arXiv:2603.03859v1 [math.CO] 4 Mar 2026

最小特征值至少为.....的图的霍夫曼可着色性 -2

Bart De Bruyn*

比利时根特大学数学、计算机科学与统计系。

Thijs van Veluw†

比利时根特大学数学、计算机科学与统计系，荷兰埃因霍温理工大学数学与计算机科学系。

摘要

根据 Cameron-Goethals-Seidel-Shult 分类定理，我们将 Abiad、Bosma、Van Veluw（2025年）关于线图 Hoffman可着色性的刻画推广到所有最小特征值至少为 -2 的连通图；我们给出了广义线图的 Hoffman可着色性刻画，并完全分类了 Hoffman可着色例外图。该分类中的 245 个 Hoffman可着色例外图具有自然的偏序，我们确定了其中在此意义下最大的 29 个图，其方式类似于 (Cvetkovi´c, Rowlinson, Simi´c，2004年) 中对最大（E_8-可表示）例外图的分类。最后，作为一个推论，并且与（同上）类似，我们确定了所有关于在 E_7 root 系统中可表示性而言最大的 39 个图。

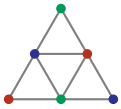
1 引言

对于简单图 G，分别用 $\lambda_{\max}(G)$ 和 $\lambda_{\min}(G)$ 表示邻接矩阵的最大和最小特征值，其中邻接矩阵属于 G。霍夫曼界是非空图 G 的色数的一个众所周知的谱下界： $\chi(G) \geq h(G)$，其中

$$h(G) := 1 - \frac{\lambda_{\max}(G)}{\lambda_{\min}(G)}. \tag{1}$$

如果一个图*Hoffman* 可着色，就称其为霍夫曼可着色图；此时，每一种最优着色都称为*Hoffman* 着色。从正则完全多部图的谱$K_{m、m.....m}$中可以很容易看出，这些图都是 Hoffman 可着色的。非空二分图（色数为 2 的图）也是 Hoffman 可着色的，因为它们的谱关于 0 对称。在这两种情况下，多部划分都是一种 Hoffman 着色。二分图和正则完全多部图并非仅有的例子；既非二分图也非正则完全多部图的 Hoffman 可着色图称为非平凡霍夫曼可着色，例如图1所示。

*Bart.DeBruyn@ugent.be
†Thijs.vanVeluw@ugent.be, t.j.v.veluw@tue.nl



$$\lambda_{\max} = 1 + \sqrt{5}, \quad \lambda_{\min} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

图 1：最小的连通非平凡 Hoffman 可着色图。

文献 [3, 12] 研究了（强）正则图的 Hoffman 着色，文献 [1, 2] 则研究了一般图。关于归一化拉普拉斯矩阵的特征值所给出的色数相关谱下界是否取等，也已在文献中得到研究 [4, 8]。文献 [5, 10], 利用霍夫曼界，对具有给定小色数的强正则图和距离正则图进行了分类。研究图的 Hoffman 可着色性很有意义，因为霍夫曼界不仅是色数的下界，也是色数诸多变体的下界。这些变体包括向量色数 χ_v [13]，它与 Lov´asz ϑ数 [14] （见[13, 定理 82]）以及量子色数 χ_q；我们有

$$h(G) \leq \chi_v(G) \leq \chi_q(G) \leq \chi(G)$$

由 [15, 推论 4.1] 和 [14, 定理 6]可知。对于 Hoffman 可着色图，通过夹逼即可直接得到这些色数变体的取值。特别地，对于 Hoffman 可着色图，量子色数是可计算的；而对于一般图，其是否可计算尚属未知 [15]。

本文特别关注 [2], 的结果，下面简要讨论。分解定理 [2, 定理 3.3], 还表明，连通 Hoffman 可着色图中由任意选取的至少两个颜色类所诱导的子图仍然是 Hoffman 可着色的。我们将这类诱导子图称为色数分量，因此 Hoffman 可着色性在色数分量下封闭。利用分解定理，可以刻画线图的 Hoffman 可着色性 [2, 定理 3.12]；非空图 G 的线图 $L(G)$定义为一个以 G 的边为顶点的图，其中，当两条 G边共享一个顶点时，它们在 $L(G)$中相邻。

线图具有这样的谱性质：其最小特征值不小于 -2。著名的 Cameron-Goethals-Seidel-Shult定理从谱的角度推广了线图，它对所有特征值均不小于 -2 的连通图进行了分类。简言之，存在一个无限族，即广义线图，以及有限多个例外图，它们可以用 E_8 根系表示。广义线图的诱导子图也都是广义线图。因此，若一个最小特征值不小于 -2 的连通图 G 包含一个例外图 H 作为诱导子图，那么 G 本身也是例外图。这在例外图集合上定义了一个偏序，并且有 473 个例外图关于此偏序是极大的 [9, 第6节1]。

因此，关于Hoffman可着色线图之刻画的一个非常自然的后续问题来自 [2] ，即是否可以将其推广到广义线图，甚至例外图。事实证明，这是可能的，而这正是本文的主要主题。特别地，我们证明：广义线图的Hoffman可着色性等价于一个用图结构表述的显式条件，我们称之为色数平衡。此外，我们确定恰好存在245个Hoffman可着色例外图，并在其中确定了关于色数分量为极大的那些图；这样的图恰好有29个。该分类的完整陈述见定理2.1。作为我们证明定理2.1的一个重要环节，我们发现，在可表示于 E_7 根系中的图里，关于诱导子图为极大的图恰好有39个。利用定理2.1，我们完全分类了所有连通非平凡Hoffman可着色图 G且其顶点数少于 3χ（G）个顶点（定理2.2）。

本文组织如下。在第2 节，我们介绍主要贡献。在第3节，我们阐述证明所需的预备知识。在第4节与第5 节，我们证明定理2.1，分别针对广义线图与例外图的情形。在第6节，我们证明定理2.2。最后，在第7节，我们给出一个（或给出其参考文献） E_8-表示，对应于245个Hoffman可着色例外图中的每一个，这些图来自定理2.1。

2 霍夫曼可着色图的新分类

在本节中，我们陈述我们的主定理（定理 2.1），以及关于顶点数少于 $3\chi(G)$ 个顶点的图的一个应用（定理2.2）。在陈述这些结果之前，我们需要定义一些额外的概念。

设 G与 H 为两个图，并设 $m \geq 2$ 为一个整数。则我们称 H 为 G 的一个 m-色数分量，如果存在 G 的一个最优着色（记为 $V(G) = \bigsqcup_{i=1}^{\chi(G)} V_i$ ，其中每个 V_i 均为独立集），使得 H 与 G 在顶点集 $\bigsqcup_{i=1}^{m} V_i$上的诱导子图同构。我们不说2-色数，而说二色。

设 m 为非负整数，则鸡尾酒会图 $CP(m)$是具有 m 个大小为2的部类的完全多部图。若 G 是以顶点 v_1，……，v_n为顶点集的图，且 a_1，……，a_n 为非负整数，则广义线图 $L(G; a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n)$是如下得到的图：考虑 $L(G)$与 CP_1，……，CP_n（连同 $CP_i \cong CP(a_i)$）的不交并，并对每个 i，在 CP_i 的每个顶点与 $L(G)$中形如 $\{v_i, u\}$ 的每个顶点之间添加新边。换言之，我们将第 i个鸡尾酒会图中的每个顶点连接到与 G 的第 i个顶点相关联的每条边。

注意，$\chi(L(G; a_1, \ldots\ldots, a_n)) \geq \chi(L(G))$。考虑由 CP_i 以及 G 中所有与 v_i 相邻的边构成的子图，可以看出，对每个 i，都有 $\chi(L(G; a_1, \ldots\ldots, a_n)) \geq a_i + \deg_G(v_i)$。然而，若令 c 为 $\chi(L(G))$与所有 $a_i + \deg_G(v_i)$ 中的最大值，那么我们可以任选 $L(G)$ 的一个 c-着色，再对所有鸡尾酒会顶点进行贪心着色，从而得到 $L(G; a_1, \ldots\ldots, a_n)$ 的一个合法 c-着色。综上，我们有

$$\chi(L(G; a_1, \ldots, a_n)) = \max(\chi(L(G)), \max_{1 \leq i \leq n} (a_i + \deg_G(v_i))). \tag{2}$$

现在，对于图 G 和整数 $c \geq \chi(L(G))$，我们将 G 的 c-色数平衡广义线图定义为广义线图 $L(G; a_1, \ldots, a_n)$，记作 $L(G, c)$，其中对每个 $i = 1, \ldots, n$，都有 $a_i = c - \deg(v_i)$。这样，其色数等于 c，因为（2）中内层最大值函数的各个输入都等于 c，而这也至少为 $\chi(L(G))$。

现在我们可以陈述主定理如下。

定理 2.1。 具有 $\lambda_{\min}(G) \geq -2$ 的连通、非平凡霍夫曼可着色图恰好是以下几类：

- 色数平衡广义线图，
- 图 *1* 中的图 （该图是图*2*中图的线图），
- *245 Hoffman*可着色例外图；其中每一个都是 *29* 个极大 *Hoffman* 可着色例外图 M_1、……、M_{29}之一的色数分量。

245 个 Hoffman可着色例外图（包括其中的 29 个极大图）的描述见第 5 和 7 节。

请注意，尽管图 1 是 Hoffman 可着色线图，但它不是色平衡广义线图。此外，它是唯一一个最小特征值严格大于 -2的连通非平凡 Hoffman 可着色图；这一点将在定理 4.2 中针对广义线图的情形证明，并在定理 5.1 中针对例外图证明。对于最小特征值等于 -2的图，定理 2.1 将在定理 4.1中针对广义线图证明，并在定理 5.3、5.10和5.16 中针对例外图证明。

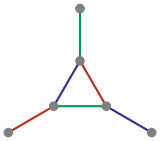


图 2：一个偶发的霍夫曼边染色。

图标识符	阶	色数	色类大小	参考文献
M_1, M_2	11	3	$3^2, 5$	第 5.3
M_3	13	3	$3, 5^2$	第 5.3
M_4	15	4	$3^3, 6$	第 5.3
M_5	16	5	$3^4, 4$	第 5.2
$M_6, \cdots, M_9$	18	5	$3^4, 6$	节 5.3
M_{10}	20	7	$2^5, 5^2$	节 5.3
$M_{11}, \ldots, M_{19}$	21	6	$1, 4^5$	节 5.1
M_{20}	21	7	3^7	节 5.1
M_{21}	22	8	$2^6, 5^2$ 或 $2^7, 8$	第5.3节
M_{22}, M_{23}	22	7	$3^6, 4$	第5.2节
M_{24}	27	9	3^9	第5.1节
M_{25}	28	9	$3^8, 4$	第5.2节
$M_{26}, \cdots, M_{29}$	29	8	$1, 4^7$	第 5.1

表1：29 个极大 Hoffman 可着色例外图的最优着色的色类大小，以及讨论相应图的章节参考。

在表 1 和 2中，我们列出了 29 个按色数分量而言极大的霍夫曼可着色例外图的一些基本信息。需要指出的是，尽管这些图可能存在多种 Hoffman 着色，但只有 M_{21}这一种情形存在两种颜色类大小不同的 Hoffman 着色；它有多种 Hoffman 着色，其中颜色类包括六个大小为 2 的类和两个大小为 5 的类；此外，它还有唯一一种 Hoffman 着色，其中有七个大小为 2 的颜色类和一个大小为 8 的颜色类。

定理 2.1 中的 245 个图根据所用的色类大小，自然分为八类。更具体地说，对于图 G，记 $\mathfrak{C}(G)$ 为 G中霍夫曼颜色类（即属于霍夫曼着色的独立集）的大小集合。那么，正如我们将在第5节的证明中看到的，若 $\mathfrak{C}(G)$ 是非平凡霍夫曼可着色例外图，则 G 有八种可能。在表 3中，我们列出了每种可能对应的（极大）Hoffman 可着色图的数量。

作为定理 2.1的一个应用，我们证明以下关于 Hoffman 可着色性的分类，其中顶点数相对于色数“较小”。

定理2.2。 在同构意义下，恰有十个满足 $|V(G)| < 3\chi(G)$的连通非平凡*Hoffman*可着色图。这些图是图 *1*中的图、 M_{10}、 M_{21}以及 M_{21} 的七个阶分别为11、13、15、17和 20的色数分量。

图 M_{21} 在同构意义下，阶为 11 和 13 的图各有两个色数分量，阶为 15、17 和 20 的图各有一个。阶为 11、13、15 和 17 的六个色数分量也是 M_{10}的色数分量，但阶为 20 的色数分量不是。更多详情见第 5.3节和第6节。

图	阶	度序列	谱
M_1	11	$6^2, 4^2, 3^4, 2^3$	$4, \sqrt{2}^{-2}, 1, 0, -\sqrt{2}^{-2}, -2^3$
M_2	11	$6^2, 4^2, 3^4, 2^3$	$4, 2, 1^2, 0^3, -2^4$
M_3	13	$6, 4^8, 2^4$	$4, 2^2, 1^2, 0^3, -2^5$
M_4	15	$8, 7^4, 6^6, 3^4$	$6, 3^2, 1^2, 0^3, -2^7$
M_5	16	$12, 8^{12}, 4^3$	$8, 2^5, 0, -2^9$
M_6	18	$9^8, 8^6, 4^4$	$8, 4, 2^4, 0^2, -2^{10}$
$M_7, \ldots, M_9$	18	$9^8, 8^6, 4^4$	$8, (2+\sqrt{2})^2, 2^2, (2-\sqrt{2})^2, 0, -2^{10}$
M_{10}	20	$14^{10}, 13^2, 7^4, 6^4$	$12, 3, 2^4, 1, 0, -2^{12}$
$M_{11}, \ldots, M_{19}$	21	$20, 9^{20}$	$10, (2+\varphi)^2, 3^2, (3-\varphi)^2, 0, -2^{13}$
M_{20}	21	12^{21}	$12, 4, 3^4, 0, -2^{14}$
M_{21}	22	$16^{14}, 7^8$	$14, 2^7, -2^{14}$
M_{22}, M_{23}	22	$18, 12^{18}, 6^3$	$12, 4, 3^4, 0^2, -2^{14}$
M_{24}	27	16^{27}	$16, 4^6, -2^{20}$
M_{25}	28	$24, 16^{24}, 8^3$	$16, 4^6, 0, -2^{20}$
$M_{26}, \ldots, M_{29}$	29	$28, 13^{28}$	$14, 4^7, -2^{21}$

表2：29 个极大 Hoffman 可着色例外图的度数序列和谱（φ表示黄金比例（$1+\sqrt{5}$）$/2 \approx 1.618\ldots$）。

3 预备知识

在证明主要结果之前，我们先提供一些额外的背景信息，并固定我们将使用的若干记号。

（诱导）子图

图 H 是图 G 的一个子图，如果 $V(H) \subseteq V(G)$ 且 $E(H) \subseteq E(G)$。如果$H \neq G$，则该子图是真的。设 X 是图 G中的一个顶点集。G 的诱导子图 在 X 上（记为 $G[X]$）是以 X 为顶点集的图，并包含 X 的顶点之间所有属于 G 的边。

命题 *3.1*（[6, 命题 *3.2.*1]）。如果 H 是 G 的子图，则 $\lambda_{\max}(H) \leq \lambda_{\max}(G)$。如果 G 是连通的且 H 是真子图，则 $\lambda_{\max}(H) < \lambda_{\max}(G)$。如果 H 是 G 的诱导子图，则 $\lambda_{\min}(G) \leq \lambda_{\min}(H)$。

特别地，如果 G 的最小特征值至少为 -2，且 H 是 G 的诱导子图，那么 H 的最小特征值也至少为 -2。

霍夫曼着色

图的顶点集 C 若其中任意一对顶点都不相邻，则称为独立集 。图 G 的着色 是将 G 的顶点集划分为独立集。图 G 的色数 $\chi(G)$ 是着色所需独立集的最小数量。若 $\chi(G) \leq 2$，则称图为二部的 。若独立集 ν 中每个顶点外部的顶点都恰与 ν 个 C 中的顶点相邻，则称该独立集为 ν-正则 。

如前所述，霍夫曼界（1）给出了色数的谱下界。对于正则图，霍夫曼界可由比率界推出：

定理 3.2（比率界，霍夫曼（未发表，参见 [11]））。 设 G 是一个非空的 k-正则图，具有 n 个顶点，最小特征值为 $\lambda_{\min}$ ，且设 C 是 G中的一个独立集。那么

$$|C| \leq \frac{n}{h(G)} = \frac{-n\lambda_{\min}}{k - \lambda_{\min}},$$

$\mathfrak{C}$	数量 Hoffman 可着色 例外图	极大数量 Hoffman 可着色 例外图	参考文献
$\{3\}$	17	2	第 5.1
$\{4\}$	70	0	第 5.1
$\{1,4\}$	87	13	第 5.1
$\{3,4\}$	35	4	第 5.2
$\{2,5\}$	17	1	第 5.3
$\{2,5,8\}$	6	1	第 5.3
$\{3,5\}$	3	3	第 5.3
$\{3,6\}$	10	5	第 5.3
总计	245	29	

表3：对于 Hoffman 颜色类大小可能出现的八种情况，Hoffman 可着色例外图（极大图）的数量，并附上讨论这些图的相应章节参考文献。

当且仅当 C 是（$-\lambda_{\min}$）-正则时，等号成立。

达到比率界的独立集称为霍夫曼独立集。因此，正则图的 Hoffman 着色必然会将顶点集划分为 Hoffman 余团：

命题 3.3 ([5, 命题 2.3])。 设 G 为正则图。则 G 的一个着色是 ***Hoffman*** 着色，当且仅当它是将 G划分为 ***Hoffman*** 余团的一个划分。此时，每个顶点与自身颜色类以外的每个颜色类中恰有 $-\lambda_{\min}(G)$ 个顶点相邻。

对于一般的图，我们也可通过分解定理了解霍夫曼着色的结构，该定理可视为命题3.3的推广。

定理 3.4 (分解定理， [2, 定理3.3])。 设 G 是具有正特征向量 x 的 ***Hoffman*** 可着色图，并设 H 是 G 的一个色数分量。则 H 是 ***Hoffman*** 可着色的，$\lambda_{\min}(G) = \lambda_{\min}(H)$，且 $x|_H$ 是 H的一个正特征向量。

根据Perron-Frobenius定理 [6, 定理2.2.1], ，连通图具有（在相差标量倍的意义下）唯一的正特征向量，且该向量属于最大特征值。非连通图 G具有正特征向量，当且仅当 G的所有连通分支的最大特征值都相等。此时， G的最大特征值所对应特征空间的维数等于 G的连通分支数。

因此，如果 H 是一个具有正特征向量的 Hoffman 可着色图 G的双色分量，那么由于 H 是二部的，其谱关于 0 对称，因此 $\lambda_{\max}(H) = -\lambda_{\min}(H) = -\lambda_{\min}(G)$。此外，由于根据分解定理， H 具有正特征向量， H 的每个连通分支 K 都与 H具有相同的最大特征值。因此

$$\lambda_{\max}(G) = (\chi - 1)\lambda_{\max}(K) \quad \text{and} \quad \lambda_{\min}(G) = \lambda_{\min}(K) \tag{3}$$

对于 G的每个双色分量中的每个连通分支 K ，均成立。

如前所述，利用分解定理，可以用 [2]刻画线图的 Hoffman可着色性。

定理 3.5 ([2, 定理 3.12])。 设 G 是一个连通图。若 $L(G)$ 是非平凡霍夫曼可着色的，则 G 要么是 ***1***-因子分解的，要么 G是图 ***2*** 所示的图（此时 $L(G)$ 是图 ***1*** 所示的图）。

如果一个图的边可以划分为若干个完美匹配，则称该图为*1*-因子分解的。完美匹配或*1*-因子是边集 M，其中图的每个顶点都恰好与 M 中的一条边关联。图 G 是1-因子分解的，当且仅当 G 是正则图，并且 L 的色数 (G) 等于 G 的度。

注 3.6。注意，对于一个度为 G 的可作 1-因子分解的图 k，其 k-色数平衡广义线图 G 就是 $L(G)$。因此，在广义线图的语境下，定理3.5 中可作 1-因子分解的图的线图这一类，属于定理 2.1 中更大的色数平衡广义线图类。

分解定理还可用于刻画 $\widehat{}$ 锥图 [2] 的 Hoffman 可着色性。锥图 G 是在图 G 上添加一个顶点（所谓的 全邻顶点），并使其与 G 的所有顶点相邻，从而得到的图 G。

$\widehat{}$**定理 3.7** ([2, 定理 3.8])。设 G 为一个非空图。那么， G 是 *Hoffman* 可着色的，当且仅当 G 是正则的，且 *Hoffman* 可着色，其颜色类大小为 $\lambda_{\min}(G)^2$。在这种情况下，$\sim\lambda_{\min}(G) = \lambda_{\min}(G)$，且这是一个整数。

我们的证明还需要以下结果。

命题 3.8 ([2, 推论 3.5 和 3.6])。设 G 是具有正特征向量的图。那么，对于 G的每一种 *Hoffman* 着色，每个顶点都至少与其他每个颜色类中的一个顶点相邻。因此，如果 G 的某种 *Hoffman* 着色有一个大小为 *1* 的颜色类，那么 G 是锥图。

Dynkin 图与 Smith图

设 H 是一个 Hoffman 可着色图的二色分量，且该图的最小特征值至少为-2。根据命题 3.1， H 的最小特征值也至少为 -2；又由于其为二部图，最大特征值至多为 2。最大特征值至多为 2 的连通图已完成分类（见[6, 定理 3.1.3]或 [9, 第3节。4]）：最大特征值小于 2 的连通图是 Dynkin 图或约化 Smith图 A_n, D_n, E_6, E_7, E_8；最大特征值等于 2 的图则是 Smith图 $C_n, W_n, \mathcal{F}_7, \mathcal{F}_8, \mathcal{F}_9$。Dynkin 图和 Smith 图是最小特征值至少为 -2 的 Hoffman 可着色图的基本构件。Dynkin 图 A_n $(n \geq 1)$ 是一个有 n 个顶点的路径图。Dynkin 图 D_n $(n \geq 4)$可以通过在 A_{n-2}的一个端点上添加两个叶得到。Dynkin 图 E_n $(n = 6, 7, 8)$可以通过在 D_{n-1} 的两个共享同一邻点的叶之一上添加一个叶得到。图 C_n $(n \geq 3)$是一个有 n 个顶点的圈图。若 n为奇数，这些图就不是二部图。Smith图 W_5 是完全二部图 $K_{1,4}$；图 W_n $(n \geq 6)$则可以通过分别在 A_{n-4}的两个端点上添加两个叶得到。Smith图 $\mathcal{F}_7, \mathcal{F}_8, \mathcal{F}_9$见图 3。

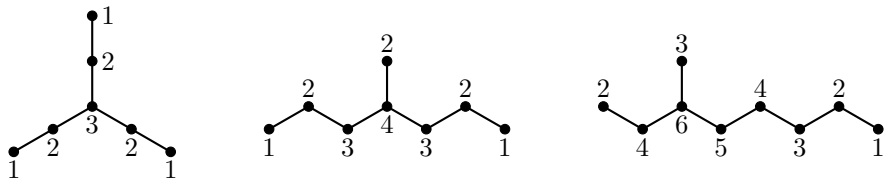


图 3：Smith图 $\mathcal{F}_7$， $\mathcal{F}_8$， $\mathcal{F}_9$，以及对应最大特征值 2 的特征向量。

Cameron-Goethals-Seidel-Shult定理

著名的 Cameron-Goethals-Seidel-Shult定理刻画了最小特征值至少为 -2的连通图。

定理 3.9 (Cameron-Goethals-Seidel-Shult定理 ([6, 定理 8.4.1 (i)]))。 设 G 是一个连通的图。那么 G 满足 $\lambda_{\min}(G) \geq -2$ 当且仅当 G 是广义线图或一个E_8-可表示图。

我们回顾 E_8-可表示图的定义。考虑 E_8 根系，它可以明确构造为 $\mathbb{Z}^8$ 的一个子集，其中包含 112 个在六个坐标上取 0、在另外两个坐标上取 ± 2 的向量，以及 128 ± 1向量；后者含有偶数个 $+1$ 和 -1（这些向量的范数均为 $2\sqrt{2}$）。图 G 的一种 E_8- 表示是指一个单射映射 $f\colon V(G) \to E_8$，使得相邻顶点映射为夹角为 $60°$（内积为 4）的向量，而不相邻顶点映射为夹角为 $90°$（内积为 0）的向量。如果一个图存在一种 E_8-表示，则称它是 E_8-可表示的。如果一个图是连通的、 E_8-可表示的，且不是广义线图，则称它是例外的。

E_8 的向量范数均为 $2\sqrt{2}$。 E_8 中两个不同向量的内积属于 $\{-8, -4, 0, 4, 8\}$。为了更方便地讨论 E_8 中的元素，我们沿用 [9,第6节2], 的记号，其中为 E_8 的 240 个向量赋予了类型和名称。我们用e_i 表示第 i 个基向量，用$\mathbb{1}$ 表示全1向量。

类型 a： 向量 $a_{ij} = 2e_i + 2e_j$ 和 $a'_{ij} = -a_{ij}$，用于 $1 \leq i < j \leq 8$;

类型 b： 向量 $b_{ij} = \mathbb{1} - 2e_i - 2e_j$ 和 $b'_{ij} = -b_{ij}$，用于 $1 \leq i < j \leq 8$;

类型 c： 向量 $c_{ij} = 2e_i - 2e_j$，用于不同的 $i,\ j \in \{1, \ldots, 8\}$;

类型 d： 向量 $d_{ijk\ell} = \mathbb{1} - 2e_i - 2e_j - 2e_k - 2e_\ell$，用于 $1 \leq i < j < k < \ell \leq 8$;

类型 e： 向量 $e = \mathbb{1}$ 和 $e' = -e$。

此外， E_7 和 D_6 根系也与我们有关。 E_7 根系可以构造为 E_8 的 126 个向量中与给定的 E_8向量正交的子集； D_6 根系则是 E_8 的 60 个向量中与给定的两个正交 E_8向量正交的子集。根据E_8 的对称性（见 [9, 命题 3.2.4]），这一构造是良定义的，因为选取 E_8 的哪些特定给定向量并不重要。

Seidel 切换

设 G 是一个图， X 是 G 的一个顶点集。考虑一个与 G 具有相同顶点的图，其中当且仅当以下条件之一成立时， u 和 v 相邻： u 和 v 在 G 中相邻，且二者都属于 X 或都不属于 X；或者 u 和 v 在 G 中不相邻，且 u 和 v 中恰有一个属于 X。我们将所得图记作 G_X，并称 G_X 是由 G 相对于 X进行 *Seidel* 切换而得到的。如果存在 X 这一 G 的顶点集，使得 $G_X \cong H$，则称两个图 G 和 H 切换等价。

Seidel 切换与 E_8-可表示图有关，原因是以下结果。我们认为该结果早已为人所知，但此前尚未明确写出。为完整起见，我们给出证明，该证明基于 [9, Proposition 6.2.1] 的证明。用 $\mathcal{S}_8$ 表示这样一个图类：其中的图均与一个八个顶点的图的线图切换等价。

命题 3.10. 设 G 是一个图。当且仅当 G 上的锥是 E_8-可表示的， $G \in \mathcal{S}_8$ 成立。特别地， $\mathcal{S}_8$ 中的图本身是 E_8-可表示的，因此其最小特征值至少为-2。

证明。 在证明两个方向之前，我们指出，与 e 成 $60°$ 角的 E_8-向量恰好是向量 a_{ij} 和 b_{ij}。 此外，我们有

$$\langle a_{ij}, a_{k\ell}\rangle = \langle b_{ij}, b_{k\ell}\rangle = 4 \cdot |\{i,j\} \cap \{k,\ell\}| \quad \text{and} \quad \langle a_{ij}, b_{k\ell}\rangle = 4 \cdot \big(1 - |\{i,j\} \cap \{k,\ell\}|\big). \tag{4}$$

设 H 是一个有八个顶点的图， F 是来自 H 的边集，且 $G \cong L(H)_F$。那么由（4），锥在 G 上的 E_8-表示由以下向量给出： e 对应锥顶点， a_{ij} 对应边 $\{i,j\} \in E(H)\backslash F$，以及 b_{ij} 对应边 $\{i,j\} \in F$。

接下来，假设在 G 上的锥是 E_8-可表示的。根据对称性（[9, 命题 3.2。4]），不妨设锥顶点由 e 表示，因此 G 的顶点被映射为形如 a_{ij} 或 b_{ij} 的向量。注意，由 **(4)** 可知，对于固定的 i、 j，向量 a_{ij} 和 b_{ij} 不能同时出现（ E_8-表示中的向量不能形成 $120°$ 角）。现在定义 H 为一个具有八个顶点的图：当 E_8 中存在 a_{ij} 或 b_{ij} 时， i 和 j 相邻；令 F 为 b_{ij} 出现在表示中的边的集合。于是由 **(4)** 可得 $G \cong L（H）_F$，证明得证。

□

以下 是类 $\mathcal{S}_8$ 中图的例子，它们是重要的例外图例子 s.

例 3.11。 如果相对于由 $4 \cdot K_2$、 C_8 或 $C_5 \sqcup C_3$ 形成的 K_8-边集合对 $L（K_8）$ 进行切换，我们将得到三个彼此不同构的正则图，且它们不同构于 $L（K_8）$。这些图称为***Chang*** 图。

例 3.12。 如果我们根据某个顶点的邻点对 $L(K_8)$ 进行切换，就会得到一个孤立顶点和所谓的 $Schl¨afli$ 图。

我们可以用边切换图示来表示 $\mathcal{S}_8$ 中的图，参见图 4。通过对线图分别关于红色边集或蓝色虚线边集进行切换，可以得到所表示的图。

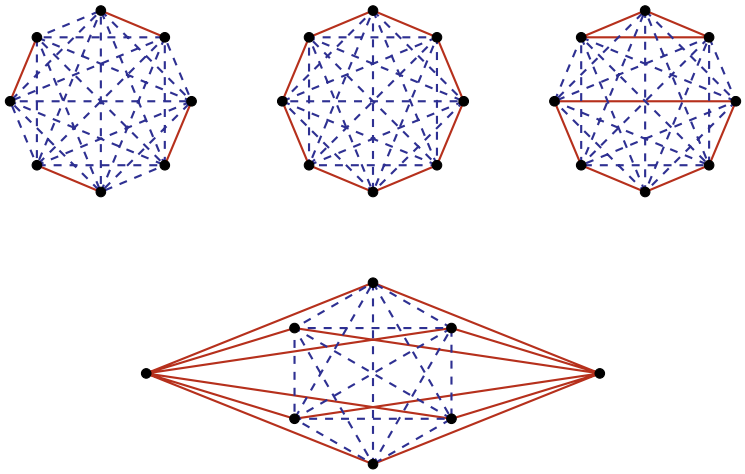


图 4：三个 Chang 图和 Schl¨afli 图的边切换图示。

最小特征值至少为 -2 的正则连通图

我们有以下关于广义线图正则性的刻画。

命题 3.13 ([9, 命题 1.1.5 和 1.1.9])。 如果 G 是一个正则连通广义线图，那么 G 就是鸡尾酒会图、正则图的线图，或双正则图的线图。

如果一个图是二部的，并且对于每个二部划分类，其中的所有顶点都具有相同的度，则称其为双正则图。如果第一个划分类的大小为 n_1，且其中的顶点度数为 k_1，第二个划分类的大小为 n_2，且其中的顶点度数为 k_2，那么我们必然有 $n_1k_1 = n_2k_2$，因为二者都等于图中的边数。

具有这些参数的双正则图的线图是 (k_1+k_2-2)-正则的。

对于正则例外图，我们有如下分类，它概述了 [9, 章 4]中的一系列结果（具体而言：定理 4.1.5、4.4.20，命题 4.1.3、4.1.7、4.4.11、4.4.13、4.4.14）。

定理 3.14 （[9, 章 4]）。正则例外图恰有 *187* 个。它们全都是 $\mathcal{S}_8$ 的一个元素，最小特征值为 -2，并可分为以下三类。

- 恰有 *163* 个正则例外图的比率界为 4。除其中五个外，其余都是三个 *Chang* 图之一的诱导子图。这五个例外图各有 *22* 个顶点。
- 恰有 *21* 个正则例外图的比率界为 3。它们全都是 *Schl¨afli* 图的诱导子图。
- 恰有 *3* 个正则例外图的比率界为 $8/3$。它们是 *Schl¨afli* 图的诱导子图。

这三类被称为层。注意，三个 Chang 图是第一层的正则例外图，而 Schl¨afli 图属于第二层。

极大例外图

对诱导子图而言极大的例外图已得到分类。共有 473 个极大例外图（命名为 $G001$至 $G473$ 在 [9]中）。如 [9, 第 6], 章所述，将极大例外图细分为三种类型是很方便的：(a) 最大度为 28 且恰有 29 个顶点的图；(b) 最大度为 28 且顶点数超过 29 的图；以及 (c) 最大度小于 28 的图。类型 (a) 有 430 个图，类型 (b) 有 37 个图，类型 (c) 有 6 个图。

注意，类型 (a) 的图是锥图；此类极大例外图的一些例子包括基于 $L(K_8)$ 的锥图、基于 Chang 图的三个锥图，以及基于 Schl¨afli 图的双锥图（即基于基于 Schl¨afli 图的锥图的锥图）。

4 广义线图的Hoffman 可着色性

本节证明广义线图情形下的定理 2.1 。我们首先讨论最小特征值等于 -2 的情形。

定理 4.1. 设 GL 是一个非空的连通广义线图。则以下条件等价：

- GL 是*Hoffman* 可着色的，且 $\lambda_{\min}(GL) = -2$,
- GL 是色数平衡的。

证明。 设 $GL = L(G; a_1, \ldots, a_n)$ 是一个广义线图。

令 $x: V(GL) \to \mathbb{R}$ 为一个向量，它对鸡尾酒会顶点赋值 1，对源自 G 的边的顶点赋值 2。记 GL 的邻接矩阵为 A，对每个 $1 \le i \le |V(G)|$，记 $c_i = \deg(v_i) + a_i$，并记 $t = 2(\chi(GL) - 1)$。注意，根据 (2)，对每个 i，$2(c_i - 1) \le t$。

令 w 为 GL 的第 i 个鸡尾酒会子图中的一个顶点。那么

$$(Ax)(w) = \deg(v_i) \cdot 2 + 2(a_i - 1) \cdot 1 = 2(c_i - 1) \le t.$$

现在令 $ij \in E(G) \subseteq V(GL)$，则

$$(Ax)(ij) = (\deg(v_i) + \deg(v_j) - 2) \cdot 2 + (2a_i + 2a_j) \cdot 1 = 2(c_i + c_j - 2) \le 2t.$$

因此 $Ax \le tx$ 作为向量。根据 Perron-Frobenius定理，我们有 $\lambda_{\max}(GL) \le t$ 当且仅当 $Ax = tx$ （例如参见 [6, 定理 2.2.1(iv)]）。

注意， $\lambda_{\max}(GL) \le t$ 等价于

$$\chi(GL) \ge 1 + \frac{\lambda_{\max}(GL)}{2},$$

且在 由（1）得出，且 $\lambda_{\min}(GL) \ge -2$ 霍夫曼界 $h(GL)$ 介于两者之间 ：

$$\chi(GL) \ge h(GL) \ge 1 + \frac{\lambda_{\max}(GL)}{2}.$$

现在，等号成立 $\lambda_{\max}(GL) = t$ 等价于 GL 是 Hoffman 可着色的，且具有最小特征值-2。

最后，注意， $Ax = tx$ 当且仅当 $2c_i - 2 = t$ 对所有 i都成立，而这又当且仅当 GL 是色数平衡的。证明至此完成。 □

定理 4.2。 若 $GL = L(G;\ a_1, \ldots, a_n)$ 是一个连通的、非平凡霍夫曼可着色的广义线图，且 $\lambda_{\min}(GL) > -2$，则 $a_1 = \cdots = a_n = 0$ （因此 GL 是一个线图）。特别地，图 *1* 中的图是唯一一个非平凡霍夫曼可着色的广义线图，且 $\lambda_{\min}(GL) > -2$。

为了证明定理 4.2，我们需要以下引理。

引理 4.3. 设 G 是一个带有正特征向量的非空 *Hoffman* 可着色图。设 K 是 G的一个双色分量的连通分支，并记作 $\nu = \lambda_{\max}(K)$。若 ν 在 $\mathbb{Q}$ 上的最小多项式$f_{\mathbb{Q}}^{\nu}$ 是偶多项式（即只含变量的偶次幂），则 G 是二部的。

证明。由于 $f_{\mathbb{Q}}^{\nu}$ 是偶多项式，因此 $-\nu$ 也是它的根。由 (3) 可知 $\lambda_{\max} := \lambda_{\max}(G) = (\chi - 1)\nu$，因此 $\lambda_{\max}$ 在 $\mathbb{Q}$上的最小多项式满足 $f_{\mathbb{Q}}^{\lambda_{\max}}(t) = (\chi - 1)^d \cdot f_{\mathbb{Q}}^{\nu}(t/(\chi - 1))$，其中 d是 $f_{\mathbb{Q}}^{\nu}$的次数。现在 $-\lambda_{\max}$也是 $f_{\mathbb{Q}}^{\lambda_{\max}}$的根。由于 $f_{\mathbb{Q}}^{\lambda_{\max}}$整除 G的特征多项式， $-\lambda_{\max}$也是 G的一个特征值。根据 [6, 命题 3.1, $-\lambda_{\max}$是 G的最小特征值。现在，霍夫曼界 (1) 为 $h(G) = 2$。由于 G 是 Hoffman 可着色的，因此它是二部的。 □

定理4.2的证明。 设 $GL = L(G;\ a_1, \ldots, a_n)$ 是一个最小特征值严格大于 -2 的连通广义线图。若 $a_1 = \cdots = a_n = 0$，则定理 3.5 适用。由于可作 1-因子分解的图的线图的最小特征值为 -2 (见注 3.6 和定理 4.1)，因此唯一一个最小特征值严格大于 -2 且非平凡 Hoffman 可着色的线图，就是图 1 中的图。

接下来，假设 $(a_1, \ldots, a_n) \neq (0, \ldots, 0)$。由于 GL 是连通的， G 也连通，因此若 m 表示 G 的边数，则我们知道 $m \ge n - 1$。由于 -2 不是 GL 的特征值，[9, 定理2.2.8] 给出 $0 = m - n + \sum_{i=0}^{n} a_i$，因此存在唯一的 i 满足 $a_i = 1$，并且对$j \neq i$ 有 $a_j = 0$。所以， GL 中恰有两个鸡尾酒会顶点 p 和 p'。

现在假设 GL 是 Hoffman 可着色的。我们声称 GL 是二部的。这意味着 GL显然是 Hoffman 可着色的，从而证明了结论。

由于 p 和 p' 具有相同的邻点，不失一般性，我们可以假设它们被赋予相同的颜色（比如 1）。令 K 为 GL 在颜色为 1 和 2 的顶点所诱导的子图中，包含 p 和 p' 的连通分支。对 G的某个子图 H，记作 $K = L(H;\ a_{j_1}, \ldots, a_{j_m})$，其中 $V(H) = \{v_{j_1}, \ldots, v_{j_m}\}$（其中 $v_i \in V(H)$）。由于 K 是二部的，由（2）可知 H是一个路径图，且 v_i 是两个端点之一。现在 K 是一个 D型 Dynkin 图。

令 $m + 1$ 为 K 的顶点数，使得 $K \cong D_{m+1}$ 和 $\nu = \lambda_{\max}(K) = 2\cos(\pi/(2m))$（见 [6, 第3.1 节.1]）。最小多项式 $f_{\mathbb{Q}}^{\nu}$ 的根为 $2\cos(k \cdot \pi/(2m))$，其中 k 与 $4m$ [18] 互素。特别地， $f_{\mathbb{Q}}^{\nu}$ 的根关于零对称，因此 $f_{\mathbb{Q}}^{\nu}$ 是偶数。由引理 4.3 可知 GL 是二部的，从而证明得证。 □

5 Hoffman 可着色性与例外图

本节中，我们证明定理2。1 针对例外图的情形。首先，我们证明可以将讨论范围限定在最小特征值等于 -2 的情形。

定理 5.1. 不存在非平凡*Hoffman*可着色例外图 G 满足 $\lambda_{\min}(G) > -2$。

证明。 根据 [9, 定理 2.3。20] 共有 573 个最小特征值大于−2的例外图，列于 [9, 表 A2]。其中，20 个有六个顶点，110 个有七个顶点，443 个有八个顶点。七个和八个顶点的图的最大和最小特征值列于 $110 + 443$ 表 A [9, 2], ，由此可知，只有一个七个顶点的图（即 Dynkin 图 E_7）和一个八个顶点的图（即 Dynkin 图 E_8）具有整数霍夫曼界，但这些图都是二部的。20 个六个顶点的图见 [9, 图 2。4], 在这种情况下也可以验证，恰有一个图具有整数霍夫曼界（即 Dynkin 图 E_6），但它同样是二部的。由于 Hoffman 可着色图具有整数霍夫曼界，我们得出结论：所有 G 满足 $\lambda_{\min}(G) > -2$ 的霍夫曼可着色例外图都是二部的，因此是平凡 Hoffman 可着色的。

□

定理 5.1 也可以用另一种方法证明；根据 [9, 定理 2.3。20] 或 [9, 第3节。7] 中的评注可知，具有 $\lambda_{\min}(G) > -2$ 的例外图至多有八个顶点；根据 [2, 第5节。1] 中的结果可知，除完全图和鸡尾酒会图外，至多有八个顶点的连通 Hoffman 可着色图只有一个，即图 1中的图。该图不是例外图，因为它是图 2中的图的线图。

为了概述 我们证明例外图情形时余下部分所考虑各情形的顺序 1
定理的情形 2 1.1，有如下结果。

引理 5.2。 例外图 G 满足以下条件中的至少一项：

- G 是一个锥图，
- $G \in \mathcal{S}_8$ （与某个八个顶点的图的线图切换等价的图类），
- G 是类型 *(b)* 或 *(c)* 的极大例外图的诱导子图。

证明。 设 H 是包含 G 作为诱导子图的极大例外图。若 H 属于类型 (b) 和 (c)，则最后一种情况成立。否则， H 属于类型 (a)，因此 H 是一个锥图。若 G 包含锥顶点，则 G 本身就是一个锥图。若 G 不包含锥顶点，则 $G \in \mathcal{S}_8$ 由命题 3.10.

□

注意， $\mathcal{S}_8$ 根据定理 3.14，包含所有正则例外图。本节余下部分安排如下。首先，对非平凡霍夫曼可着色的正则例外图和例外锥图进行分类（由于定理 3.7所述的联系，我们将它们放在一起讨论）。之后，我们对 $\mathcal{S}_8$中的非平凡霍夫曼可着色非正则图进行分类。正如备注5.13所示，这其中不包括任何锥图。最后，我们对那些作为 43 个类型 (b) 或 (c) 的极大例外图之一的诱导子图、且不属于前述图类的非平凡霍夫曼可着色图进行分类。

5.1 正则例外图与例外锥图

我们对非平凡Hoffman可着色正则例外图和例外锥图进行了分类。随后，我们将对比率界为 3 的正则 Hoffman 可着色图进行更详细的研究，因为第 5.2 节需要这些结果。

5.1.1 Hoffman可着色例子的分类

以下结果表明，共有 174 个非平凡Hoffman可着色例外图，它们或者是正则图，或者是锥图。

定理 5.3. 每个正则非平凡*Hoffman*可着色例外图的比率界为 *3* 或 *4*。此外，下列结论成立。

- 恰好有 *17* 个比率界为 *3* 的正则非平凡*Hoffman*可着色例外图，其中有两个在色数分量意义下是极大的，即 M_{20} 和 M_{24}。换言之，这 *17* 个图中的每一个都是 M_{20} 或 M_{24} 的一个色数分量。

- 恰好有 *70* 个比率界$\widehat{}$*4* 的正则非平凡*Hoffman*可着色例外图，且其中每一个都是某个例外图 H 的一个色数分量，使得 $H \cong M_i$ 对某个 $i \in \{11, \ldots, 19, 26, \ldots, 29\}$成立。

- 恰好有 *87* 个非平凡*Hoffman*可着色例外锥图，其中 *13* 个在色数分量意义下是极大的，即 M_i 对于 $i \in \{11, 12, \ldots, 19, 26, 27, 28, 29\}$。换言之，这 *87* 个图中的每一个都是至少一个这样的 M_i的色数分量。

注意，定理 5.3 中的图 G 的 $\mathfrak{C}(G)$ 分别等于 $\{3\}$、$\{4\}$ 或 $\{1, 4\}$，这由命题 3.3 和定理 3.7 可得。由命题 3.8 以及定理 5.3 的证明可以清楚地看出，满足 $\mathfrak{C}(G) = \{1, 4\}$ 的非平凡Hoffman可着色例外图 G 是定理 5.3 中的 87 个图之一。然而，我们稍后才会看到，除定理 5.3 中的图之外，不存在 $\mathfrak{C}(G)$ 等于 $\{3\}$ 或 $\{4\}$ 的非平凡 Hoffman 可着色例外图。

为证明 T 定理 5.3，我们使用三个引理和一次计算。第一个引理使 th
e 归约从 锥到正则图变得明确。

$\widehat{}$**引理 5.4.** 设 G 是一个非空图，使得 G 是一个霍夫曼可着色例外锥图。则 G 要么是正则例外图，要么是八个顶点上的正则图的线图。此外，G 是 *Hoffman* 可着色的，且比率界为 *4*。

证明。由定理 3.7 可知，G 是一个正则的 Hoffman 可着色图，且 $\lambda_{\min}(G)$是$\widehat{}$的整数，因此特别有 $\lambda_{\min}(G) \in \{-1, -2\}$。若 $\lambda_{\min}(G) = -1$，则 G 和 G 是完全图（并非例外图），所以我们可以假设 $\lambda_{\min}(G) = -2$。根据定理 3.7，G 是比率界为 4 的 Hoffman 可着色图；此外，每个顶点都与 G 中每个其他颜色类的两个顶点相邻（但不与其自身颜色类中的顶点相邻），这一点由命题 3.3 可知。

我们声称 G是连通的。否则，由于每个顶点都与除自身颜色类之外的每个颜色类中的两个顶点相邻，G 必为两个大小相等的鸡尾酒会图的不交并。于是，G 上的锥图是 K_2的一个色数平衡广义线图，这与 G 上的锥图是例外图这一假设矛盾。因此，我们确实可以假设 G 是连通的。

现在，如果 G 不是例外的，那么它就是一个广义线图。回顾命题 3.13，可知此时 G 是鸡尾酒会图、正则图的线图，或双正则图的线图。第一种情况不可能，因为鸡尾酒会图没有大小为 4 的独立集。因此，G 是图 H 的线图，其中 H 是正则图或双正则图。设 C 是 G的一个霍夫曼颜色类，则 C 是一个大小为 4 的 2-正则独立集。注意，C 对应于 M 中一个大小为 4 的匹配（即一组两两不相交的边），且根据 2-正则性，H 的每一条其他边的两个端点都属于 $\bigsqcup_{e \in M} e$。现在 H 有八个顶点。如果 H 是双正则图，那么 M 的二分部大小均为 4，这表明 H 是正则图。

□

我们有以下引理，它结合了命题3。3 和定理 3。14。

引理 **5.5.** 每个 *Hoffman* 可着色正则例外图 G 都满足以下条件之一 *g:*

- G 比率界为 *4*，且是至少一个 *Chang* 图（定义见例 3.11）的诱导子图，

- G 具有比率界 *3*，且是 *Sch ¨afli* 图（在例3.12中定义）的诱导子图。

证明。 根据命题 3.3， G 的比率界是一个整数，且整除G的顶点数。由定理 3.14即可得出结论；上述内容排除了 G是第三层的图，以及 G是一个有 22 个顶点的第一层图。 □

为证明定理 5.3，我们使用以下定义。若 G是任意一个正则图，则霍夫曼独立集图 $HC(G)$ 是由 G的霍夫曼独立集构成的交图（可能为空）： $HC(G)$ 的顶点是 G的霍夫曼独立集；若两个霍夫曼独立集相交，则它们在 $HC(G)$ 中相邻。以下引理说明了霍夫曼独立集图的重要性。

引理 5.6. 设 G是一个非空正则图。那么， $HC(G)$中大小至少为二的独立集，与 G 的所有非空诱导子图 H 上的 *Hoffman* 着色一一对应，且这些诱导子图具有与 G相同的比率界和最小特征值。此外，在此对应关系中， $HC(G)$ 中的某个极大独立集所对应的 G的正则诱导子图，其色数分量是 G 的一个非空正则、*Hoffman* 可着色诱导子图 H ，且其比率界和最小特征值均相同。

证明。 记 $\nu = -\lambda_{\min}(G)$，并记 r 为 G 的比率界。则若 C 是G 中大小为 r 的独立集， C 之外的每个顶点恰好与 C 的 ν 个顶点相邻。

设 $\{C_1, \ldots, C_m\}$ 与 $m \geq 2$ 为 $HC(G)$ 中的一个独立集。则 C_1，....., C_m 是 G 中两两不交的 Hoffman 余团。设 H 为 G 在 $\bigsqcup_{i=1}^{m} C_i$ 上的诱导子图。由于对每个 i， C_i 都是 G 中的霍夫曼独立集，故 C_i 之外的每个顶点恰好有 C_i 的 ν 个顶点。现在 H 是正则图；每个顶点与 $(m-1)\nu$ 个其他顶点相邻（在除其自身颜色类之外的每个颜色类中有 ν 个顶点）。因此， $\lambda_{\max}(H) = (m-1)\nu$。关于最小特征值，注意由命题 3.1 可知 $\lambda_{\min}(H) \geq -\nu$。我们现在有

$$h(H) = 1 - \frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)} \geq 1 - \frac{(m-1)\nu}{-\nu} = m.$$

特别是， $\{C_1, \ldots, C_m\}$ 是 H 的 Hoffman 着色， $\lambda_{\min}(H) = -\nu$，根据命题 3.3， H 的比率界等于 $|C_1|$，这也等于 G的比率界。

反过来，设 H 是 G 的一个非空正则诱导子图，满足 $\lambda_{\min}(H) = -\nu$ ，且比率界为 r；再设 $\{C_1, \ldots, C_m\}$ 是 H 的一个 Hoffman 着色，其中 $m \geq 2$。应用命题 3.3。于是，每个 C_i 不仅是 H 中的霍夫曼独立集，也是 G 中的霍夫曼独立集。此外，由于 $\{C_1, \ldots, C_m\}$ 是 H 的一种着色，各集合 C_i 两两不相交。由此可知， $\{C_1, \ldots, C_m\}$ 是 $HC(G)$ 中的独立集。进一步，设 $\{C_1, \ldots, C_m, \ldots, C_M\}$ 是 $HC(G)$ 中包含 $\{C_1, \ldots, C_m\}$的一个极大独立集。于是， H 是 G 在 $\bigsqcup_{i=1}^{M} C_i$ 上的诱导子图的色数分量，证毕。 □

定理 5.3 的证明。注意，Chang 图的比率界为 4（并且还有 $L(K_8)$），而 Schl¨afli 图的比率界为 3。结合定理 3.7 以及引理 5.4、5.5 和 5.6，我们看到，为了证明定理 5.3，只需确定 Schl¨afli 图、Chang 图和 $L(K_8)$ 的霍夫曼独立集图中的（极大）独立集。我们还必须考虑 $L(K_8)$，因为尽管其诱导子图并非例外的（因为它们也是线图），但其诱导子图上的锥（根据定理 3.7，它们同样具有最小特征值 -2 ）可能是例外的。确定一个图中的所有（极大）独立集是计算机代数系统中的标准过程。为了运行计算，我们使用 SageMath 10.6 [17]。我们使用算法1。应用该算法后，我们可以通过检查所得图是否包含 31 个禁用诱导子图中的任何一个，来判断它是否为广义线图（见 [9, 定理 2.3。18]）。

应用算法1处理施läfli 图¨后得到以下结果。共返回 21 个比率界为 3 的非平凡霍夫曼可着色正则图，其中 4 个是

算法1： 计算（极大）正则非平凡霍夫曼可着色诱导子图

输入： 一个非空正则图 G;

输出： 一个霍夫曼可着色 列表，包含（极大）正则非平凡霍夫曼可着色 G 的诱导子图，其比率界和最小特征值与 G 相同;

通过确定 G 的所有霍夫曼独立集，构造霍夫曼独立集图 $HC(G)$（$HC(G)$) 的顶点，并确定不相交霍夫曼独立集的对（ HC 的边 $HC(G)$);

将 *HoffmanColorable* 初始化为空列表;

对于 $HC(G)$ 中的每个（极大）独立集 (max)coc **执行**

  考虑由以下顶点集合诱导出的 H 的诱导子图：该集合由.....的并集构成 列在 *(max)coc* 中的 G 的霍夫曼独立集;

  检查 H 是否与***Hoffman***可着色中已有的任何图同构;

  如果不是，则将 H 添加到***Hoffman***可着色中。

返回列表HoffmanColorable。

度至少为 3 的六顶点正则图（即$K_3 \square K_2$[1]、 $K_{3,3}$、 $CP(3)$ 和 K_6），其余 17 个是正则Hoffman可着色例外图。对于在色数分量意义下极大的诱导子图，共返回三个图，即施läfli 图本身（¨）、图 5 中用边切换图表示的图（M_{24}），以及M_{20}），和 $L(K_6)$。由于 $L(K_6)$ 是线图，因此其色数分量也只能是线图，故定理5.3。

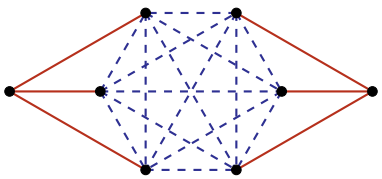


图5： M_{20}的边切换图示。

将算法1 应用于 $L(K_8)$以及三个 Chang 图，可得到 87 个比率界为 4 的正则非平凡Hoffman可着色图。其中，17 个是线图，即八个顶点且度至少为 3 的 17 个正则图的线图（参见 [16, 第 3]章），其余 70 个图是正则非平凡Hoffman可着色例外图。对于在色数分量方面极大的正则非平凡Hoffman可着色图，我们得到 $L(K_8)$及其三个切换伴图（即 Chang 图），以及 $C_3 \sqcup C_5$ 的线图及其八个切换伴图（见图6）。我们注意到，有两个图在一个 Chang 图中是极大的，但在另一个 Chang 图中并非如此。

根据定理3.7、定理3.14和命题 3.10，这 87 个比率界为 4 的正则非平凡霍夫曼可着色图的锥也都是非平凡霍夫曼可着色的，并且是 E_8-可表示的。由于锥顶点构成一个新的颜色类，我们还考虑与 $L(K_8)$ 的霍夫曼独立集图以及三个 Chang 图中的 2-独立集相对应的二分图的锥： C_8和 $2 \cdot C_4$的锥。这样便得到 89 个非平凡霍夫曼可着色锥图。其中两个是广义线图，即 $2 \cdot C_4$（也就是 $L(K_2, 3)$）的锥和 $2 \cdot CP(3)$（也就是 $L(K_2, 4)$）的锥。剩余的 87 个图是非平凡霍夫曼可着色的例外锥图。这些锥图中的极大图，是比率界为 4 的正则霍夫曼可着色图中的极大图的锥。 $L(K_8)$ 和三个 Chang 图的锥

[1] K_3 或 K_2的笛卡尔积，也称为 2×3-网格图、棱柱图或 $L(K_{2,3})$。

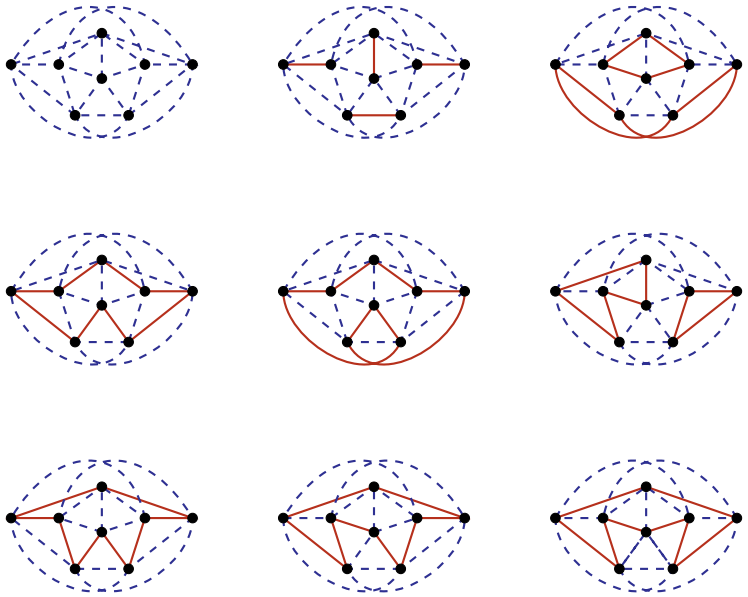


图6： $L(C_3 \sqcup C_5)$及其八个切换伴图的边切换图示；这些锥所对应的九个图为 M_{11}、.....、 M_{19}。这八个切换伴图是正则例外图，标识符为 [9,第 4] 章中的 113–120。

图是 M_{26}、...、 M_{29}，而与 $L(C_3 \sqcup C_5)$ 切换等价的九个图的锥是M_{11}、...、 M_{19}。 □

第二层恰有 21 个正则例外图（见定理 3.14），由定理 5.3 可知，其中恰有 4 个不是 Hoffman 可着色的。由于这 21 个图可通过其谱加以辨认（见 [9, 表 A3。3]），很容易找出这 4 个图；它们的标识符为 165、168、169 和 175。

类似地，在阶可被 4 整除的第一层 81 个正则例外图中[9, 表 A3], ，根据定理 5.3，只有 11 个不是 Hoffman 可着色的。利用 E_8第一层正则例外图在 [9, 表 A3], 中的表示可知，它们的标识符为 7、8、10、36、41、42、53、55、56、65 和 66。其余 70 个阶可被 4 整除的第一层正则例外图都是 Hoffman 可着色的。

5.1.2 再探第二层的正则 Hoffman 可着色图

本节将重新探讨第二层的正则 Hoffman 可着色图。这有两个重要原因。首先，本节的结果为证明定理 5。3在第二层的正则例外图这一情形下提供了另一种方法。其次，这里给出的结果更强，也是第 5.2 节证明所必需的。尤其是，我们不仅要考虑第二层的正则例外图，还要考虑一些相关的正则广义线图；定义 $\mathcal{G}_3$ 为满足 $\lambda_{\min} = -2$ 且比率界为 3 的正则图集合。

本节中的方法可以描述为基于反复删除大小为 3 的独立集（它们是比率界为 3 的图中的 Hoffman 余团）。注意，集合 $\mathcal{G}_3$ 在删除大小为 3 的独立集这一运算下并不封闭；例如，从 6-圈中删除一个大小为 3 的独立集会得到一个最小特征值大于 -2的图。将集合 $\mathcal{G}_3'$ 定义为在 n 个顶点上、满足 $\lambda_{\min} \geq -2$ 和 $2n = 3(k+2)$ 的 k-正则图的集合。如果 G 是一个正则图，且具有

$\lambda_{\min} = -2$，则 $2n = 3(k+2)$ 等价于 G 具有比率界 3。因此，$G \in \mathcal{G}_3$ 当且仅当$G \in \mathcal{G}'_3$ 且 $\lambda_{\min} = -2$。

与 $\mathcal{G}_3$ 不同，较大的集合 $\mathcal{G}'_3$ 在移除一个 3-独立集后仍保持封闭，以下结果还说明了其他性质。

引理 5.7. 设 $G \in \mathcal{G}'_3$，且 C 是 G 中一个大小为 *3* 的独立集。若 G 不是阶为 *3* 的空图，则 $G \in \mathcal{G}_3$，C 是一个霍夫曼独立集，并且 $G \setminus C \in \mathcal{G}'_3$。

证明。设 $G \in \mathcal{G}'_3$，且 C 是 G 中一个大小为 3 的独立集。若 G 没有边，则 $k = 0$，因此由 $2n = 3(k+2)$ 可知 $C = V(G)$。现在 $G \cong 3 \cdot K_1$。

反之，若 G 非空，则我们可以对 C 应用比率界：我们知道 $3h(G) \leq n$，根据 $2n = 3(k+2)$，这等价于 $h(G) \leq 1 + k/2$，而这又等价于 $\lambda_{\min} \leq -2$。由此可得 $\lambda_{\min} = -2$（所以 $G \in \mathcal{G}_3$），并且 C 是一个霍夫曼独立集。现在 C 是 2-正则的。那么 $G \setminus C$ 是一个有 $n-3$ 个顶点的 $(k-2)$-正则图。由 $2n = 3(k+2)$ 和命题 3.1 可知 $G \setminus C \in \mathcal{G}'_3$。 □

我们确定集合 $\mathcal{G}_3$ 和 $\mathcal{G}'_3$。

引理 5.8。 集合 $\mathcal{G}_3$ 由第二层的*21* 个正则例外图以及下列六个图的线图组成：K_6、$CP(3)$、$K_{3,3}$、$K_3 \square K_2$、C_6和$K_{2,6}$。集合$\mathcal{G}'_3 \setminus \mathcal{G}_3$ 由两个图 $3 \cdot K_1$ 和 $2 \cdot K_3$组成。

注意，$3 \cdot K_1 \cong L(3 \cdot K_2)$和 $2 \cdot K_3 \cong L(2 \cdot K_3) \cong L(2 \cdot K_{1,3})$也分别是（二）正则图的线图。

证明。设 G 是一个具有 n 个顶点且 $\lambda_{\min} \geq -2$ 和 $2n = 3(k+2)$的 k-正则图 .

首先假设 G 是不连通的。由于 G 的每个连通分支都是 k-正则图，因此有 $n \geq 2(k+1)$。结合 $2n = 3(k+2)$，我们得到要么$(n, k) = (3, 0)$，要么$(n, k) = (6, 2)$，从而要么 $G \cong 3 \cdot K_1$，要么 $G \cong 2 \cdot K_3$。这些图的最小特征值为 -1，因此不属于 $\mathcal{G}_3$。

现在假设 G 是连通的。如果 G 是例外的，那么根据定理 3.14，它属于第二层，且 $G \in \mathcal{G}_3$。如果 G 是广义线图，我们就应用命题 3.13。如果 $G \cong CP(m)$，那么 $n = 2m$ 且 $k = 2m - 2$，因此 $2n = 3(k+2)$ 是不可能的。反之，如果对于正则图 H，有 $G \cong L(H)$，那么可以证明，$2n = 3(k+2)$ 等价于 $|V(H)| = 6$。六个顶点上有五个连通正则图（即 K_6、$CP(3)$、K_3、3、$K_3 \square K_2$ 和 C_6），它们的线图属于 $\mathcal{G}_3$。最后，如果对于双正则图 H，有 $G \cong L(H)$，那么可以证明，$2n = 3(k+2)$ 等价于 H 的两个二部划分类大小的调和平均数为 3；也就是说，$2/(1/n_1 + 1/n_2) = 3$，其中 n_1 和 n_2 是这两个划分类的大小。由于可以假设 H 是非正则的，因此可得 $n_1 = 2$ 且 $n_2 = 6$。由于 H 是连通的，我们现在知道 $H \cong K_{2,6}$。它的线图也属于 $\mathcal{G}_3$。 □

注 5.9。 由引理5。8 可知，所有来自 $\mathcal{G}'_3$ 的图都是 Schläfli 图的诱导子图；对于例外图，这可由定理3。14 得出；对于线图，则可从图 4 中看出。此外，可以验证 $\mathcal{G}'_3$ 中的图可由其谱唯一确定（对于例外图，这可由 [9, 表 A33]得出）。

对于每个图 $G \in \mathcal{G}_3$，我们使用计算机代数系统（例如 SageMath [17]）生成所有大小为 3 的独立集 C，并利用谱在 $\mathcal{G}_3$ 中识别所得的图 $G \setminus C$（注意，根据引理 5.7，我们不必考虑 $\mathcal{G}'_3 \setminus \mathcal{G}_3$ 中的图，因为它们没有大小为 3 的独立集）。由此得到图 7 的示意图，但未考虑 C 是否为霍夫曼颜色类这一区别。要确定这一区别，只需检查与大小为 3 的独立集 C 对应的连线是否属于图 7 中通向 $\emptyset$ 的向下路径。这样做是成立的，因为 G 的霍夫曼着色对应于从 G 到 $\emptyset$ 的向下路径，而使用 C 的 G 的霍夫曼着色（从而 C 是霍夫曼颜色类）对应于从 G 到 $\emptyset$ 、并使用从 G 到 $G \setminus C$ 的连线的向下路径。

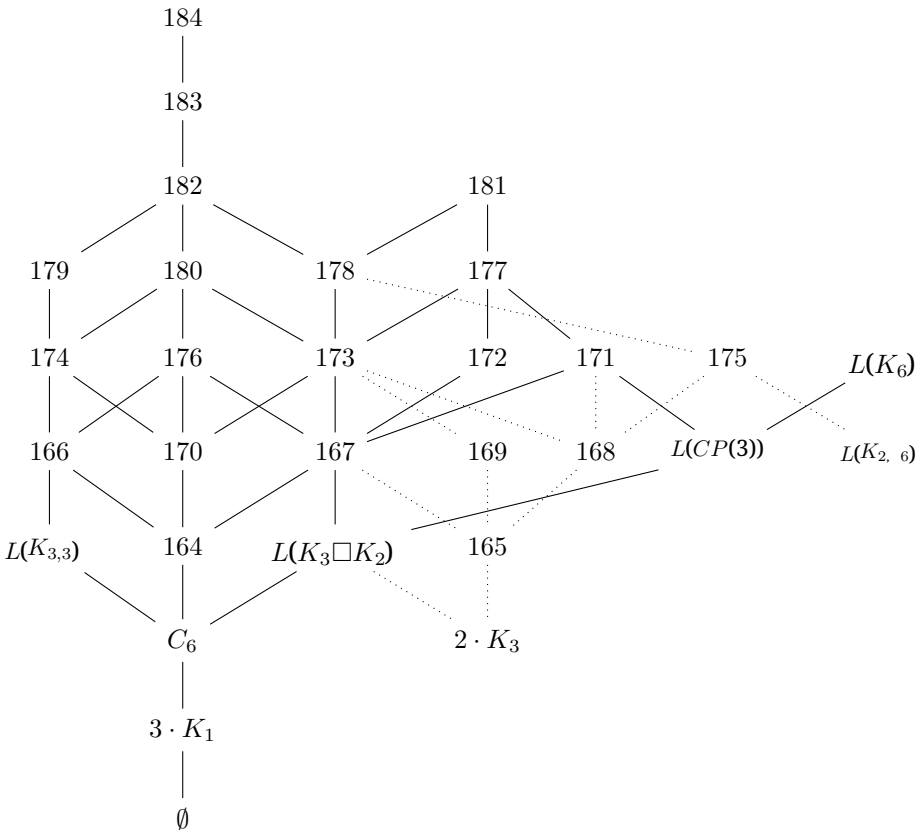


图 7：图 $\mathcal{G}_3' \cup \{\emptyset\}$中的示意图。数字 164–184 指的是 [9, 表 A3]中用于第二层 21 个正则例外图的标识符。位于自底向上、从 0 开始计数的第 i行的图有 $3i$ 个顶点。完整直线表示下层的图可以通过从 G 上层的图中移除一个大小为 3 的霍夫曼颜色类 G 得到。点线表示可以通过移除一个大小为 3、但不是霍夫曼颜色类的霍夫曼独立集来得到一个图。

因此，标识符为 165、168、169 和 175 的图（如图7 所示）不是 Hoffman 可着色的（如前所述）。图 $L(K_{2,6})$ 出于同样的原因也不是 Hoffman 可着色的。图 $2 \cdot K_3$ 是 Hoffman 可着色的，但不能使用大小为 3 的颜色类。

图7还清楚地展示了定理 5.3 的证明中三个极大的图； $L(K_6)$、标识符 181 对应的图（即 M_{20}），以及标识符 184 对应的图（即施莱夫利图，$\ddot{}M_{24}$）。

图 7 揭示了关于水平轴的镜面对称性：若 S 表示施莱夫利图，则 S 在 X 上的诱导子图对应于 S 在其补集 $V(S) \setminus X$上的诱导子图。特别地，Hoffman 可着色诱导子图 $L(K_6)$、M_{20}和 M_{24} 的极大性，分别对应于 $L(K_{2,\ 6})$、 $2 \cdot K_3$和 $\emptyset$ 中不存在大小为 3 的团。

5.2 与八个顶点的图的线图切换等价的非正则图

本节讨论属于 $\mathcal{S}_8$ 的非平凡霍夫曼可着色非正则图。

定理 5.10. 在 $\mathcal{S}_8$ 中，非平凡*Hoffman*可着色例外图中恰有 *35* 个是非正则的。其中，按色数分量而言，有四个是极大的，分别为 M_5、 M_{22}、M_{23} 和 M_{25}。换句话说，这 *35* 个图各自都是 M_5、 M_{22}、M_{23} 或 M_{25} 的一个色数分量。

正如本节中的论证所表明的，这35个图 G不是锥图，并且具有$\mathfrak{C}(G) = \{3, 4\}$（见备注5.13 和5.15）。为证明定理5.10，我们使用以下结果。

引理 5.11。（1）设 $G \in \mathcal{G}_3$ 为非平凡霍夫曼可着色的，且 C 为 G的一个霍夫曼颜色类。则图 $H = (G)_C$ 满足以下性质：

- H 是非平凡霍夫曼可着色的，
- H 的最小特征值为 -2，
- H 是一个例外图，
- $H \in \mathcal{S}_8$，
- H 是非正则的。

(2) 反过来，任何满足上述五个条件的图 H 都可以通过这种方式得到，也就是说$H \cong (G)_C$ 对于某个非平凡霍夫曼可着色的 $G \in \mathcal{G}_3$，其霍夫曼颜色类为 C。

(3) 对于 $i = 1, 2$，设 $G_i \in \mathcal{G}_3$ 是非平凡霍夫曼可着色的，并设 C_i 是 G_i 的一个霍夫曼颜色类。则下列条件等价：

(i) $(G_1)_{C_1} \cong (G_2)_{C_2}$，$(ii)$ 存在一个图同构 $\varphi : G_1 \to G_2$，满足 $\varphi(C_1) = C_2$，(iii) $G_1 \cong G_2$ 且 $G_1 \setminus C_1 \cong G_2 \setminus C_2$。

引理 5.11 中非平凡霍夫曼可着色图的一个例子见图 8。

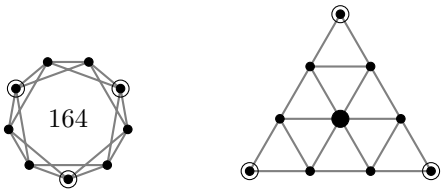


图 8：引理 5.11 （1）应用于来自 [9, 第4]章的标识符 164 的正则例外图：右侧的图是非平凡霍夫曼可着色的。所使用的独立集由圆圈标出的点表示，添加的锥顶点由较大的点表示。

为证明引理 5.11 的第二部分，我们使用下面的结果，其表述与比率界（定理 3.2）非常相似。

引理 5.12。 设 $G \in \mathcal{S}_8$。如果 C 是 G中的一个独立集，那么

$$|C| \leq 4.$$

在等号成立的情况下， C 是 *2*-正则的。

证明。 为简洁起见，我们用 ij 表示边 $\{i, j\}$。设 $\{E_1, E_2\}$ 是 H 的边集的一个划分，使得 $L(H)_{E_1} \cong G$。我们区分两种情况： C 仅包含来自一个边集的边，或 C 包含来自两个边集的边。

首先，假设 C 仅包含来自一个边集的边，不妨设为 E_1。那么 C 是 H中的一个匹配。由于 H 有八个顶点， C 的大小至多为 4。若取等号，则 C 是 H的一个完美匹配。若 $e = ij \in E(H) \setminus C$，则记 c_i， c_j 为 C中分别包含 i， j的元素。若 $e \in E_1$，则在 G中， e 与 c_i 和 c_j相邻。若 $e \in E_2$，则在 G中， e 与 C的另外两个元素相邻。由此可知， C 是 2-正则的。

接下来，假设 C 包含一条来自 E_1 的边和一条来自 E_2的边。那么它们相交。不失一般性，假设 $13 \in C \cap E_1$ 和 $23 \in C \cap E_2$。如果 C还包含另一条边 ij，不失一般性地，假设它来自 E_1，那么 ij 与13不相交，而与23相交。不失一般性地，设 $ij = 24$。现在， C 不能包含 E_1的任何其他边。假设 C 包含 E_2的另一条边ij 。用类似的推理可知， $ij = 14$。同样， E_2 的其他边都不能包含在C中。因此， C 的大小至多为 4。如果其大小为4，那么令 e 为 $E_1 \cup E_2$ 中任意一个不属于 C的元素。如果e 不与顶点1、2、3、4中的任何一个关联，那么在 G中，它与 C中不属于和 e相同边集的那两条边相邻。如果 e 与 C 相交于一个顶点，不失一般性地设该顶点为 $e = 1j$，那么 e 在 G 中与13和23相邻（若 $e \in E_1$），或与14和24相邻（若 $e \in E_2$）。最后，如果 e 与该圈相交于两个顶点，那么不失一般性地， $e = 12$ 和 e 分别与 C中的四条边相交。于是， e与 C 中和 e属于同一边集的那两条边相邻。在每种情况下， e都恰好与 C中的两个顶点相邻，因此 C 是2-正则图。 □

注 5.13。 注意，引理 5。12 表明，非平凡霍夫曼可着色的锥图不可能属于 $\mathcal{S}_8$；根据定理 C 3。7，这类图将有一个大小为 4 的独立集 C，但它不可能是 2-正则的，因为锥顶点与 C 中的四个顶点都相邻。

现在我们可以证明引理 5。11。

引理 5。11 的证明。 (1) 设 $G \in \mathcal{G}_3$ 是非平凡霍夫曼可着色的，其霍夫曼颜色类为$\frown C$。设 $H = (G)_C$。

我们首先证明 $H \in \mathcal{S}_8$。如注 5。9 中所述，我们知道 G 是 Schl¨afli 图的诱导子图。Schl¨afli 图上的锥图可以通过关于顶点集$L(K_8)$ 进行 Seidel 切换得到 $L(K_6)$（见例 3。12），因此 $\widehat{\text{Schl¨afli}}$ 图上的锥属于 $\mathcal{S}_8$。于是 $G \in \mathcal{S}_8$，从而 $H = (G)_C \in \mathcal{S}_8$。

现在证明 H 的最小特征值为 -2，且 H 是例外的。由于 $H \in \mathcal{S}_8$，根据命题 3.10，我们已知 $\lambda_{\min}(H) \geq -2$。令 C' 为 G的一个霍夫曼颜色类，且与 C 不相交（它存在，因为 C 是 G的一个 Hoffman 着色的一部分）。根据命题 3.3，关于颜色类 C 和 C'， G 的双色分量 D 必与 C_6 同构（因为 C_6 是唯一一个有六个顶点的 2-正则二分图）。接着注意到，$\widehat{\frown H}$ 现在包含 $(D)_C$ 作为诱导子图，且 $(D)_C \cong \mathcal{F}_7$。由于 $\mathcal{F}_7$ 是例外的， H 也同样是例外的（注意，容易看出 H 是连通的）；又由于 $\lambda_{\min}(\mathcal{F}_7) = -2$，根据命题 3.1， $\lambda_{\min}(H) = -2$。

最后，我们证明 H 是非正则的且非平凡霍夫曼可着色。为此，我们给出 H 的佩龙特征向量 x。定义 x 为一个向量：它在 G 的锥顶点 u 处取值 3，在 C 的顶点处取值 1，在 $V(G) \setminus C$ 中的顶点处取值 2。记 G 的度为 $k = \lambda_{\max}(G)$。利用 $|V(G)| = \frac{3}{2}(k+2)$（这意味着 u 在 H 中与 $V(G) \setminus C$ 中的 $3k/2$ 个顶点相邻），以及 C 中的每个顶点在 H 中恰好与 $V(G)\setminus C$ 中的 $k/2$ 个顶点相邻，且 $V(G)\setminus C$ 中的每个顶点在 H 中恰好与 $V(G)\setminus C$ 中的 $k-2$ 个顶点、 C 中的 1 个顶点以及 u 相邻，可以验证 x 是 H 的特征向量，对应特征值 k。由于 x 是正特征向量，根据定理 2.2，它必定是佩龙特征向量 [6, 。1]。现在我们知道 H 不是正则的（因为 x 不是所有分量都相等的向量）。我们还知道 $\lambda_{\max}(H) = k$。现在， G 和 H 的最大特征值和最小特征值相同，因此（由于 G 是 Hoffman 可着色的），将霍夫曼界 (1) 应用于 H，得到 $\chi(H) \geq h(H) = h(G) = \chi(G)$。因此，要证明 H 是 Hoffman 可着色的，我们必须证明 $\chi(H) \leq \chi(G)$。这成立，因为使用 C 作为一个颜色类的 G 的任意最优着色，都可通过将 G 的颜色类 C 替换为 H 的独立集 $C \cup \{u\}$，导出 H 的着色，且颜色数相同。现在 H 是 Hoffman 可着色的。由于 H 是

非正则且非二部的（因为 G 是非二部的，并且 G 和 H 的色数相同），我们知道 H 是非平凡霍夫曼可着色的。

(2) 令 $H \in \mathcal{S}_8$ 为非正则、非平凡霍夫曼可着色且例外的，并假设 $\lambda_{\min}(H) = -2$。令 D 为 H的一个双色分量，并令 K 为 D的一个连通分支。由 (3) 可知， $\lambda_{\max}(K) = 2$ （因此 K 是类型为 C、 W 或 $\mathcal{F}$的史密斯图）。然而，我们还知道 $K \in \mathcal{S}_8$。根据引理 5.12， K 中的独立集大小至多为 4；若大小为 4，则它必为 2-正则。

现在，若 K 属于类型 C，则它必为 C_4 或 C_6，因为较大的偶圈含有大小至少为 5 的独立集。若 K 属于类型 W，则它必为 W_6，因为 W_7 和 W_n 对于 $n \geq 9$ 都含有大小至少为 5 的独立集，而 W_5 和 W_8 含有大小为 4 但非 2-正则的独立集。最后，若 K 属于类型 $\mathcal{F}$，则它必为 $\mathcal{F}_7$，因为 $\mathcal{F}_8$ 和 $\mathcal{F}_9$ 含有大小为 5 的独立集。综上， K同构于以下某个史密斯图，其中列出相应的佩龙特征向量，并以分号分隔两个二部类（另见图3）：

– 4-圈 C_4，其特征向量为 (1, 1; 1,1);– 6-圈 C_6，其特征向量为 (1, 1, 1; 1, 1, 1);– 8-圈 C_8，其特征向量为 (1, 1, 1,1; 1, 1, 1, 1);– 图 W_6，其特征向量为 (2, 1, 1; 2, 1, 1);– 图 $\mathcal{F}_7$，其特征向量为 (3, 1, 1,1; 2, 2,2)。

现在，如果 $D = K$ 是连通的，它可以是这五种情况中的任意一种。如果 D 不连通，那么根据引理 5.12 以及上面关于 K, D 的五种情况，必定是两个 4-圈的 $2 \cdot C_4$ 不交并。此时正特征向量空间由以下向量组成：(1,1, a, a;1, 1, a, a)，其中 $a \in \mathbb{R}_{>0}$。

若 x 是 H的佩龙特征向量，那么根据分解定理（定理3.4）， x在 H的所有二色分量上限制为正特征向量。由于 H 被假设为非正则的，我们知道 x 不是常向量，这意味着 H必定包含 $2 \cdot C_4$（使得 $a \neq 1$）， W_6，或 $\mathcal{F}_7$ 作为二色分量。下面分情况讨论。

– 假设 H 包含 $2 \cdot C_4$ 作为二色分量，使得 x 在$2 \cdot C_4$ 上的限制为(1, 1, a, a; 1, 1, a, a)，其中 $a > 0$ 满足 $a \neq 1$。令 I为$2 \cdot C_4$的一个霍夫曼颜色类，则 x 在 I上的限制为(1, 1, a, a)。若此时 D' 是 H的一个二色分量，且包含 I 作为一个二部类，那么由于 x 必须限制为 D'的一个正特征向量，唯一的可能是 D' 与 $2 \cdot C_4$同构。现在存在 H 的一种着色（以I作为一个颜色类），使得每个颜色类的大小均为4，并且 x 在每个颜色类上的限制均为(1, 1, a, a)。注意，根据 $2 \cdot C_4$的结构，每个被 x 赋予 a 的顶点只与同样被 x赋予 a 的顶点相邻。这意味着 H 是不连通的，这与 H 是例外的相矛盾。

– 接下来，假设 H 包含一个双色分量 W_6 。按照上述类似的推理，现在 H 必须有一种霍夫曼着色，使得每个颜色类的大小均为 3，并且x 在每个霍夫曼颜色类上的限制都是 (2, 1, 1)。根据 W_6的结构，每个满足 $x(v) = 2$ 的顶点 v，都与其自身颜色类以外的每个颜色类中的所有顶点相邻；而每个满足 $x(v) = 1$ 的顶点 v ，都与其自身颜色类以外的每个颜色类中唯一满足 $x(u) = 2$ 的顶点 u 相邻。特别地，满足 $x(v) = 1$ 的顶点集合 v 是 H 中的一个大小为 $2\chi(H)$的独立集。由引理 5.12可知，$2\chi(H) \leq 4$ ，因此$H \cong W_6$ 是二部的，这与 H 是非平凡霍夫曼可着色的相矛盾。

– 最后，假设 H 包含 $\mathcal{F}_7$ 作为一个双色分量。令 I 为 $\mathcal{F}_7$ 中大小为 4 的霍夫曼颜色类。则 x 限制在 I 上为 (3，1、1，1)。如果 D' 是一个包含 I 的双色分量，那么 D' 必须与 $\mathcal{F}_7$ 同构。因此， H 存在一种霍夫曼着色，其中 I 是一个颜色类，其余每个颜色类的大小均为 3，并且对于每个

$v \in V(G) \setminus I$。根据 $\mathcal{F}_7$ 的结构， I 中满足 $x(u) = 3$ 的唯一顶点 u 与 $V(G) \setminus I$ 的每个顶点都相邻； C 中的每个顶点：$= I \setminus \{u\}$ 都恰好与每个大小为 3 的颜色类中的一个顶点相邻；大小为 3 的颜色类中的每个顶点在 C 中恰好有一个邻点，在其他每个颜色类中都有两个邻点（因为唯一一个在六个顶点上具有常数特征向量且最大特征值为 2 的二分图是 C_6）。

考虑由 H_C 从 H 通过相对于 C 的 Seidel 切换得到的图。根据上文所述的 H 的结构，顶点 u 必须是一个全邻顶点。令 G 为图 $(H_C) \setminus u$，即 $\widehat{\ }$，从而 $H = (G)_C$。我们断言，G 是一个正则的、非平凡霍夫曼可着色的图，其比率界为 3，最小特征值为 -2，且 C 是 G 的一个霍夫曼颜色类。

为证明这一点，考虑 γ 的着色：它由 H 的 Hoffman 着色通过将 I 替换为 C 得到（这也表明 $\chi(G) \leq \chi(H)$）。我们证明 γ 是一个 Hoffman 着色。

根据上文所述的 H 相对于 H 的 Hoffman 着色的结构，现在 γ 的每个颜色类都包含三个顶点，并且 G 的每个顶点都与 γ 中除其自身所属颜色类外的每个颜色类中的恰好两个顶点相邻。因此， G 是 $(2\chi(H) - 2)$-正则的。
此外，注意到由于 $H \in \mathcal{S}_8$， $G \in \mathcal{S}_8$ 也成立，因此根据命题 3.10， $\lambda_{\min}(G) \geq -2$ 。现在我们有 $h(G) \geq 1 - (2\chi(H) - 2)/(-2) = \chi(H)$。结合霍夫曼界 (1)，我们得到 $\chi(G) \geq h(G) \geq \chi(H)$。通过对 G 进行 γ，我们必须处处取等，因此 G 是 Hoffman 可着色的， γ 是一种 Hoffman 着色，而 C 是 G 的一个 Hoffman 颜色类。现在，根据命题 3.3， G 的比率界为 3，且最小特征值为 -2 。由于 G 和 H 具有相同的色数，并且 H 不是二部的（因为 H 是非平凡霍夫曼可着色的），所以 G 也不是二部的。由于 G 的比率界不等于 $-\lambda_{\min}(G)$，我们知道 G 不是正则完全多部图。因此， γ 不是平凡的 Hoffman 着色，而 G 是非平凡霍夫曼可着色的。

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$(3) 我们首先证明 (i) 与 (ii) 等价。先假设 (i) 成立；令 $\psi : (G_1)_{C_1} \to (G_2)_{C_2}$ 为一个图同构。由于图同构保持佩龙特征向量，根据第 (1) 部分证明中所述的佩龙特征向量结构，我们知道 $\psi(u_1) = u_2$ (其中 $u_i\widehat{\ }$是 G_i中的锥顶点)，且 $\psi(C_1) = \psi(C_2)$。现在， ψ 诱导出一个图同构 $\varphi : G_1 \to G_2$，使得 $\varphi(C_1) = C_2$。反过来，同理，(ii) 中的同构 φ会诱导出 (i) 中的同构 ψ 。

现在我们证明 (ii) 与 (iii) 等价。固定一个特定的同构 $\varphi_0 : G_1 \to G_2$后，不失一般性，可以假设 G_1 和 G_2 相同。因此，设 $G \in \mathcal{G}_3$ 为非平凡霍夫曼可着色的。只需证明，G 的两个霍夫曼颜色类 C_1 和 C_2 在 Aut(G) 的作用下属于同一轨道，当且仅当 $G \setminus C_1 \cong G \setminus C_2$。注意，一个方向显然成立；如果对某个 $\varphi \in \text{Aut}(G)$，有 $\varphi(C_1) = C_2$，那么 φ 限制后即为从 $G \setminus C_1$到 $G \setminus C_2$ 的图同构。特别地，(ii) 推出 (iii)。此外，若 $n_1(G)$ 是 G的霍夫曼颜色类在 Aut(G) 下的轨道数，而 $n_2(G)$ 是形如 $G \setminus C$ 的图在同构意义下的数量，其中 G的一个霍夫曼颜色类为 C ，则 $n_1(G) \geq n_2(G)$。为证明 (iii) 推出 (ii)，只需证明对每个这样的 G， $n_1(G) = n_2(G)$。我们通过计算（使用 SageMath [17]）验证了这一点确实成立。证明完毕。

□

注 5.14。 引理 5.11的第一部分中的五个性质有些冗余。 5.1表明，性质 H 具有最小特征值 -2可由其他性质推出。或者，也可以将性质 H 是例外的弱化为性质 H 是连通的；事实上，在引理 5.11第 (2) 部分的证明中， H 的例外性仅用于排除非连通的情形。换言之， $\mathcal{S}_8$ 中的任何连通、非正则、非平凡霍夫曼可着色的广义线图都必须满足 $\lambda_{\min} > -2$，因此由定理 4.2 可知，这种图唯一的例子是图 1中的图。

注 5.15。由引理 5.11 的证明可知，对于引理 5.11 中的$\widehat{}$图 $H \cong (G)_C$ ， $\mathfrak{C}(H)$包含 3 和 4。事实上，可以看出 $\mathfrak{C}(H) = \{3,4\}$。考虑$\widehat{}$ H的任意霍夫曼着色，则由命题 3.8，包含锥顶点 u 的 G的颜色类必为 $C \cup \{u\}$，它构成一个大小为 4 的霍夫曼颜色类。对于其余颜色类，注意到根据引理 5.11、命题 3.3 和定理 3.4， $H \setminus (C \cup \{u\}) \cong G \setminus C$ 是一个比率界为 3、最小特征值为 -2 的正则图。因此，其余颜色类的大小都必须为 3，从而 $\mathfrak{C}(H) = \{3,4\}$。

我们现在可以证明定理 5.10。

定理 5.10 的证明。我们应用定理 5.1 和引理 5.11（另见注 5.14）；定理 5.10 中的图$\widehat{}$具有 $(G)_C$ 的形式，其中 G和 C 如引理 5.11 所述。由引理 5.11 的第三部分可知，这种形式的图与上方图 7 示意图中的完整直线 C_6双射对应。由于这样的直线有 35 条，因此有 35个图满足定理 5.10 的要求。

从图 7 可知， G 是图 M的一个色数分量，其中 M 同构于$L(K_6)$、标识符 181 的图（M_{20}）或标识符 184 的图（M_{24}，施莱夫利图）。那么， C 也是 M 的一个霍夫曼颜色类。从引理 5.11 的证明可以清楚看出，$\widehat{}$ $\widehat{}$$(G)_C$ 现在是 $(M)_C$ 的一个色数分量。从图 7 可以清楚看出，这样的图$\widehat{}$$(M)_C$有四个。这四个极大 Hoffman 可着色例外图 M_5、 M_{22}、 M_{23}和 M_{25} 分别对应于图 7 中从 $L(K_6)$到 $L(CP(3))$、从 181 到 178、从 181 到 177，以及从 184 到 183 的四条直线。 □

切换示意图见图 9 ，图中展示了 M_5、 M_{22}、 M_{23}和 M_{25}。

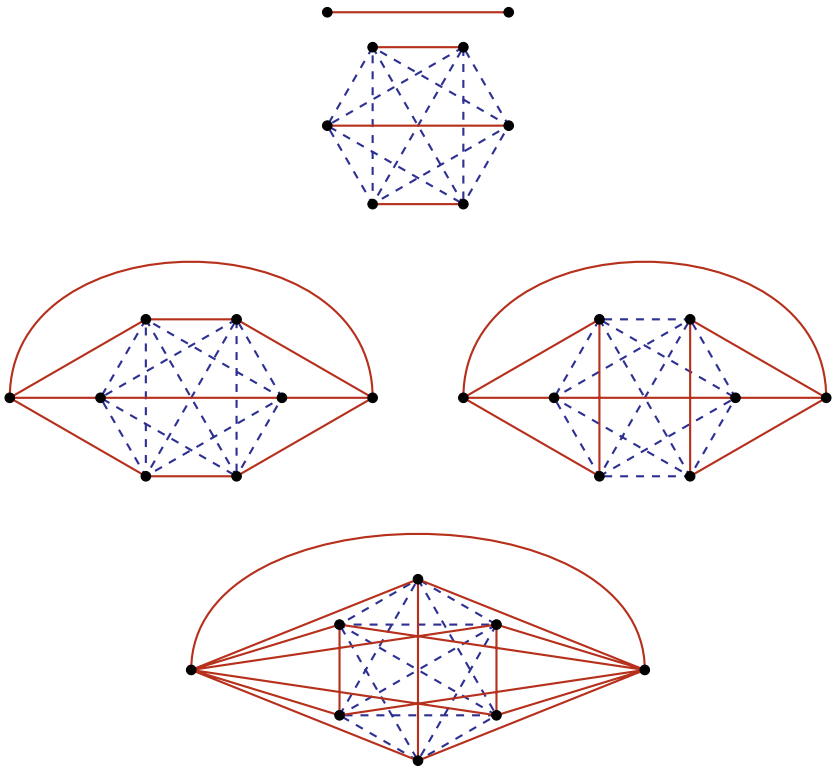


图 9： M_5、 M_{22}、 M_{23} 和 M_{25}的边切换图。

5.3 剩余的图

本节中，我们确定其余非平凡Hoffman可着色例外图，即既不是锥，也不包含于 $\mathcal{S}_8$中的图。回顾引理 5.2 可知，这些图必然是类型 (b) 或 (c) 的极大例外图的诱导子图。我们将证明以下结论。

定理 5.16. 恰有 *36* 个非平凡 *Hoffman* 可着色例外图，既不是锥图，也不包含在 $\mathcal{S}_8$ 中。此外，这些图中的每一个都是某个 $i \in \{1,2,3,4,6,7,8,9,10,21\}$ 的色数分量 M_i。

为了证明定理 5.16，我们采用的方法与第 5.1 节中处理正则例外图的方法类似。具体来说，在此情形下，我们使用以下定义，它相当于第 5.1 节中的霍夫曼独立集图 $HC(G)$。对于非空图 G，令 $M(G)$ 为一个图，其顶点是 G 的极大独立集；当两个极大独立集 C 和 C' 相交，或者诱导子图 $G[C \sqcup C']$ 有一个满足 $\lambda_{\min}(K) > \lambda_{\min}(G)$ 的连通分支 K 时，它们相邻。我们有以下引理，它可以看作是引理 5.6 在此情形下的对应结果。

引理 5.17。 设 G 是一个非空图。若 H 是 G 的一个连通诱导子图，使得 $\lambda_{\min}(G) = \lambda_{\min}(H)$，并且 $H \sqcup K_1$ 不是 G 的诱导子图，则 H 的任意 *Hoffman* 着色都会在 $M(G)$ 中诱导出一个大小至少为 *2* 的独立集。

证明。设 X 是 G 的一个顶点集，且满足 $G[X] = H$。根据命题 3.8，我们知道 H 的每个 Hoffman 颜色类都是 H 中的极大独立集。对于 $v \in V(G) \setminus X$，记 $H_v = G[X \sqcup \{v\}]$。为了证明 H 的每个 Hoffman 颜色类不仅是 H 中的极大独立集，而且也是 G 中的极大独立集，只需证明对于每个这样的 v，都有 $\chi(H_v) > \chi(H)$。事实上，如果 $\chi(H_v) > \chi(H)$，则 v 必须与 H 的每个最优着色中的每个颜色类都有邻接，因此 H 的 Hoffman 颜色类都不能通过加入 v 而扩展为更大的独立集。

为证明 $\chi(H_v) > \chi(H)$，我们证明 $h(H_v) > h(H)$；这已足够，因为 H 是 Hoffman 可着色的。注意，根据命题 3.1，我们有 $\lambda_{\min}(G) \leq \lambda_{\min}(H_v) \leq \lambda_{\min}(H)$；又根据假设$\lambda_{\min}(H) = \lambda_{\min}(G)$，我们有 $\lambda_{\min}(H) = \lambda_{\min}(H_v)$。现在，$h(H_v) > h(H)$ 等价于 $\lambda_{\max}(H_v) > \lambda_{\max}(H)$。由于 $H \sqcup K_1$ 不是 G 的诱导子图，且 H 是连通的，我们知道 H_v 是连通的。根据命题 3.1，H 的每个霍夫曼颜色类现在都是 G的极大独立集。

现在考虑 H的一个霍夫曼着色，并令 C 和 C' 为该着色中的两个颜色类。根据上述内容，C和 C'是 $M(G)$中的顶点。我们断言，它们在 $M(G)$中不相邻。首先，注意 C 和 C' 互不相交。接着，令 K 为 $G[C \sqcup C'] = H[C \sqcup C']$的一个连通分支，则由 (3) 得 $\lambda_{\min}(K) = \lambda_{\min}(G)$。现在，$C$ 和 C' 在 $M(G)$中不相邻，证明至此完成。

□

将引理 5.17 与引理 5.6 相比较，我们可以作如下说明。首先，如果 G 是正则图，那么霍夫曼独立集图 $HC(G)$ 是 $M(G)$ 的诱导子图：根据定理 3.2，G 的任意霍夫曼独立集都是极大的；如果 C 和 C' 是不相交的霍夫曼独立集，那么根据定理 3.2，诱导子图 $G[C \sqcup C']$ 是 $(-\lambda_{\min}(G))$-正则的，因此 $G[C \sqcup C']$ 的每个连通分支 K 都是 $(-\lambda_{\min}(G))$-正则的；又由于 K 是二部的，我们有 $\lambda_{\min}(K) = \lambda_{\min}(G)$。特别要注意，在正则情形下，涉及连通分支 K 的 $M(G)$ 邻接条件是空泛成立的，因此在第 5.1 节中定义霍夫曼独立集图 $HC(G)$ 时，无须包含这一条件。

其次，请注意，引理 5.17 中的对应关系并非双射，这与引理 5.6 不同（另见图10）。因此，我们也不能像引理 5.6 的后半部分那样，对 $HC(G$ 的色数分量和极大独立集作出类似的陈述。不过，正如我们将在定理 5.16的证明中看到的，在我们的设定下，仍然可以通过另一种论证，说明将讨论限制在 $M(G$ 的极大独立集上是合理的。

我们有以下结果，参见引理 5.5.

引理 5.18. 设 H 是一个非平凡*Hoffman*可着色例外图，它既不是锥图，也不包含在 $\mathcal{S}_8$中。那么存在一个例外图 G，满足以下条件：

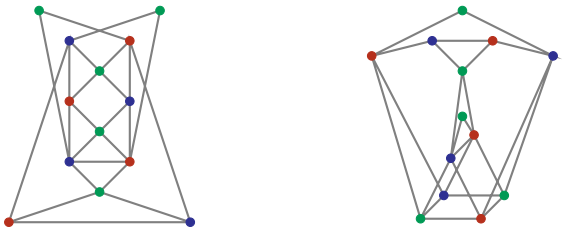


图 10：两个最小特征值为 -2 的图，尽管它们的所有二色分量都是史密斯图（即 C_8 和 $\mathcal{F}_9$），却不是 Hoffman 可着色的。这是因为这两个图的佩龙特征向量限制到各自的二色分量后，并非这些分量的佩龙特征向量。

- H 是 G的诱导子图，
- $H \sqcup K_1$ 不是 G 的诱导子图，
- G 是类型 *(b)* 或 *(c)* 的极大例外图，或者 G 是极大 E_7-可表示图，且既不是锥，也不是 $\mathcal{S}_8$ 中的元素。

证明。 设 H 是一个非平凡霍夫曼可着色例外图。设 G' 是包含 H 作为诱导子图的极大例外图。我们区分两种情况。若 $H \sqcup K_1$ 不是 G'的诱导子图，则可取 $G = G'$；由于 H 既不是锥图，也不是 $\mathcal{S}_8$中的元素，我们由引理 5.2可知， G' 必为类型 (b) 或 (c)。

如果相反， $H \sqcup K_1$ 是 G'的诱导子图，那么特别地， $H \sqcup K_1$ 是 E_8可表示的。现在，我们可以仅使用与给定向量（即表示 K_1的向量）正交的向量，在 E_8 中表示 H 。因此， H 是 E_7可表示的（见第3节），从而 H 是某个极大的 E_7可表示图 G''的诱导子图。再次，如果 $H \sqcup K_1$ 不是 G''的诱导子图，那么我们取 $G = G''$。

如果 $H \sqcup K_1$ 也是 G''的诱导子图，那么我们可以仅使用与两个彼此正交的给定向量都正交的向量，在 H 中表示 E_8。因此， H 是 D_6可表示的（见第3节）。根据 [9, 定理 3.6, 3] H 是一个广义线图，这与 H 是例外的这一假设相矛盾。 □

类型 (b) 的极大例外图有 37 个，类型 (c) 的极大例外图有 6 个。这些图见 [9, 第 6]章。对于极大的 E_7-可表示图，我们有以下结果。

命题 5.19。 恰有 *39* 个极大的 E_7-可表示图。其中包括施莱夫利图（见例 3.12），以及 *27* 个锥图。其余 *11* 个图均不属于 $\mathcal{S}_8$。

关于这 39 个图的 E_8-表示，参见第7节。由于施莱夫利图属于 $\mathcal{S}_8$ （见例 3.12），因此还剩下 11 个图需要应用引理 5.18 。

证明。 回顾第 3 节的内容， E_7 可以定义为由 56 个类型为 c的向量和 70 个类型为 d的向量组成的集合。

注意，对于邻接矩阵为 A 的 E_7-可表示图， $A + 2I$ 的秩至多为 7，因为 $A + 2I$ 必须是该表示的格拉姆矩阵的标量倍数，而 E_7 张成一个 7 维空间。这意味着八个顶点的完全图无法在 E_7 中表示。然而，七个顶点的完全图可以在 E_7 中表示（例如使用向量c_{12}， c_{13}，……， c_{18}），但这并非极大的，因为加入向量 d_{5678} 后，我们便得到一个 E_7-表示的图，其中七个顶点的完全图是其诱导子图。

因此，每个极大 E_7-可表示图都不是完全图，并且利用 E_7[9, 命题 3.2.4], 的对称性，我们可以不失一般性地假设向量 c_{12} 与 c_{34} （它们表示两个不相邻顶点）被用于此类图的 E_7-表示中。

记 G为 E_7-相容图，其顶点为所有 E_7-向量（即类型 c 的 56 个向量以及类型 d的 70 个向量，见第3节），且两个向量在其点积为负时相邻。于是任意图的每一个 E_7-表示都对应于 G中的一个独立集。为确定极大 E_7-可表示图，我们现在需要确定 G中的极大独立集，并可限制于包含向量 c_{12} 与 c_{34}的那些独立集。为此，利用 SageMath [17] ，我们确定 G 在由那些 E_7-向量（它们与 c_{12} 和 c_{34}不相邻）所成集合上的诱导子图中的极大独立集。

在同构意义下，我们得到 39 个图，并且可以验证其中任何一个都不是另一个的诱导子图。在这 39 个图中，我们找到了 Schl¨afli 图，以及 27 个锥图。其余 11 个图上的锥的最小特征值均严格小于 -2，因此它们不是 $\mathcal{S}_8$ 的元素，由命题 3.10 可知，从而完成证明。 □

现在我们可以证明定理 5.16，为此我们使用算法 2。

算法 2: 用于计算的算法 Hoffman 可着色诱导子图，参见引理 5.18。

输入: 一个图 G;

输出: 一个列表 *Hoffman*可着色，使得 *Hoffman*可着色[c] 是霍夫曼的一个列表 c-可着色的 G 的诱导子图，以及一个列表非 *Hoffman* 可着色图，使得非 *Hoffman* 可着色图[c] 是 G 的诱导子图列表，带有非霍夫曼 c-着色，来自 $M(G)$ 中的一个独立集;

计算 G 的极大独立集 最大团，并将 $M(G)$ 初始化为空图，且带有顶点 最大团;

对于 G 的每一对极大独立集 C、C' **执行**

  如果 C 与 C' 并非不相交 **则**

    在 $M(G)$ 中使 C 与 C' 相邻;

  else

    对于 $G[C \cup C']$ 的每一个连通分支 K **执行**

      通过计算 K 的特征多项式来检验 $\lambda_{\min}(K) = \lambda_{\min}(G)$ 在 $\lambda_{\min}(G)$（由命题 3.1 我们知道 $\lambda_{\min}(K) \geq \lambda_{\min}(G)$，因此我们只需检查 $\lambda_{\min}(G)$是否为 K的特征值）;

    若至少有一个连通分支 K 不，则在 $M(G)$中使 C 与 C' 相邻满足 $\lambda_{\min}(K) = \lambda_{\min}(G)$;

将*Hoffman*可着色 和 非 *Hoffman* 可着色图 初始化为由空列表组成的列表，长度至少为 $M(G)$中最大独立集的大小;

对 M中大小至少为 *2* 的每个独立集 $\mathrm{coc}\ (G)$ **执行**

  令 c 为coc的基数;

  令 H 为 G 在由以下集合的并构成的顶点集上所诱导的子图:

  coc中列出的极大独立集，并检查它是否与下列图中的任意一个同构:

  *Hoffman*可着色图$[c]$或 非 *Hoffman* 可着色图$[c]$;

  若 $\lambda_{\max}(H) = -\lambda_{\min}(G) \cdot (c-1)$ **则**

    该着色是 Hoffman 着色；将 H 追加到 *Hoffman*可着色$[c]$;

  else

    该着色不是 Hoffman 着色；将 H 追加到 非 *Hoffman* 可着色图$[c]$;

返回列表 *Hoffman*可着色 和 非 *Hoffman* 可着色图。

定理 5.16 的证明。根据引理 5.17 和 5.18，我们将算法 2应用于 37 个类型 (b) 极大例外图、6 个类型 (c) 极大例外图，以及命题 $E_7$5.*19*中的 11 个可表示图。我们检查所得的 Hoffman 可着色图是否为广义

线图（通过检查它们是否包含 31 个禁用诱导子图中的任意一个，见 [9, 定理 2.3。18]），或者是平凡 Hoffman 可着色图，或者是定理 5.3 和 5.10 中的图，并将它们筛除。最终剩下恰好 36 个图。

对于极大的那些，我们注意到如下事实。如上应用该算法还会得到两个非 Hoffman 可着色图，它们仍对应于一个类型 (b) 的极大例外图 G 在 $M(G)$ 中的一个独立集。然而，这些图是 3-色的，且 $M(G)$ 中相应的独立集大小为三（见图 10 ）。因此， $M(G)$ 中任何大小至少为 4 的独立集都必须对应于 G 的某个诱导子图的 Hoffman 着色。这意味着，若 H 是非平凡Hoffman可着色例外图，且 H 具有对应于 $M(G)$ 中独立集 C 的 Hoffman 着色，则 $|C| \geq 3$ 以及 $M(G)$ 中每一个包含 C 的极大独立集 $C_{\max}$ 都会给出一个 Hoffman 可着色图（因为此时要么 $C_{\max}$ 的大小至少为 4，要么 $C_{\max} = C$ 对应于 H 的 Hoffman 着色）。因此，为了确定极大 Hoffman 可着色例外图，我们只需确定 $M(G)$ 中对应于霍夫曼着色的极大独立集（如前所述）。于是我们可以再次应用算法 2，但在步骤 9 中仅使用 $M(G)$ 中的极大独立集，而不是所有独立集。在所得的 Hoffman 可着色图中，我们筛除那些既对应于 $M(G_1)$ 中的一个极大独立集、又对应于 $G_1 \neq G_2$ 的一个非极大独立集 $M(G_2)$ 的图，从而对 $i \in \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 21\}$ 得到 M_i 作为极大 Hoffman 可着色例外图。

□

我们对定理 5.16 中的图有如下说明。这 36 个 Hoffman可着色例外图 G 来自定理 5.16 ，自然地分为四类，依据 $\mathfrak{C}(G)$。关于E_8-表示，我们参见第 7 节。

- 恰好有 17 个图满足 $\mathfrak{C}(G) = \{2, 5\}$。这些图是极大 Hoffman 可着色例外图 M_{10} 和 M_{21} 中至少一个的色数分量（不过请注意，$\mathfrak{C}(M_{21}) = \{2, 5, 8\}$）。这 17 个图自然地划分为两个子类。对于这 17 个图中的 7 个，每种 Hoffman 着色恰好有一个大小为 5 的颜色类。这 7 个图具有二色分量 C_4 和 W_7。这 7 个图中最大的一个（即有 17 个顶点的那个）是 M_{21} 的色数分量，但不是 M_{10} 的色数分量。其余 6 个图同时是 M_{10} 和 M_{21} 的色数分量。关于这 7 个图的更详细描述，见第6节。对于其余 10 个图（包括极大 Hoffman 可着色例外图 M_{10}），每种 Hoffman 着色恰好有两个大小为 5 的颜色类。这 10 个图具有二色分量 C_4、 W_7和 $W_6 \sqcup C_4$，并且它们本身是 M_{10} 的色数分量。

- 恰有 6 个图满足 $\mathfrak{C}(G) = \{2, 5, 8\}$。其中包括极大的霍夫曼可着色例外图 M_{21}，其余 5 个图是一个色数分量。这些图有两种 Hoffman 着色（例如， M_{21} 在表 1中所示）；一种着色有一个大小为 8 的颜色类，其余颜色类的大小均为 2；另一种着色有两个大小为 5 的颜色类，其余颜色类的大小均为 2。第一种 Hoffman 着色诱导出二色分量 C_4和 $2 \cdot W_5$；第二种 Hoffman 着色除了诱导出 C_4和 $2 \cdot W_5$之外，还诱导出二色分量 W_7。这 6 个图的 Hoffman 着色之所以具有灵活性，可以用 $2 \cdot W_5$的非连通性来解释；翻转一个连通分支中顶点所对应的颜色 $2 \cdot W_5$ ，便可得到另一种 Hoffman 着色（如上所述）。

- 恰好有 3 个图具有 $\mathfrak{C}(G) = \{3, 5\}$。这三个图的色数均为 3，并且是极大 Hoffman 可着色例外图 M_1、 M_2和 M_3，列于图 11。图 M_1 和 M_2 具有二色分量 $\mathcal{F}_8$ 和 W_6，而图 M_3 具有二色分量 $\mathcal{F}_8$ 和 $W_6 \sqcup C_4$。

- 恰有 10 个图具有 $\mathfrak{C}(G) = \{3, 6\}$。其中包括极大 Hoffman 可着色例外图 M_4、 M_6、 M_7、 M_8 和 M_9。另外 5 个图是 M_6、 M_7、 M_8 或 M_9 中至少一个图的色数分量。这 10 个图中的每个图的每种 Hoffman 着色都具有一个大小为 6 的颜色类

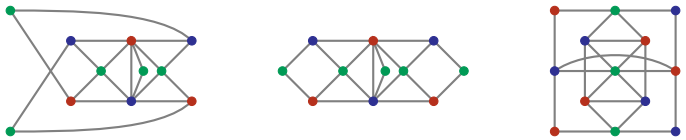


图 11：三个具有大小为 3 和 5 的颜色类（M_1、 M_2 和 M_3）且存在 Hoffman 着色的极大 Hoffman 可着色例外图。这是三个最小的极大 Hoffman 可着色例外图。

，而其他每个颜色类的大小均为 3。图 M_4 具有二色分量 C_6、 W_9 和 $W_5 \sqcup C_4$。其余 9 个图具有二色分量 C_6 和 W_9。

6 顶点较少的 Hoffman 可着色图

在本节中，我们证明定理 2。2。为此，我们将证明：若 $|V(G)| < 3\chi(G)$ 且 G 是 Hoffman 可着色的，则 $\lambda_{\min}(G) \geq -2$ （引理 6。2），之后便可应用定理 2。1。我们需要以下引理。

引理 6.1. 设 G 是一个具有正特征向量的 *Hoffman* 可着色图。若 G 有一个最优着色，其中一个颜色类大小为 *2*，另一个颜色类大小为 *3*，则 G是二部的。

证明. 设 H 为由大小为 2 的颜色类 G 和大小为 3 的颜色类所定义的双色分量。根据定理 3。4 和命题 3。8，我们知道 H 具有正特征向量，且最小度至少为 1。对于 H，只有四种可能：五个顶点上的路径图、Dynkin 图 D_5、通过在 C_4上添加一个叶顶点得到的图，以及 $K_{2,\ 3}$。它们最大特征值的最小多项式分别为 $x^2 - 3$、 $x^4 - 4x^2 + 2$、 $x^4 - 5x^2 + 2$和 $x^2 - 6$。由引理 4。3 可知 G 是二部的。

□

引理 6.2。 设 G 是一个连通的 *Hoffman* 可着色图，它有一个正特征向量，满足$|V(G)| < 3\chi(G)$，且既非二部图也非完全图。则 $\lambda_{\min}(G) \geq -2$，并且 G 的每个最优着色都没有大小为 *1* 的颜色类，且至少有两个大小为 *2* 的颜色类。

证明。 考虑 G的一个最优着色。设 $m_1 \leq m_2$ 为两个最小颜色类的大小。若 $m_2 \geq 4$，则

$$3\chi > |V(G)| \geq m_1 + (\chi - 1)m_2 \geq 1 + (\chi - 1) \cdot 4 = 4\chi - 3,$$

得到 $\chi < 3$，这与 G 不是二部图矛盾。因此 $m_2 \leq 3$。

此外，由于 $|V(G)| < 3\chi$ 我们有 $m_1 \leq 2$。若 $m_1 = 1$，则由 $m_2 \leq 3$ 和定理 3。7可得 $\lambda_{\min}(G) = -1$，因此 G 是完全图（因而显然是 Hoffman 可着色图）。所以 $m_1 = 2$，故由引理 6。1 也可得 $m_2 = 2$。现在不存在大小为 1 的颜色类，且至少有两个大小为 2 的颜色类。

令 H 为 G 在大小为 2 的两个颜色类上的双色分量。则 H 是 K_2,2 的子图，因此由命题 3.1 可得 $\lambda_{\max}(H) \leq \lambda_{\max}(K_2,2) = 2$；又由二分性可得 $\lambda_{\min}(H) \geq -2$。由定理 3.4 还可得 $\lambda_{\min}(G) \geq -2$，证明至此完成。

□

现在我们可以证明定理 2.2。

定理 2.2 的证明。 由引理 6.2 可知 $\lambda_{\min}(G) \geq -2$，因此定理 2.1 表明 G 是一个色数平衡广义线图、图 1 所示的图，或 29 个极大 Hoffman 可着色例外图之一的色数分量。注意，图 1 所示的图确实满足 $|V(G)| < 3\chi(G)$。

假设 G 是一个色数平衡广义线图，记作 $G = L(H,\ \chi(G))$。我们不妨假设属于同一对的鸡尾酒会顶点被赋予相同的颜色（如

定理 4.2 的证明中所示）。若 C 是这种着色中的一个颜色类，那么它由 H中的一个匹配M ，以及 H 中每个未被 M匹配的顶点所对应的一对鸡尾酒会顶点组成。现在 $|C| = 2|V(H)| - 3|M|$。要使 C 的大小为 2，现在有两种可能（注意$2|M| \leq |V(H)|$），即 $|V(H)| = 1$和 $|M| = 0$，以及 $|V(H)| = 4$和 $|M| = 2$。若 $|V(H)| = 1$，则 G 是一个鸡尾酒会图（因此显然是 Hoffman 可着色的）。反之，若 $|V(H)| = 4$，则 H必含有 C_4 作为子图，因为根据引理 6.2， G 至少有两个大小为 2 的颜色类。现在H 同构于 C_4、 K_1、1、2 或 K_4。根据 $|V(G)| < 3\chi(G)$的限制，我们必有 G同构于 $L(C_4, 2)$或 $L(K_4,3)$，因此 G 是一个鸡尾酒会图，故显然是 Hoffman 可着色的。

最后，如果 G 是一个例外图，那么根据表1，它必定是 M_{10} 或 M_{21} 的一个色数分量，因为根据引理 6.2，它必须有一个大小为 2 的颜色类。由于 M_{10} 和 M_{21} 都有一种最优着色，其中每个颜色类的大小均为 2 或 5，且 G 是非平凡霍夫曼可着色的，因此 G 现在存在一种着色，使其有 1 个或 2 个大小为 5 的颜色类。令 A 为这个数量，则$|V(G)| = 2\chi(G) + 3A$。为满足 $|V(G)| < 3\chi(G)$，现在需要 $3A < \chi(G)$。若 $A = 2$，则 $\chi(G) \geq 7$，由此得到三个例子，即 M_{10}、 M_{21}，以及 M_{21} 中唯一的 20 阶色数分量；后者是移除任意一个大小为 2 的颜色类后得到的。若 $A = 1$，则 $\chi(G) \geq 4$，因此 G 的阶为 11、13、15 或 17；这样的图有六个（见第 7 节）。总共有十个连通非平凡Hoffman可着色图满足 $|V(G)| < 3\chi(G)$。 □

我们可以对上述证明中具有 $A = 1$ 的六个图作更详细的描述。事实上，如果 G 是一个最小特征值为 -2 的连通 Hoffman 可着色图，其中一个颜色类的大小为 5，其余每个颜色类的大小均为 2，那么我们可以用如下有限多重集描述它的全部结构。

注意，任意一个大小为 2 的颜色类与大小为 5 的颜色类所形成的双色分量都必须是 W_7。这意味着，我们可以取 G 的一个佩龙特征向量 x：在大小为 5 的颜色类中，对唯一的顶点 v_0 赋值 2，对该类的其他顶点赋值 1，记作 v_1、 v_2、v_3 和 v_4。此外，根据 W_7 的结构，大小为 2 的颜色类中的每个顶点都与 v_0 相邻，并且恰好与 v_1、 v_2、 v_3 和 v_4 中的两个顶点相邻；对于 $1 \leq i \leq 4$，每个顶点 v_i 都恰好与每个大小为 2 的颜色类中的一个顶点相邻。现在，对每个大小为 2 的颜色类 C，我们取由唯一的 i 构成的多重集 S，其中 $1 \leq i \leq 3$，使得 v_i 和 v_4 共享 C 的一个顶点。由于任意一对大小为 G 的颜色类所形成的双色分量都必须是 C_4，这就完全确定了 G 的图结构；我们还可以看出， S 的基数为 $\chi(G) - 1$。

接下来，我们注意到可以互换 v_1、 v_2 和 v_3 的标签，因此不失一般性，可以假设在 S 中，1 的重数至少为 2 的重数，而 2 的重数至少为 3 的重数。现在注意到，1 的重数不可能为 3；可以验证，以这种方式构造的 G 的色数分量具有最小特征值 $-\sqrt{6}$。由于其最大特征值为 6，霍夫曼界不是整数，因此该图不是 Hoffman 可着色的。这意味着，在对称性意义下， S 可以取以下形式（假设 $\chi(G) \geq 2$）： $\{1\}$、 $\{1^2\}$、 $\{1, 2\}$、$\{1^2, 2\}$、 $\{1, 2, 3\}$、 $\{1^2, 2^2\}$、 $\{1^2, 2, 3\}$、 $\{1^2, 2^2, 3\}$ 和 $\{1^2, 2^2, 3^2\}$。

这描述了 M_{10} 和 M_{21} 恰好含有一个大小为5的颜色类的所有色数分量，并以另一种方式证明：若至少存在一个大小为5的颜色类，则颜色类大小为2和5的连通霍夫曼可着色图至多可有六个大小为2的颜色类（这也由表1得出），正如我们在 M_{21}中所见。特别地，注意存在六个基数至少为3的可能集合 S；它们给出了 M_{21} 的六个奇数阶色数分量，如定理2.2所述。

7 Hoffman可着色例外图的表示与极大的 E_7可表示图

我们为 E_8表示，并提供 E_7表示，分别对应全部 245 个非平凡Hoffman可着色例外图和全部 39 个极大 E_7可表示图。我们按照第3节中的顺序讨论这八类 Hoffman 可着色例外图（见表5）。

7.1 第 5.1 节中 G 的 174 个图，其 $\mathfrak{C}(G)$ 等于 $\{3\}$、$\{4\}$或 $\{1,4\}$

关于图 E_8的 G表示，当 $\mathfrak{C}(G)$ 等于 $\{3\}$ 或 $\{4\}$ 时（即正则 Hoffman 可着色例外图），参见 [9, 表 A3], ，其中给出了八顶点图的线图的切换类。根据命题 E_8，可以通过使用向量 E_8 为切换类中的边赋予 a_{ij}表示，并使用向量b_{ij}为切换类外的边赋予表示，从而得到3。10表示。在第一层的正则例外图中，所有阶为 4 的倍数的图都是 Hoffman 可着色的，但标识符为 7、8、10、36、41、42、53、55、56、65 和 66 的图除外。在第二层的正则例外图中，除了标识符为 165、168、169 和 175 的图外，其余都可 Hoffman 着色。标识符为 181 和 184 的正则例外图分别是极大 Hoffman 可着色例外图 M_{20} 和 M_{24}。

对于图 G 的 E_8-表示，其中 $\mathfrak{C}(G)=\{1,4\}$（也就是 Hoffman 可着色的例外锥图$\widehat{\ }$，记作 $G=H$），回顾引理 5.4。我们取 H 的一个 E_8-表示（若 H 是例外图，则如上所述使用 [9, Table A3]；若 H 是一个有八个顶点的正则图的线图，则使用 $ij\in V(H)$ 的向量 a_{ij}），并加入对应于锥顶点的向量 e。对于 $i\in\{11,12,\dots,20\}$，图 M_i 是第一层标识符为 113–120 的正则例外图的锥（另见图 6）。M_{26}、M_{27}、M_{28} 和 M_{29} 的表示（它们是 $L(K_8)$ 及三个 Chang 图的锥，见图 4）也可在 [9, Table A6.1] 中找到。

7.2 第5.2节中的35个图 G，其 满足 $\mathfrak{C}(G)=\{3,4\}$

$\widehat{\ }$表4 中给出了对应于图$G)_C$ 中图7 的完整直线的35个图的表示，具体说明见第5.2节。另见图8 和9。

表4中给出的 E_8-表示按如下方式确定。若 G是例外的，则通过对 [9, 表A3.2.2], 中的 G的 E_8-表示进行切换，得到（G）$_C$ 的$\frown E_8$-表示；切换时相对于 C 进行（每当 a_{ij} 表示 C中的一个顶点时，用 b_{ij} 替换 a_{ij}；每当 b_{ij} 表示 C中的一个顶点时，用 a_{ij} 替换 b_{ij}）。不同的 C 选择可能会得到同一个图的不同E_8-表示。如果可能，我们选择 C，使得从 E_8-表示的 G 中删除表示 C 的三个向量后，得到 [9, 表A3.2.2]中给出的 E_8-表示$G\setminus C$。否则，我们任取一个可行的 C。若 G不是例外的，则采用上述相同方法，但起始表示分别为 E_8-表示 $L(K_3,3)$、$L(K_3\square K_2)$和$L(CP(3))$；这些表示是 [9, 表A3.2.2] 中图166、167和171的 E_8-表示的子表示；此外，$L(K_6)$ 的 E_8-表示对所有 $3\le i<j\le 8$均使用 a_{ij}。

7.3 第 5.3 节中的 36 个图

如第 5.3 节所述，这些图可根据 $\mathfrak{C}(G)$ 为 $\{2,5\}$、$\{2,5,8\}$、$\{3,5\}$ 或 $\{3,6\}$ 自然地分为四类。

7.3.1 满足 $\mathfrak{C}(G)=\{2,5\}$ 的 17 个图 G

如第 5.3 节所述，这一类自然地细分为两个子类：7 个图，其中每种霍夫曼着色恰有一个大小为 5 的颜色类；以及 10 个图（包括 M_{10}），其中每种霍夫曼着色恰有两个大小为 5 的颜色类。

对于这 7 个最优着色中有一个颜色类大小为 5 的图，我们可以用 E_8 表示这样一个大小为 5 的颜色类，其向量为 a_{15}、a_{26}、a_{37}、a_{48}、d_{5678}。随后，剩余顶点可以用 E_8 表示，向量为 a_{ij}（对应 $ij\in A$）和 b_{ij}（对应 $ij\in B$），以下是 A 和 B 的 7 种选择：

- $A=\{12,13,24,34\}$, $B=\emptyset$;
- $A=\{12,13,24,34\}$, $B=\{56,78\}$;
- $A=\{12,13,14,23,24,34\}$, $B=\emptyset$;
- $A=\{12,13,24,34\}$, $B=\{56,57,68,78\}$;

图	G	$G \setminus C$	ij 针对向量 a_{ij} 的	ij 针对向量 b_{ij} 的
	$L(K_{3,\ 3})$	C_6	36、37、45、47、58、68	12,35,46,78
图8	164	C_6	13,24,35,36,45,47,68,78	12,34
	$L(K_3 \square K_2)$	C_6	36,37,45,48,57,68	12,35,46,78
	166	$L(K_{3,\ 3})$	13,24,35,36,37,45,46,47,58,68,78	12,34
	166	164	34,35,36,45,47,68,78	12,13,24,37,46,58
	170	164	14,23,35,36,37,45,48,67,68	12,13,26,34
	167	164	34,35,37,45,46,68,78	12,13,24,36,48,57
	167	$L(K_3 \square K_2)$	13,24,35,36,37,45,46,48,57,68,78	12,34
	$L(CP(3))$	$L(K_3 \square K_2)$	35、36、37、45、46、48、57、68、78	12,38,47,56
	174	166	14,23,35,36,37,38,45,46,47,58,68,78	12,13,28,34
	174	170	34,35,36,38,45,47,68,78	12,13,14,23,28,37,46,58
	176	166	15,24,34,35,36,47,58,67	12,13,14,16,23,25,27,45
	176	170	14,23,35,36,45,47,58,67	12,13,15,16,24,25,27,34
	176	167	15,23,34,36,45,47,58,67	12,13,14,16,24,25,27,35
	173	170	34,35,37,38,46,47,56,58	12,13,14,23,25,36,45,78
	173	167	14,23,35,36,37,38,45,46,47,56,58,78	12,13,25,34
	172	167	14,26,34,35,36,37,45,48,57,58,67,68	12,13,25,46
	171	167	34,35,36,37,45,46,48,57,68,78	12,13,24,38,47,56
	171	$L(CP(3))$	13,24,35,36,37,38,45,46,47,48,56,57,68,78	12,34
M_5	$L(K_6)$	$L(CP(3))$	35,36,37,38,45,46,47,48,56,57,68,78	12,34,58,67
	179	174	15,24,34,35,36,37,38,46,47,48,56,57,58	12,13,14,23,25,45
	180	174	35,36,37,45,46,48,78	12,13,14,15,16,23,24,27,28,34,57,68
	180	176	14,28,34,35,36,37,45,46,57,68,78	12,13,15,16,23,24,27,48
	180	173	15,27,34,35,36,37,45,46,48,68,78	12,13,14,16,23,24,28,57
	178	173	15,28,34,35,36,37,45,46,48,57,67,68,78	12,13,14,26,27,58
	177	173	34,36,37,38,45,46,48,56,57,58,67	12,13,14,25,26,35,47,68
	177	172	34,35,36,37,45,46,48,57,58,67,68	12,13,14,25,26,38,47,56
	177	171	14,25,34,35,36,37,38,46,47,48,56,57,58,67,68	12,13,26,45
	182	179	35,36,37,38,45,46,47,48,56,78	12,13,14,15,16,23,24,27,28,34,57,68
	182	180	34,35,36,37,45,46,48,57,68,78	12,13,14,15,16,23,24,27,28,38,47,56
	182	178	14,23,35,36,37,38,45,46,47,48,56,57,68,78	12,13,15,16,24,27,28,34
M_{22}	181	178	34,35,36,37,45,46,48,57,58,67,68,78	12,13,14,15,26,27,28,38,47,56
M_{23}	181	177	35,36,37,38,45,46,47,48,57,58,67,68	12,13,14,15,26,27,28,34,56,78
	183	182	16,25,34,35,36,37,38,45,46,47,48,57,58,67,68	12,13,14,15,17,23,24,26,28,56
M_{25}	184	183	18、27、34、35、36、37、38、45、46、47、48、56、57、58、67、68	12,13,14,15,16,17,23,24,25,26,28,78

^表4：表示于 E_8 的35个图（G）$_C$ 来自第5.2节。

- $A = \{12, 13, 14, 23, 24, 34\}$, $B = \{56, 78\}$;
- $A = \{12, 13, 14, 23, 24, 34\}$, $B = \{56, 57, 68, 78\}$;
- $A = \{12, 13, 14, 23, 24, 34\}$, $B = \{56, 57, 58, 67, 68, 78\}$。

对于这10个图（包括 M_{10}），它们的最优着色有两个大小为5的颜色类，我们可以用向量 a_{13}、a_{26}、c_{26}、a_{47}、c_{47} 表示第一类，用向量a_{23}、a_{15}、c_{15}、a_{48}、c_{48} 表示第二类。剩余顶点的以下5种向量选择，每种都对应此类中的2个图；其中一个还包括向量 a_{12} 和 a_{34}，另一个则不包括，因此总共有10个图:

- b_{ij} 对于 $ij \in \{56, 78\}$;
- b_{ij} 对于 $ij \in \{56, 57, 68, 78\}$;
- b_{ij} 对于 $ij \in \{57, 58, 67, 68\}$;
- b_{ij} 对于 $ij \in \{56, 57, 58, 67, 68, 78\}$;
- d_{5678}、e和 b_{ij} 对于 $ij \in \{56, 57, 58, 67, 68, 78\}$。

最后一种选择与向量 a_{12} 和 a_{34} 一起，给出了 M_{10}的一种表示。

7.3.2 满足 $\mathfrak{C}(G) = \{2, 5, 8\}$ 的 6 个图 G

如 5.3 节所述，这些图都以 $2 \cdot W_5$ 作为一个双色分量，因此可以将这些图染色为一个大小为 8 的颜色类和其余大小为 2 的颜色类，或两个大小为 5 的颜色类和其余大小为 2 的颜色类。本类包含图 M_{21}。

要在 E_8 中表示这 6 个图，我们可以用向量 a_{15}，c_{15}，a_{26}，c_{26}，a_{37}，c_{37}，a_{48}，c_{48}，d_{5678}，e 来表示双色分量 $2 \cdot W_5$。随后，对于以下 6 种 A 和 B 的选择，该类中这 6 个图的其余颜色类可用向量 a_{ij} 表示 $ij \in A$，并用 b_{ij} 表示 $ij \in B$：

- $A = \{12, 13, 24, 34\}$，$B = \emptyset$;
- $A = \{12, 13, 24, 34\}$, $B = \{58, 67\}$;
- $A = \{12, 13, 14, 23, 24, 34\}$, $B = \emptyset$;
- $A = \{12, 13, 14, 23, 24, 34\}$, $B = \{56, 78\}$;
- $A = \{12, 13, 14, 23, 24, 34\}$, $B = \{56, 57, 68, 78\}$;
- $A = \{12, 13, 14, 23, 24, 34\}$，$B = \{56, 57, 58, 67, 68, 78\}$（给出 M_{21}）。

7.3.3 满足 $\mathfrak{C}(G) = \{3, 5\}$ 的 3 个图 G

这些图是 M_1、M_2 和 M_3（见图 11）。我们有以下 E_8-表示:

- M_1: a_{ij} 对于 $ij \in \{12, 15, 17, 26, 28, 35, 38, 46, 47\}$、$b_{56}$ 和 d_{5678},
- M_2: a_{ij} 对于 $ij \in \{12, 15, 17, 26, 28, 35, 37, 46, 48\}$、$b_{56}$ 和 d_{5678},
- M_3: a_{ij} 对于 $ij \in \{12, 13, 14, 23, 24, 35, 46, 57, 68\}$、$b_{34}$、$c_{57}$、$c_{68}$ 和 d_{3478}。

7.3.4 具有 $\mathfrak{C}(G) = \{3, 6\}$ 的 10 个图 G

这些图包括极大 Hoffman 可着色例外图 M_4、M_6、M_7、M_8、M_9。我们可以用向量 a_{17}、c_{17}、a_{28}、c_{28}、a_{35} 和 a_{46} 表示 E_8 中大小为 6 的颜色类。对于其余顶点，以下 10 种 A 和 B 的选择中，我们可以分别对 $ij \in A$ 使用向量 a_{ij}，并对 $ij \in B$ 使用向量 b_{ij}：

- $A = \{15, 24, 34, 36\}$, $B = \{37, 48\}$;
- $A = \{13, 24, 34, 56\}$, $B = \{37, 48\}$;
- $A = \{13, 15, 24, 26, 36, 45, 56\}$, $B = \{58, 67\}$;
- $A = \{14, 15, 23, 26, 34, 36, 56\}$, $B = \{37, 68\}$;
- $A = \{13, 14, 23, 26, 34, 45, 56\}$, $B = \{38, 47\}$;

- $A=\{12,14,23,34,36,45,56\}$，$B=\{37,48\}$（即 M_4）；
- $A=\{13,15,24,26,34,36,45,56\}$，$B=\{38,47,58,67\}$ (给出 M_6);
- $A=\{13,15,24,26,34,36,45,56\}$，$B=\{38,47,57,68\}$ (给出 M_7);
- $A=\{13,14,23,26,34,36,45,56\}$，$B=\{37,38,47,68\}$ (给出 M_8);
- $A=\{13,14,15,23,24,26,34,36,45,56\}$，$B=\{37,48\}$ (给出 M_9).

7.4 个极大 E_7-可表示图

这 39 个图自然分为三种类型，与极大例外图类似（见第 3 节）；其中，17 个顶点且最大度为 16 的图（类型 (a)），顶点数多于 17 且最大度为 16 的图（类型 (b)），以及最大度小于 16 的图（类型 (c)）。类型 (a) 有 27 个极大 E_7-可表示图，类型 (b) 有 10 个，类型 (c) 有 2 个。施莱夫利图属于类型 (b)。

我们给出这些图的 E_7-表示，其中，对于类型 (a) 和 (b) 图的表示，我们选取 E_7 为 E_8 中与 d_{1234} 正交的向量；对于类型 (c) 图的表示，则选取 E_7 为 E_8 中与 e 正交的向量。

7.4.1 类型 (a)

对于 27 个极大 E_7-可表示的类型 (a) 图的表示，我们取向量e 对应全邻顶点，取向量 a_{ij} 对应 $ij\in A$，取向量 b_{ij} 对应 $ij\in B$；对于 $A\sqcup B=\{ij:\ 1\leq i\leq 4, 5\leq j\leq 8\}$，并采用以下 27 种 A的选取方式:

$$\begin{array}{ccc}
\emptyset & \{15,16,17,28\} & \{15,16,17,25,36\}\\
\{15\} & \{15,16,25,27\} & \{15,16,17,28,38\}\\
\{15,16\} & \{15,16,27,28\} & \{15,16,25,27,36\}\\
\{15,26\} & \{15,16,25,37\} & \{15,16,25,27,38\}\\
\{15,16,17\} & \{15,16,27,38\} & \{15,16,27,37,48\}\\
\{15,16,27\} & \{15,16,27,37\} & \{15,16,17,25,36,47\}\\
\{15,16,25\} & \{15,26,37,48\} & \{15,16,17,28,38,48\}\\
\{15,26,37\} & \{15,16,17,25,28\} & \{15,16,25,27,36,37\}\\
\{15,16,17,25\} & \{15,16,17,25,35\} & \{15,16,17,18,25,35,45\}
\end{array}$$

7.4.2 类型 (b)

对于 10 个极大 E_7-可表示的类型 (b) 图的表示，我们取向量e 对应一个度为 16 的顶点，取向量 a_{ij} 对应 $ij\in A$，取向量 b_{ij} 对应 $ij\in B$，取向量c_{ij}对应 $ij\in C$，以及取向量 $d_{ijk\ell}$对应 $ijk\ell\in D$；对于 $A\sqcup B=\{\{i,j\}:\ 1\leq i\leq 4, 5\leq j\leq 8\}$，并采用以下 10 种 A、C和 D的选取方式:

- $A=\{15,16,17,18\}$, $C=\{12,13,14\}$, $D=\emptyset$;
- $A=\{15,16,25,26\}$, $C=\emptyset$, $D=\{3478\}$;
- $A=\{15,16,17,18,25\}$, $C=\{13,14\}$, $D=\emptyset$;
- $A=\{15,16,17,25,26\}$, $C=\emptyset$, $D=\{3478\}$;
- $A=\{15,16,17,18,25,35\}$, $C=\{14\}$, $D=\emptyset$;
- $A=\{15,16,17,25,26,27\}$, $C=\emptyset$, $D=\{3458,3468,3478\}$;
- $A=\{15,16,17,25,26,28\}$, $C=\emptyset$, $D=\{3478\}$;
- $A=\{15,16,17,25,26,35\}$, $C=\emptyset$, $D=\{3478\}$;
- $A=\{15,16,17,18,25,26,27\}$, $C=\{13,14\}$, $D=\{3458,3468,3478\}$;
- $A=\{15,16,17,18,25,26,27,28\}$, $C=\{13,14,23,24\}$, $D=\{3456,3457,3458,3467,3468,3478\}$.

最后一种选择给出了 Schl¨afli 图的一种表示。

7.4.3 类型 (c)

对于类型 (c) 的两个图，我们有以下表示。对于第一个图，我们取 c_{i8} 作为 $i \in \{1, \ldots, 7\}$，并取 d_{ijk8} 作为 $ijk \in \{145, 167, 246, 257, 347, 356, 456, 457, 467, 567\}$。对于第二个图，我们取 c_{i8} 作为 $i \in \{1, \ldots, 7\}$，并在 ijk 在法诺平面中构成一条直线时取 d_{ijk8}，例如 $ijk \in \{123, 145, 167, 246, 257, 347, 356\}$。

参考文献

[1] A. Abiad. 图的权正则划分的刻画及其应用。《线性代数及其应用》，569：162–174，2019年。[2] A. Abiad、W. Bosma 和 T. van Veluw. 图的 Hoffman 着色。《线性代数及其应用》，710：129–150，2025年。[3] A. Abiad、B. De Bruyn 和 T. van Veluw.（强）正则图的Hoffman可着色性。《离散数学》，349(3)：编号 114856，2026。[4] L. Beers 和 R. Mulas. 谱的尽头：归一化拉普拉斯矩阵最大特征值的色数界。《复杂系统物理学》，6(2)：编号 025006，2025年。[5] A. Blokhuis、A. E. Brouwer 和 W. H. Haemers. 关于三色距正规图。《设计、编码与密码学》，44(1–3)：293–305，2007年。[6] A. E. Brouwer 和 W. H. Haemers.《图的谱》。Universitext。施普林格，纽约，2012年。[7] P. J. Cameron、J.-M. Goethals、J. J. Seidel 和 E. E. Shult. 线图、根系与椭圆几何。《代数杂志》，43(1)：305–327，1976年。[8] G. Coutinho、R. Grandsire 和 C. Passos. 归一化拉普拉斯矩阵的着色。《电子理论计算机科学札记》，346：345–354，2019年。[9] D. Cvetkovi´c、P. Rowlinson 和 S. Simi´c. 线图的谱推广。关于最小特征值为 -2 的图。《伦敦数学学会讲义系列》，314。剑桥大学出版社，剑桥，2004年。[10]W. H. Haemers. 设计与图论中的特征值方法。学位论文，埃因霍温理工大学，1979年。[11] W. H. Haemers. Hoffman 的比率界。《线性代数及其应用》，617：215–219，2021年。[12] W. H. Haemers 和 V. D. Tonchev. 强正则图中的铺展。《设计、编码与密码学》，8(1–2)：145–157，1996年。[13] D. Karger、R. Motwani 和 M. Sudan. 用半定规划近似图着色。《美国计算机协会杂志》，45(2)：246–265，1998年。[14] L. Lov´asz. 关于图的香农容量。《IEEE信息论汇刊》，25(1)：1–7，1979年。[15] L. Man˘cinska 和 D. E. Roberson. 量子同态。《组合理论杂志B辑》，118：228–267，2016年。[16] R. C. Read 和 R. J. Wilson.《图谱集》。克拉伦登出版社，牛津大学出版社，纽约，1998年。[17]Sage 开发团队。SageMath，Sage 数学软件系统，https://www. sagemath.org。10.6 版，2025年。[18]W. Watkins 和 J. Zeitlin. $\cos(2\pi/n)$ 的最小多项式。《美国数学月刊》，100(5)：471–474，1993年。