s \ne 3$。则 R/底(R) 是一个 *Golod*环。因此，R 满足定理 *I* 的断言 *(1)*、*(2)*。

证明。我们沿用定理 I 和引理 4.2 的证明中所设的记号。令 $t = \max\{i : I \subset n^i\}$。已在 [28, 命题 4.2] 中证明，$t = \lceil s\frac{+1}{2}\rceil$; 不小于 $s\frac{+1}{2}$ 的最小整数。由[28, 引理 1.4], 可知,由满射 $R/m^t \twoheadrightarrow R/m^{t-1}$ 诱导的映射 $H_{\ge1}(R/m^t\otimes_Q K^Q) \to H_{\ge1}(R/m^{t-1}\otimes_Q K^Q)$ 是零映射。这意味着 $Z_{\ge1}(K^R) \subset B_{\ge1}(K^R) + m^{t-1}K^R_{\ge1}$，因此 $Z_{\ge1}(C) \subset B_{\ge1}(C) + m^{t-1}C$。于是我们找到 $H_{\ge1}(C)$ 的一组基 $b = \{h_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$，其代表元是 $m^{t-1}C$ 中的循环。

在 [28, 引理 4.4] 中证明，由包含映射 $m^{r+1}\hookrightarrow m^r$ 诱导的映射 $\psi : H_{<n}(m^{r+1}K^R) \to H_{<n}(m^rK^R)$ 在 $r = s+1-t$ 时为零。由于，$s \ge 2$，$s \ne 3$，我们有 $t-1 \le r \le r+1 \le 2(t-1)$。这意味着映射 $H_{<n}(m^{2(t-1)}K^R) \to H_{<n}(m^{t-1}K^R)$ 也为零，因为它可经由 ψ 分解。因此，我们有 $Z_{<n}(m^{2t-2}K^R) \subset B(m^{t-1}K^R)$，这意味着 $Z(m^{2t-2}C) \subset B(m^{t-1}C)$。值得指出的是，这里用到的两个引理均独立于 [28] 中的所有其他结果。

我们归纳地构造一个平凡 Massey 运算 $\mu : \sqcup^\infty_{i=1} b^i \to m^{t-1}C$。定义 $\mu(h_\lambda)$ 为 $m^{t-1}C$ 中的一个圈，使得 $\mu(h_\lambda)$ 的同调类为 h_λ。现在 $\mu(h_\lambda)\mu(h_{\lambda'}) \in Z(\overline{m^{2t-2}C}) \subset B(m^{t-1}C)$，因此我们选取 $\mu(h_\lambda, h_{\lambda'}) \in m^{t-1}C$，使得 $\partial(\mu(h_\lambda, h_{\lambda'})) = \mu(h_\lambda)\mu(h_{\lambda'})$。这一方法可延续到构造的后续步骤。因此，C 是一个 Golod DG代数，由引理 4.2 可得所需结果。□

引理 *4.5.* 设 *(R, m, k)* 是一个阿廷-戈伦斯坦局部环，但不是完全交。设 $\eta : Q \twoheadrightarrow R$ 为 R 的一个极小*Cohen*表示，且 $I = ker(\eta)$。假设 $\mu(I) = r$ 且嵌入维数$(R) = n \le 3$。则 *R/R* 的底 是一个 *Golod*环，因此 R 满足定理 I 的两个断言 *(1)* 与 *(2)*。若 $d_R(t) = 1 - rt^2 - rt^3 + t^5$, ，则对任意有限生成 *R*-模 *M*，我们有

$d_R(t)P_M^R(t) \in Z[t]$. k 的庞加莱级数由下式给出

$$P_k^R(t) = \frac{(1+t)^n}{1-rt^2-rt^3+t^5}.$$

证明。与之前一样，我们沿用定理 I 和引理 4.2的证明中所采用的记号。根据 [31,定理 7]，我们有 $H_1(K^R)^2 = 0$，从而得到 $H_1(C)^2 = 0$。英文版的证明可参见 [12,推论 3.4。8]现在C 是一个长度为 2 的 DG代数。因此，$H_{\geq 1}(C)$ 的任意一组基都允许一个平凡 Massey 运算，因此C 是一个 Golod代数。由引理 4.2即可得到结论的第一部分。

我们计算分母。R 的 Koszul复形长度为三。注意到 $\dim_k H_0(K^R) = 1$；$\dim_k H_1(K^R) = \mu(I) = r$；$\dim_k H_3(K^R) = \dim_k R$ 的底 $= 1$，因此 $\dim_k H_2(K^R) = r$，因为 $\sum_{i\geq 0}(-1)^i \dim_k H_i(K^R)$ 必须为零。采用定理 I 中使用的记号，我们有 $P^Q R(t) = \sum_{i=0}^{3} \dim_k H_i(K^R) = 1 + rt + rt^2 + t^3$。因此，我们有

$$d_R(t) = 1 - t(P_R^Q(t) - 1) + t^{n+1}(1+t) = 1 - t^2(r + rt + t^2) + t^4(1+t) = 1 - rt^2 - rt^3 + t^5.$$

定理公式 $P^R{}_k(t)$ 可由 Rossi 和 Sega 在 [28, 命题 62]. □

若 $(R,\mathfrak{m},k)$ 是满足下述定理假设的 Gorenstein 局部环，则 Wiebe 已计算出$P^R{}_k(t)$ 的有理表达式，参见 [31, 定理 9]。后来，Avramov 等人证明，若 $(R,\mathfrak{m})$ 是任意 Artin环，且嵌入维数(R)–深度$(R) \leq 3$，则所有 R-模都有有理庞加莱级数，参见 [7, 定理 6.4]。我们证明一个较弱的版本。

定理 4.6。设$(R,\mathfrak{m},k)$ 是一个非完全交的 *Gorenstein* 局部环，满足嵌入维数(R) – 深度$(R) = n \leq 3$。设 $\eta : Q \twoheadrightarrow \hat{}R$ 是 R 的极小 *Cohen* 表示，$\ker\eta = I$，且 $\mu(I) = r$。则对任意 $f \in I \setminus \mathfrak{m}I$，诱导映射 $Q/(f) \twoheadrightarrow \hat{}R$ 是一个 *Golod*同态。

令 $d_R(t) = 1 - rt^2 - rt^3 + t^5$。则 $P^R{}_k(t) = (1+t)^{\operatorname{edim}(R)} d_R(t)$，且对任意 R-模 M，都有 $d_R(t)P_M^R(t) \in \mathbb{Z}[t]$。

证明。设 $\dim(R) = \operatorname{depth}(R) = d$，极大理想 $\mathfrak{m}$ 由 $x_1,\ldots,x_e$ 最小生成，且 $x_1,\ldots,x_d$ 构成一个 R-序列。则 $S = R/(x_1,\ldots,x_d)$ 是一个阿廷-戈伦斯坦局部环，且 $\operatorname{edim}(S) = e - d = n \leq 3$。令 $K^R = R\langle X_i : \partial(X_i) = x_i, 1 \leq i \leq n\rangle$ 和 $K^S = S\langle X_i : \partial(X_i) = x_i, d+1 \leq i \leq n\rangle$ 表示 Koszul复形。商映射 $q : K^R \twoheadrightarrow K^S$ 是一个拟同构，参见 [9,引理 4.1.6]。

$\hat{}$ 要证明对于任意 $f \in I \setminus \mathfrak{m}I$，映射 $Q/(f) \twoheadrightarrow R$ 是 Golod 同态，等价于证明：对于任意圈 $z \in Z_1(K^R) \setminus B_1(K^R)$，半自由扩张 $K^R\langle T \mid \partial(T) = z\rangle$ 是 Golod 代数。现在注意到 q 可延拓为一个满射拟同构

$$\tilde{q} : K^R\langle T \mid \partial(T) = z\rangle \twoheadrightarrow K^S\langle T \mid \partial(T) = q(z)\rangle,$$

例如，参见 [19, 命题 1.3。5]引理 4.5 适用于 S。由此可知，$\tilde{}q$的像是一个 Golod 代数。因此，$K^R\langle T \mid \partial(T) = z\rangle$ 是一个 Golod 代数。

状态 关于庞加莱级数的论述是引理 3.9、4.5 的直接推论 . □

注记 4.7. 在定理 *4.4*、*4.6*中，我们构造了一个 *Golod*同态，其定义域是一个超曲面环，它是对定义理想的一组极小生成元中的任意一个取商得到的。因此，这两个定理都比其早期版本略强。

致谢。 本文的研究始于一次讨论，讨论对象是 *Liana M. Sega*；这次讨论是在*2016*年*7*月于安娜堡举行的 *Craig Huenke* 致敬会议期间进行的。我要感谢她对其关于 *Auslander-Reiten*猜想的结果所作的澄清。我衷心感谢匿名审稿人建议了引理 *3.1*的证明。我还要特别感谢 *Matteo Varbaro* 一直以来给予我的启发与鼓励。本研究由意大利的 *INdAM- COFUND-2012*奖学金资助，该奖学金由玛丽·居里行动共同资助。

参考文献

[1] Amanda Croll, Roger Dellaca, Anjan Gupta, Justin Hoffmeier, Vivek Mukundan, Denise Rangel Tracy, Liana M. Sega, Gabriel Sosa, Peder Thompson；从 Koszul 同调的代数结构检测 Koszul 性及相关同调性质。即将发表于名古屋数学杂志，arXiv:1611.04001v1。2, 3, 12[2] Ananthnarayan, H.；用 Gorenstein 环逼近 Artin 环及极大理想的三标准性，博士论文，堪萨斯大学（2009）。8[3] Ananthnarayan, H.；Avramov, Luchezar L.；Moore, W. Frank；Gorenstein 局部环的连通和。《J. Reine Angew. Math.》667（2012），149–176。3, 7[4] Ananthnarayan, H.；Celikbas, Ela；Laxmi, Jai；Yang, Zheng；将 Gorenstein 环分解为连通和。《J. Algebra》527（2019），241–263。8[5] Anick, David J.；Serre 猜想的一个反例。《Ann. of Math.》（2）115（1982），第1期，1–33。1[6] Avramov, L. L.；Golod, E. S.；局部 Gorenstein 环的 Koszul 复形代数的同调。（俄文）《Mat. Zametki》9，1971，53–58。6[7] Avramov, Luchezar L.；Kustin, Andrew R.；Miller, Matthew；小嵌入余深或小链接数的局部环上模的庞加莱级数。《J. Algebra》118（1988），第1期，162–204。1, 2, 5, 17[8] Avramov, LuchezarL.；所有模的庞加莱级数均为有理数的局部环。《J. Pure Appl. Algebra》91（1994），第1–3期，29–48。1[9] Avramov, Luchezar L.；无限自由分解。《交换代数六讲》。贝拉泰拉，1996，1–118。2, 4, 5, 6, 11, 15, 17[10] Avramov, Luchezar L.；Buchweitz, Ragnar-Olaf；完全交环上的支撑簇与上同调。《Invent. Math.》142（2000），第2期，285–318。12, 14[11] Bøgvad, Rikard；具有超越庞加莱级数的 Gorenstein 环。《Math. Scand.》53（1983），第1期，5–15。1[12] Bruns, Winfried；Herzog, Jürgen；Cohen-Macaulay 环。《剑桥高级数学研究丛书》，39。剑桥大学出版社，剑桥，1993。10, 17[13] Dress, Andreas；Krämer, Helmut；局部环纤维积的 Betti 级数。《Math. Ann.》215（1975），79–82。10, 13[14] Eakin, Paul；Sathaye, Avinash。预稳定理想。《J. Algebra》41（1976），第2期，439–454。7[15] Elias, Juan；Valla, Giuseppe；某些 Gorenstein 理想的结构定理。纪念 Melvin Hochster 专辑。《密歇根数学杂志》57（2008），269–292。8, 12[16] Elias, Juan；Valla, Giuseppe；一族具有有理庞加莱级数的局部环。《Proc. Amer. Math. Soc.》137（2009），第4期，1175–1178。3[17] Eisenbud, David；面向代数几何的交换代数。《数学研究生教材》，150。施普林格出版社，纽约，1995。8[18] G., Scheja；关于局部环的 Betti 数。《Math. Ann.》155（1964），155–172。10, 14[19] Gulliksen, Tor H.；Levin, Gerson；局部环的同调。《女王大学纯粹与应用数学论文集》，第20号，女王大学，金斯顿，安大略省，1969年，第x+192 页。4, 5, 17[20] Gulliksen, Tor H.；一个换环定理及其在庞加莱级数和交数中的应用。《Math. Scand.》34（1974），167–183。1

[21] Jorgensen, David A.；Sega, Liana M.；非消失上同调与 Gorenstein 环类。《Adv. Math.》188（2004），第2期，470–490。14[22] Lescot, Jack；局部环纤维积的 Bass 级数。Paul Dubreil 和 Marie-Paule Malliavin 代数研讨班，第35年（巴黎，1982），218–239。11, 13[23] Levin, Gerson L.；Avramov, Luchezar L.；约去 Gorenstein 环的底。《J. Algebra》55（1978），第1期，74–83。6, 12, 14, 15[24] Levin, Gerson；Golod 同态讲义。斯德哥尔摩大学数学系，预印本15，1975。5[25] Levin, Gerson；模与 Golod 同态。《J. Pure Appl. Algebra》38（1985），第2–3期，299–304。5[26] Maurice Auslander；Idun Reiten；关于中山猜想的一个广义版本。《Proc. Amer. Math. Soc.》52（1975），69–74。3[27] Roos, Jan-Erik；良性与劣性 Koszul 代数及其 Hochschild 同调。《J. Pure Appl. Algebra》201（2005），第1–3期，295–327。1[28] Rossi, Maria Evelina；Sega, Liana M.；压缩 Gorenstein 局部环上模的庞加莱级数。《Adv. Math.》259（2014），421–447。1, 2, 3, 7, 16, 17[29] Sally, Judith D.；拉伸 Cohen-Macaulay 环的庞加莱级数。《Canad. J. Math.》32（1980），第5期，1261–1265。2, 3, 12[30] Sega, Liana M.；小余维 Gorenstein 环上的上同调消失。《Proc. Amer. Math. Soc.》131（2003），第8期，2313–2323。3, 11[31] Wiebe, Hartmut；关于局部环的同调不变量。（德文）《Math. Ann.》179，1969，257–274。2, 17

博帕尔印度科学教育与研究所数学系，印度中央邦博帕尔博帕尔绕行路，邮编：462066。电子邮件地址：agmath@gmail.com