arXiv:2603.03863v1 [math.MG] 4 Mar 2026

所有代数实双曲空间上群作用的多样性

Bruno Duchesne、Christopher-Lloyd Simon

2026年3月5日

摘要

对于基数 κ，记 $\mathbf{H}^\kappa$ 为维数为 κ 的代数实双曲空间。对于拓扑群 Γ，我们研究连续表示 $\Gamma \to \mathrm{Isom}(\mathbf{H}^\kappa)$ 在连续自表示 $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^\kappa) \to \mathrm{Isom}(\mathbf{H}^\kappa)$ 作用下的等价类集合。

这项工作的创新之处在于同时考虑所有有限或无限的基数。我们将为这个表示等价类集合赋予一种自然的拓扑，并证明这个特征簇是紧的。这也将使我们能够在等变 Gromov-Hausdorff 拓扑下，通过实树上的某些作用，恢复此前所有关于 $\mathbf{H}^n$ 上作用的紧化。

一类表示能够恢复其标记长度谱的相似变换类。我们将定义代数交比的概念，并证明一个 GNS 嵌入结果，从而将标记长度谱的一些刚性性质加以推广。

我们还将引入抽象交比的概念，并利用它证明，一大类群 Γ （其特征是存在我们称为 CAT(−1)-空间上的 3-完全作用）至多允许一个不可约表示类嵌入到 $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^\kappa)$ 中，且该表示的有界性性质受 (X, d) 的有界性性质控制。我们将把这一结果应用于拓扑群 Γ，例如等距变换群 $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^\kappa)$ 本身、具有可数无限价数的单纯树的自同构群 $\mathrm{Aut}(T_\omega)$，以及非阿基米德域上射影直线的自同构群 $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{K}, |\cdot|)$。

这项具有奠基性质的工作开启了许多研究方向：其他特殊群（映射类群、克雷莫纳群）的特征簇规模；特征簇上几何结构的定义与研究（对称瑟斯顿度量、Goldman 辛形式）；以及对凸余紧表示所对应子集的描述。

背景部分内容详尽，使全文自成一体，并包含若干具有独立价值的新观察（涉及强双曲空间、交比、双曲型核）。

关键词： 强双曲性，CAT(−1)-空间，托勒密度量，交比，双曲型核，莫比乌斯群，奇异表示，特征簇，标记长度谱，交比，刚性，波兰群，Gromov-Hausdorff 收敛。

致谢

我们感谢 Nicolas Monod 就代数交比展开讨论，感谢 Federico Viola 讨论 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ 的表示论中的一些问题，感谢 Gilles Courtois 和 Antonin Guilloux 对他们关于极限表示的豪斯多夫维数的研究提出意见，感谢 Pierre Py 和 David Xu 对本研究初稿提出意见，也感谢 Eduardo Reyes 和 Vincent Guirardel 就与本研究相关的想法进行交流。我们感谢网络研讨会grseminar的组织者，这次合作正是由此开启的。

Bruno DUCHESNE 由 PLAGE 项目 ANR-24-CE40-3137资助。
Christopher-Lloyd SIMON 由ERCGOAT 101053021资助。

论文结构

引言 **3**
奇异变形下的作用簇 .3交比与长度谱刚性 .5几何收敛及与先前结果的比较 .8在 $\mathbf{H}^\kappa$ 上具有唯一相似类作用的群.9更多结果、一些问题及与其他工作的联系 .10

1 几何 的几何 **13**
1.1 强双曲空间及其边界 .131.2 强双曲空间的交比 .151.3 强双曲空间的等距变换 .161.4 用长度函数和交比刻画子群 17

2 几何 代数双曲空间的几何2 **0**
2.1 其他几何中的模型：Cartan 分解与 Iwasawa 分解 . . . . . 202.2 到 1-骨架的凸包与豪斯多夫距离 .212.3 代数双曲空间的交比 .212.4 代数双曲空间的等距变换群 .24

3 从核 到等距嵌入 2 **6**
3.1 正定型核与条件负定型核 .263.2 双曲型核与嵌入 $\mathbf{H}^\kappa$ .283.3 双曲型函数与在 $\mathbf{H}^\kappa$ 上的作用.303.4 由核的幂产生的奇异变形 .32

4 摘要 与代数交比：刚性性质3 **3**
4.1 交比在幂次意义下唯一的强双曲空间. . . . . 334.2 从双曲型核到强双曲性. 354.3 代数交比.364.4 由代数交比得到的刚性结果.37

5 树上作用的变形与退化39
5.1 临界指数、维数、代表元.395.2 实树到$\mathbf{H}^\omega$ .415.3 作用在$\mathbf{H}^\kappa$ 上的几何极限到实树上的作用 T .435.4 双曲空间的超积与实树上的作用.46

6 双曲型函数的等价类 48
6.1 $\mathbf{P}\mathcal{C}(\Gamma) \supset \mathbf{P}\mathcal{C}_{nn}(\Gamma) \supset \mathbf{P}\mathcal{C}_{ne}(\Gamma)$ 的拓扑及长度函数 .486.2 等变 Gromov-Hausdorff 拓扑的背景 .516.3 将 Gromov-Hausdorff 空间嵌入$\mathbf{P}\mathcal{C}(\Gamma)$ .526.4 先前紧化的识别 .54

7 某些群在 $\mathbf{H}^\kappa$ 56 上作用的全局刚性
7.1 群的有界性.567.2 在 $\mathrm{CAT}(-1)$ 空间上完全作用的群的刚性.587.3 等距变换群$(\mathbf{H}^\kappa)$、$\mathrm{Aut}(T_\kappa)$、$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$ 的刚性.60

引言

本文研究拓扑群在任意维数的代数双曲空间上通过等距变换所产生的连续作用。对于基数 κ，记维数为 κ的代数双曲空间为$\mathbf{H}^\kappa$ 。对于拓扑群 Γ，我们希望研究连续表示 $\Gamma \to \mathsf{Isom}(\mathbf{H}^\kappa)$ 的集合，并将连续表示视为等价，当且仅当 $\mathsf{Isom}(\mathbf{H}^\kappa) \to \mathsf{Isom}(\mathbf{H}^{\kappa'})$。主要问题如下：

> 1. 如何区分作用、衡量它们之间的接近程度，并在不同作用之间转换？ 2. 在这个空间上，什么样的拓扑及其性质（紧、连通）是合理的？ 3. 这个空间何时为空（障碍），或退化为单点集（刚性）？

本文探讨了这些问题的若干方面，具体如下文引言所述。

奇异变形下的作用簇

元素 $g \in$等距变换群$(\mathbf{H}^\kappa)$ 的平移长度为 $\ell(g) = \inf\{d(gx,\ x)\colon\ x \in \mathbf{H}^\kappa\}$。群表示 $\rho\colon \Gamma \to$等距变换群$(\mathbf{H}^\kappa)$ 具有一个长度函数 $\ell_\rho\colon\ \Gamma \to \mathbb{R}_{\geq 0}$定义为 $\ell_\rho\colon\ \gamma \mapsto \ell(\rho(\gamma))$。如果两个表示共轭（通过等距变换群$(\mathbf{H}^\kappa)$ 的内自同构相关联），那么它们具有相同的长度函数。

当维数 κ 是有限基数 $n \in \mathbb{N}$时，等距变换群$(\mathbf{H}^n)$的唯一自表示是内自同构，因此对于离散群 Γ，我们得到其在 $\mathbf{H}^n$上作用的广为研究的特征簇。特别是，其中对应于不可约表示的子集已得到充分理解：它们由长度函数刻画 [Kim01]，并构成一个光滑簇；其紧化由作用于具有小边稳定子的实树上的作用给出 [Mor86，Pau88]。

这项工作的主要创新在于同时考察所有基数 κ。注意，若以 $\omega = \mathsf{Card}(\mathbb{N})$ 表示无限可数基数，则有 $\kappa + \omega = \max\{\kappa, \omega\}$。与有限维情形的一个关键区别在于，存在一个由 $t \in (0, 1]$ 个奇异变形组成的族 $\mathfrak{c}_t\colon \mathbf{H}^\kappa \to \mathbf{H}^{\kappa+\omega}$，它们由以下度量关系刻画（其中 $\mathbf{d}$ 表示代数双曲空间上的距离）：

$$\forall x, y \in \mathbf{H}^\kappa\colon\ \cosh \mathbf{d}(\mathfrak{c}_t(x), \mathfrak{c}_t(y)) = (\cosh \mathbf{d}(x, y))^t.$$

这些奇异嵌入对应着奇异表示 $\chi_t\colon \mathrm{Isom}(\mathbf{H}^\kappa) \to \mathrm{Isom}(\mathbf{H}^{\kappa+\omega})$。事实证明，根据 [MP19]，，所有不可约表示 $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^\kappa) \to \mathrm{Isom}(\mathbf{H}^{\kappa'})$ 均由等距嵌入或从 $\mathbf{H}^\kappa$ 到$\mathbf{H}^{\kappa'}$的奇异包含所诱导。

奇异变形诱导长度函数的相似变换

$$\forall g \in \mathrm{Isom}(\mathbf{H}^\kappa)\colon \ell(\chi_t(g)) = t\ell(g)$$

因此，表示 $\rho\colon \Gamma \to \mathrm{Isom}(\mathbf{H}^\kappa)$ 及其奇异变形 $\chi_t \circ \rho$ 具有相似的长度函数。特别是，针对不可约表示的标记长度谱刚性[Kim01，定理 A] 在无限维情形下失效；我们将说明如何恢复这一刚性。需要强调的是，我们希望考察所有可能的表示 $\Gamma \to \mathrm{Isom}(\mathbf{H}^\kappa)$，而不仅仅是不可约表示；为此，（相似类的）长度函数并不足够，因为它无法区分椭圆型表示与抛物表示（其不动点位于 $\mathbf{H}^\kappa$ 或 $\partial\mathbf{H}^\kappa$ 中，且不含双曲元素），因为它们的长度函数都恒为零。

因此，为了在自表示意义下考察$\Gamma \to \mathsf{Isom}(\mathbf{H}^\kappa)$的表示，我们将使用 Monod 和 Py 在 [MP19] 中引入的一种工具，称为双曲型函数。对于一个表示$\rho\colon\ \Gamma \to \mathsf{Isom}(\mathbf{H}^\kappa)$和一个点 $o \in \mathbf{H}^\kappa$，可以关联一个双曲型函数$F_{\rho,o}\colon\ \Gamma \to \mathbb{R}$，其定义为$F_{\rho,o}\colon\ \gamma \mapsto \cosh \mathbf{d}(\rho(\gamma)x, x)$，它涵盖了轨道$\rho(\Gamma) \cdot o$中各点之间的所有距离。下面说明如何仅用一个不等式来刻画这类双曲型函数。

在拓扑空间 X上，核 是一个连续函数 $K\colon X^2 \to \mathbb{R}$，且具有对称性（$\forall x, y \in X\colon K(x,y) = K(y,x)$）。当 $\forall z \in X\colon K(z,z) = s$时，我们称其具有对角线 $s \in \mathbb{R}$。当 $\forall x, y \in X\colon K(x,y) \geq 0$时，我们称其为非负。

定义 A（双曲型核。定理 3.11）。当核 $K\colon X \times X \to \mathbb{R}$ 为非负且对角线上的值为 1，并且对所有 $x_0 \in X$ 由 $K_0\colon (x_i, x_j) \mapsto K(x_0, x_i)K(x_0, x_j) - K(x_i, x_j)$定义的视觉核$K_0\colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$均为正定型时，称其为双曲型核，即满足以下双曲型柯西-施瓦茨不等式：

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in X^n,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}^n\colon \quad \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \lambda_j K(x_i, x_j) \leq \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k K(x_0, x_k)\right)^2. \tag{HCS}$$

类似于希尔伯特空间的 GNS 构造，对于这样的双曲型核，可以构造一个双曲空间 $\mathbf{H}^\kappa$ 以及一个连续映射 $f\colon X \to \mathbf{H}^\kappa$，使得对所有$x, y \in X$，$K(x,y) = \cosh \mathbf{d}(f(x)\ fy)$。此外，如果该核在某个群作用 $\Gamma \to \mathfrak{S}(X)$下保持不变，则存在一个表示 $\Gamma \to \mathrm{Isom}(\mathbf{H}^\kappa)$，使得 f 为等变映射。

注记 B（凯莱-门格尔行列式）。 关于如何刻画度量空间 (X, d)能否等距嵌入某个 $\mathbf{H}^\kappa$ 的问题，早已有人研究，至少可以追溯到 Blumenthal 的工作[Blu70]（首次发表于 1950 年）。存在等距嵌入，当且仅当所有双曲 Cayley–Menger 行列式均非正：

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x_0, \ldots, x_n \in X\colon \det(-\cosh(d(x_i, x_j)) \leq 0.$$

我们将在第 3.2 节说明它与双曲型核的关系。凯莱-门格尔行列式的一个优点是，当 X 为有限时，它能简单地刻画存在等距嵌入的最小维数 κ。

将 为了在某个 $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^\kappa)$ 中编码群表示，我们将使用以下概念 .

定义 C（双曲型函数）。 在拓扑群 Γ 上，函数 $F\colon \Gamma \to \mathbb{R}$ 称为双曲型，如果核 $\Gamma \times \Gamma \ni (\alpha, \beta) \mapsto F(\alpha^{-1}\beta) \in \mathbb{R}$ 是双曲型的。

我们用 $\mathcal{F}(\Gamma)$ 表示 Γ 上具有逐点收敛拓扑的双曲型函数空间。当 Γ 是离散群时，它是乘积 $\mathbb{R}_{\geq 1}^\Gamma$ 的一个闭子空间。

对于连续表示 $\rho\colon \Gamma \to$ 等距变换群$(\mathbf{H}^\kappa)$，以及 $o \in \mathbf{H}^\kappa$ 中的点，函数

$$F_{\rho,o}\colon \Gamma \to \mathbb{R}_{\geq 1} \qquad F_{\rho,o}\colon \gamma \to \cosh \mathbf{d}(\rho(\gamma)o, o)$$

是双曲型函数。反过来，对于每个双曲型函数 $F\colon \Gamma \to \mathbb{R}$，都存在连续表示 $\rho\colon \Gamma \to$ 等距变换群$(\mathbf{H}^\kappa)$ 和点 $o \in \mathbf{H}^\kappa$，使得 $F = F_{\rho,o}$。注意，可以通过公式 $\ell_F(\gamma) = \lim_{+\infty} \frac{1}{n} \log F(\gamma^n)$，恢复任意相应表示的长度函数 $\ell_F\colon \Gamma \to \mathbb{R}_{\geq 0}$。

对于两个由 $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^\kappa)$ 共轭的表示 ρ, ρ'，以及两个点 $o, o' \in \mathbf{H}^\kappa$，相应的双曲型函数可比较：$\|\log(F_{\rho,o}) - \log(F_{\rho',o'})\|_\infty < \infty$。此外，对于 $t \in (0, 1]$，奇异变形与表示 $(\chi_t, \mathfrak{c}_t)$ 将双曲型函数指数化：$F_{\chi_t \circ \rho, \mathfrak{c}_t}(o) = F^t_{\rho,o}$。为囊括 $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^\kappa)$ 的所有自表示，我们将两个双曲型函数 $F, F'\colon \Gamma \to \mathbb{R}$ 定义为相似的，若存在 $t > 0$ 使得 F^t, F'可比较，也就是说，$\log(F^t/F')$ 在 Γ 上有界。因此，我们将作用簇 $\mathrm{P}\mathcal{C}(\Gamma)$ 定义为 $\mathcal{F}(\Gamma)$ 关于这种相似等价所成的拓扑商空间。

空间 $\mathrm{P}\mathcal{C}(\Gamma)$ 具有一些病态性质。例如，恒等于 1 的函数 $\mathbf{1}$ 的类位于任何其他类的闭包之中。但表示的类可能出现其他（不那么剧烈的）退化，从而导致特征簇的奇点（如同经典的特𝔠米勒理论中那样），这促使我们考虑如下的表示子集（例如类似于拟福克斯区域）。

表示 $\Gamma \to$等距变换群$(\mathbf{H}^\kappa)$（或一个双曲型函数）称为中性，当长度函数为平凡时，并称为初等，当存在一个不变非空子集，其至多包含2 个位于边界 $\partial\mathbf{H}^\kappa$ 中的点，或在 $\mathbf{H}^\kappa$中有一个不动点。双曲型函数的相似变换保持非中性与非初等性这些概念（定理 4.26），并将 $\mathbf{PC}(\Gamma)$ 的相应子空间记为 $\mathbf{PC}_{nn}(\Gamma) \supset \mathbf{PC}_{ne}(\Gamma)$。

如果两个双曲型函数可比较或相似，那么它们的长度函数相等或相似，因此我们得到一个函数 $\mathbf{P}\ell\colon \mathbf{PC}(\Gamma) \to \mathbf{P}(\mathbb{R}^\Gamma_{\geq 0})$。一个非平凡的双曲型函数（不属于常值函数1这一类）仍可能具有平凡的长度函数，即恒等于 0。

我们的主要定理6.2 和6.4 关于 $\mathbf{PC}(\Gamma) \supset \mathbf{PC}_{nn}(\Gamma) \supset \mathbf{PC}_{ne}(\Gamma)$ 的拓扑以及射影化长度函数 $\ell\colon \mathbf{PC}(\Gamma) \to \mathbf{P}(\mathbb{R}^\Gamma_{\geq 0})$ 如下所述。

定理 题 D （定义在 $\mathbf{PC}_{nn}(\Gamma) \supset \mathbf{PC}_{ne}(\Gamma)$上的长度函数）。设 Γ 为一个拓扑群。

长度函数 $\ell\colon \mathcal{F}(\Gamma) \to \mathbb{R}^\Gamma$ 由 $F \mapsto \ell_F$定义，经商得到函数 $\ell\colon \mathbf{PC}(\Gamma) \to \mathbf{P}\mathbb{R}^\Gamma$，该函数在限制到 $\mathbf{PC}_{nn}(\Gamma)$时连续且为单射；特别地，集合$\mathbf{PC}_{nn}(\Gamma)$和$\mathbf{PC}_{ne}(\Gamma)$ 是豪斯多夫的，并且在$\mathbf{PC}(\Gamma)$中是开集。

下述陈述说明当 Γ 有限生成时，$\mathbf{PC}(\Gamma)$、$\mathbf{PC}_{nn}(G)$与$\mathbf{PC}_{ne}(G)$的拓扑如何表现。 $\mathcal{F}$的子空间 $\mathcal{A}_{nn}(S; 2, \varepsilon)$与 $\mathcal{A}_{nn}(S; 2, \varepsilon)$在第6.1节中定义，并由生成集 S 与正数 ε参数化。

定理 E （$\mathbf{PC}$（Γ） $\supset \mathbf{PC}_{nn}$（G） $\supset \mathbf{PC}_{ne}$（G）的拓扑）。 设 Γ 为有限生成群。

1. 作用簇$\mathbf{PC}(\Gamma)$是紧的。*2.* 子空间$\mathbf{PC}_{nn}(\Gamma)$是紧致可度量子空间 $\mathcal{A}_{nn}(S; 2, \varepsilon)$的滤过并，因此限制$\mathbf{P}\ell\colon \mathcal{A}_{nn}(S; 2, \varepsilon) \to \mathbf{P}\mathbb{R}^\Gamma \setminus \{0\}$ 是到其像上的同胚。*3.* 子空间$\mathbf{PC}_{ne}(\Gamma)$是紧致可度量子空间 $\mathcal{A}_{ne}(S; 2, \varepsilon)$的滤过并，因此限制$\mathbf{P}\ell\colon \mathcal{A}_{ne}(S; 2, \varepsilon) \to \mathbf{P}\mathbb{R}^\Gamma \setminus \{0\}$ 是到其像上的同胚。

$\mathbf{P}\ell$ 的单射性：$\mathbf{PC}_{nn}(\Gamma) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 意味着，长度函数的相似类决定了双曲型函数的相似类：这是我们运用下一小节中发展的方法得到的长度谱刚性。

交比与长度谱刚性

我们将关注那些允许在某些非正曲率双曲空间上存在忠实作用的群的特征簇：这类作用通常在无穷远边界上更容易理解，而交比是编码度量渐近性质的重要工具。

取一个度量空间（X， d），它不一定是适当的或完备的。在基点 $o \in X$ 处定义格罗莫夫积 （$x \mid y$）$_o = \frac{1}{2}$（d（o， x） $+ d$（o， y） $- d$（x， y））以及视觉亚度量d_o（x， y） $=\exp$（$-$（$x \mid y$）$_o$）。因此， （x， x'）， （y， y'）的交比 $\in X^2 \times X^2$（对任意$o \in X$）定义为正实数：

$$[x, x'; y, y'] = \frac{d_o(x, x') \times d_o(y, y')}{d_o(x, y') \times d_o(y, x')} = \exp \tfrac{1}{2} \left(d(x, x') + d(y, y') - d(x, y') - d(y, x')\right)$$

交比 满足不变性、（反演）和（余循环）恒等式（参见第1.2 ）.

对于 $\varepsilon > 0$，当每个四面体 (x， x'， y， y') $\in X^4$ 满足$1 \leq [x, x'; y, y']^{-\varepsilon} + [x, x'; y', y]^{-\varepsilon}$，即关于 d_o^ε 的托勒密不等式时，(X， d) 是强-ε-双曲的：

$$d_o^\varepsilon(x, x') d_o^\varepsilon(y, y') \leq d_o^\varepsilon(x, y') d_o^\varepsilon(y, x') + d_o^\varepsilon(x, y) d_o^\varepsilon(x', y')$$

这意味着 δ-双曲性对于 $\delta = \log(2)/\varepsilon$；事实上，这是对 Gromov-双曲性的指数级强化，参见定理 1.1）。强-1-双曲空间这一类包含 $\mathrm{CAT}(-1)$-空间这一类，因此也包含任意维数的树和代数双曲空间。

第 1.1 节将介绍强双曲空间及其等距变换群的背景（以及新结果）。我们研究这一框架的主要动机，源于强双曲性确保交比能够连续扩张到边界化 $(X \cup \partial X)$ 中至少有 3 个元素互不相同的四元组子集上；此外，将其限制在边界 ∂X 中的此类四元组上时，还具有分离性质（见方程 $([\cdot] = 0)$ 和方程 $([\cdot] = \infty)$）。

注记 F（粗强双曲性）。 我们将看到，要具有这种连续扩张性质，只需假设 X 是粗强双曲的；这一概念等价于 $PT(-1)$-空间的渐近版本，该概念由 [MS12] 在讨论托勒密不等式时引入。

注记 G（为何要强双曲？）。 尽管本文应用中涉及的所有强双曲空间都是 $\mathsf{CAT}(-1)$ 空间，但采用如此一般的框架是自然的，原因在于下面的注记和问题。

所有“奇异”的度量空间嵌入（例如树 [BIM05] 或代数双曲空间[Mon20，命题 8。2]）到 $\mathbf{H}^\kappa$ 都源于这样一个事实：对于某个 $\lambda > 1$ 函数 λ^d 是 X上的双曲型核。因此我们可以探究：对于哪些度量空间 $(X,\ d)$ 存在某个 $\lambda > 1$ 使得 λ^d 是 X上的双曲型核?

我们的定理 4.13将说明，这样的空间必定是粗略强双曲的。

对于拓扑空间 Y，记 $Y^{(4)} \subset Y^4$ 为其中至少有 3 个互异点的四元组集合。我们将在拓扑空间 Y 上定义抽象交比的概念，它是一个连续函数 $B\colon Y^{(4)} \to [0, \infty]$，满足（不变性）、（反演）和（余循环）关系，以及对纤维在 0 和 ∞ 上方的刻画（$[\cdot] = 0$）和（$[\cdot] = \infty$）。若对于每组三个不同点 x、y、$z \in Y$，子集族 $\{w \in Y\colon B(w, x, y, z) < \varepsilon\}$（其中 $\varepsilon > 0$）构成 x 的邻域基，我们就称该抽象交比生成了拓扑。

例如，强双曲空间中的交比是一种生成拓扑的抽象交比。我们将证明以下定理4.6 和定理4.7。

命题H（关于3-全强双曲空间上的抽象交比）。 设强双曲空间(X, d) 及其子群 $\Gamma < \mathrm{Isom}(X)$ 在 ∂X 上传递地 3-传递作用。若 ∂X 上生成拓扑的抽象交比 B 是 Γ-不变的，则存在 $t > 0$，使得对所有 $(w, x, y, z) \in (\partial X)^{(4)}$，都有 $B(w, x, y, z) = [w, x, y, z]^t$。

因此，若强双曲空间的嵌入 $f\colon \partial X_1 \to \partial X_2$ 在其像上是同胚，且在子群 $\Gamma \subset \mathrm{Isom}(X_1)$ 的作用下等变，而该子群在 ∂X_1 上传递地3-传递作用，则存在 $t > 0$，使得对所有 $(w, x, y, z) \in (\partial X_1)^{(4)}$，都有

$$[f(w), f(x), f(y), f(z)]_{\partial X_2} = [w, x, y, z]^t_{\partial X_1}$$

这类抽象交比的概念已被用于证明表示的许多刚性结果（例如参见 [Ota92、Bou96、Lab08]）。

在此，我们将刻画源自嵌入到某个$\mathbf{H}^\kappa$中的抽象交比，并称之为代数交比。首先要指出，保留交比的 $\partial\mathbf{H}^\omega$ 双射由唯一的 X等距变换诱导；也就是说，$\partial\mathbf{H}^\kappa$ 的莫比乌斯群与$\mathbf{H}^\kappa$的等距变换群重合。接下来注意，在$\mathbf{H}^\kappa$的上半空间模型中，对于任意三个互不相同的边界点 0、1、$\infty \in \partial\mathbf{H}^\kappa$，$\partial\mathbf{H}^\kappa \setminus \{\infty\}$上存在一种希尔伯特空间结构，使得对所有 x、$y \neq \infty$:

$$[x, y, 0, \infty]\,[y, 0, 1, \infty] = \frac{\|y - x\|}{\|0 - 1\|}$$

此外，$\mathbf{H}^\kappa$ 中固定 ∞ 的等距变换在 $\partial\mathbf{H}^\kappa \setminus \{\infty\}$上作用为相似变换。这引出了以下定理 4.15。

定义 I（代数交比）。 在拓扑空间 Y 上，我们将 Y 上的代数交比定义为一种抽象交比，使得对于任意一组三个不同点，记为 0、1、 $\infty \in Y$，在 $(Y \setminus \{\infty\})^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 上定义的函数为

$$(x, y) \mapsto \left(R(x, y, 0, \infty) R(y, 0, 1, \infty)\right)^2$$

是定义在 $Y \setminus \{\infty\}$ 上的条件负定核。

对于拓扑空间 Y，条件负定核 K 上的经典 GNS 构造： $Y^2 \to \mathbb{R}$ 给出了希尔伯特空间 $\mathbb{R}^\kappa$ 和连续映射 f： $Y \to \mathbb{R}^\kappa$ 的存在，使得 $K(x, y) = \|f(x) - f(y)\|^2$。此外，若有群 Γ 作用于 Y 并保持 K，则该构造还会给出一个表示 ρ： $G \to \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^\kappa)$，使得 f 是 ρ-等变的。下面的定理 4.18 是关于代数交比的类似论述。回忆一下，若希尔伯特空间的一个子集不包含于任何真闭仿射子空间中，则称其为总体。

定理 J (代数交比的 GNS 构造)。 设拓扑空间 Y 至少包含四个点，并具有代数交比 R： $Y_{(4)} \to [0, +\infty)$。

存在一个基数 κ 和一个连续函数 f: $Y \to \partial \mathbf{H}^\kappa$ ，其全像具有如下性质：对于所有 $(x^-, x^+, y^-, y^+) \in Y_{(4)}$，均有 $[f(x^-)\ f(x^+); f(y^-)\ f(y^+)] = R(x^-, x^+, y^-, y^+)$。

此外，对于任意两个这样的映射 f_1: $Y \to \partial \mathbf{H}^{\kappa_1}$ 和 f_2: $Y \to \partial \mathbf{H}^{\kappa_2}$，存在唯一的等距变换 φ: $\mathbf{H}^{\kappa_1} \to \mathbf{H}^{\kappa_2}$ 使得 $f_2 = \varphi \circ f_1$，特别是 $\kappa_1 = \kappa_2$。

因此，若群 Γ 作用于 Y 且保持 R ，则存在一个表示 ρ: $\Gamma \to \mathrm{Isom}(\mathbf{H}^\kappa)$ ，使得 f 是 ρ-等变的。

最后，我们转向（整体）标记长度谱刚性的结果，即根据长度函数区分表示 ρ: $\Gamma \to \mathrm{Isom}(X, d)$ ℓ: $\Gamma \to \mathbb{R}_{\geq 0}$。下面的定理 4.23 给出了标记长度谱刚性，将有限维情形推广到 [Kim01]。当不存在非平凡的闭不变全测地子空间 ρ: $\Gamma \to \mathrm{Isom}(\mathbf{H}^\kappa)$ 所对应的表示 最小 $\emptyset \subsetneq \mathbf{H}^{\kappa'} \subsetneq \mathbf{H}^\kappa$)。

命题 K（标记长度谱刚性）。 设群 Γ 具有极小表示 ρ_i： $G \to$ 等距变换群$(\mathbf{H}^{\kappa_i})$，其中 $i = 1, 2$。若 ρ_1、 ρ_2 具有非平凡且相同的长度函数 $\ell_{\rho_1} = \ell_{\rho_2}$，则 $\kappa_1 = \kappa_2$ 与 ρ_1、 ρ_2 由等距变换共轭 $\mathbf{H}^{\kappa_1} \to \mathbf{H}^{\kappa_2}$。

在有限维情形下 n， [Kim01，定理 A]证明，两个扎里斯基稠密表示ρ_i： $\Gamma \to$ 等距变换群$(\mathbf{H}^n)$，其中 $i = 1, 2$，若具有相似长度函数（即存在 $\lambda > 0$ 使得 $\ell_{\rho_1} = \lambda \ell_{\rho_2}$），则必定共轭。在无穷维情形下，这一结论不成立，因为对于每个表示 ρ： $\Gamma \to$ 等距变换群$(\mathbf{H}^\kappa)$，只要其长度函数非平凡，对于每个 $t \in (0, 1)$，奇异变形 $\chi_t \circ \rho$ 都具有相似长度函数，但不与 ρ共轭。以下定理 4.26 给出了适用于任意维数的恰当推广，刻画了与相似标记长度谱相对应的表示和双曲型函数。

推论 L（相似标记长度谱）。 考虑双曲型函数 F_i： $\Gamma \to \mathbb{R}_{\geq 1}$ 给出非零长度函数 ℓ_i： $\Gamma \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，以及任意极小表示 ρ_i： $\Gamma \to$等距变换群$(\mathbf{H}^{\kappa_i})$ 实现 F_i。对每个 $t \in (0, 1]$ ，下列各项等价：

F： F_i 是 t-等价的，即$\log(F_1/F_2^t)$ 是有界的。ℓ_F： ℓ_i 是 t-相似的，即 $\ell_1 = t\ell_2$。ρ_F：表示 ρ_1 共轭于 t-形变表示 $\chi_t \circ \rho_2$。

几何收敛及与先前结果的比较

固定一个有限生成的无挠群 Γ。在我们的紧空间$\mathbf{P}\mathcal{C}(\Gamma)$中，我们可以考虑各类表示的各种子集的闭包，从而得到紧化。例如，对每个有限基数 $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$，我们可以考虑与忠实离散表示 $\Gamma \to$等距变换群$(\mathbf{H}^n)$相关联的相似类的子集$\mathbf{P}\mathcal{C}^n_{fd}(\Gamma)$。

我们应将这种紧化与此前已知的各种紧化进行比较，例如 [MS84、Mor86、Bes88、Pau88]中通过实树上的某些作用得到的特征簇紧化。更确切地说，Paulin 引入了作用空间上的等变 Gromov-Hausdorff 拓扑，并据此证明了以下结果。设 $\mathcal{H}^n_{fd}(\Gamma)$为忠实离散的 Γ-作用的 Gromov-Hausdorff 空间，$\mathbf{P}\mathcal{TS}(\Gamma)$为具有小边稳定子（非平凡测地线段的稳定子不包含秩为 ≥ 2的自由子群）的实树上 Γ-作用的 Gromov-Hausdorff 空间模去相似变换所得的商。注意，对于n_1、$n_2 \in \mathbb{N}$，若 $n_1 < n_2$，则 $\mathcal{H}^{n_1}_{fd} \subset \mathcal{H}^{n_2}_{fd}$。Paulin 在 [Pau88] 中证明，若 Γ 是一个包含秩为 2 的自由群的有限生成无挠群，则 $\mathcal{H}^n_{fd}(\Gamma)$可由 $\mathbf{P}\mathcal{TS}(\Gamma)$的一个闭子空间紧化。当 Γ 是亏格为 ≥ 2的闭曲面的基本群时，由 [Sko96，定理 3.2] 可知，对于所有 $n \geq 2$，$\mathcal{H}^n_{fd}(\Gamma)$在此紧化中的闭包就是 $\mathbf{P}\mathcal{TS}(\Gamma)$，这与通过测地层对 Teichmüller空间进行的 Thurston 紧化一致。

定理 6.21 展示了许多有限生成群 Γ，对于这些群，包含关系 $\bigcup_n \mathbf{P}\mathcal{C}^n_{fd}(\Gamma) \subset \bigcup_n \mathbf{P}\overline{\mathcal{C}^n_{fd}(\Gamma)} \sqcup \mathbf{P}\mathcal{TS}(\Gamma)$ 是严格的。

我们的定理 6.18 证实，我们的紧化恢复了 Paulin 的紧化；也就是说，在等变 Gromov-Hausdorff 拓扑下收敛等价于长度函数相似类的收敛。

定理 M (恢复忠实离散表示的紧化)。设 Γ 是一个包含秩为 2 的自由群的有限生成无挠群。*Gromov-Hausdorff*空间 $\mathbf{P}\mathcal{H}^n_{fd}(\Gamma) \sqcup \mathbf{P}\mathcal{TS}(\Gamma)$ 与其在 $\mathbf{P}\mathcal{C}(\Gamma)$ 中的像 $\mathbf{P}\mathcal{C}^n_{fd}(\Gamma) \sqcup \mathbf{P}\mathcal{TS}(\Gamma)$ 同胚。

我们的紧空间 $\mathbf{P}\mathcal{C}(\Gamma)$ 可能包含比 $\mathbf{P}\mathcal{TS}(\Gamma)$ 更多的实树作用，而这些作用可能是当 $\kappa_m \in \mathbb{N} \sqcup \{\omega\}$ 变化时，作用于 $\mathbf{H}^{\kappa_m}$ 上的作用的极限，下面我们将对此作出解释。

在实树 (T, d) 上，核 λ^d 是双曲型的，因此每个 Γ 对实树的作用都会产生一个双曲型函数的相似类：这些函数定义了 $\mathbf{P}\mathcal{T}(\Gamma) \subset \mathbf{P}\mathcal{C}(\Gamma)$ 的一个子集。注意，$\mathbf{P}\mathcal{TS}(\Gamma)$ 在 $\mathbf{P}\mathcal{T}(\Gamma)$ 中是闭的，因此 $\mathbf{P}\mathcal{T}(\Gamma) \setminus \mathbf{P}\mathcal{TS}(\Gamma)$ 中的点对应于新的表示类，这些表示类只有通过我们的紧化才能涵盖。满足 $\mathbf{P}\mathcal{T}(\Gamma) \setminus \mathbf{P}\mathcal{TS}(\Gamma) \neq \emptyset$ 的群 Γ 的例子包括以 ≥ 2 个生成元生成的自由群，以及实树的自同构群 (T, d)，其中 ∂T 是无限的。下面的定理 5.23 表明，重标度后的双曲空间收敛到实树，可以在 $\mathbf{H}^\omega$ 内以等变方式实现。

定理 N （几何收敛到树上的作用）。考虑一个由 S 有限生成的群 Γ，以及一个表示序列 $\rho_m\colon \Gamma \to$等距变换群$(\mathbf{H}^{\kappa_m})$，其基数为 $\kappa_m \in \mathbb{N} \cup \{\omega\}$。

如果没有任何 ρ_m 具有无穷远不动点，但当 $m \to \infty$时，S 上的位移长度下确界无界，则在必要时提取(ρ_m) 的一个子序列后，存在：

1. 一棵实树*(T, d)*以及一个等距作用 $\rho_T\colon \Gamma \to$等距变换群*(T)* *2.* 一个嵌入 $\mathfrak{p}_\lambda\colon T \to H^\omega$，关于 $\pi_\lambda\colon$ 等距变换群*(T)* $\to$等距变换群*(H^ω)*等变，且满足 $\lambda = e$，*3.* 一个等距作用 $\rho_\omega\colon \Gamma \to$等距变换群*$(H^\omega)$*，保持 $\mathfrak{p}_\lambda(T)$，*4.* 一个表示序列 $\rho'_m\colon \Gamma \to$ 等距变换群*(H^ω)*，使得 $F_{\rho'_m} \sim F_{\rho_m}$，*5.* 一个*$(\rho_m, \rho'_m)$*-等变奇异嵌入序列 $\mathfrak{c}_{t_m}\colon H^{\kappa_m} \to H^\omega$。

使得$(\rho'_m)_m\colon \Gamma \to$等距变换群$(\mathbf{H}^\omega)$ 收敛到 $\rho_\omega\colon \Gamma \to$等距变换群$(\mathbf{H}^\omega)$ 以及 $\rho_\omega = \pi_\lambda \circ \rho_T$。

此外，存在点 $o_m \in$核(ρ_m) 和 $o \in T$，使得对于每个有限集 $K \subset \Gamma$，$\mathfrak{c}_{t_m}(\mathrm{Conv}(\rho_m(K) \cdot o_m))$ 豪斯多夫收敛到 $\mathfrak{p}_\lambda(\mathrm{Conv}(\rho_\omega(K) \cdot o))$。

注记 O（Gromov-Hausdorff 收敛的应用）。 Courtois–Guilloux [CG24], 也使用奇异变形表示的重新缩放方法，得到了类似的结果，以获得极限集豪斯多夫维数连续性的结果。

在我们上面的陈述中，维数序列可以是任意的（由各种无界基数构成），因此为了得到我们的 Gromov-Hausdorff 收敛，我们需要对有限多个点的凸包给出一个与维数无关的度量估计，我们在[DS25]中证明了该估计，并在此回顾。

命题 P （凸包到1-骨架的豪斯多夫距离）。 对于点集 $X \subset \mathbf{H}^\kappa \cup \partial\mathbf{H}^\kappa$，其凸包 $\mathrm{Conv}(X)$ 中的每一点到其距离至多为 $\sinh^{-1}(1) = \log(1+\sqrt{2})$，即相对于其 1-骨架 $X^{(1)} = \bigcup_{x_1,\ x_2 \in Y} [x_1, x_2]$。

我们的定理 5.23构造了极限表示以及在极限树上的作用，并描述了趋向该极限的几何收敛。第 5.4 节将证明，这个实现为 $\mathbf{H}^\omega$ 的子空间的树上的作用，可以由双曲空间 $\mathbf{H}^{\kappa_m}$的超积直接构造出来。

定理 6.23 表明，对于许多群（它们作为在 $\mathbb{Z}$ 上的amalgamated积而分裂），空间$\mathbf{P}\mathcal{C}(\Gamma)$ 可能远大于 $\bigcup_n \mathbf{P}\mathcal{C}^n(\Gamma) \sqcup \mathbf{P}\mathcal{T}(\Gamma)$。

在 $\mathbf{H}^\kappa$ 上具有唯一相似类作用的群

在本文的最后一部分，我们证明某些特别受关注的群在某个$\mathbf{H}^\kappa$ 上恰好具有一个非初等作用（在上文所引入的等价意义下）。

定理 Q （定理7.17）。 如果 G 是下列拓扑群之一：

1. 等距变换群 等距变换群$(\mathbf{H}^\kappa)$，即具有可数维 κ 的实双曲空间$\mathbf{H}^\kappa$ 的等距变换群，*2.* 等距变换群 $\mathrm{Aut}(T_\kappa)$，即 κ-正则单纯树 T_κ 的等距变换群，其中 $\kappa \geq 3$ 可数，*3.* 群 $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$，其中 $\mathbb{K}$ 为完备非阿基米德赋值域

则空间 $\mathbf{P}\mathcal{C}_{ne}(G)$ 恰好有一个点。

这一结论的部分情形早已为人所知，例如第一项 [MP19]，或者在群是局部紧时的另外两项 [BIM05]。我们将它们归为一个结果，因为我们从一个更一般的结果推出（唯一性）：关键在于，这些群在某个 $\mathrm{CAT}(-1)$ 空间 (X, d) 上有作用（该空间是双曲空间 $\mathbf{H}^\kappa$ 或实树），而且该作用足够丰富，能够反映群的结构。更准确地说，我们将证明以下定理 7.14，其中有界性以及 3-满作用在第 7节中定义。

定理 R （作用于 $\mathrm{CAT}(-1)$ 空间的群的刚性）。 设拓扑群G 在 $\mathrm{CAT}(-1)$-空间 (X, d)上有一个 3-满作用。如果 G 的每个非初等连续作用于$\mathbf{H}^\kappa$ 都是 $\mathcal{E}_d$-有界保持的，那么$\mathbf{P}\mathcal{C}_{ne}(G)$ 至多只有一个点。

注记 S（无局部紧性，无盖尔范德对）。 本陈述的主要新颖之处在于如下事实： G 未必是局部紧的。特别地，先前诸证明所依赖的盖尔范德对概念在此情形下并不适用。因此，我们采用另一种策略，它依赖于交比在相差幂次意义下的唯一性（定理 H）以及长度谱刚性（定理 K）。

定理 R 的证明思路。 我们首先构造一个 G等变边界映射 $\partial X \to \partial\mathbf{H}^\kappa$，它在其像上是一个同胚。利用这个映射，我们可以将交比从$\partial\mathbf{H}^\kappa$ 拉回到 ∂X。然后，我们利用有界性证明该映射的双连续性（在局部紧的情形下，这一点是自动成立的）。最后，我们利用 ∂X 上交比在幂次意义下的唯一性完成证明。 □

进一步的结果、若干问题及与其他工作的关系

$\mathbf{P}\mathcal{C}(\Gamma)$的几何：维数分级、连通性、度量

注记 T（临界指数与 $\mathbf{P}\mathcal{C}(\Gamma)$ 的维数分级）。对于双曲型函数 $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$，我们将其临界指数定义为使得 $t > 0$ 满足 F^t 为双曲型函数的所有取值的上确界（定理 5.1）。我们证明，临界指数在 $\mathcal{F}(\Gamma)$ (定理 5.5）上半连续。我们将实树上的作用刻画为临界指数为无穷大（定理 5.3 ）。

对于具有有限临界指数的双曲型函数的相似类，通过选取临界指数为 $\mathbf{P}\mathcal{C}(\Gamma) \to \mathcal{C}(\Gamma)$ 的函数，我们得到一个优选提升 1：由此得到一个临界维数 κ 和一个临界表示 $\rho\colon \Gamma \to$ 等距变换群$(\mathbf{H}^\kappa)$。我们证明，在临界指数有限的情形下，临界维数在$\mathbf{P}\mathcal{C}(\Gamma)$(定理5.8)上半连续。

因此，临界维数在$\mathbf{P}\mathcal{C}(\Gamma)$上给出一种分级，其无穷值轨迹是由树上的作用构成的无穷远边界。

问题 U（连通性与弯曲）。对于哪些群 Γ，$\mathbf{P}\mathcal{C}_{ne}(\Gamma)$ 或$\mathbf{P}\mathcal{C}_{fd}(\Gamma)$ 是连通的？若是，是否存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得相应的空间 $\mathcal{C}^n_{ne}(\Gamma)$ 或 $\mathcal{C}^n_{fd}(\Gamma)$ 连通？我们能否根据群 Γ 的（有界）同调不变量或同伦类型，找到这类连通性的障碍？

在一个拓扑空间上，正型核构成一个对乘积稳定的凸 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 锥，而条件负定核构成一个凸 $\mathbb{R}_{\geq 0}$-锥）。类似地，我们想知道双曲型核在某些加权平均下是否稳定（这些加权平均仅依赖于核，而不依赖于空间中点的选取）。

对于作为亏格为 $g \geq 2$的闭可定向曲面之基本群的 $\Gamma = \pi_1(\Sigma_g)$，定理 6.23表明弯曲过程如何使人在不同的表示类之间移动，从而在$\mathbf{P}\mathcal{C}(\Gamma)$中得到由一个无限维李群参数化的一族互异点。这就提出了如下问题：若$\mathbf{P}\mathcal{C}_{ne}(\Gamma)$或$\mathbf{P}\mathcal{C}_{fd}(\Gamma)$中的两点是连通的，它们能否通过弯曲与极限相连接？我们注意到，$\mathbf{P}\mathcal{H}^2_{fd}(\Gamma)$通过弯曲是连通的，因为Teichmüller空间中任意两点都可通过一列Goldman 扭转 [Gol86], 相连接，而这些扭转可借助其Fenchel-Nielsen坐标显式写出，因此紧化$\mathbf{P}\mathcal{H}^2_{fd}(\Gamma) \sqcup \mathbf{P}\mathcal{TS}(\Gamma)$通过弯曲与极限是连通的。这一问题可以推广到 Γ 群图（在Bass-Serre意义下）的基本群，使得所有带有非平凡群的边都将该图分离。

问题 V（类型结构与分层上的度量）。在群 Γ上，将其共轭类划分为 类型结构 定义为 3 种类型（椭圆型、抛物型、双曲型）；这些类型来自该群在 Gromov 双曲度量空间上的作用。许多群都具有自然的类型结构：作用在其 Cayley 图上的双曲群、作用在曲线复形上的曲面映射类群（见定理 Z），以及作用在 $\mathbf{H}^\omega$ 上的克雷莫纳群（见定理 2.11）。

每个类型结构 ι 在 Γ 上都会产生由保型类构成的一个分层 $\mathbf{P}\mathcal{C}_\iota(\Gamma) \subset \mathbf{P}\mathcal{C}(\Gamma)$，并由此得到对所有可能类型的划分$\mathbf{P}\mathcal{C}(\Gamma) = \sqcup_\iota \mathbf{P}\mathcal{C}(\Gamma)$。我们不禁会想：对于一个群$\Gamma$，它有多少个分层？这些分层如何彼此环绕？特殊点分层的拓扑结构如何？关于按类型划分$\mathbf{P}\mathcal{C}(\Gamma) = \sqcup_\iota \mathbf{P}\mathcal{C}_\iota(\Gamma)$的规模与拓扑结构的这些问题，将有助于更清晰地揭示其刚性性质。

最后，可以仿照 D：$\mathbf{P}\mathcal{C}_\iota(\Gamma) \to [0, +\infty]$定义每个分层上的度量 [Thu22]和 [OR23], 如下。对于 $[F_1]$，$[F_2] \in \mathbf{P}\mathcal{C}_\iota(\Gamma)$，考虑所有代表元上的下确界$F_1$，$F_2 \in \mathcal{F}_\iota(\Gamma)$ 的

$$D(F_1, F_2) = \inf \{\log|\ell_{F_1}(\gamma)/\ell_{F_2}(\gamma)| \colon \gamma \in \Gamma \text{ is } \iota\text{-loxodromic}\}$$

人们可以研究这些度量在分层上的性质，以及 Out(Γ) 的等距作用的几何与动力学。

强双曲空间与$\mathrm{CAT}(-\varepsilon)$ 空间上的几何作用

问题 W（强双曲且 $\mathrm{CAT}(0) \implies \mathrm{CAT}(-1)$）。 Gromov 的 Jungentraum（[Gro93, 第 193]页）旨在证明每个（有限生成的）双曲群 Γ都在某个 $\mathrm{CAT}(-1)$ 空间上具有几何作用（适当且余紧）。尽管这一问题至今仍悬而未决，人们预计该命题不成立，但目前还没有已知的反例。一个较弱但同样悬而未决的问题是：该群是否存在一个 $\mathrm{CAT}(0)$模型。

引入强双曲空间这一类优良的 Gromov 双曲空间（其中包含$\mathrm{CAT}(-1)$空间），部分动机正是这个问题 [Nic19]。事实上 [NŠ16] 证明，在一个双曲群 Γ上，由随机游走产生的 Green 度量是强双曲的，因此 Γ 在一个强双曲空间上适当地余紧作用。

在强双曲空间的一般背景下开展研究时，我们由此获得了若干关于交比与度量之间关系的新性质，例如定理 1.17 和定理 1.18。若额外假设$\mathrm{CAT}(0)$ ，证明这类性质会容易得多（见定理 1.15）。

这引出了以下定理 1.16。设 (X,d) 是强1双曲的且满足 $\mathrm{CAT}(0)$：它何时是 $\mathrm{CAT}(-1)$？（这是对 [NŠ16，定理 4.2] 的逆命题。）

注记 X（凸余紧）。 设 Γ 是一个双曲型群。受 Furman [Fur02],Reyes [OR23] 的思想启发，考虑空间 $\mathcal{D}(\Gamma)$，它由 Γ 上与某个长度度量准等距、模粗相似等价的伪度量类构成。

如果 $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$ 是群 Γ 上的双曲型函数，那么 $d(\gamma_1,\gamma_2) = \cosh^{-1}(F(\gamma_1^{-1}\gamma_2))$ 是 Γ 上的伪度量（因为存在一个表示 $\rho\colon \Gamma \to$ 等距变换群$(\mathbf{H}^\kappa)$，以及 $o \in \mathbf{H}^\kappa$ ，使得 $\cosh^{-1}(F(\gamma_1^{-1}\gamma_2)) = \mathrm{d}(\rho(\gamma_1)o, \rho(\gamma_2)o)$）。此外，两个双曲型函数是相似的，当且仅当它们所对应的伪度量按照 [OR23] 的意义粗相似。最后，Xu [Xu24] 证明，对于作用于 $\mathbf{H}^\kappa$上的有限生成群 Γ，轨道映射 $\Gamma \to \mathbf{H}^\kappa$ 是准等距映射，当且仅当该作用是凸紧的（这是 $\mathbf{P}\mathcal{C}(\Gamma)$ 中的一个开条件）。

这给出了从此类凸余紧作用的空间 $\mathbf{P}\mathcal{C}_{cc}(\Gamma)$ 到空间 $\mathcal{D}(\Gamma)$ 的一个单射。Reyes 猜想，对于有限生成自由群 Γ，对应于有限维凸余紧作用 $\bigcup_n \mathbf{P}\mathcal{C}^n_{cc}(\Gamma)$ 的类的集合在 $\mathcal{D}(\Gamma)$ 中具有稠密像。

哪些群忠实地作用在 $\mathbf{H}^\kappa$ 上?

问题 Y（简单图的自同构群）。 给定一个由邻接矩阵 A 在顶点集合 X上的简单图，即一个 $X \times X$ 矩阵，其元素取自具有对角线为 0 的布尔半域 $\{0,1\}$。这给出了一个度量空间（X， d），其中顶点 u， $v \in X$之间的距离由路径度量给出： $d(u,\ v) = \min\{n \in \mathbb{N}_{>0}\colon\ A^n_{uv} > 0\}$。图的自同构群 $\mathrm{Aut}(A)$ 与等距变换群 $\mathrm{Isom}(X,\ d)$ 重合。

一个一般性的问题是：哪些图允许距离的某个函数 d （例如 d 的多项式及其指数 $\exp(\varepsilon d)$），使其成为双曲型核 $C\colon\ X \times X \to \mathbb{R}$，并且是分离的（在定理 3.7 的意义下）。这将给出一个嵌入 $X \to \mathbf{H}^\kappa$ ，它在其自同构群的某个表示下是等变的 等距变换群$(X,d) \to$ 等距变换群$(\mathbf{H}^\kappa)$。

特别地，我们可以将 (X,d) 的临界指数定义为 $\varepsilon \in \mathbb{R}_{\geq 0}$的上确界，使得核 $C = \exp(\varepsilon d)$ 是双曲型的（注意， $\varepsilon = 0$ 总是给出平凡双曲型函数）。临界指数为 $+\infty$ 当且仅当 (X,d) 等距嵌入某个实树（见定理 1.6 及其前后的注记），并且这类图具有一种组合刻画（称为块图，见 [How79，定理4.3]）。

是否存在一种组合刻画，能够描述临界指数为正的无限单纯图，也就是说，哪些图存在 $\varepsilon > 0$使得 $C = \exp(\varepsilon d)$ 是双曲型核?

问题 Z（映射类群）. 考虑一个曲面 $\Sigma_{g,n}$，其亏格为 g，有 n 个穿孔点，且欧拉示性数为负。我们想知道哪些映射类群 $\mathrm{Mod}(\Sigma_{g,n})$ 能忠实表示到某个 κ 对应的等距变换群 $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^\kappa)$ 中。如果这样的映射类群在 $\mathbb{R}$ 上非线性，那么 κ 必须是无限的。若存在这样一个没有不动点的表示，则 $\mathrm{Mod}(\Sigma_{g,n})$ 不具有 Kazhdan 性质（T）；若存在这样一个度量适当的表示，则 $\mathrm{Mod}(\Sigma_{g,n})$ 具有 Haagerup 性质。

复维数为 $3g-3+n\geq 2$ 的 Teichmüller 空间对于所有经典度量（Teichmüller [MW95],Weil-Petersson [BF06], Thurston [HP21]）都不是格罗莫夫双曲的。然而，Bonahon [Bon88] 证明了（对于 $n=0, g\geq 2$），带有交形式 $\mathfrak{I}\colon \mathcal{GC}(\Sigma_{g,n})\times\mathcal{GC}(\Sigma_{g,n})\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ 的 $\pi_1(\Sigma_{g,n})$ 上的测地流空间 $\mathcal{GC}(\Sigma_{g,n})$ 包含一份 Teichmüller 空间，它位于正水平集 $\{x\in\mathcal{GC}(\Sigma_{g,n})\colon \mathfrak{I}(x,x)=\pi|\chi|\}$ 中；而测地层空间则与各向同性锥 $\mathcal{ML}(\Sigma_{g,n})=\{\xi\in\mathcal{GC}(\Sigma_{g,n})\colon \mathfrak{I}(\xi,\xi)=0\}$ 等同，这使他得以恢复 Thurston 紧化。这让人想起双曲几何中的双曲面模型，不过交形式的惯性指数为 $\geq 3g-3+n$（因为限制到 $\mathcal{ML}(\Sigma_{g,n})$ 时等号成立）；尤其是，交形式在 $\mathcal{ML}(\Sigma_{g,n})$ 上并未定义定理 4.4 意义下的分离配对。

然而，如果我们将范围限制在填充的射影测度层状结构子集$\mathbf{P}\mathcal{ML}\mathcal{F}(\Sigma_{g,n})\subset\mathbf{P}\mathcal{ML}(\Sigma_{g,n})$，那么交叉比函数是分离的，并且按照定理4.4的意义生成拓扑。这意味着我们在$\mathbf{P}\mathcal{ML}\mathcal{F}(\Sigma_{g,n})$上得到一个抽象交比，它通过以下公式生成拓扑：

$$\forall(u,v,x,y)\in\mathbf{P}\mathcal{ML}\mathcal{F}(\Sigma_g)^{(4)}\quad:\quad B(u,v,x,y)=\tfrac{\mathfrak{I}(u,v)\,\mathfrak{I}(x,y)}{\mathfrak{I}(u,y)\,\mathfrak{I}(x,v)}.$$

我们还可以进一步将其限制在由伪阿诺索夫元素固定的射影测度层状结构空间 $\mathbf{P}\mathcal{ML}\mathcal{A}(\Sigma_{g,n})$。这个抽象交比是定理 I意义下的代数交比吗？若答案为肯定，则可由定理J得到一个嵌入 $\mathcal{ML}\mathcal{A}(\Sigma_g)\to\partial\mathbf{H}^\kappa$，它关于忠实表示 $\mathrm{Mod}(\Sigma_g)\to\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^\kappa)$等变。

一个较弱的问题是，$\mathrm{Mod}(\Sigma_{g,n})$ 是否在某个强双曲空间上存在忠实作用（或许是不动点自由的或度量适当的）。当 $3g-3+n\geq 2$ 和 $(g,n)\neq(1,2)$ 时，扩展映射类群 $\mathrm{Mod}^{\pm}(\Sigma_{g,n})$ 通过曲线图 $\mathcal{SC}(\Sigma_{g,n})$ 的自同构忠实作用（事实上，根据 [Iva97、Luo00]，$\mathrm{Mod}^{\pm}(\Sigma_{g,n})$ 与 $\mathrm{Aut}\,\mathcal{SC}(\Sigma_{g,n})$ 一致）。根据 [MM99]，曲线图是 Gromov 双曲的，其边界可识别为终端层状结构空间 $\partial\mathcal{SC}(\Sigma_{g,n})=\mathcal{ML}\mathcal{E}(\Sigma_{g,n})$，其中的元素都是填充的。此外，$\mathrm{Mod}(\Sigma_{g,n})$ 在 $\mathcal{SC}(\Sigma_{g,n})$ 上的作用所对应的双曲型元素恰好是伪阿诺索夫元素，其不动点可识别为 $\mathcal{ML}\mathcal{A}(\Sigma_{g,n})\subset\partial\mathcal{SC}(\Sigma_{g,n})$。因此，我们想知道哪些曲线图 $\mathcal{SC}_{g,n}$ 是强双曲的。对于这些曲线图，其边界上的度量交比是否与上文定义的交叉比一致?

关于前面的定理 Y，我们也想知道曲线图是否存在一个距离函数，从而得到双曲型的分离核。

约定与记号

“任意”一词始终按严格意义使用，即“对某些成立，等价地，对所有成立”。自然整数集合 $\mathbb{N}$ 包含 0，而 $\mathbb{N}^*=\mathbb{N}\setminus\{0\}$则不包含。对于一个数集，我们用下标表示对某些数集施加的限制，例如 $\mathbb{N}_{\geq 2}$、$\mathbb{R}_{\geq 1}$。

1 强双曲空间的几何

我们将回顾 [NŠ16、DSU17] 中强双曲空间的概念及其性质。强双曲空间是度量空间（可能不适当或不完备），其距离满足加强版的格罗莫夫双曲性条件，从而确保其边界带有连续交比，并满足适当的分离性质。强双曲空间类包含 $\mathrm{CAT}(-1)$-空间类，因此也包含树以及任意维数的代数双曲空间；这些将是我们关注的核心。

简要回顾一下 [BH99，第 II 章1] 中关于 $\varepsilon \geq 0$ 度量空间是 $\mathrm{CAT}(-\varepsilon)$ 的条件：它是测地的（任意两点之间都存在一条测地线），且测地三角形的边长满足 $\mathrm{CAT}(-\varepsilon)$不等式（即这些三角形比边长相同、位于曲率为 $-\varepsilon$ 的唯一完备哈达玛空间中的比较三角形更瘦）。

1.1 强双曲空间及其边界

固定一个度量空间（X， d）。取基点 $o \in X$，对于 x， $y \in X$，定义格罗莫夫积 $(\cdot|\cdot)_o$: $X^2 \to [0, +\infty)$和视觉亚度量 d_o: $X^2 \to (0, +\infty)$:

$$(x \mid y)_o = \tfrac{1}{2}\left(d(o,x) + d(o,y) - d(x,y)\right) \qquad d_o(x,y) = \exp\left(-(x \mid y)_o\right).$$

对于 $\delta > 0$，空间（X， d）称为格罗莫夫-δ-双曲型，如果:

$$\forall o, x, y, z \in X: \quad (x \mid z)_o \geq \min\{(x \mid y)_o, (y \mid z)_o\} - \delta$$

或者等价地，对于每个四面体 $(x, y, x', y') \in X^4$:

$$d(x,x') + d(y,y') \leq \max\{d(x,y') + d(y,x'), d(x,y) + d(x',y')\} + 2\delta.$$

对于 $\varepsilon > 0$，空间 (X, d) 是强ε双曲型 的，当且仅当:

$$\forall o, x, y, z \in X: \quad d_o^\varepsilon(x,z) \leq d_o^\varepsilon(x,y) + d_o^\varepsilon(y,z) \tag{1}$$

或者等价地 每个四面体 $(x, x', y, y') \in X^4$ 满足关于 d_o^ε 的托勒密不等式 :

$$d_o^\varepsilon(x,x')d_o^\varepsilon(y,y') \leq d_o^\varepsilon(x,y')d_o^\varepsilon(y,x') + d_o^\varepsilon(x,y)d_o^\varepsilon(x',y') \tag{2}$$

它 也可以改写为关于 $\exp(\frac{1}{2}\varepsilon d$ 的托勒密不等式（且与 o 独立） -):

$$\exp\tfrac{\varepsilon}{2}\left(d(x,x') + d(y,y')\right) \leq \exp\tfrac{\varepsilon}{2}\left(d(x,y') + d(y,x')\right) + \exp\tfrac{\varepsilon}{2}\left(d(x,y) + d(x',y')\right) \tag{3}$$

从现在起，我们假设 (X, d) 具有强ε双曲性，其参数为 $\varepsilon > 0$。由此可得 ([NŠ16，定理 4.2]): (X, d) 是 Gromov-δ双曲的，参数为 $\delta = \ln(2)/\varepsilon$。

注记 1.1（强双曲性是对 Gromov-双曲性的一种指数级强化）。根据 [NŠ16，引理 6.2],，Gromov-双曲空间 (X, d) 是强双曲的，当且仅当存在 $C, \varepsilon_2, R_0 \in \mathbb{R}_{>0}$，使得对于任意四面体 $(x, y, x', y') \in X^4$ 以及 $R \geq R_0$，若$d(x,x') + d(y,y') \geq R$，则有 $|d(x,x') + d(y,y') - d(x,y') - d(y,x')| \leq C\exp(-\varepsilon_2 R)$。

我们称一个序列 $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ 收敛到无穷远，当 $(x_n \mid x_m)_o \to \infty$ 随着 m， $n \to \infty$ 时；并且称两个序列 (x_n)，$(y_n) \in X^{\mathbb{N}}$ 收敛到无穷远是等价 的，当 $(x_n \mid y_m)_o \to \infty$ 随着 m， $n \to \infty$ 时。这些概念不依赖于 $o \in X$。Gromov 边界 ∂X 是收敛到无穷远的序列的等价类的集合。

(X, d) 的边界化是一个不交并 $X \sqcup \partial X$，赋予如下拓扑：当 $U \cap X$ 在 X 中是开集，且对所有 $u \in U \cap \partial X$ 都存在

$t > 0$ 使得 $V_o^t(u) = \{v \in X \sqcup \partial X : (u \mid v)_o > t\}$ 包含于 U；这与o无关，且是完备可度量化的（见 [DSU17, §3.4.2]）。

强双曲性保证格罗莫夫积 $(\cdot|\cdot)_o\colon (X \sqcup \partial X)^2 \to [0, +\infty]$（依据 [DSU17，引理 3.4.22]）可连续扩张到 $X \sqcup \partial X$ 的边界化上，因此，托勒密超度量 $d_o^\varepsilon\colon (X \sqcup \partial X)^2 \to [0, +\infty)$ 也可扩张到该边界化上；根据 [DSU17，观察 3.6.7]，它成为一个与 $X \sqcup \partial X$ 上的拓扑相容的完备超度量，并且恰好只在边界上限制为度量。由此，从 o 出发、参数为 ε 的边界视觉度量，记作 $d_o^\varepsilon\colon (\partial X)^2 \to [0, +\infty)$，便恢复了 ∂X的拓扑。

注记 1.2（Hamenstädt视觉度量）。我们回顾一下 [DSU17，命题 3.6.19]。对于每一对 $(o, \infty) \in X \times \partial X$，存在完备超度量 $d_{o,\infty}^\varepsilon$，其定义在 $(X \sqcup \partial X) \setminus \{\infty\}$ 上：

$$d_{o,\infty}^\varepsilon(x, y) = \exp\left[-\varepsilon\left((x \mid y)_o - (x \mid \infty)_o - (y \mid \infty)_o\right)\right] = \frac{d_o^\varepsilon(x, y)}{d_o^\varepsilon(x, \infty) d_o^\varepsilon(y, \infty)} \tag{4}$$

它与由 $(X \sqcup \partial X)$ 上的拓扑在 $(X \cup \partial X) \setminus \{\infty\}$ 上诱导的拓扑相容，并且 $B \subset (X \sqcup \partial X) \setminus \{\infty\}$ 有界当且仅当 $\infty \notin B$；此外，$d_{o,\infty}^\varepsilon$ 在 $\partial X \setminus \{\infty\}$ 上的限制是一个度量，称为 Hamenstädt视觉度量。

注意，对所有 $x \in (X \sqcup \partial X) \setminus \{\infty\}$，都有 $d_{o,\infty}^\varepsilon(x, o) = 1/d_o^\varepsilon(x, \infty)$。

注记 1.3（Busemann函数）。对于 $\xi \in X$，Busemann函数 $\mathrm{Bus}_\xi\colon X \times X \to \mathbb{R}$ 对 $y, z \in X$ 定义为 $\mathrm{Bus}_\xi(y, z) = d(y, \xi) - d(z, \xi) = (z \mid \xi)_y - (y \mid \xi)_z$。根据 DSU17，引理 3.4，后一个公式连续延拓到 $\xi \in X \sqcup \partial X$，其定义为 [10]，且在此处它在 Γ 对 $(X \cup \partial X) \times X^2$ 的对角作用下保持不变。对于所有 $\xi \in (X \cup \partial X)$ 以及 $x, y, z \in X$，它满足三角不等式 $|\mathrm{Bus}_\xi(y, z)| \leq d(y, z)$，并满足可加性 $\mathrm{Bus}_\xi(y, z) = \mathrm{Bus}_\xi(y, x) + \mathrm{Bus}_\xi(x, z)$。

以下这类强双曲空间在本文中发挥着重要作用。

定义 1.4（实树）。度量空间 (T, d) 称为实树，如果任意两点之间都存在唯一的单射线段，且这些线段都是等距变换。

注记 1.5（连通的 Gromov-0-双曲）。度量空间 (T, d) 是实树，当且仅当它是连通的且为 Gromov-0-双曲（见 [Eva08，第 3]章）。Gromov-0-双曲性意味着任意四元组 $o, x, y, z \in T$都满足 $(x \mid z)_o = \max\{(x \mid y)_o, (y \mid z)_o\}$；也就是说，对于每个 $o \in T$，视觉亚度量 $d_o\colon T \times T \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 都是超度量。

以下引理表明，可以对 0-双曲度量空间中的点进行极小插值，从而得到一棵实树，且该实树在等变等距变换意义下唯一确定。

命题 1.6（将 0-双曲型空间嵌入实树）。设 (X, d) 是一个0-双曲型度量空间。存在一棵实树 T 以及一个等距嵌入 $\varphi\colon X \to T$，使得 $T = \bigcup_{x, y \in X} [\varphi(x)\ \varphi(y)]$，并存在一个表示等距变换群$(X) \to$等距变换群$(T)$，使得 φ是等变的。

证明。这一众所周知事实的一部分见 [GdlH90，习题 8]。完整命题的证明可由一个非常相似的结果的证明推出 [Eva08，定理 3。38]（只需检验他们的构造不依赖于最初选取的基点）。□

注记 1.7（连通强$(+\infty)$双曲）。实树是 $\mathrm{CAT}(-1)$ 空间，因此是参数为 1 [NŠ16，定理 5。1]。此外，由于实树的定义在以正实数缩放度量时保持不变，因此实树对所有 ε 都是强 $\varepsilon \in (0, +\infty)$双曲的。反过来，对所有$\varepsilon$，若一个连通度量空间都是强$\varepsilon \in (0, +\infty)$ 双曲的，则它是Gromov-0-双曲的，因而是实树。

1.2 强双曲空间的交比

设 (X,d) 是一个强双曲度量空间。$(x,x'),(y,y')$ 的交比 $\in X^2\times X^2$ 是正实数：

$$[x,x';y,y']=\exp\tfrac{1}{2}\left(d(x,x')+d(y,y')-d(x,y')-d(y,x')\right). \tag{5}$$

交比这一名称的由来是，对所有 $o\in X$，我们都有：

$$[x,x';y,y']=\frac{d_o(x,x')\times d_o(y,y')}{d_o(x,y')\times d_o(y,x')}. \tag{6}$$

交比在交换这对对象或同时反转二者方向的 $(\mathbb{Z}/2)^2$-作用下保持不变，公式如下：

$$[x,x';y,y']=[y,y';x,x']=[x',x;y',y]. \tag{Invariance}$$

此外，交换 $(x,\ y)$ 或 $(x',\ y')$，交比满足以下反演规则：

$$[x,x';y,y']=[y,x';x,y']^{-1}=[x,y';y,x']^{-1}. \tag{Inversion}$$

更一般地，它满足余循环关系：对于每个 $x''\in X$，我们都有：

$$[x,y;x',y']=[x,y;x'',y']\times[x'',y;x',y']. \tag{Cocycle}$$

（注意，这种交比的概念可定义于任意度量空间 $(X,\ d)$，并且根据方程（3），可用它来刻画强ε双曲性：所有四面体 $(x,\ x',\ y,\ y')\in X^4$ 均满足 $1\le[x,x';\ y,\ y']^{-\varepsilon}+[x,x';\ y',\ y]^{-\varepsilon}$。）

强双曲性保证交比可以连续延拓到边界化 $(X\sqcup\partial X)$ 中取值于 $(0,\infty)$ 的互异点四元组上，并在其上定义一个连续函数，该函数在 $\mathrm{Isom}(X,d)$ 对 $(\partial X)^{(4)}$的对角作用下保持不变，并满足（不变性）、（反演）和（余循环）关系。

此外，交比还可以通过连续性延拓到子空间 $\partial^4X\subset(\partial X)^4$，即至少有三个点互异的四元组所成的子空间，其取值于 $[0,\infty]$；由边界视觉度量的分离性质，它满足：

$$\left[a^-,a^+;b^-,b^+\right]=0\iff(a^-=a^+)\text{ or }(b^-=b^+) \tag{$[\cdot]=0$}$$
$$\left[a^-,a^+;b^-,b^+\right]=\infty\iff(a^-=b^+)\text{ or }(b^-=a^+). \tag{$[\cdot]=\infty$}$$

注意，如果 $a^-=b^-$ 或 $a^+=b^+$，则有 $[a^-,a^+;\ b^-,\ b^+]=1$，但反过来往往不成立。具体地说，回顾一下，对于每个 $o\in X$，∂X 都赋有视觉距离 $d_o^\varepsilon(x,y)=\exp(-\varepsilon(x\mid y)_o)$，于是对于 $(a^-,a^+,b^-,b^+)\in\partial^4X$：

$$\left[a^-,a^+;b^-,b^+\right]^\varepsilon=\frac{d_o^\varepsilon(a^-,a^+)\times d_o^\varepsilon(b^-,b^+)}{d_o^\varepsilon(a^-,b^+)\times d_o^\varepsilon(b^-,a^+)} \tag{7}$$

注记 1.8（∂^4X上的交比）。我们引入了 X^4 上的交比，只是为了方便地在 ∂^4X 上定义它，并阐明其性质。对于二者，我们使用相同的名称和记号，但主要研究其在 ∂^4X上的限制。

注记 1.9（约定）。交比还有若干其他约定，涉及括号中变量的顺序以及具体公式。

我们的公式和变量顺序与 Labourie 在 [Lab08、LM09]中的约定一致。对于 $[a^-,a^+;\ b^-,\ b^+]$ 我们的公式与 Bourdon 在 [Bou96] 中为 $[\xi\xi'\eta\eta']$ 定义的公式相同，变量顺序为$(\xi,\ \xi',\ \eta,\ \eta')=(a^-,\ b^-,\ a^+,\ b^+)$。

Otal 在 [Ota92] 中引入的公式，是 Bourdon 公式的对数。因此，只要在括号中交换变量(a^+b^-)，它就是我们公式的对数。

在 [Kim01], Kim 使用的是 [Bou96], Bourdon 定义的平方；交换括号中的变量(a^-b^+) 后，便是我们的平方。

1.3 强双曲空间的等距变换

等距变换群 Isom(X) 赋予由函数集合 X^X 上的乘积拓扑所诱导的逐点收敛拓扑。

强双曲空间之间的等距变换保持有限交比，并可延拓为其边界之间保持边界交比的同胚。特别地，Isom(X,d) 的元素和子群通过同胚作用于 $X \sqcup \partial X$，因此可根据其动力学行为进行分类。

对于 $\gamma \in \mathrm{Isom}(X,d)$，其稳定平移长度对任意基点 $o \in X$ 定义如下：

$$\ell(\gamma) = \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} d(o,\gamma^n o) = \inf\{\tfrac{1}{n} d(o,\gamma^n o) \colon n \in \mathbb{N}_{\geq 1}\} \tag{8}$$

注意，对于所有 $\alpha \in \mathrm{Isom}(X,d)$ 和 $n \in \mathbb{Z}$，都有 $\ell(\alpha\gamma\alpha^{-1}) = \ell(\gamma)$ 且 $\ell(\gamma^n) = |n|\ell(\gamma)$。

我们回顾 [OR18，定理 1.9]。

定理 1.10 （稳定平移长度的连续性）。当$\mathrm{Isom}(X)$ 赋予逐点收敛拓扑时，函数 $\ell\colon \mathrm{Isom}(X) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 是连续的。

以下是对 [DSU17定理 6.1 的等价重述。4]。

命题 1.11 （等距变换分类）。 非平凡的 $\gamma \in$等距变换群(X) 必为以下之一：

椭圆型： γ作用下 X 中任意一点的轨道在 ∂X中有0 个聚点；抛物型： γ作用下 X 中任意一点的轨道在 ∂X中有1 个聚点；双曲型： γ作用下 X 中任意一点的轨道在 ∂X中有2 个聚点。

由此可知，非平凡元素 $\gamma \in$等距变换群(X)是椭圆型的，当且仅当 X 中任意一点的 γ-轨道是有界的。双曲型元素 $\gamma \in$等距变换群(X)有一对（吸引、排斥）不动点（γ^-， γ^+） $\in (\partial X) \times (\partial X)$。

以下分类见 [DSU17，定理 6.2。3]。

定理 1.12 （群作用的分类）。 子（半）群 $\Gamma \subset$Isom(X) 要么是 ：

椭圆型：当某个点在 X 中的 Γ-轨道有界时；双曲型：当 Γ包含双曲型元素时；抛物型：当它既不是椭圆型也不是双曲型时；

并且抛物型子群在 ∂X中必须有唯一的 Γ-不动点。

因此，当且仅当是椭圆型或抛物型时，其平移长度为零。不过请注意，有些抛物型子群只包含椭圆元素 [DSU17，例 11.2。18]。

定义 1.13 （极限集）。 子群 $\Gamma \subset$ Isom(X)对任意 $o \in X$ 都有定义的极限集：

$$\Lambda(\Gamma) = \{c \in \partial X \colon \exists (\gamma_n) \in G^{\mathbb{N}},\ \gamma_n o \to c\}.$$

因此 Γ 当且仅当 $\Lambda(\Gamma) \neq \emptyset$ 是非椭圆型，此时 $\Lambda(\Gamma)$ 是非空闭的极小 Γ-不变子集 ∂X ([DSU17，命题 7.4。1]) 。注意，$\mathrm{Card}\,\Lambda(\Gamma) \geq 2$当且仅当 Γ 是双曲型。

根据 [DSU17，命题 7.3。1],子群 $\Gamma \subset$ 等距变换群(X) 的极限集满足以下条件之一：$\mathrm{Card}\ \Lambda(\Gamma) \leq 2$或者$\mathrm{Card}\,\Lambda(\Gamma) \geq \mathrm{Card}(\mathbb{R})$。以下是 [DSU17，命题 7.4。7]。

命题 1.14 (双曲型轴稠密)。 对于双曲型子群 $\Gamma \subset \mathrm{Isom}(X)$，由双曲型 $\gamma \in \Gamma$的（排斥型、吸引型）不动点组成的点对子集 $(\gamma^-,\gamma^+) \in (\partial X)\times(\partial X)$ 包含于且稠密于 $\Lambda(\Gamma) \times \Lambda(\Gamma)$。

表示 $\rho\colon \Gamma \to \mathrm{Isom}(X)$ 继承其像 $\rho(\Gamma) \subset \mathrm{Isom}(X)$ 的所有对象和属性，特别是其平移长度函数（记作 ℓ_ρ）、极限集（记作 $\Lambda(\rho)$）、类型（椭圆型、抛物型、双曲型）等等。

注记 1.15（下确界位移）。当 X，d) 也是 CAT(0) 时，[BH99，练习 II.6.(1)]可用于证明 $\gamma \in \mathrm{Isom}(X,\ d)$ 的平移长度等于其下确界位移：

$$\ell(\gamma) = \inf\{d(o, \gamma(o))\colon o \in X\}.$$

在这种情况下，对于双曲型 $\gamma \in \mathrm{Isom}(X)$，存在一条唯一的测地线连接其不动点 $(\gamma^-,\ \gamma^+)$，即 $\{o \in X\colon\ d(o,\ \gamma o) = \ell(\gamma)\}$。这由 BH99 对CAT(0)空间中双曲型轴的描述 [BH99，定理 6, 8], 以及强双曲空间中端点相近的长测地线段彼此接近这一性质得出，后者由定理 1.1给出。

特别地，将等距变换群 Isom(X) 的极限集记为 Λ，则可得 $\Lambda \times \Lambda$ 中一个稠密子集，其中任意两点都由一条唯一的测地线连接。

问题 1.16（强1双曲是否蕴含 CAT(-1)）。 设 (X, d) 是一个强1双曲空间，且为 CAT(0)空间：它何时是 CAT(-1) 空间？（这是对 [NŠ16，定理 4.2] 的逆命题。）

1.4 Ch通过长度函数和交比刻画子群 s

本小节表明，平移长度函数或交比包含了足够的信息，可以识别等距变换群 Isom(Γ) 的哪些子群具有基数为 ≥ 3 的极限集（因此是不可数无限集），以及在何种情况下它们能彼此确定。

回顾定理 1.3 中强双曲空间的布塞曼函数的定义及其性质。我们将首先从布塞曼函数中恢复平移长度（在 [DSU17],中从未提及，那里只考虑动力学导数 [DSU17，§4.2。3]）。

引理 1.17（由布塞曼函数得到平移长度）。 设有一个双曲型 $\gamma \in \mathrm{Isom}(X)$，其（吸引、排斥）不动点为 (γ^+, γ^-)。对每个 $o \in X$，均有

$$\mathrm{Bus}_{\gamma^+}(o, \gamma o) = \ell(\gamma) = \mathrm{Bus}_{\gamma^-}(\gamma o, o).$$

特别地，在 *[DSU17，§4.2.3]* 中针对参数 $b = e$所定义的双曲型元素 $\gamma \in$等距变换群(X) 在点 $\gamma^\pm \in \partial X$ 处的动力学导数为$\exp(\pm\ell(\gamma))$。

证明。 由Busemann函数的反对称性与 Γ-不变性，我们有Bus$_{\gamma^+}(o,\ \gamma^{-1}o) =-$ Bus$_{\gamma^+}(\gamma^{-1}o,\ o) = -Bus_{\gamma^+}(o,\ \gamma o)$。此外，第二个等式可通过将第一个等式应用于 γ^{-1} 与 γo，并利用 $\ell(\gamma^{-1}) = \ell(\gamma)$以及$(\gamma^{-1})^+ = \gamma^-$得到。

对所有 $o \in X$ 与 $n \in \mathbb{N}$，利用Busemann函数Bus$_{\gamma^+}$ 的可加性与等变性：$X \times X \to \mathbb{R}$，我们有 Bus$_{\gamma^+}(o,\ \gamma^n o) = \sum_1^n$ Bus$_{\gamma^+}(\gamma^{k-1}o,\ \gamma^k o) = nBus_{\gamma^+}(o,\ \gamma o)$。

根据 [DSU17，推论 3.4。12]应用于单位元 [DSU17，命题 3.3.3 (h)]，我们有 Bus$_{\gamma^+}(o,\ \gamma^{-n}o) = -d(o,\ \gamma^{-n}o) + 2(o \mid \gamma^+)_{\gamma^{-n}o}$，但 $(o \mid \gamma^+)_{\gamma^{-n}o} \to (o \mid \gamma^+)_{\gamma^-} \in \mathbb{R}$。

由等变性和反对称性，Bus$_{\gamma^+}(o,\ \gamma^n o) = -Bus_{\gamma^+}(\gamma^n o,\ o) = -$ Bus$_{\gamma^+}(o,\ \gamma^{-n}o)$，因此 Bus$_{\gamma^+}$ $(o,\ \gamma o) = \lim_n \frac{1}{n}Bus_{\gamma^+}(o,\ \gamma^n o) = -\lim_n \frac{1}{n}Bus_{\gamma^+}(o,\ \gamma^{-n}o) = -\lim_n \frac{-d(o,\ \gamma^{-n}o)}{n} = \ell(\gamma)$。 □

引理 1.18 (由交比得到平移长度)。 元素 $\gamma \in \mathrm{Isom}(X)$ 是双曲型，当且仅当 $\ell(\gamma) > 0$。在这种情况下，它有（排斥、吸引）不动点 $(\gamma^-, \gamma^+) \in \partial^2 X$，并且：

$$\forall \xi \in X \sqcup \partial X \setminus \{\gamma^-, \gamma^+\}\colon \quad \ell(\gamma) = \log\left[\gamma\xi, \gamma^-; \xi, \gamma^+\right] \tag{9}$$

证明。关于 $\ell(\gamma) > 0$ 的判别准则是 [CDP90，第10章，命题6.3]。现假设 $\ell(\gamma) > 0$。对所有 $o \in X$，我们计算得log $[\gamma o, \gamma^-, o, \gamma^+] = \frac{1}{2}$(Bus$_{\gamma^-}(\gamma o, o)$ + Bus$_{\gamma^+}(o, \gamma o)$)，并且由 [DSU17，命题4.2.16]，根据定理1.17，两项均等于平移长度 $\ell(\gamma)$。（也可以在(γ^-, o, γ^+)的极坐标中进行，并应用 [DSU17,

引理4.6.3]。）交比到边界化中互异点四元组的连续扩张表明，在 $o \in X$ 收敛到 $\xi \in X \sqcup \partial X \setminus \{\gamma^-, \gamma^+\}$的极限情形下该恒等式成立。

□

引理 1.19（由平移长度得到的交比）。对于双曲型 α、$\beta \in$ 等距变换群(X)，其互异的（吸引、排斥）不动点为(α^+, α^-)，(β^+, β^-)：

$$\left[\alpha^-, \alpha^+; \beta^-, \beta^+\right] = \lim_{m,n\to+\infty} \exp \tfrac{1}{2} \left(\ell(\alpha^m) + \ell(\beta^n) - \ell(\alpha^m\beta^n)\right) \tag{10}$$

注记 1.20（关于 CAT(-1)的另一证明）。方程（10）已针对秩一对称空间在 [Kim01的定理 1]中给出。只要双曲型 $\gamma \in$ 等距变换群(X)具有连接其不动点的唯一测地平移轴，且该轴由 $\{o \in X : \ d(o, \ \gamma o) = \ell(\gamma)\}$给出，便可改写其证明；例如当 X 依定理为强双曲且 CAT(0) 时，见定理 1.15。

这一证明并不能如此轻易地推广到强双曲空间的一般情形。我们的证明利用了边界化中互异点三元组上布塞曼函数与格罗莫夫积的连续性及精确渐近性（[DSU17，3.4.10与3.4.12]）

证明。注意，对于 $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$，我们有 $\alpha^m(\beta^n\alpha^m)^\pm = (\alpha^m\beta^n)^\pm$，且 $\beta^n(\alpha^m\beta^n)^\pm = (\beta^n\alpha^m)^\pm$。令 $o \in X$。由定理 1.17 可得 $\ell(\alpha^m)+\ell(\beta^n) = \mathrm{Bus}_{\alpha^+}(\alpha^{-m}o, o)+\mathrm{Bus}_{\beta^+}(\beta^{-n}o, o)$，再利用 Busemann函数的反对称性和可加性，可得：

$$-\ell(\alpha^m\beta^n) = \mathrm{Bus}_{(\alpha^m\beta^n)^+}(\alpha^m o, \beta^{-n}o) = \mathrm{Bus}_{(\alpha^m\beta^n)^+}(\alpha^m o, o) + \mathrm{Bus}_{(\alpha^m\beta^n)^+}(o, \beta^{-n}o).$$

利用 Busemann函数的 α^m-不变性，我们可以将项 $\mathrm{Bus}_{(\alpha^m\beta^n)^+}(\alpha^m o, o) = \mathrm{Bus}_{(\beta^n\alpha^m)^+}(o, \alpha^{-m}o)$ 重写为 $\alpha^{-n}(\alpha^m\beta^n)^+ = (\beta^n\alpha^m)^+$。

我们称由 $k \in \mathbb{N}$ 索引的两个实数列 $s_k, s'_k \in \mathbb{R}$ 是渐近的，并记作 $s_k \asymp s'_k$，其中 $\lim_{k\to+\infty}(s_k - s'_k) = 0$。对于依赖多个变量的序列，我们将趋于无穷大的变量写在下标中。

由于 $m \to +\infty$，我们有 $(\alpha^m\beta^n)^+ \to \alpha^+$，因此 $\mathrm{Bus}_{(\alpha^m\beta^n)^+}(o, \beta^{-n}o) \asymp_m \mathrm{Bus}_{\alpha^+}(o, \beta^{-n}o)$；又由于 $n \to +\infty$，我们有 $(\beta^n\alpha^m)^+ \to \beta^+$，因此 $\mathrm{Bus}_{(\beta^n\alpha^m)^+}(o, \alpha^{-m}o) \asymp_n \mathrm{Bus}_{\beta^+}(o, \alpha^{-m}o)$。因此 $-\ell(\alpha^m\beta^n) \asymp_{m,n} \mathrm{Bus}_{\alpha^+}(o, \beta^{-n}o)+\mathrm{Bus}_{\beta^+}(o, \alpha^{-m}o)$，所以再次利用 Busemann函数的反对称性和可加性，我们得到

$$\ell(\alpha^m) + \ell(\beta^n) - \ell(\alpha^m\beta^n) \asymp_{m,n} \mathrm{Bus}_{\alpha^+}(\alpha^{-m}o, \beta^{-n}o) + \mathrm{Bus}_{\beta^+}(\beta^{-n}o, \alpha^{-m}o)$$

将其展开为格罗莫夫积，并利用其在边界化中的三元组上的连续性（[DSU17，推论]），再将所有内容表示为距离，我们得到 $\ell(\alpha^m) +\ell(\beta^n) - \ell(\alpha^m\beta^n)$ 与下式渐近等价：

$$\begin{aligned}
&\asymp (\alpha^+, \beta^{-n}o)_{\alpha^{-m}o} - (\alpha^+, \alpha^{-m}o)_{\beta^{-n}o} + (\beta^+, \alpha^{-m}o)_{\beta^{-n}o} - (\beta^+, \beta^{-n}o)_{\alpha^{-m}o} \\
&\asymp (\alpha^m o, \beta^{-n}o)_{\alpha^{-m}o} - (\alpha^m o, \alpha^{-m}o)_{\beta^{-n}o} + (\beta^n o, \alpha^{-m}o)_{\beta^{-n}o} - (\beta^n o, \beta^{-n}o)_{\alpha^{-m}o} \\
&= d(\alpha^m o, \alpha^{-m}o) + d(\beta^n o, \beta^{-n}o) - d(\alpha^m o, \beta^{-n}o) - d(\beta^n o, \alpha^{-m}o) \\
&\asymp 2\log\left[\alpha^+, \alpha^-; \beta^+, \beta^-\right]
\end{aligned}$$

如所需。

□

注记 1.21。考虑双曲型 α，$\beta \in$ 等距变换群$(\mathbf{H}^n)$ 具有不同的不动点。将恒等式（10）应用于 (α, β) 和 $(\alpha, \ \beta^{-1})$，并取比值得：

$$\frac{\left[\alpha^-, \alpha^+; \beta^+, \beta^-\right]}{\left[\alpha^-, \alpha^+; \beta^-, \beta^+\right]} = \lim_{m,n\to+\infty} \exp \tfrac{1}{2} \left(\ell(\alpha^m\beta^n) - \ell(\alpha^m\beta^{-n})\right) \tag{11}$$

它用于度量 复距离 轴之间的距离 (α^+, α^-) 与 (β^+, β^-) (见定理 2.10)。

命题 1.22 (平移长度与极限集交比)。 对于一个子群 $\Gamma \subset$等距变换群(X)，若其极限集 $\Lambda(\Gamma) \subset \partial X$无限，则其平移长度函数 $\ell\colon \Gamma \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 决定且由 $\Lambda(\Gamma)^4 \cap \partial^4 X$上的交比决定。

证明。 根据假设，对于任意双曲型 $\gamma \in \Gamma$，我们可以选取 $\xi \in \Lambda(\Gamma) \setminus \{\gamma^{\pm}\}$，因此可使用方程（9）。由于根据定理 1.14 ，形如 $(\alpha^-, \alpha^+; \beta^-, \beta^+)$ 的双曲型 $\alpha, \beta \in \Gamma$ 所对应的互异点四元组在 $\Lambda(\Gamma)^4$, 中稠密，因此长度函数决定了 $\Lambda^4 \cap \partial^4 X$ 上的交比。于是利用方程（10）以及交比在 $\partial^4 X$上的连续性即可得出结论。 □

要刻画一个子群何时包含两个不动点互不相交的元素，我们需要以下引理。若从一个拓扑空间到另一个拓扑空间的函数满足紧子集的原像是紧集，则称该函数为适当的 。

引理 1.23 (由长度函数得到相同不动点)。 设双曲型 $\alpha, \beta \in$ 等距变换群(X)，并将它们生成的幺半群和群分别记作$\mathrm{Mon}(\alpha, \beta)$ 和$\mathrm{Grp}(\alpha, \beta)$ 。

我们有 $\{\alpha^-, \alpha^+\} \cap \{\beta^-, \beta^+\} = \emptyset \iff \exists p \in \mathbb{N}^*\colon (m, n) \mapsto \ell(\alpha^{pm}\beta^{pn})$ 在 $\mathbb{Z}^2$ 上是恰当的。我们有 $(\alpha^+ = \beta^+) \vee (\alpha^- = \beta^-) \iff \ell\colon \mathrm{Mon}(\alpha, \beta) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$是一个幺半群同态。我们有 $(\alpha^+ = \beta^-) \vee (\alpha^- = \beta^+) \iff \ell\colon \mathrm{Mon}(\alpha, \beta^{-1}) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 是一个幺半群同态 .

特别地， α, β有不相交的不动点对，当且仅当 $\ell\colon \mathrm{Grp}(\alpha, \beta) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$不是到 $\mathbb{R}$ 的同态的绝对值。

证明。 我们首先证明所有蕴含关系 $\Longrightarrow$。

假设 $\{\alpha^-, \alpha^+\} \cap \{\beta^-, \beta^+\} = \emptyset$。固定一个基点 $o \in X$，并取 $\delta > 0$，考虑由 $V_o^\delta(\eta) = \{\xi \in \partial X\colon (\eta \mid \xi)_o < \delta\}$ 定义的 $\xi \in \partial X$ 的开邻域。选取 $\delta > 0$，使得 $V_o^\delta(\alpha^{\pm})$ $V_o^\delta(\beta^{\pm})$ 在视觉度量 d_o^ε 下两两不相交，且彼此之间的距离为正。存在 $p \in \mathbb{N}^*$，使得 $\alpha^{\pm p}$将 $V_o^\delta(\alpha^{\mp})$ 的补集映入 $U_o^\delta(\alpha^{\pm})$，类似地， $\beta^{\pm k}$ 将 $V_o^\delta(\beta^{\mp})$ 的补集映入 $U_o^\delta(\beta^{\pm})$。处于这样的肖特基位置时，我们可以运用乒乓引理，推得元素 $a = \alpha^p$ 和 $a = \beta^p$ 自由生成一个秩 2 自由群。记 $\{a^{\pm 1}, b^{\pm 1}\}$-字长为 $|\cdot|\colon \mathrm{Grp}(a, b) \to \mathbb{N}$，由 [DSU17，方程 (10.3.6)]，存在一个 $C \in \mathbb{R}_{>0}$，使得对于所有约化的 $\gamma = a^{m_1}b^{n_1}\cdots a^{m_l}b^{n_l} \in \mathrm{Grp}(a, b)$，记 $C' = C\min\{\ell(a)\ \ell(b)\} \in \mathbb{R}_{>0}$，有

$$d(\gamma o, o) \geq C\sum_{k=1}^{l} d(a^{n_k}o, o) + d(b^{m_k}o, o) \geq C\sum_{i=1}^{k} |m_k|\ell(a) + |n_k|\ell(b) \geq C'|\gamma|$$

特别地，对于所有 $m, n \in \mathbb{Z}$，我们有 $\gamma = a^m b^n$ 满足 $|\gamma^l| = l|\gamma|$，因此 $\ell(\gamma) \geq C'|\gamma|$，从而证明长度函数在子集 $\{a^n b^m\colon\ n, m \in \mathbb{Z}\}$ 上的恰当性。

假设 $\alpha^+ = \beta^+$。每个非平凡元素 $\gamma \in \mathrm{Mon}(\alpha, \beta)$ 都是双曲型的，具有吸引不动点 $\gamma^+ = \alpha^+ = \beta^+$；利用该点处的 [DSU17，命题 4.2.16]，可得平移长度的可加性（对 $\ell(\gamma) = \log|[\gamma\xi, \gamma^-, \xi, \gamma^+]|$ 的余循环法则）。通过将前一结果应用于 $(\alpha^{-1}, \beta^{-1})$ 和 $(\alpha^{+1}, \beta^{-1})$，即可推出 $\alpha^- = \beta^-$ 以及 $(\alpha^+ = \beta^-) \vee (\alpha^- = \beta^+)$。

现在我们可以轻松证明逆向蕴含 $\Longleftarrow$。

如果 α， β 没有不相交的不动点对，那么此前的任一态射性质都意味着，对于所有 $p \in \mathbb{N}^*$，函数 $(m,\ n) \mapsto \ell(\alpha^{pm},\ \beta^{pn})$ 在 $\mathbb{Z}^2$ 上都不是适当映射。

如果 $\ell\colon \mathrm{Mon}(\alpha, \beta) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$是一个态射，则 $\forall p \in \mathbb{N}^*$函数 $(m, n) \mapsto \ell(\alpha^{pm}, \beta^{pn})$ 在 $\mathbb{Z}^2$ 上不是真映射，因此第一个蕴含关系的逆否命题蕴含 $\{\alpha^{\pm}\} \cap \{\beta^{\pm}\} \neq \emptyset$。若$\alpha^+ \neq \beta^+$ 且 $\alpha^- \neq \beta^-$，则 $\alpha^+ = \beta^-$ 或 $\alpha^- = \beta^+$。由前述讨论，我们推得 $\ell\colon \mathrm{Mon}(\alpha, \beta^{-1}) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$是幺半群同态。因此 $\ell\colon \mathrm{Grp}(\alpha, \beta) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$是群同态，故它是平凡的，即 $\ell(\beta) = 0$，矛盾。 □

2 代数双曲空间的几何

对于基数 κ，令 $\mathbf{H}^\kappa$ 为维数 κ 的实代数双曲空间。用 ∞表示无限可数基数，从而 $\mathbf{H}^\omega$ 是可分无限维双曲空间。度量空间 $\mathbf{H}^\kappa$ 是 $\mathrm{CAT}(-1)$，因此对 $\varepsilon = 1$ 而言，由 [NŠ16，定理 5 可知其为强双曲。1]。因此上一节中的所有概念与结果均适用。本节将回顾这些结果的精细化以及后文所需的附加结构。

2.1 Mode其他几何中的 ls：Cartan 分解与 Iwasawa 分解 s

Minkowski-Lorentz 双曲面模型 记维数为 κ的希尔伯特空间为 $\mathbb{R}^\kappa$。维数为 $1+\kappa$ 的闵可夫斯基空间是定向向量空间 $\mathbb{R}^{1+\kappa}$，其上带有惯性指数为 $(1,\kappa)$ 的对称双线性型，该型对 $x, y \in \mathbb{R}^{1+\kappa}$ 由 $\langle x, y\rangle = x_0 y_0 - \sum_{i>0} x_i y_i$定义。其各向同性锥 $\mathbf{X}_0 = \{x \in \mathbb{R}^{1+\kappa}\colon \langle x, x\rangle = 0\}$ 渐近于双叶双曲面 $\mathbf{X}_{+1} = \{x \in \mathbb{R}^{1+\kappa}\colon \langle x, x\rangle = +1\}$ 以及单叶双曲面 $\mathbf{X}_{-1} = \{x \in \mathbb{R}^{1+\kappa}\colon \langle x, x\rangle = -1\}$。

双曲型空间双曲面模型 $\mathbf{H}^\kappa$ 是通过赋予双叶双曲面 $\{x \in \mathbf{X}_{+1}$的上半部分以距离$\mathbf{d}$ 而得到的，其中距离由 $\cosh(\mathbf{d}(x,y)) = \langle x \mid y\rangle$给出。

Cayley-Klein 射影模型 射影模型 中，$\mathbf{H}^\kappa$ 是锥内直线的子集$\mathbf{PX}_{+1}$，其距离$\mathbf{d}([x],[y])$由双曲角表示为：

$$\cosh(\mathbf{d}([x],[y])) = \frac{\langle x,y\rangle}{\sqrt{\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle}} \tag{12}$$

这里，边界 $\partial\mathbf{H}^\kappa$ 与射影化零锥$\mathbf{PX}_0$相对应。注意，上半部分 $\{x \in \mathbf{X}_{+1}\colon x_0 > 0\}$ 给出了射影化 $\mathbf{X}_{+1} \to \mathbf{PX}_{+1}$的一个截面。

因此，等距变换群 $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^\kappa)$ 与射影正交群 $\mathrm{PO}(1,\kappa)$相对应（可以仿照有限维情形中的证明 [BH99，定理 I.2.24]）。它在$\mathbf{H}^\kappa = \mathbf{PX}_{+1}$上传递作用，而 $o = \mathbf{P}(1, 0^\kappa)$ 的稳定子是射影正交群 $\mathrm{PO}(\kappa)$，该群在 $o \in \mathbf{H}^\kappa$处的标准正交标架上自由传递地作用。

欧几里得球模型与嘉当分解 通过选择欧几里得图 $\{x \in \mathbb{R}^{1+\kappa}\colon x_0 = 1\}$（其原点为 $o = (1, 0^\kappa)$），可将射影空间 $\mathbf{P}\mathbb{R}^{1+\kappa}$ 变为欧几里得球模型，从而将二次曲面配对 $(\mathbf{PX}_0, \mathbf{PX}_{+1})$ 识别为单位球面与单位开球 $(\mathbf{S}^{\kappa-1}, \mathbf{B}^\kappa)$。在中心 o处，$\mathbf{H}^\kappa$ 的切空间及其诱导内积与 $\mathbb{R}^\kappa$ 的切空间及其欧几里得内积等距。由 $\mathbf{H}^\kappa$ 在 $o \in$处的单位切球面到 Gromov 边界 $\partial\mathbf{H}^\kappa$ 的测地映射是一个同胚；在与 $\mathbf{S}^{\kappa-1}$ 的识别下，视觉距离由 $d_o(x,y) = \sin \frac{1}{2}\widehat{(xoy)}$ 给出（见 [Bou96, §1.2] 或 [DSU17, 引理 3.5.1]）。这给出了 $\mathbf{H}^\kappa$ 的等距变换群与 $\mathbf{S}^{\kappa-1}$的共形群之间的等变识别。

让我们回顾一下 $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^\kappa)$ 的嘉当分解。考虑 $\mathbf{H}^\kappa$ 的极坐标，它由经过我们固定点 $o \in \mathbf{H}^\kappa$ 的双无限测地线 $(0,\infty) \in (\partial\mathbf{H}^\kappa)^{(2)}$ 给出。这条测地线的稳定子包含一个单参数螺旋群 $A\colon \mathbb{R} \to \mathrm{Isom}(\mathbf{H}^\kappa)$，其中 $A(t)$ 沿这条轴平移 $|\ell(A(t))| = t$。考虑 $\mathbf{H}^\kappa$ 中一点 $x \in$ 处的一个正交标架：可以先通过 $\mathrm{O}(\kappa)$ 作用，将 x 送到测地线弧 $[o,\infty)$ 与球面 $\mathbf{S}_o(\mathbf{d}(o,x))$ 的交点；然后通过 $A(-d(o,x))$ 将这个新点移回 o；最后通过 $\mathrm{PO}(\kappa)$ 调整标架。因此，每个 $\gamma \in\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^\kappa)$ 都有唯一的分解 $\gamma = \gamma_1 A(t)\gamma_2$，其中 $\gamma_i \in\mathrm{PO}(\kappa)$。

仿射模型与特殊维数 ≤ 3。双曲空间 $\partial\mathbf{H}^\kappa$ 边界的仿射模型 是在射影空间 $\mathbf{P}(\mathbb{R}^{1+\kappa})$ 中，通过从一个

点 $\infty \in \mathbf{PX}_0$ 向另一点 $0 \in \mathbf{PX}_0$, 处的切空间作投影而得到的，从而得到一个恒等对应$\partial\mathbf{H}^\kappa = \mathbb{R}^{\kappa-1} \sqcup \{\infty\}$，进而得到恒等对应 $\mathbf{H}^\kappa = \mathbb{R}^{\kappa-1} \times (0,\infty)$，其中度量为 $(dx+dy)/y^2$。群 $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^\kappa) = \mathrm{PO}(1,\kappa)$ 在 $\partial\mathbf{H}^\kappa = \mathbb{R}^\kappa$ 上传递作用，而 $\infty \in \mathbb{R}^\kappa$ 的稳定子是仿射相似变换群 $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^\kappa) \rtimes \mathbb{R}_{>0} = (\mathbb{R}^\kappa \rtimes \mathrm{O}(\mathbb{R}^\kappa)) \rtimes \mathbb{R}_{>0}$。

对于 $\kappa = 2$，3，我们找到上半空间模型 $\mathbf{H}^2 \simeq (0,\infty) \times \mathbb{R}$ 和 $\mathbf{H}^3 \simeq (0,\infty) \times \mathbb{C}$，分别对应于 $\partial\mathbf{H}^2 \simeq \mathbb{RP}^1 \simeq \{\infty\} \sqcup \mathbb{R}$ 和 $\partial\mathbf{H}^3 \simeq \mathbb{CP}^1 \simeq \{\infty\} \sqcup \mathbb{C}$。等距变换群 $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^2) \subset \mathrm{Isom}(\mathbf{H}^3)$ 这一对在边界对 $\partial\mathbf{H}^2 \subset \partial\mathbf{H}^3$ 上的作用，与 $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{R}) \subset \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ 这一对在射影直线对 $\mathbb{RP}^1 \subset \mathbb{CP}^1$上的作用相对应。回顾一下，$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$ 的作用在三个不同点上是单纯传递的。由此可知，$\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^\kappa)$ 在 $\partial\mathbf{H}^\kappa$ 上是三重传递的，因为我们可以通过逐个移动点（并重新排列三元组）来作用于三个不同点，同时每次都留在 $\mathbf{H}^3$, 的一个副本中，直到抵达任意另一个三个不同点的三元组。将初始三元组 (x_0, y_0, z_0) 和目标三元组 (x_1, y_1, z_1) 重新排列，使它们的公共点按相同顺序出现在开头，然后我们依次将 $(x_0, y_0, z_0) \mapsto (x_0, y_0, z_1) \mapsto (x_0, y_1, z_1) \mapsto (x_1, y_1, z_1)$ 映射。

2.2 凸包与到1-骨架的豪斯多夫距离 n

对于子集 $X \subset \mathbf{H}^\kappa \sqcup \partial\mathbf{H}^\kappa$，其张成空间 $\mathrm{Span}(X)$ 是包含 X 中各点对之间所有测地线的最小闭全测地完备子空间$\mathbf{H}^{\kappa'}$：在线性模型和射影线性模型中，它对应于线性张成和射影线性张成分别与$\mathbf{X}^{+1}$ 和$\mathbf{PX}^{+1}$的交集。若子集 X 张成整个空间，则称其为总体；若 X 中的 $n \in \mathbb{N}$ 个点的任意子集都张成$\mathbf{H}^{n-1}$的一个全测地副本，则称其为独立 。特别地，$\mathbf{H}^\kappa$ 中的两条不同测地线唯一张成$\mathbf{H}^2$ 或$\mathbf{H}^3$的一个全测地副本。

对于子集 $X \subset \mathbf{H}^\kappa \sqcup \partial\mathbf{H}^\kappa$，其凸包 $\mathrm{Conv}(X) \subset \mathrm{Span}(X) \cup \partial\,\mathrm{Span}(X)$ 是包含它的最小闭测地凸子集：在线性模型和射影线性模型中，它对应于线性闭凸包和射影线性闭凸包分别与闭锥$\mathbf{X}^{\geq 0}$ 和填充二次曲面$\mathbf{PX}^{\geq 0}$的交集。 X 的凸包可以通过归纳法构造，依次考察维数递增的骨架： k-骨架 $X^{(k)}$ 是以 X中的 $1+k$ 个点构造的所有测地单纯形的并集。例如，$X^{(1)} = \bigcup_{x_1,\ x_2 \in X} [x_1, x_2]$。

我们在 [DS25的定理 0 中得到了以下结果：4]这是关于双曲单纯形的一个更精确结果的推论，该结果给出了其不同维数骨架之间豪斯多夫距离的最优界，并刻画了达到该界的单纯形。

命题 2.1（从凸包到1-骨架的豪斯多夫距离）。对于点集 $X \subset \mathbf{H}^\kappa \cup \partial\mathbf{H}^\kappa$，其凸包 $\mathrm{Conv}(X)$ 中的每个点到其1-骨架 $X^{(1)} = \bigcup_{x_1,x_2 \in Y} [x_1, x_2]$的距离至多为 $\sinh^{-1}(1) = \log(1+\sqrt{2})$。

注记 2.2（统一界）。在有限维情形下，κ到1-骨架的距离存在一个统一上界（与 Y无关），这一事实已用于 [Bes88定理 3], ，该定理引用了[Bon86]。我们希望得到一个与维数无关的统一界，因为这将使我们定理5.11（在步骤 7 中证明）关于 Gromov-Hausdorff 收敛的陈述也适用于无限维情形 κ_m。

关于 [DS25] 中界的最优值，以及关于具有最大内切半径的双曲单纯形刻画的其他有趣结果。

2.3 代数双曲型空间的交比

让我们表示出 $\partial\mathbf{H}^\kappa$ 上的交比，用希尔伯特–闵可夫斯基模型（$\mathbb{R}^{1+\kappa}$, $\langle , \rangle$).

引理 2.3. 对于 $\partial\mathbf{H}^\kappa$中的互异点四元组 a^-, a^+, b^-, b^+ ， 以及它们的任意

位于希尔伯特-闵可夫斯基空间$(\mathbb{R}^{1+\kappa}, \langle\,,\,\rangle)$的各向同性锥$\mathbf{X}_0$ 中的代表元，我们有

$$[a^-, a^+; b^-, b^+]^2 = \frac{\langle a^-, a^+\rangle\langle b^-, b^+\rangle}{\langle a^-, b^+\rangle\langle b^-, a^+\rangle} \tag{13}$$

证明。考虑序列 x_n、x'_n、y_n、$y'_n \in \mathbf{PX}^{+1}$ 分别收敛于 a^-、a^+、b^-、$b^+ \in \mathbf{PX}_0$。由方程（12），我们有：

$$\frac{\langle x_n, x'_n\rangle\langle y_n, y'_n\rangle}{\langle x_n, y'_n\rangle\langle y_n, x'_n\rangle} = \frac{\cosh(\mathbf{d}(x_n, x'_n))\cosh(\mathbf{d}(y_n, y'_n))}{\cosh(\mathbf{d}(x_n, y'_n))\cosh(\mathbf{d}(y_n, x'_n))}$$

左端收敛于 $\frac{\langle a^-\ a^+\rangle\langle b^-\ b^+\rangle}{\langle a^-\ b^+\rangle\langle b^-\ b^+\rangle}$，，，，。根据 5 中交比的定义方程（$\mathbf{H}^\kappa$，以及当 $\cosh(r)/e^r \to 1/2$ 时 $r \to +\infty$，右端渐近于 $[x_n, x'_n, y_n, y'_n]^2$ 当 $n \to \infty$时，它收敛于 $[a^-, a^+, b^-, b^+]^2$，这是由边界 $\partial\mathbf{H}^\kappa$ 上互异点四元组的连续扩张得到的。 □

注记 2.4（维罗内塞嵌入给出的射影交比）。对于 $\mathbf{H}^2$,，公式（13）给出了 $\mathbb{R}\mathbf{P}^1 \subset \mathbb{R}\mathbf{P}^2$ 中四个点的射影交比的绝对值。

另一方面，给定四条直线 a^-，a^+，b^-，$b^+ \in \mathbf{P}(\mathbb{R}^2)$，其射影交比的绝对值可以通过将它们提升为 [d'A94第六卷]中欧几里得已知的向量 $\mathbb{R}^2$ 并考虑面积交比的平方根来求得：

$$\sqrt{\left|\frac{\det(a^-,a^+)\det(b^-,b^+)}{\det(a^-,b^+)\det(b^-,a^+)}\right|}.$$

另一方面，具有判别式的实二元二次型空间是闵可夫斯基空间（$\mathbb{R}^{1+2}, \langle,\rangle$）的一个模型。维罗内塞映射将向量 $v \in \mathbb{R}^2$ 映射为退化型 q_v：$u \mapsto \det(u, v)^2$，由此得到二次函数 $\mathbb{R}^2 \to \mathbf{X}_0 \subset \mathbb{R}^{1+2}$，它将行列式$\det(v, v')$映射为标量积 $\langle q_v, q_{v'}\rangle^2$的平方。该映射射影化后得到射影直线$\mathbf{P}(\mathbb{R}^2) \to \mathbf{P}(\mathbf{X}_0) \subset \mathbf{P}(\mathbb{R}^{1+2})$之间的一个同构（参见 [Sim23，引理3.1]）。

引理 2.5（交比的唯一性）。若连续函数 $(\partial\mathbf{H}^\kappa)^{(4)} \to (0, +\infty)$ 在如下群的对角作用下不变：等距变换群$(\mathbf{H}^\kappa)$ 且满足 (不变性) 与 (余循环)恒等式，则它等于交比的某个幂，即 $[\cdot]^t$，对某个 $t \in [0, \infty)$。

证明。任意四点都包含于 $\partial\mathbf{H}^3$ 的某个副本中。限制到 $\partial\mathbf{H}^2 \subset \partial\mathbf{H}^3$ 的每个副本上时，可借助 $\mathbf{PGL}_2(\mathbb{R})$ 在 $\mathbb{R}\mathbf{P}^1$ 中互异点三元组上作用的单传递性以及（不变性）与（余循环），仿照 [Ham09，引理 3.2]，的证明。等距变换群$(\mathbf{H}^3)$-不变性蕴含指数 t不依赖于 $\partial\mathbf{H}^2 \subset \partial\mathbf{H}^3$，的副本，因为等距变换群$(\mathbf{H}^3)$ 在互异点三元组上传递地作用，从而在圆 $\partial\mathbf{H}^2 \subset \partial\mathbf{H}^3$ 上传递地作用。 □

注记 2.6（推广到抽象交比）。定理 4.6 将把定理 2.5 推广到更一般的一类空间上的抽象交比。

由此我们推出推论 2.7，从而确认我们对交比的归一化与射影交比的模一致。

推论 2.7 (射影交比)。在上半空间模型 $\mathbf{H}^2 \simeq \mathbb{R} \times (0, +\infty)$ 和$\mathbf{H}^3 \simeq \mathbb{C} \times (0, +\infty)$ 中，将 $\partial\mathbf{H}^2 \simeq \mathbb{R}\mathbf{P}^1 \simeq \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ 与 $\partial\mathbf{H}^3 \simeq \mathbb{C}\mathbf{P}^1 \simeq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$对应起来，我们发现$(a^+, a^-, b^+, b^-)$ 的交比是其射影交比的模：

$$[a^-, a^+, b^-, b^+] = \left|\frac{(a^+-a^-)(b^+-b^-)}{(a^+-b^-)(b^+-a^-)}\right|. \tag{14}$$

证明。 注记 2.4 说明，该结论对包含在任意共形副本 $\mathbb{RP}^1$ 内的互异点四元组 $\mathbb{CP}^1$同样成立。此外， $\mathbb{CP}^1$上的射影交比的模满足定理 2.5中的条件，因此它是度量交比的某个幂；由于它们在1 上相等，该幂必为 $\mathbb{RP}^1$。 □

推论 *2.8*（恢复射影交比）。对于$\partial H^3 = \mathbb{C}P^1$, 中的四元点组$(a^-, a^+; b^+, b^-)$，射影交比$(a^+-a^-)(b^+-b^-)$ / $(a^+-b^-)(b^+-a^-)$的辐角 $\pm\vartheta$ *mod* 2π 可由 $X^+ = [a^-, a^+;\ b^-, b^+]$ 和 $X^- = [a^-, a^+;\ b^+, b^-]$ 表示为$2\cos(\vartheta) = X^+(1 + 1/(X^+)^2 - 1/(X^-)^2)$。

因此， $\partial\mathbf{H}^3$ 中的四个互异点$(a^-, a^+; b^+, b^-)$ 在$\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^3)$ 作用下的等价类由交比 $X^+ = [a^-, a^+; b^-, b^+]$ 和 $X^- = [a^-, a^+; b^+, b^-]$唯一确定。

证明。 令 $Z^+ = \frac{(a^+-a^-)(b^+-b^-)}{(a^+-b^-)(b^+-a^-)}$ 以及 $Z^- = \frac{(a^+-b^-)(b^+-a^-)}{(a^+-a^-)(b^+-b^-)}$ 满足 $X^+ = |Z^+|$ 和 $X^- = |Z^-|$。这些复射影交比的逆元之和为一：

$$\tfrac{1}{Z^+} + \tfrac{1}{Z^-} = \tfrac{(a^+-b^-)(b^+-a^-)}{(a^+-a^-)(b^+-b^-)} + \tfrac{(a^+-b^+)(b^--a^-)}{(a^+-a^-)(b^--b^+)} = 1.$$

此外， $\vartheta = \arg(Z^+)$ 满足 $|Z^+ - 1|^2 = |Z^+|^2 - 2\cos(\vartheta)|Z^+| + 1$，因此除以 $|Z^+|$并改写 $|Z^+ - 1|^2/|Z^+| = |Z^+|/|Z^-|^2$ 后，即得所求结果。

回想一下，$\mathrm{Isom}^+(\mathbf{H}^3) = \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{Z}/2$在 $\partial\mathbf{H}^3 = \mathbb{CP}^1$ 中，针对具有给定交比（模复共轭意义下）的互异点四元组，即具有给定模和模π意义下的辐角的四元组，作唯一传递作用。 □

推论 2.9（共圆点）。 点的四元组 $(a^+, a^-;\ b^+, b^-)$ 在（一个副本的） $\partial\mathbf{H}^3 = \mathbb{CP}^1$ 中按此顺序共圆（属于一个 $\partial\mathbf{H}^2 = \mathbb{RP}^1$的副本）， 当且仅当满足：

$$\left[a^+, a^-; b^+, b^-\right]^{-1} + \left[a^+, a^-; b^-, b^+\right]^{-1} = 1.$$

这个单位元刻画了 $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^\kappa)$ 中的双曲型元素何时具有共面轴。

证明。 对于 $a^\pm$， $b^\pm \in \mathbb{CP}^1$, ， 复射影交比的逆元之和为一：

$$\tfrac{(a^+-b^-)(b^+-a^-)}{(a^+-a^-)(b^+-b^-)} + \tfrac{(a^+-b^+)(b^--a^-)}{(a^+-a^-)(b^--b^+)} = 1$$

因此，模长之和大于一；当且仅当两个复射影交比都是 $[0, 1]$ 中的实数时，等号成立。

同样的计算（用视觉距离表示交比）表明，欧几里得球面上的四个点满足托勒密不等式，且当且仅当这四个点共圆时取等号。（注意，欧几里得空间中的任意四个点都位于同一个球面上。） □

注记 2.10（复距离）。 对于不同的 $a^\pm, b^\pm \in \partial\mathbf{H}^3$, ， 测地线 (a^-, a^+) ，(b^-, b^+) $\subset\mathbf{H}^3$ 之间存在唯一一条长度为 $\lambda \in [0, \infty)$ 的正交测地弧；沿着该弧，它们以角度 θ 相互扭转：复数 $\lambda + i\theta$ 称为它们之间的复距离 。等距变换 $C \in\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^3)$ 将 $a^\pm$ 映射到 $b^\pm$ ，它沿两者的公共正交测地弧作平移-旋转，且有 $\tfrac{1}{2}\mathrm{Tr}(C) = \cosh\tfrac{1}{2}(\lambda + i\theta)$。

在 $\partial\mathbf{H}^3 = \partial\mathbb{CP}^1$, 上，考虑 $\mathrm{Isom}^+(\mathbf{H}^3) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ 的作用，我们不妨固定 $a^\pm = \pm 1$ ，并找到$b^\pm = \pm\exp(\lambda + i\theta)$，使得 C: $z \mapsto \exp(\lambda + i\theta)z$。

我们可以从交比中恢复复距离，因为按照前面的记号，射影交比 $Z^\pm = \pm 4e^{\lambda+i\theta}/(1\pm e^{\lambda+i\theta})^2$ ，所以其绝对值 $X^\pm$ 满足：

$$\tfrac{1}{[a^+,a^-;b^+,b^-]} - \tfrac{1}{[a^+,a^-;b^-,b^+]} = \tfrac{1}{X^+} - \tfrac{1}{X^-} = \tfrac{|1+\exp(\lambda+i\theta)|^2 - |1-\exp(\lambda+i\theta)|^2}{4\exp(\lambda)} = \cos(\theta)$$

$$\tfrac{\left[a^+,a^-;b^+,b^-\right]}{[a^+,a^-;b^-,b^+]} = \tfrac{X^+}{X^-} = \tfrac{|1+\exp(\lambda+i\theta)|^2}{|1-\exp(\lambda+i\theta)|^2} = \left|\tanh\tfrac{1}{2}(\lambda + i\theta)\right|^2.$$

注意，对于双曲型 α， $\beta \in$ 等距变换群$(\mathbf{H}^3)$ 若有不同的不动点，方程 (11给出：

$$\tfrac{X^+}{X^-} = \tfrac{\left[\alpha^-,\alpha^+;\beta^+,\beta^-\right]}{[\alpha^-,\alpha^+;\beta^-,\beta^+]} = \lim_{m,n\to+\infty} \exp\tfrac{1}{2}\left(\ell(\alpha^m\beta^n) - \ell(\alpha^m\beta^{-n})\right).$$

例 2.11 (克雷莫纳群作用)。 设 $\Gamma = \mathrm{Bir}(\mathbb{CP}^2)$ 为复射影平面上的双有理变换群（亦称克雷莫纳群），并考虑在 $\rho\colon \Gamma \to$ 等距变换群$(\mathbf{H}^\omega)$ 中构造的表示 [Can11]。

元素 $g \in \Gamma$ 的动力次数记为 $\lambda(g)$，根据 [CLdC13，注记 4，5] 它满足 $\ell\rho(g) = \log \lambda(g)$。可将此与我们的定理1.17 相比较，该定理用布塞曼函数表示平移长度；此外，布塞曼函数与动力导数之间的关系见 [DSU17，§4.2。3]。根据方程（10），对于 α，$\beta \in \Gamma$ 若其动力次数为正且不动点互异，则有：

$$\log\left[\rho(\alpha)^-, \rho(\alpha)^+; \rho(\beta)^-, \rho(\beta)^+\right] = \lim_{m,n\to\infty} \tfrac{1}{2}\left(\lambda(\alpha^m) + \lambda(\beta^n) - \lambda(\alpha^m\beta^n)\right).$$

2.4 代数双曲空间的等距变换群

对于代数双曲空间，非平凡等距变换的分类1.11可以表述得更明确（见 [DSU17，命题 6.1。11]）。

Pro命题 2.12 (等距变换分类)。若非平凡的 $\gamma \in$Isom$(\mathbf{H}^\kappa)$ 满足以下情形：

若为椭圆型，则它共轭于群$\mathrm{O}(\kappa-1)$ 中的一个元素，该群由$\mathbf{S}^{\kappa-1}$上的等距变换构成。若为抛物型，则它共轭于群$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^{\kappa-1})$ 中的一个元素，该群由 $\mathbb{R}^{\kappa-1}$ 上的仿射等距变换构成，且不存在不动点。若为双曲型，则它共轭于群$\mathrm{O}(\kappa-2)\times\mathbb{R}^*_+$ 中的一个元素，该群由 $\mathbb{R}^{\kappa-1}$ 上的线性相似变换构成，且其膨胀因子非平凡。

考虑一个双曲型 $\gamma \in$Isom$(\mathbf{H}^\kappa)$。由于 $\mathbf{H}^\kappa$ 是 $\mathrm{CAT}(-1)$，由定理 1.15可知，由公式（8）定义的其稳定平移长度等于其下确界平移长度：

$$\ell(\gamma) = \inf\{\mathbf{d}(o,\gamma(o))\colon o \in \mathbf{H}^\kappa\}.$$

集合 $o \in \mathbf{H}^\kappa$ 中满足 $\mathbf{d}(o,\gamma o) = \ell(\gamma)$ 的点构成 γ 的平移轴：它是一条连接其吸引不动点和排斥不动点 $\gamma^+, \gamma^- \in \partial\mathbf{H}^\kappa$ 的双曲测地线，γ 在其上作平移 $\ell(\gamma)$。此外，对于所有 $\xi \in \partial\mathbf{H}^\kappa \setminus \{\gamma^-, \gamma^+\}$，都有 $\ell(\gamma) = |\log\,[\gamma\xi, \gamma^-, \xi, \gamma^+]|$。

定义 2.13 （初等）。 当子群 $\Gamma \subset$Isom$(\mathbf{H}^\kappa)$ 在 $X \sqcup \partial X$ 中有基数为 1 的不变子集，或在 ∂X 中有基数为 2 的不变子集时，它称为初等 。

注记 2.14（关于术语）。 请注意，文献中使用的术语彼此存在冲突。

例如， [DSU17] 和 [Kim01]所用术语并不兼容，我们采用了二者的混合用法。它们对初等性的定义一致，但我们的定义限制较少（当存在无穷远处的全局不动点但极限集为无限集时，这些作者不认为该作用是初等的，而我们认为是）。它们对抛物性的定义有所不同，我们采用的定义与 [DSU17]中的相同。

初等表示可分为以下几类：

椭圆型：存在全局不动点 $o \in \mathbf{H}^\kappa$，因此 Γ 可共轭到 Isom$(\mathbf{S}^{\kappa-1}_o)$。抛物型：存在全局不动点 $\infty \in \partial\mathbf{H}$，且其所有等高线面均为不变的，因此 Γ 可共轭到 Isom$(\mathbb{R}^{\kappa-1})$。焦点型：存在全局不动点 $\infty \in \partial\mathbf{H}$，但等高线面不是不变的，因此 Γ 可共轭到 Isom$(\mathbb{R}^{\kappa-1}) \rtimes \mathbb{R}_{>0}$，且其在 $\mathbb{R}_{>0}$ 中的投影非平凡。线性型：存在无穷远处的不变点对，但在 $\mathbf{H}^\kappa$中没有不动点，因此 Γ 可共轭到 Isom$(\mathbf{S}^{\kappa-2}_o) \rtimes \mathbb{R}^*$，且其在 $\mathbb{R}^*$ 中的投影是无限的。

注记 2.15（初等表示与长度函数）。 初等表示的长度函数可以为零（此时它是椭圆型或抛物型），也可以非零（此时它是焦点型或线性型）。

引理 2.16（蒂茨替代定理）。子群 $\Gamma \subset$等距变换群$(\mathbf{H}^\kappa)$ 是非初等的，当且仅当它包含双曲型元素 α, $\beta \in \Gamma$，其不动点 $\alpha^\pm, \beta^\pm$ 互不相同。

在这种情况下，存在 $p \in \mathbb{N}_{\geq 1}$，使得 $a = \alpha^p$ 和 $b = \beta^p$ 自由生成一个秩为2 的自由群，且限制的长度函数 $\mathbb{Z}^2 \ni (m, n) \mapsto \ell(a^m b^n) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 是正常的。

证明。由于 Γ 是非初等的，因此它具有非零长度函数，故包含双曲型元素。如果 Γ 中的任意两个双曲型元素都有共同的不动点，那么它就是线性型或焦点型，因此我们可以找到 α, β 使它们的不动点互不相同。第二个结论由定理1.23的（证明）得出。 □

以下定理 2.17 将在定理6.2 中用于区分与群的初等和非初等表示相关联的长度函数。

推论 2.17（由同态得到初等性）。子群 $\Gamma \subset$等距变换群$(\mathbf{H}^\kappa)$ 是初等的，当且仅当其长度函数 $\ell\colon \Gamma \to \mathbb{R}_+$ 是某个同态 $\Xi\colon \Gamma \to \mathbb{R}$ 的绝对值。

证明。这由定理 1.23得出，但为清晰起见，我们把证明详细写出来。

假设 Γ 是初等的。若 Γ 是椭圆型的，则我们将 Ξ 取为平凡同态。若 Γ有一个不动点 $\xi \in \partial X$，则对任意与 ξ 相关联的 $x \in \mathbf{H}^\kappa$，我们将 Ξ 取为布塞曼同态 $g \mapsto \mathrm{Bus}_\xi(gx, x)$（见 [BH99,ChapterII.8]中关于布塞曼函数的细节）。若 Γ 是线性型的，则它使某条测地线$(\xi, \xi') \subset X$ 保持不变，而沿该测地线的平移参数给出所需的同态 Ξ。在所有情形中，我们有 $\ell(\gamma) = |\Xi(\gamma)|$。

反之，假设 Γ 是非初等的，则由定理2.16，Γ 包含两个在无穷远处具有不相交不动点集的双曲型元素 α、β，从而由定理1.23，存在$p \in \mathbb{N}_{\geq 1}$，使得限制长度函数 $\mathbb{Z}^2 \ni (m, n) \mapsto \ell(a^{pm} b^{pn}) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 是固有的，因此不可能存在同态 $\Xi\colon \Gamma \to \mathbb{R}$，使得 $\ell(\gamma) = |\Xi(\gamma)|$。 □

当一个子群为非初等群时，其极限集 Λ（Γ）是无限的，并且是最小的闭Γ-不变子集 $\partial\mathbf{H}^\kappa$（见 [DSU17，§7.2-§7。3]）。

引理 2.18（凸核）。考虑一个 $\Gamma \subset \mathrm{Isom}(\mathbf{H}^\kappa)$ 的非中性子群。

存在一个最小的非空（闭）不变凸子空间$\mathbf{H}^\kappa$：它就是 Λ（Γ）的凸包。我们称其为凸核，并记作$\mathrm{Core}(\Gamma)$。

存在一个最小的非空（闭）全测地不变子空间：即其极限集的张成空间$\mathrm{Span}(\Lambda$（Γ）$\subset \mathbf{H}^\kappa$。

证明。如果该表示不是初等的，则见 [DSU17，§7.2-7。3]）。

如果该表示不是中性的，那么就存在一个双曲型元素，因此其极限集至少包含两个点。任何凸子集 C 若为不变的，就包含 $\Lambda(\Gamma)$中的点作为其边界点，因为它不依赖于所选的基点。根据测地线关于端点的连续性（[DSU17，命题 4.4。4]），凸包 C 包含 $\Lambda(\Gamma)$中各点之间的所有测地线。特别地，所有不变闭凸子集的交集非空，因此这就是唯一的极小不变闭凸子集。

Th同样的论证也适用于不变全测地子空间，且可得相同结论 . □

回忆一下，$\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^\kappa) = \mathrm{PO}(1, \kappa)$，且群 Γ 在 $\mathbf{H}^\kappa$ 上的等距作用可以提升为在 $\mathbb{R}^{1+\kappa}$ 上保持 $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^\kappa$ 的线性作用（或在 $\mathbf{X}_{+1}$ 的上半部分上保持该结构的作用）。

定义 2.19（极小与不可约）。表示 $\Gamma \to$Isom$(\mathbf{H}^\kappa)$ 称为极小的，如果其在 $\mathbf{H}^\kappa$ 上的作用不存在真闭不变全测地子空间。

当表示 $\Gamma \to \mathrm{PO}(1, \kappa)$ 所对应的线性作用在 $\mathbb{R}^{1+\kappa}$上不保留非平凡的闭线性子空间时，该表示称为不可约。

注记 2.20（不可约、 =极小和非初等）。根据定义，表示不可约，当且仅当它是极小的且没有无穷远不动点。事实上，在$\mathbb{R}^{1+\kappa}$中，任一非平凡闭线性子空间都存在一个非平凡的闭正交补：这两者中至少有一个与各向同性锥或单位双曲面$\mathbf{X}_0 \cup \mathbf{X}_{+1}$相交，而后者投影化后即为$\mathbf{H}^\kappa \cup \partial\mathbf{H}^\kappa$。

3 从核到等距嵌入

本节将讨论拓扑空间 X，Y以及在这些空间上通过同胚作用的拓扑群 Γ，G，但我们主要关注具有离散拓扑的集合和群。

定义 3.1（核）。 在拓扑空间 X上，核是一个连续函数 $K\colon X^2 \to \mathbb{R}$，且具有对称性（$\forall x,\ y \in X\colon K(x,\ y) = K(y,\ x)$）。当$\forall z \in X\colon K(z,\ z) = s$时，我们称其具有对角线 $s \in \mathbb{R}$。当 $\forall x,\ y \in X\colon K(x,\ y) \geq 0$时，我们称其为非负。

这里我们回顾一些关于拓扑背景的内容，涉及可在 X 上的函数空间以及表示空间 $\Gamma \to \mathrm{Isom}(X)$ 上赋予的拓扑。

定义 3.2（逐点拓扑）。 对于拓扑空间 X 和 $p \in \mathbb{N}$，连续函数集合 $X^p \to \mathbb{R}$ 作为 $\prod_{X^p} \mathbb{R}$ 的子集，其继承自乘积拓扑的逐点收敛拓扑。

它是一个局部凸拓扑向量空间。它的紧凸集对应于形如 $\prod_{x \in X^p} [min_x, max_x]$ 的紧区间的乘积。

引理 3.3（闭子空间）。 在空间 X 上，由任意一组关于 K 在有限个点处的取值的连续函数之间的非严格等式所确定的连续函数 $K\colon \ X^p \to \mathbb{R}$ 构成的子集是闭的。

更确切地说，若对所有 $n \in \mathbb{N}$，我们都有一个集合 L_n（其基数可以任意），用于标记连续函数 $D_l^n\colon \ \mathbb{R}^{n^p} \to \mathbb{R}$，那么以下公式定义了一个闭子空间：

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall l \in L_n,\ \forall x \in X^{n^p}\colon D_l^n(K(x_{i_1}, \ldots, x_{i_p})) \geq 0.$$

例 3.4（群作为集合）。 在拓扑群 Γ 上，左不变函数 $K\colon \Gamma^{1+p} \to \mathbb{R}$ 构成的子集是闭的，并且与所有函数 $F\colon \Gamma^p \to \mathbb{R}$ 的空间同构，其中 $K(\gamma_0, \ldots, \gamma_n) = F(\gamma_0^{-1}\gamma_1, \gamma_1^{-1}\gamma_2, \ldots, \gamma_{n-1}^{-1}\gamma_n)$ 且 $F(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) = K(1, \gamma_1, \gamma_1\gamma_2, \ldots, \gamma_1 \ldots \gamma_n)$。

3.1 正定型核与条件负定型核

我们回顾一些关于正型核和条件负定型核的事实（例如参见 [BCR84，第 3]章，术语略有不同），因为我们想强调一些关于线性无关性的结果，这些结果将在下一节中用到。

定义 3.5（正定型与条件负定型）。核 $K\colon \ X \times X \to \mathbb{R}$

当对所有 $x \in X^n$，都有以下关系时，称其为正定型：

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\colon \ \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j K(x_i, x_j) \geq 0 \tag{15}$$

当对不同的 x_k，这些不等式均为严格不等式时，称其为严格正型。

has 当条件负定型且其对角线为 0，并且对所有 $x \in X^n$，都有 :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\colon \ \sum_k \lambda_k = 0 \implies \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j K(x_i, x_j) \leq 0. \tag{16}$$

并且当对于不同的 x_k而言，这些不等式均为严格不等式时，称为严格条件负型 。

对于基数 κ，我们用 $\mathbb{R}^\kappa$表示具有该维数的希尔伯特空间。回忆一下，希尔伯特空间的子集Y 称为总体，如果不存在包含 Y 的闭线性子空间；如果不存在包含 Y的闭仿射子空间，则称其为仿射总体。

定理 3.6（线性与仿射 GNS 构造）。考虑一个核 $K\colon\ X \times X \to \mathbb{R}$。

若 K 为正定型，则存在基数 κ 与连续的 $f\colon\ X \to \mathbb{R}^\kappa$，且具有全像，使得 $\forall x,\ y \in X\colon K(x,y) = \langle f(x)\ f(y)\rangle$。此外它是唯一的：对任意两个这样的 $f_i\colon X \to \mathbb{R}^{\kappa_i}$，存在线性等距映射 $\varphi\colon \mathbb{R}^{\kappa_1} \to \mathbb{R}^{\kappa_2}$，使得 $f_2 = \varphi \circ f_1$。

若 K 为条件负定型，则存在基数 κ 与连续的 $f\colon\ X \to \mathbb{R}^\kappa$，且具有仿射全像，使得 $\forall x,\ y \in X\colon K(x,y) = \|f(x) - f(y)\|^2$。此外它是唯一的：对任意两个这样的 $f_i\colon X \to \mathbb{R}^{\kappa_i}$，存在仿射等距映射 $\varphi\colon \mathbb{R}^{\kappa_1} \to \mathbb{R}^{\kappa_2}$，使得 $f_2 = \varphi \circ f_1$。

证明。对于正定型和条件负定型这两种情形，f的存在性与唯一性已在 [BCR84第 3]章中以构造性方式说明。它们也可由 Cayley-Merger 定理及 Blumenthal 的工作推出 [Blu70，§ 42]，；我们将在定理3.13的证明中，对双曲型核作更详细的说明。 □

注记 3.7（分离意味着单射）。当正定型或条件负定型的核 $K\colon\ X \times X \to \mathbb{R}$ 分离点（或称为分离的）时，我们称其为分离点；此时，对于所有互异的 $x,\ y \in X$，都有：

$\langle\ ,\ \rangle$：当 K为正定型时，$K(x,\ y) < \max\{K(x,\ x)\ K(y,\ y)\}\|\ \|^2$：当 K 为条件负定型时，$K(x,\ y) \neq 0$。

K 分离点这一事实等价于定理 f 中的函数具有单射性3.6。K 的严格性意味着 K 分离点。

这些严格不等式分别刻画了关联映射 $f\colon\ X \to \mathbb{R}^\kappa$ 到希尔伯特空间的像的线性无关性和仿射无关性。

引理 3.8（严格性意味着独立性）。设 $K\colon\ X \times X \to \mathbb{R}$ 是一个核。

若 K 具有严格正型，则对于任意连续的 $f\colon\ X \to \mathbb{R}^\kappa$，只要满足 $K(x,y) = \langle\varphi(x)\ \varphi(y)\rangle$，$X$ 中各点的像在 $\mathbb{R}^\kappa$中线性无关；特别地，f 是一个嵌入。

若 K 具有严格条件负型，则对于任意连续的 $f\colon\ X \to \mathbb{R}^\kappa$，只要满足$K(x,y) = \|f(x) - f(y)\|^2$，$X$中各点的像在 $\mathbb{R}^\kappa$中仿射无关；特别地，f 是一个嵌入。

证明。考虑映射 $f\colon\ X \to \mathbb{R}^\kappa$，使得对于所有 $x,y \in X$，根据类型，我们有 $K(x,y) = \langle f(x)\ f(y)\rangle$ 或 $K(x,y) = \|f(x) - f(y)\|^2$。

对于 $n \in \mathbb{N}$，考虑互异点 $x_1, \ldots, x_n \in X$ 和 $\lambda \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$。

我们有 $\|\sum_i \lambda_i f(x_i)\|^2 = \sum_{i,\ j} \lambda_i\lambda_j\langle f(x_i)\ f(x_j)\rangle$；当 K 是严格正型时，这必定是 > 0，因此 $f(X)$ 线性无关，且 f 是单射。

假设 $\sum_k \lambda_k = 0$，我们有 $\|\sum_i \lambda_i f(x_i)\|^2 = -\frac{1}{2}\sum_{i,\ j} \lambda_i\lambda_j\|f(x_i) - f(x_j)\|^2$；当 K 是严格的条件负定型时，这必定是 < 0，因此 $f(X)$ 仿射无关，且 f 是单射。 □

以下内容将用于证明定理 3.30。

引理 3.9（正定型核的幂级数是严格的）。考虑一个分离核$K\colon\ X \times X \to \mathbb{R}$，它是正定型的，并满足 $\forall x \in X\colon\ K(x,x) < 1$，且其关联映射是单射$f\colon\ X \to \mathbb{R}^\kappa$。

对于一个系数为 $q_m \geq 0$、收敛半径为 1 的幂级数 $Q(z) = \sum_{m\geq 1} q_m z^m$，核 $Q \circ K$ 是严格正型。

证明。令 $x \in X^n$，并记 $K_{i,j} = K(x_i, x_j)$。取 $\lambda \in \mathbb{R}^n$ 使得 $\sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j Q(K_{i,j}) = 0$，即 $\sum_m q_m \left(\sum_{ij} \lambda_i \lambda_j K^m_{i,j} \right) = 0$。

根据舒尔定理 [BCR84，第3章，定理 1，12]，对于所有 $m \geq 1$，核 K^m 均为正定型，这意味着 $\left(\sum_{ij} \lambda_i \lambda_j K^m_{i,j} \right) \geq 0$。由于 Q 的收敛半径为 1，不等式 $q_m \geq 0$ 对无穷多个 m 严格成立。因此，对于这些 $m \geq 1$，我们有 $\sum_{i,\,j} \lambda_i \lambda_j K^m_{i,\,j} = 0$。

由于核 K 是正定型的，它满足柯西-施瓦茨不等式，尤其是 $\forall i,\ j\colon\ |K_{i,\,j}|^2 \leq K_{i,\,i} K_{j,\,j}$。因此，对于 $1 \leq i \neq j \leq n$，根据定理 3.7，我们有 $|K_{i,\,j}| < \mu := \max\{K_{i,i}\}$。

由以上所有结果可知，对于无穷多个 $m \in \mathbb{N}$，我们有 $\sum_{i,\,j} \lambda_i \lambda_j (K_{i,\,j}/\mu)^m = 0$；将 m 的该发散子序列取极限至 $+\infty$，可得 $\sum_{K_{i,\,i} = \mu} \lambda_i^2 = 0$，即 $K_{i,\,i} = \mu \implies \lambda_i = 0$。用 $\max\{K_{j,j}\colon\ K_{j,\,j} < \mu\}$ 重复这一辐角，最终可证明所有 $\lambda_i = 0$。这证明了 $Q \circ K$ 是严格正型的。 □

下面的内容将用于证明定理 4.19

引理 3.10（条件负定型核的幂是严格的）。考虑一个核 $K\colon\ X \times X \to \mathbb{R}$，它是条件负定型的，且仅在对角线上取零。

对所有 $t \in (0,\ 1)$，核 K^t 都具有严格条件负型。

证明。固定 $t \in (0,1)$。设 $x_1, \ldots, x_n$ 是 X 中的互异点，并且 $\lambda \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 满足 $\sum_i \lambda_i = 0$。反设 $\sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j K(x_i, x_j)^t = 0$。由逆拉普拉斯变换，对于任意 $k \geq 0$，有

$$k^t = \frac{t}{\Gamma(1-t)} \int_0^{+\infty} (1 - e^{-uk}) \frac{\mathrm{d}u}{u^{t+1}} \tag{17}$$

将这个积分表示应用于有限和 $0 = \sum_i$ 中的 K^t 的取值，即 $\sum_j \lambda_i \lambda_j K^t(x_i, x_j)$，并利用 $\sum_{ij} \lambda_i \lambda_j = (\sum_k \lambda_k)^2 = 0$，可得 $0 = -\int_0^{+\infty} \left[\sum_{ij} \lambda_i \lambda_j \exp(-uK(x_i, x_j)) \right] \frac{du}{u^{1+t}}$。由舍恩伯格定理 [BCR84，第3章，定理 2.2]，$\forall u \in (0, +\infty)$，核 $\exp(-uK)$ 是正定型的，因此被积函数 $\sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j \exp(-uK(x_i, x_j))$ 是 ≥ 0，故几乎对所有 $u \in (0, \infty)$，它都是 $= 0$。由连续性可知，它对所有 $u \in (0, \infty)$ 都为零。令 $u \to +\infty$ 取极限，得到 $\sum_{K(x_i, x_j) \neq 0} \lambda_i \lambda_j = 0$。由于 K 仅在对角线上取零，这说明 $\sum_{i \neq j} \lambda_i \lambda_j = 0$。从 $0 = (\sum_k \lambda_k)^2$ 中减去此式，得到 $\sum_k \lambda_k^2 = 0$，从而 $\lambda = 0$，这与假设矛盾。因此 $\sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j K^t(x_i, x_j) \neq 0$，证明了 K^t 是严格条件负定型。 □

3.2 双曲型核与 $\mathbf{H}^\kappa$ 中的嵌入

我们回顾核和双曲型函数的定义及其主要结果，其中大多数可见于 [MP19]。

定义 3.11（双曲型核）。核 $K\colon\ X \times X \to \mathbb{R}$ 称为双曲型，若其非负且对角线为 1，并且对于任意 $x_0 \in X$，由 $K_0\colon (x_i, x_j) \mapsto K(x_0, x_i) K(x_0, x_j) - K(x_i, x_j)$ 定义的视觉核 $K_0\colon\ X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 为正定型，即满足以下双曲型柯西-施瓦茨不等式：

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in X^n,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}^n\colon \quad \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \lambda_j K(x_i, x_j) \leq \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k K(x_0, x_k) \right)^2. \tag{HCS}$$

（特别地，对于 $n = 1$，双曲型核的取值必须属于 $[1, \infty)$。）

证明。条件（HCS）可改写为 $\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}\colon \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j K_0(x_i, x_j) \geq 0$，这意味着 K_0 在以 $\{x_1, \ldots, x_n\}$ 为基的 $\mathbb{R}$- 向量空间上给出一个非负二次型。 □

让我们将其与格拉姆矩阵行列式的等价刻画联系起来（参见 [Rat19，7.2。4]），它们也称为 Blumenthal 引入的 Cayley-Menger 行列式（参见[Blu70，§42，§46]）。

命题 3.12（凯莱–门格尔行列式）。 核 $K\colon X\times X\to\mathbb{R}$ 的对角线为1，当且仅当其所有双曲型凯莱–门格尔行列式 均非正时，它是双曲型的：

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in X^{1+n}\colon\quad \det\left(-K(x_i,x_j)\right)_{0\le i,j\le n}\le 0 \tag{HCM}$$

证明。 回顾西尔维斯特定律：实二次型的惯性指数可由其主子式的符号表示：对于任意 $x_0\in X$，视觉核 K_0 在以 X 为基的 $\mathbb{R}$-向量空间上给出一个非负二次型，当且仅当 $\forall x\in X^n$: $\det\left(K_0(x_i,\ x_j)\right)_{1\le i,\ j\le n}\ge 0$。

此外，$\forall x\in X^{1+n}$ 行列式 $\left(-K(x_i,x_j)\right)_{0\le i,j\le k}$ 可改写为（从每一列减去 $j\ge 0$ 第 0 列乘以 $K($ $x_0,x_j)$，再沿第 0 行展开），等于行列式 $\left(K_0(x_i,x_j)\right)_{1\le i,j\le n}$的相反数。因此 (HCS) 与 (HCM) 等价。□

双曲型核的概念之于代数闵可夫斯基空间，类似于正定型核的概念之于希尔伯特空间。其意义在于 [MP19，命题 3。3]。

命题 3.13 (双曲 GNS)。 对于子集 $X\subset\mathbf{H}^\kappa$，函数 $K(x,y)=\cosh\mathbf{d}(x,y)$是一个双曲型核。

反之，对于每个双曲型核 $K\colon\ X\times X\to\mathbb{R}$，都存在一个基数 κ 和一个连续函数 $f\colon\ X\to\mathbf{H}^\kappa$，使得 $K(x,y)=\cosh\mathbf{d}(f(x)\ f(y))$。此外，对于任意两个这样的 $f_i\colon\ X\to\mathbf{H}^{\kappa_i}$，若其像均为总体，则存在一个等距变换 $\varphi\colon\ \mathbf{H}^{\kappa_1}\to\mathbf{H}^{\kappa_2}$，使得 $f_2=\varphi\circ f_1$。

此外，当 κ 为可数时，它是满足存在一个大小为 $1+n$ 的非零双曲型凯莱–门格尔行列式的 $n\in\mathbb{N}$ 的上确界。

证明。 我们概述证明，以说明其中的一些思路，并将其与该主题的早期研究联系起来。

我们来证明，$\mathbf{H}^\kappa$ 上的核（$\cosh\circ\mathbf{d}$）满足定理 3.11。它是对称的，且在对角线上归一化为 1；现在我们来证明双曲型柯西-施瓦茨不等式。它在 $\mathbb{R}^{1+\kappa}$ 中提升为单位双曲面 $\mathbf{X}_{+1}$上半叶上的闵可夫斯基型 $\langle,\rangle$。闵可夫斯基型在 $\mathbf{X}_{+1}$ 于 x_0处的切空间上的限制也是非退化的对称双线性型，且为负定。 $x_i\in\mathbf{X}_{+1}$ 到该切空间的正交投影为 $v_i=x_i-\langle x_0,x_i,\rangle x_0$，因此它们的和 $v=\sum\lambda_i v_i$ 的闵可夫斯基范数为 $\langle v,v\rangle\ge 0$。这说明视觉核 $K_0(x_i,x_j)=\langle x_0,x_i\rangle\langle x_0,x_j\rangle-\langle x_i,x_j\rangle$ 是非负的。

反过来，如果一个空间 X 配有一个在对角线上归一化为 0 的非负核 d，且核 $K=\cosh\circ d$ 的双曲 Cayley–Menger 行列式均为非正，则它可等距嵌入 $\mathbf{H}^\kappa$。关于欧几里得类比的全面分析，可参见 [Blu70, §42]；关于其向双曲情形的扩张，可参见 [Blu70, §106] 。此外，我们还可以刻画其像何时落在 $\mathbf{H}^\kappa$ 的某个有限维子空间中；该子空间的维数是使得所有点数超过 $n+1$ 的双曲 Cayley–Menger 行列式均为零的最小 n 。事实上，对于任意 $x_0,\dots,$ $x_n\in\mathbf{H}^n$，$(-\cosh\mathbf{d}(x_i,x_j))$ 的行列式为零，当且仅当 $x_0,\dots,x_n$ 包含于某个真全测地子空间中 [Blu70, 定理 106.1] ；而 (X,d) 可嵌入 $\mathbf{H}^n$，当且仅当这一结论对其任意一个 $(n+3)$ 元组都成立[Blu70, 定理 111.2]。□

注 3.14（从标量积到弦长平方）。考虑一个对角线为 1 的核 $C\colon\ X\times X\to\mathbb{R}$ 。可以定义一个相关的核，其定义为弦长平方： $S=(\sinh 1\ 2\ \mathbf{d})^2=(\sinh 1\ 2\cosh^{-1}(C))^2$。GM24 的定理 3] 证明了，$\bar{\text{s}}\text{ign}\det\left(S(x_i,\bar{x_j})\right)_{0\le i}$ 与 $\operatorname{sign}\det\left(C(x_i,x_j)\right)_{1\le i}$ 的符号相同，$_{j\le n}$。因此，也可以改述刻画 X 嵌入某个 $\mathbf{H}^\kappa$ 这一事实的条件方程 (HCM)：$\forall x\in X^{1+n}\ \det\left(-S(x_i,x_j)\right)$ ≥ 0。

根据 [GM24 的推论 4], , 关于 4×4 上行列式的这些 S 符号条件可导出双曲空间的托勒密不等式，我们将在第4.2节中使用：

$$\left(\sinh\tfrac{1}{2}\delta_{13}\right)\left(\sinh\tfrac{1}{2}\delta_{24}\right)\leq\left(\sinh\tfrac{1}{2}\delta_{12}\right)\left(\sinh\tfrac{1}{2}\delta_{34}\right)+\left(\sinh\tfrac{1}{2}\delta_{14}\right)\left(\sinh\tfrac{1}{2}\delta_{23}\right)\tag{18}$$

因此，较大阶数的弦长平方矩阵的行列式所满足的符号条件，可以对应于对这一托勒密不等式的推广。

定义 3.15 （严格双曲型）。 我们称双曲型核 K: $X\times X\to\mathbb{R}_{\geq 1}$ 为严格双曲型，若对于任意 $x_0\in X$，视觉核 K_0: $(x,y)\mapsto K(x,x_0)K(x_0,y)-K(x,y)$ 都是严格正型。

如下述定理所述，这一严格性条件同样是一种独立性性质 3.16。

这种独立性性质出现在与实树相关的嵌入中，见 [DSU17，定理 13.1.1(iv)] ，并且在 [CG24，注记 43] 中针对双曲型空间 $\mathbf{H}^n$ 的奇异变形作了陈述；我们将在第 3.4 节中看到这些变形。

命题 3.16 (严格性意味着独立性)。 双曲型核 K: $X\times X\to\mathbb{R}$严格双曲型，当且仅当每个函数 f: $X\to\mathbf{H}^\kappa$ 满足 $K(x,y)=\cosh(\mathbf{d}(f(x)\ f(y))$，并且对每个有限 $F\subset X$: 张成空间的维数 $f(F)=$基数为 F)，都具有该性质。

证明。 设 F是一个有限子集，并固定 $x_0\in F$。核 K_0: $(x,y)\mapsto K(x,x_0)K(x_0,y)-K(x,y)$ 是严格正型。因此，根据定理 3.8的第一部分， F 在 $\mathbb{R}^{1+\kappa}$中的像是线性无关的，这就证明了该结果。□

定义 3.17 (双曲型核空间)。 在空间 X上，我们将 $\mathcal{K}(X)$记作赋予逐点收敛拓扑的双曲型核集合。

它是 $\prod_{X^2}\mathbb{R}_{\geq 1}$ 的一个闭子空间，由定理3.3可得。

对于 $K\in\mathcal{K}(X)$，我们用$\dim(K)\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ 表示维数 κ，即由定理3.13给出的双曲空间的维数。当 X 有限时，任一核 K 都有$\dim(K)\leq\mathrm{Card}(X)-1$。

命题 3.18 （维数是下半连续的）。 函数 $K\mapsto\dim(K)$ 是下半连续的。

证明。 对于 $l\in\mathbb{N}$，双曲型核 K_0 满足 $\dim(K_0)\geq l$，当且仅当存在x_0，……，x_l，使得凯莱–门格尔行列式 $\det(-K_0(x_i,\ x_j))_{0\leq i,\ j\leq l}\neq 0$。因此，维数为 $\geq l$ 的核的集合是 $\cup_{x\in X^l}\{K\in\mathcal{K}(X)$: $\det(-K(x_i,\ x_j))_{0\leq i,\ j\leq l}\neq 0\}$，它是若干开集的并。由此得到维数的下半连续。□

3.3 双曲型函数与 $\mathbf{H}^\kappa$ 上的作用

定义 3.19 （双曲型函数）。在拓扑群 Γ 上，函数 F: $\Gamma\to\mathbb{R}$ 是双曲型的，当且仅当其核 $\Gamma\times\Gamma\ni(\alpha,\ \beta)\mapsto F(\alpha^{-1}\beta)\in\mathbb{R}$ 是双曲型的。

我们将 $\mathcal{F}$（Γ）记为 Γ 上双曲型函数的函数空间，并赋予逐点收敛拓扑。根据定理 （$\mathbb{R}_{\geq 1}$）$^\Gamma$ 3.3，它是一个闭子空间。

例 3.20。给定一个连续表示 ρ: $\Gamma\to$ 等距变换群$(\mathbf{H}^\kappa)$，任取一点 $o\in\mathbf{H}^\kappa$，即可通过公式 $F(g)=\cosh\mathbf{d}(o,\ \rho(\gamma)o)$ 得到一个双曲型函数。

另取一点 $o'\in\mathbf{H}^\kappa$，即可得到另一个双曲型函数 F'；对 d 多次应用三角不等式可知，$|\cosh^{-1}F-\cosh^{-1}F'|\leq 2\,\mathbf{d}(o,\ o')$。

以下概述 [MP19、定理 3.4 和推论 3。5]。

命题3.21（表示双曲型函数）。对于一个群 Γ，对每个双曲型函数 $F\colon \Gamma\times\Gamma\to\mathbb{R}$，都存在一个双曲空间 $\mathbf{H}^\kappa$、一个点 $o\in\mathbf{H}^\kappa$ 和一个表示 $\rho\colon \Gamma\to\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^\kappa)$，使得 $F(\gamma)=\cosh \mathbf{d}(o,\rho(\gamma)o)$，且 o 的轨道是总体的。

如果 $\rho\colon \Gamma\to$等距变换群$(\mathbf{H}^\kappa)$与 $\rho'\colon \Gamma\to$等距变换群$(\mathbf{H}^{\kappa'})$是两个这样的表示，则存在唯一的等距变换 $\varphi\colon \mathbf{H}^\kappa\to\mathbf{H}^{\kappa'}$，满足 $\varphi(\rho(\gamma)x)=\rho'(\gamma)\varphi(x)$ 对所有 $x\in\mathbf{H}^\kappa$ 与 $\gamma\in\Gamma$ 成立。

定理中的第二个陈述 3.21 表明，可以给 $F\in\mathcal{F}(\Gamma)$ 赋予与 Γ 在 $\mathbf{H}^\kappa$上的相应作用类相关联的任何对象或属性。

定义3.22（长度函数）。对于群上的双曲型函数 $F\colon \Gamma\to\mathbb{R}$，我们关联一个平移长度函数 $\ell_F\colon \Gamma\to\mathbb{R}_+$，其选取方式为任一相关联的不可约表示 $\rho\colon \Gamma\to$等距变换群$(\mathbf{H}^\kappa)$，并定义 $\ell_F(\gamma)=\ell(\rho(\gamma))$。

我们称 F 为中性，当 $\ell_F=0$ 时；并用 $\mathcal{F}_{nn}(\Gamma)\subset\mathcal{F}(\Gamma)$ 表示非中性双曲型函数的开子空间。

以下公式来自 [MP19，命题4.4]。

引理 3.23 (F 恢复 ℓ)。对于 $F\in\mathcal{F}(\Gamma)$，其平移长度函数 $\ell_F\colon \Gamma\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ 对所有 $\gamma\in\Gamma$ 由下式给出：

$$\ell_F(\gamma)=\lim_{n\to\infty}\tfrac{1}{n}\cosh^{-1}\left(F(\gamma^n)\right).$$

因此，若双曲型函数 $F_i\colon \Gamma\to\mathbb{R}_{\geq 1}$满足 $\|\cosh^{-1}(F_1)-\cosh^{-1}(F_2)\|<\infty$，或等价地 $\|\log(F_1/F_2)\|<\infty$，则它们的长度函数 $\ell_{F_i}\colon \Gamma\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ 相等 $\ell_{F_1}=\ell_{F_2}$。

注记3.24（命题3.21的逆命题）。命题 4.23将表明，满足 $\|\log(F_1/F_2)\|<\infty$（等价地 $\|\cosh^{-1}(F_1)-\cosh^{-1}(F_2)\|<\infty$）的 F_1、$F_2\in\mathcal{F}_{nn}(\Gamma)$必定来自同一个表示 $\rho\colon \Gamma\to$等距变换群$(\mathbf{H}^\kappa)$。

推论3.25 (中性且初等)。对于两个双曲型函数 $F_i\colon \Gamma\to\mathbb{R}_{\geq 1}$满足 $\|\cosh^{-1}(F_1)-\cosh^{-1}(F_2)\|<\infty$，或等价地满足 $\|\log(F_1/F_2)\|<\infty$，我们有：

中性：F_1 是中性的，当且仅当 F_2 是中性的。初等：F_1 是初等的，当且仅当 F_2 是初等的。

证明。由引理 3.23，我们知道 $\ell_{F_1}=\ell_{F_2}$。该结论由此得出，因为 ℓ_F 决定了中性性质（根据定义），以及初等性质（根据引理2.16&1.23）。 □

这里还有一个推论引理 3.23的另一条结论，它与 [OR18定理1非常接近。9]。

引理 3.26 (长度谱的连续性)。函数 $F\mapsto\ell_F$ 在实向量空间函数 $\Gamma\to\mathbb{R}$上的逐点收敛拓扑下是连续的。

证明. 对于固定的 $n\in\mathbb{N}$ 和 $\gamma\in\Gamma$，函数 $F\mapsto\frac{1}{n}\cosh^{-1}(F(\gamma^n))$ 是连续的。我们证明该极限既是上半连续的，也是下半连续的。

一方面，由 $n\mapsto\cosh^{-1}(F(\gamma^n))$ 的次可加性，该极限实际上是一个下确界，因此 $F\mapsto\ell_F(\gamma)$ 是上半连续的。另一方面，将 [OR18，定理 1.1] 应用于 Γ 在 Gromov-δ-双曲空间 X 上的作用，表明对每个 $x\in X$ 和$\gamma\in$等距变换群(X)，我们有 $d(\gamma^2x,x)\leq d(\gamma x,x)+\ell(\gamma)+2\delta$。因此

$$\ell_F(\gamma)\geq\sup\{\tfrac{1}{n}\left(\cosh^{-1}(F(\gamma^{2n}))-\cosh^{-1}(F(\gamma^n))-2\delta\right):n\in\mathbb{N}\}$$

反向不等式则由以下事实得出：$\ell(\gamma)$ 实际上是右侧的极限，这证明了下半连续性。

□

引理 3.27 (F 恢复分类)。 考虑一个双曲型函数 $F\colon\ \Gamma \to \mathbb{R}$，其平移长度函数为 $\ell_F\colon\ \Gamma \to \mathbb{R}_{\geq 0}$。

对于实现 $\rho\colon\ \Gamma \to \mathrm{Isom}(\mathbf{H}^\kappa)$ F 的表示，子群 $\Gamma_0 \subset \Gamma$ 满足：

$\rho(\Gamma_0)$ 是椭圆型，当且仅当 $F(\Gamma_0)$ 有界；$\rho(\Gamma_0)$ 是抛物型，当且仅当 $F(\Gamma_0)$ 无界而 $\ell_F(\Gamma_0)$ 有界；$\rho(\Gamma_0)$ 是双曲型，当且仅当 $\ell_F(\Gamma_0)$ 无界

这尤其适用于整个群 $\Gamma_0 = \Gamma$ 或循环子群 $\Gamma_0 = \{\gamma^n\colon\ \ n \in \mathbb{Z}\}$。

证明。 请注意，第一点和第三点显然成立，因为 $\ell_F(\Gamma_0)$ 无界等价于 $\ell_F(\Gamma_0) = \{0\}$。第二点则可由定理2.14中所述的初等表示分类得出。

□

3.4 核的幂所产生的奇异变形

我们首先回顾 [MP19，定理 $\mathrm{I}^{\mathrm{bis}}$]。

定理 3.28 （奇异变形）。 对于 $t \in (0,1]$，函数 $(\cosh \circ \mathrm{d})^t\colon \mathbf{H}^\kappa \times \mathbf{H}^\kappa \to \mathbb{R}$ 是一个双曲型核。这定义了连续的奇异变形 $\mathfrak{c}_t\colon \mathbf{H}^\kappa \to \mathbf{H}^{\omega+\kappa}$，因此也定义了相应的（共轭类的）奇异表示*(s)* $\chi_t\colon$ 等距变换群$(\mathbf{H}^\kappa) \to$ 等距变换群$(\mathbf{H}^{\omega+\kappa})$。

我们仍将 $\mathfrak{c}_t\colon \mathbf{H}^\kappa \sqcup \partial\mathbf{H}^\kappa \to \mathbf{H}^{\infty+\kappa} \sqcup \partial\mathbf{H}^{\infty+\kappa}$ 在边界上的扩张记为 .

由此得到以下结果 [MP19，定理 3。10]。

推论 3.29 （核的幂与双曲型函数）。 若 $K\colon\ X \times X \to \mathbb{R}$ 是一个双曲型核，则对于所有 $0 \leq t \leq 1$，K^t 都是双曲型核。

类似地，若 $F\colon\ G \to \mathbb{R}$ 是群上的双曲型函数，则对于所有 $0 \leq t \leq 1$,F^t 都是双曲型核。此外，以下性质成立：

1. 当 $t \neq 0$ 时， F^t 是非初等的，当且仅当 F 也是如此。*2.* 与 F^t 相关的平移长度函数彼此相似： $\ell_t = t\ell_1$。

证明。 关于初等性的陈述源于以下事实：等变映射 $\mathfrak{c}_t\colon \mathbf{H}^\omega \to \mathbf{H}^\omega$ 是一个 (t, C)-准等距映射，因此诱导出一个 $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^\omega)$-等变映射 $\mathfrak{c}_t\colon\ \partial\mathbf{H}^\kappa \to \partial\mathbf{H}^\kappa$。长度函数成比例这一陈述的证明见 [MP19，§ 4。2]。

□

下面的命题是对前一命题的加强，其证明依据 [Mon20，定理 1。4] 其中直接证明了双曲型核的幂也是双曲的。

命题 3.30 (严格幂仍为严格幂)。 设 K 是定义在 X 上的双曲型核，且能分离点。对于每个 $t \in (0,1)$，幂 K^t 都是严格双曲型的。

证明。 我们采用 [Mon20 定理 1 的证明中的记号。12] 对于 $K = \beta$ 和 $Q = q$。Monod 通过证明一个不等式，证明了 β^t 是双曲型的。我们不重复该证明，只说明如何用他的记号（核为 N、M'、M''）得到严格不等式。目标是证明 N是严格正型的，这等价于 $M'' = q\,(M')$ 是严格正型的。因为 M' 是分离的正型核，且 Q 满足定理 3.9 的假设，所以这一点成立。

□

取幂 会相应地影响双曲型函数的代数交比 .

引理 3.31 （交比的幂）。 对于 $t \in (0,1]$, 以及任意 x^-， x^+， y^-， $y^+ \in \partial^4\mathbf{H}^\omega$，

$$\left[\mathfrak{c}_t(x^-), \mathfrak{c}_t(x^+), \mathfrak{c}_t(y^-), \mathfrak{c}_t(y^+)\right] = \left[x^-, x^+, y^-, y^+\right]^t.$$

证明。回顾方程（$[\cdot]=0$）和（$[\cdot]=\infty$），它们刻画了交比等于 0 和∞的情形。若 $[x^-,x^+,y^-,y^+]=0$，则 $x^-=x^+$或 $y^-=y^+$，因此 $\mathfrak{c}_t(x^-)=\mathfrak{c}_t(x^+)$ 或 $\mathfrak{c}_t(y^-)=\mathfrak{c}_t(y^+)$，从而[$\mathfrak{c}_t(x^-)$ $\mathfrak{c}_t(x^+)$ $\mathfrak{c}_t(y^-)$ $\mathfrak{c}_t(y^+)$]$=0$，如所需。若 $[x^-,x^+,y^-,y^+]=\infty$，则 $x^-=y^+$或 $y^-=x^+$，因此 $\mathfrak{c}_t(x^-)=\mathfrak{c}_t(y^+)$或 $\mathfrak{c}_t(y^-)=\mathfrak{c}_t(x^+)$，从而 $[\mathfrak{c}_t(x^-)$ $\mathfrak{c}_t(x^+)$ $\mathfrak{c}_t(y^-)$ $\mathfrak{c}_t(y^+)]=\infty$，如所需。

现在，假设 $[x^-,x^+,y^-,y^+]\in(0,+\infty)$。存在一个双曲等距变换 γ，其排斥点为 x^+，吸引点为 y^+，并且满足 $\gamma(y^-)=y^+$。由于 $\mathfrak{c}_t$ 是 χ_t-等变的，等距变换 $\chi_t(\gamma)$ 是一个双曲平移，其轴为 $(\chi_t(\gamma)^-,\chi_t(\gamma)^+)=(\mathfrak{c}_t(x^+)\ \mathfrak{c}_t(y^+))$，并满足 $\chi_t(\gamma)(\mathfrak{c}_t(y^-))=\mathfrak{c}_t(x^-)$。根据构造，$\chi_t$ 的平移长度为 $\ell(\chi_t(\gamma))=t\ell(\gamma)$。因此，根据方程 (9)：$[\mathfrak{c}_t(x^-)\ \mathfrak{c}_t(x^+)\ \mathfrak{c}_t(y^-)\ \mathfrak{c}_t(y^+)]=[\chi_t(\gamma)\ \mathfrak{c}_t(y^-)\ \chi_t(\gamma)^-,\mathfrak{c}_t(y^-)\ \chi_t(\gamma)^+]$ 等于 $\exp(-\ell(\chi_t(\gamma)))=\exp(-t\ell(\gamma))$，因而等于 $[x^-,x^+,y^-,y^+]^t$。 □

引理 *3.32.* 设 (X,d) 是一个强双曲空间，并且 $t\in\mathbb{R}$ 满足 $(x,y)\mapsto\exp(td(x,y))$ 是双曲型核。设 $f_t\colon X\to H^\kappa$ 是一个映射，使得 $\cosh(d(f_t(x)\ f_t(y)))=\exp(td(x,y))$，且 χ_t: 等距变换群$(X)\to$等距变换群(H^κ) 是相应表示。

对于所有 $\gamma\in$等距变换群(X)，都有 $\ell(\chi_t(\gamma))=t\ell(\gamma)$。

对于所有 $x^-,x^+,y^-,y^+\in(\partial X)^{(4)}$，都有 $[f_t(x^-)\ f_t(x^+)\ f_t(y^-)\ f_t(y^+)]=[x^-,x^+,y^-,y^+]^t$。

证明。对关系 $\cosh(\mathrm{d}(f_t(x)\ f_t(y)))=\exp(td(x,\ y))$ 取对数，可得 $|\mathrm{d}(f_t(x)\ f_t(y))-td(x,\ y)|\le\ln(2)$。因此，由于 $d(x,\ y)\to\infty$，我们有 $\mathrm{d}(f_t(x)\ f_t(y))-td(x,\ y)\to\ln(2)$，故根据平移长度的定义以及交比的连续性，结论得证。 □

例3.33。在代数双曲空间 $(\mathbf{H}^\kappa,\mathrm{d})$中，若 $t\in(0,1]$ 则函数$\exp(t\mathrm{d})$ 是一个双曲型核（[Mon20，定理8。5]）。

在实树 (T,d) 如定理 1.4所述，对于每个 $t\in\mathbb{R}$ 函数 $\exp(td)$ 都是双曲型核（[Mon20，命题1。5]）。

4 抽象交比与代数交比：刚性性质

在本节中，我们考虑一个拓扑空间 Y（通常是带有离散拓扑的集合）。回顾一下，$Y_{(4)}\subset Y^4$ 表示由点四元组构成的空间，其中至少有三个点彼此不同。

4.1 强 型双曲空间中的交比在幂意义下唯一 s

本小节的目标是证明：对于强双曲空间 (X,d)，由 d 从方程（5）定义的交比及其幂是唯一的连续函数 $(\partial X)^{(4)}\to\mathbb{R}$，它们满足通常的恒等式（（不变性）、（反演）、（余循环）、（$[\cdot]=0$）、（$[\cdot]=\infty$）），并且在任意子群 $\Gamma\le$等距变换群(X) 充分传递地作用于 ∂X 时保持不变。

This 推广了关于代数双曲空间的类似陈述，即定理2 .5.

定义4.1（抽象交比）。在拓扑空间 Y上，抽象交比是连续函数 $B\colon Y_{(4)}\to[0,\infty]$，满足（不变性）、（反演）和（余循环）关系，以及（$[\cdot]=0$）和（$[\cdot]=\infty$）对位于 0 与 ∞ 之上的纤维的刻画。

我们称抽象交比生成拓扑，如果对于每组三个不同点 x、y、$z\in Y$，子集族 $\{w\in Y\colon B(w、\ x、\ y、\ z)<\varepsilon\}$ 对于 $\varepsilon>0$ 构成 x的邻域基。

注 4.2（$B(y,x,y,z)=1=B(x,y,z,y)$）。对于 Y 上的抽象交比 B，若 $(x,x',y,y')\in Y(4)$ 满足 $x=y$ 或 $x'=y'$，则由等式（反演）可得 $B(x,x'y,y')=1$。然而，反过来却可能完全不成立，通常的交比在 $\mathbf{H}^3$ 上就是如此。

注 4.3（紧致可度量）。若 Y 是紧致可度量空间，则任何抽象交比必然生成该拓扑。事实上，若对固定的互异 $x, y, z \in Y$，以及序列 $(w_n) \in Y^{\mathbb{N}}$，有 $B(w_n, x, y, z) \to 0$，那么 (w_n) 存在一个子列收敛于某个 x'，且该子列满足 $B(x', x, y, z) = 0$。由于 $y \neq z$，由方程（$[\cdot] = 0$）可推出 $x = x'$。

例 4.4（由配对得到的抽象交比）。若连续函数 $\mathfrak{I}\colon Y \times Y \to \mathbb{R}$是对称的（$\mathfrak{I}(x, y) = \mathfrak{I}(y, x)$），并且分离点（$\mathfrak{I}(x, y) = 0 \implies x = y$），则它通过公式 $B(u, v, x, y) = {}^{\mathfrak{I}(u,v)}\mathfrak{I}(x,y)\,\mathfrak{I}(u,y)\,\mathfrak{I}(x,v)$ 给出一个抽象交比。事实上，(不变性)、(不变性) 和（余循环）关系由 $\mathfrak{I}$ 的对称性以及 B的公式推出；而方程 $([\cdot] = 0)$ 和 $([\cdot] = \infty)$ 则由 $\mathfrak{I}$的分离性推出。此外，若 $\mathfrak{I}$ 生成 Y的拓扑（即对所有 $x \in Y$，子集族 $\{x \in Y\colon \mathfrak{I}(x, y) < \varepsilon\}$对 $\varepsilon > 0$ 构成 x的邻域基），则 B 生成 Y的拓扑。

例 4.5（强双曲）。若度量空间 (X, d) 是强双曲的，那么第 2.3 节中引入的交比在 ∂X 上定义了一个抽象交比，并生成由任意视觉距离 d_o所诱导的拓扑。

回忆一下，当对于任意两组三个互异点 (x_i) 和 (y_i)，都存在 $\gamma \in \Gamma$，使得对所有 $i \in \{1, 2, 3\}$，Γ 在空间 X 上的作用满足 $\gamma(x_i) = y_i$ 时，称群 Γ 在空间 X 上传递地三重传递。

命题 *4.6*（*3*-满强双曲空间上的抽象交比）。考虑一个强双曲空间 (X, d)，其中 $\mathrm{Card}(\partial X) \geq 3$，以及一个子群 $\Gamma \subset \mathrm{Isom}(X)$，它在 ∂X 上三重传递。若 ∂X 上存在一个生成该拓扑的抽象交比 B，且该交比在 Γ 下保持不变，那么存在 $t > 0$，使得对所有 $(w, x, y, z) \in (\partial X)^{(4)}$，都有 $B(w, x, y, z) = [w, x;\ y, z]^t$。

证明。对于互异点 $0, \infty \in \partial X$，考虑由固定它们两者$\vec{}$ $\vec{}$的元素组成的子群 $H \subset \Gamma$。选取 $1 \in \partial X \setminus \{0, \infty\}$，并定义连续函数 $\ell_B, \ell_C\colon H \to (\mathbb{R}, +)$，使得 $\vec{\ell}_B\colon \mapsto \log B(\gamma 1, 0, 1, \infty)$，且 $\vec{\ell}_C\colon \gamma \mapsto \log [\gamma 1, 0; 1, \infty]$。根据余循环关系，它们是群同态。此外，根据方程 (9)，每个 $\gamma \in H$ 的平移长度为 $\ell(\gamma) = |\ell_C(\gamma)|$。注意，对于任意抽象的 Γ-不变交比 B，以及任意 $\xi \in \partial X \setminus \{0, \infty\}$ 和 $\gamma \in H$，应用余循环关系、 B的 H-不变性以及反演关系，可得：

$$\begin{aligned} B(\gamma\xi, 0, \xi, \infty) &= B(\gamma\xi, 0, \gamma 1, \infty) B(\gamma 1, 0, 1, \infty) B(1, 0, \xi, \infty) \\ &= B(\gamma 1, 0, 1, \infty) \end{aligned}$$

这意味着同态 $\vec{\ell}_B, \vec{\ell}_C$不依赖于 $1 \in \partial X \setminus \{0, \infty\}$ 的选择。我们旨在证明这些同态成正比例。

如果$\gamma \succ 0$$H$那满足$\gamma^n 1 \to \infty$ 由 B 的连续性可知，我们也有 $\log B(\gamma^n 1, 0, 1, \infty) \to +\infty$因此 $\log B(\gamma 1, 0, 1, \infty) > 0$：这证明 $\ker \vec{\ell}_B \subset \ker \vec{\ell}_C$。利用 B 生成拓扑这一事实，可以用类似论证得到反向包含关系$\to \quad \to \quad \to \quad \to \ell_B \supset \ker \ell_C$。因此，$\ell_B = \ker \ell_C$由 H中的所有非双曲型元素构成；并且对所有 $\gamma \in H$，存在 $t_\gamma > 0$使得 $\vec{\ell}_B(\gamma) = t_\gamma \vec{\ell}_C(\gamma)$；当 γ是双曲型元素时，该元素唯一。

考虑双曲型 $\alpha, \beta \in H$。我们可以找到 $m_k, n_k \to \infty$，使得 $\vec{\ell}_C(\alpha^{m_k}) - \vec{\ell}_C(\beta^{n_k}) \to 0$，因此 $\alpha^{m_k}\beta^{-n_k}1$ 不会收敛到 0 或 ∞。然而，如果 $t_\alpha > t_\beta$，那么 $\ell_B(\alpha^{m_k}\beta^{-n_k}) \to \infty$，于是 $\alpha^{m_k}\beta^{-n_k}1$发散到 α在 $\{0, \infty\}$ 中的吸引不动点，这与之矛盾。$\vec{}$ $\vec{}$由对称性可推得 $t_\alpha = t_\beta$。这证明存在 $t > 0$ 使得 $\ell_B = t\ell_C$。

为完成证明，只需注意，对于任意互异的 $w, x, y, z \in \partial X$，存在 $\gamma \in \Gamma$ 使得 $\gamma(x, y, z) = (0, 1, \infty)$，因此对于某个 $\xi \in \partial X$，有 $B(w, x, y, z) = B(\xi, 0, 1, \infty)$。由三重传递性，存在一个固定 $0, \infty$ 的 $\gamma \in \Gamma$，使得 $\xi = \gamma(1)$，于是 $B(\xi, 0, 1, \infty) = [\xi, 0, 1, \infty]^t$，最终 $B(w, x, y, z) = [w, x, y, z]^t$。两个点相等的情形可由方程 $([\cdot] = 0)$ 或方程 $([\cdot] = \infty)$ 得出；也可由（反演）得出：对于互异的 $x, y, z \in \partial X$，有 $B(y, x, y, z) = B(x, y, z, y) = 1$。 □

推论 4.7 (由 3-等变边界映射保持交比。 考虑 $i \in\{1,2\}$ 个强双曲空间(X_i, d_i) 以及一个嵌入 f: $\partial X_1 \to \partial X_2$，它是到其像上的同胚。假设存在一个子群 $\Gamma \subset$ 等距变换群 (X_1) 在 ∂X_1 上三重传递地作用，并且 f 是 Γ-等变的。

存在 $t>0$，使得对于所有 $(w,x,y,z) \in (\partial X_1)^{(4)}$，我们都有

$$[f(w), f(x); f(y), f(z)]_{\partial X_2} = [w, x; y, z]^t_{\partial X_1}$$

证明。定义 $B\colon (\partial X_1)^{(4)} \to [0,\infty]$，使得 $B(w,x,y,z) = [f(w)\ f(x);\ f(y)\ f(z)]_{\partial X_2}$。由于 f 是到其像上的同胚，抽象交比 B 可由定理 4.6 得出。 □

4.2 从双曲型核到强双曲性

对于树以及双曲空间的奇异变形，存在度量空间 (X,d)，它们满足 $\varepsilon>0$，使得核 $\exp(\varepsilon d)$ 为双曲型。这引出了以下问题。

问题 4.8。 对于哪些度量空间 (X,d)，存在 $\varepsilon>0$，使得核 $\exp(\varepsilon d)$ 为双曲型?

回忆一下，（3）通过 ε 的托勒密不等式刻画了强ε双曲性，其中 $\exp(\frac{1}{2}\varepsilon d)$。以下是这一概念的粗渐近弱化。

定义 4.9（粗强双曲性）。 设 $\varepsilon>0$ 且 $C \in \mathbb{R}$。若对所有 x_1、x_2、x_3、$x_4 \in X$，其距离 $d_{ij}=d(x_i, x_j)$ 及其最大值 $M=\max\{d_{ij}:\ 1\le i,\ j\le 4\}$ 满足：则称度量空间 $(X,\ d)$ 为 C-粗强ε双曲空间。

$$\exp\tfrac{\varepsilon}{2}(d_{13}+d_{24}) \le \exp\tfrac{\varepsilon}{2}(d_{12}+d_{34}) + \exp\tfrac{\varepsilon}{2}(d_{14}+d_{23}) + C\exp(\tfrac{\varepsilon}{2}M) \tag{19}$$

注记 4.10（术语）。 4.9 中定义的空间由 Miao–Schroeder 在[MS12，定义 1] 中引入，称为 渐近 PT_{-1} 空间。他们于 2012 年发布在 arXiv 上的预印本似乎至今未正式发表。此后，Nica–Spakula 在 [NŠ16] 中定义了强双曲性的概念，并自引入以来被广泛使用。因此，我们倾向于将 PT_{-1} 空间更名为渐近强双曲空间。

以下 [MS12，定理 12] 表明，粗强双曲性保留了强双曲性的许多性质。

定理 4.11（粗强双曲蕴含正则格罗莫夫双曲）。若度量空间 (X,d) 具有粗强双曲性，则 X 是格罗莫夫双曲型的，格罗莫夫积可连续延拓至边界，并且所有视觉拟度量都是 ∂X 上的度量，且它们彼此莫比乌斯等价（即诱导相同的度量交比）。

在代数双曲空间（$\mathbf{H}^\kappa$，$\mathbf{d}$）中，对于$\sinh(\frac{1}{2}\mathbf{d})$有如下托勒密不等式，该不等式由 [-GM24，推论 4] 给出，并恢复了 [Val70，定理 3 的推论2]。

引理 4.12（$\mathbf{H}^\kappa$中的托勒密不等式）。对于任意 $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{H}^\kappa$，设两两距离记为$\mathbf{d}(x_i, x_j) = \delta_{ij}$，则托勒密不等式成立：

$$\left(\sinh\tfrac{1}{2}\delta_{13}\right)\left(\sinh\tfrac{1}{2}\delta_{24}\right) \le \left(\sinh\tfrac{1}{2}\delta_{12}\right)\left(\sinh\tfrac{1}{2}\delta_{34}\right) + \left(\sinh\tfrac{1}{2}\delta_{14}\right)\left(\sinh\tfrac{1}{2}\delta_{23}\right) \tag{20}$$

它可以用双曲型核表示为 $\sqrt{2}\sinh(\frac{1}{2}\delta) = \sqrt{\cosh(\delta)-1}$。

命题 4.13（双曲型核$\exp(d)$蕴含粗强双曲性）。 如果度量空间 $(X,\ d)$ 具有一个 $\varepsilon>0$ 使得 $\exp(\varepsilon d)$ 是双曲型核，那么 $(X,\ d)$ 是 3-粗强ε-双曲型的。特别地，它满足定理 *4.11*的结论。

证明。 将 $(X,\ d)$ 替换为 $(X,\ \varepsilon d)$ 后，只需对 $\varepsilon = 1$ 证明即可。

假设 $\exp(d)$ 是双曲型核。存在一个基数 κ 和一个连续函数 $f\colon X \to \mathbf{H}^\kappa$，使得 $\exp d(x,y) = \cosh d(f(x)\ f(y))$。令 $x_1, \dots, x_4 \in X$。记 $d_{ij} = d(x_i, x_j)$ 和 $\delta_{ij} = d(f(x_i)\ f(x_j))$，于是 $\exp d_{ij} = \cosh \delta_{ij}$，且 $M = \max_{ij} d_{ij}$。对 $\sqrt{2\sinh(\delta_{ij}/2)} = \sqrt{\cosh(\delta_{ij}) - 1} = \sqrt{\exp(d_{ij}) - 1}$ 运用托勒密不等式，并利用 $\sqrt{x-1} \le \sqrt{x} - 1 \le \sqrt{x}$，得到：

$$\exp \tfrac{1}{2}(d_{13} + d_{24}) \le \exp \tfrac{1}{2}(d_{12} + d_{34}) + \exp \tfrac{1}{2}(d_{14} + d_{23}) + 3\exp(M/2)$$

从而证明所需的粗强 1-双曲性，其中 $C = 3$。 □

注记 4.14（条件不充分）。定理 4.13 的必要条件并不充分。事实上，四元数双曲空间 $\mathbf{H}^n_{\mathbb{H}}$ 是 CAT(-1) 空间，因此（粗略地）强双曲；然而，对于 $\varepsilon > 0$，核 $\exp(\varepsilon d)$ 不可能是双曲型的，因为 $\mathbf{H}^n_{\mathbb{H}}$ 上所有双曲型核若具有 $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^n_{\mathbb{H}})$-不变性，就必定有界，下面将对此作出解释。在实双曲空间 $\mathbf{H}^\kappa_{\mathbb{R}}$ 上，核 $\log\cosh d$ 根据 [FH74，推论 8.2]，是条件负定型。然而，$\mathbf{H}^n_{\mathbb{H}}$ 上一个具有 $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^n_{\mathbb{H}})$-不变性且为条件负定型的核必定有界，因为 $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^n_{\mathbb{H}})$ 具有 FH 性质，见 [BdlHV08，第 3 节3]。

4.3 代数交比

本节提出一种适用于实双曲空间的无穷远点 GNS 构造。

定义 4.15（代数交比）。 设 Y 是一个拓扑空间。我们将 Y 上的一个代数交比 定义为满足以下条件的抽象交比：函数在对角线上的定义为$(Y \setminus \{\infty\})^2 \to \mathbb{R}_{\ge 0}$，其在对角线上取值为$(y,\ y) \mapsto 0$，在对角线之外则定义为

$$(x,y) \mapsto \left(R(x,y,0,\infty)R(y,0,1,\infty)\right)^2 \tag{21}$$

是 $Y \setminus \{\infty\}$上的条件负定核。

注记 4.16（不定值）。 注意，当 $y = 0 \ne x$时，我们可以利用余循环关系确定$R(x,\ y,\ 0,\ \infty)R(y,\ 0,\ 1,\ \infty) = \infty \times 0$的值，从而求出 $R(x,\ 0,\ 1,\ \infty) \in (0,\ \infty)$。

例4.17（代数模型）。 我们来说明，为何对于代数双曲空间 $\mathbf{H}^\kappa$，$\partial\mathbf{H}^\kappa$ 上的交比是代数交比。在上半空间 $\mathbf{H}^\kappa = \mathbb{R}^{\kappa-1} \times (0, +\infty)$ 中，无穷远边界与 $\mathbb{R}^{\kappa-1} \cup \{\infty\}$ 等同，并且对任意 $x, y, z \in \mathbb{R}^{\kappa-1}$，我们有

$$[x, y; z, \infty] = \frac{\|y-x\|}{\|y-z\|} \tag{22}$$

因为任意四元组都包含在一个等距副本中，该副本为 $\mathbf{H}^3$，故我们可以使用推论 2.7。因此，对任意固定且互异的 $0, 1 \in \mathbb{R}^{\kappa-1}$,

$$[x, y; 0, \infty]\,[y, 0; 1, \infty] = \frac{\|y-x\|}{\|y-0\|} \cdot \frac{\|0-y\|}{\|0-1\|} = \frac{\|y-x\|}{\|0-1\|}$$

它是条件负定核的平方根。

定理 4.18（代数交比的 GNS 构造）。 考虑一个至少有四个点的空间 Y，其上带有代数交比 $R\colon\ Y^{(4)} \to [0, +\infty)$。

存在一个基数 κ 以及一个具有全像的连续映射 $f\colon\ Y \to \partial\mathbf{H}^\kappa$，使得对所有$x^-, x^+, y^-, y^+ \in Y^{(4)}$，我们有 $[f(x^-)\ f(x^+)\ f(y^-)\ f(y^+)] = R(x^-, x^+, y^-, y^+)$。

此外，对于任意两个这样的映射 $f_1\colon\ Y \to \partial\mathbf{H}^{\kappa_1}$ 和 $f_2\colon\ Y \to \partial\mathbf{H}^{\kappa_2}$，存在唯一的等距变换 $\varphi\colon\ \mathbf{H}^{\kappa_1} \to \mathbf{H}^{\kappa_2}$ 使得 $f_2 = \varphi \circ f_1$，特别是 $\kappa_1 = \kappa_2$。

因此，若群 Γ 作用于 Y 并保持 R，则存在表示 $\rho\colon\ G \to \mathrm{Isom}(\mathbf{H}^\kappa)$，使得 f 是 ρ-等变的。

证明。 取一点 $\infty \in \partial X$。固定两个互异点 0，$1 \in Y \setminus \{\infty\}$，并进行 GNS 构造 3.6，得到希尔伯特空间 $\mathbb{R}^{\kappa-1}$ 和映射 $f\colon\ Y \setminus \{\infty\} \to \mathbb{R}^{\kappa-1}$ 其全像满足

$$\|f(y) - f(x)\| = R(x, y, 0, \infty)R(y, 0, 1, \infty).$$

考虑上半空间模型 $\mathbf{H}^{\kappa} \simeq \mathbb{R}^{\kappa-1} \times (0, +\infty)$ 并将 $f\colon\ Y \to \partial\mathbf{H}^{\kappa}$ 扩展为将 ∞ 映射到 ∞。对所有 $x, y, z \in Y \setminus \{\infty\}$，利用（反演）和（余循环）可得，对于 R，有：

$$[f(x), f(y); f(z), f(\infty)] = \frac{\|f(y)-f(x)\|}{\|f(y)-f(z)\|} = \frac{R(x,y,0,\infty)}{R(z,y,0,\infty)} = R(x, y, z, \infty)$$

再次利用（余循环）、（不变性）和（反演），对所有 $(x^-, x^+, y^-, y^+) \in Y^{(4)}$ 可得：

$$\begin{aligned}[f(x^-), f(x^+); f(y^-), f(y^+)] &= [f(x^-), f(x^+); f(\infty), f(y^+)][f(\infty), f(x^+); f(y^-), f(y^+)] \\ &= [f(x^-), f(x^+); f(y^+), f(\infty)]^{-1}[f(y^-), f(y^+); f(x^+), f(\infty)]^{-1} \\ &= R(x^-, x^+, y^+, \infty)^{-1}R(y^-, y^+, x^+, \infty)^{-1} = R(x^-, x^+, y^-, y^+).\end{aligned}$$

因此，$f\colon\ Y \to \partial\mathbf{H}^{\kappa}$ 保持交比不变。

现在，考虑两个这样的函数 f_1 和 f_2。选取 $\infty \in A$ 并令 $\infty_i = f_i(\infty)$。考虑 $\mathbf{H}^{\kappa_i} \simeq \mathbb{R}^{\kappa_i-1} \times (0, +\infty)$ 的上半空间模型，使得 ∞_i 是 $\partial\mathbf{H}^{\kappa_i}$ 中的无穷远点，且 $\|\ \|_i$ 是 $\mathbb{R}^{\kappa_i-1}$ 上的希尔伯特范数。根据构造，存在唯一的 $\lambda > 0$，使得所有满足 $x, y \in Y \setminus \{\infty\}$

$$\|f_2(x) - f_2(y)\|_2 = \lambda\|f_1(x) - f_1(y)\|_1.$$

由于 f_i 在 $\mathbb{R}^{\kappa_i-1}$ 中的像是总体的，存在唯一的等距变换 $\varphi\colon\ \mathbb{R}^{\kappa_1-1} \to \mathbb{R}^{\kappa_2-1}$，使得 $f_2 = \lambda.\varphi \circ f_1$ 在 $Y \setminus \{\infty\}$ 上成立。由 $f'(x, t) = (\lambda f(x)\ \lambda t)$ 定义的函数 $f'\colon\ \mathbf{H}^{\kappa_1} \to \mathbf{H}^{\kappa_2}$ 给出一个具有所需性质的等距变换，其唯一性由 f 的唯一性得出。 □

命题 4.19（奇异嵌入的独立性）。 对于 $t \in (0,\ 1)$，奇异变形 $\mathfrak{c}_t\colon\ \partial\mathbf{H}^{\kappa} \to \partial\mathbf{H}^{\kappa+\infty}$ 具有如下性质：若 F 是 $\partial\mathbf{H}^{\kappa}$ 的有限子集，且满足 $\mathrm{Card}(F) \geq 2$，则 $\mathbf{H}^{\kappa+\infty}$ 中边界包含 $\mathfrak{c}_t(F)$ 的极小全测地子空间的维数为 $\mathrm{Card}(F) - 1$。

证明。 由定理 3.31 关于交比的幂，对任意四个互异的 $w,\ x,\ y,\ z \in \partial\mathbf{H}^{\kappa}$，我们有 $[\mathfrak{c}_t(w)\ \mathfrak{c}_t(x)\ \mathfrak{c}_t(y)\ \mathfrak{c}_t(z)] = [w, x, y, z]^t$。

固定一个点 $\infty \in \partial\mathbf{H}^{\kappa}$。利用定理 4.17 中所述的上半空间模型，集合 $\partial\mathbf{H}^{\kappa} \setminus \{\infty\}$ 具有希尔伯特空间的结构，并且我们有一个条件负定型核 $K = R^2$，它定义在 $\partial\mathbf{H}^{\kappa} \setminus \{\infty\}$ 上，由 $R(x, y) = \|x - y\| = \frac{[x,y,0,\infty]}{\|\mathfrak{c}_t\ [y,0,1,\infty]}$ 给出。对 $\partial\mathbf{H}^{\kappa+\infty} \setminus \{\mathfrak{c}_t(\infty)\}$ 同样成立，并且我们有 $R^t(x, y) = \frac{[\mathfrak{c}_t(\ x\ \mathfrak{c}_t\ y\ \mathfrak{c}_t\ 0\ \mathfrak{c}_t\ \infty\ ])}{[\mathfrak{c}_t\ y\ \mathfrak{c}_t\ 0\ \mathfrak{c}_t\ 1\ \mathfrak{c}_t\ \infty}$ $\|\mathfrak{c}_t(\ x\ -\mathfrak{c}_t\ y\ \|)$ 。

维数为 n、位于希尔伯特空间 $\partial\mathbf{H}^{\kappa+\infty} \setminus \{\mathfrak{c}_t(\infty)\}$ 中的仿射子空间对应于 $\mathbf{H}^{\kappa+\infty}$ 中维数为 $n+1$、且其边界包含 $\mathfrak{c}_t(\infty)$ 的全测地子空间的边界。由于 $K = R^2$ 是条件负型的，根据定理 3.10，$K^t = R^{2t}$ 严格为条件负型，因此 $\mathfrak{c}_t$ 在 $\partial\mathbf{H}^{\kappa} \setminus \{\infty\}$的有限子集上具有仿射无关的像。 □

4.4 由代数交比得到的刚性结果

我们现在应用定理 4.18，以得到代数双曲空间上作用的刚性结果。

推论 4.20（庞加莱延拓）。 考虑，对于 $i = 1,\ 2$，全子集 $L_i \subset \partial\mathbf{H}^{\kappa_i}$。

对于每一个保持交比的双射 $f\colon\ L_1 \to L_2$，存在唯一的等距变换 $\varphi\colon \mathbf{H}^{\kappa_1} \to \mathbf{H}^{\kappa_2}$，使得 $\varphi\colon\ \partial\mathbf{H}^{\kappa_1} \to \partial\mathbf{H}^{\kappa_2}$ 在 L_1 上与 f 重合。

唯一性尤其意味着，如果 f 对某个群作用是等变的，那么 φ 也如此。

证明。当 $n = \operatorname{Card} L_i < 4$ 时，这由以下事实得出：$\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^{1+n})$ 在 $\partial\mathbf{H}^{1+n}$ 中的 n 元互异点组上具有传递作用。当 $\operatorname{Card} L_i \geq 4$ 时，我们将定理 4.18 应用于 $Y = L_1$ 与恒等映射 $\mathbf{1}: L_1 \hookrightarrow \mathbf{H}^{\kappa_1}$，以及 $f: L_1 \to L_2 \subset \mathbf{H}^{\kappa_2}$。存在唯一的等距变换 $\varphi: \mathbf{H}^{\kappa_1} \to \mathbf{H}^{\kappa_2}$，其在 L_1 上的限制为 f。 □

让我们说明代数交比的有用性：至少在实数情形下，它可以简化[Kim01，定理 A] 关于标记长度谱刚性的证明中的一个步骤。

定理 4.21（标记长度谱刚性）。设 Γ 为一个群，且 $\rho_i: \Gamma \to$ 等距变换群$(\mathbf{H}^{\kappa_i})$为两个有限维 $\kappa_i \in \mathbb{N}$ 的扎里斯基稠密双曲表示，其中 $i = 1, 2$。若这两个表示的标记长度谱成比例，则这两个表示共轭。特别地，$\kappa_1 = \kappa_2$ 与标记长度谱相等。

证明。设 ℓ_i 为与 ρ_i相关的长度函数。不妨交换这两个表示，存在 $0 < t \leq 1$ 使得 $\ell_1 = t\ell_2$。设 $\rho_2' = \chi_t \circ \rho_2: \Gamma \to$ 等距变换群$(\mathbf{H}^{\kappa})$，其中当 $t = 1$时 $\kappa = \kappa_2$，当 $t < 1$时 $\kappa = \infty$。与 ρ_2' 相关的长度函数 ℓ_2' 满足 $\ell_2' = \ell_1$。因此，记 L_i 为 ρ_1 和 ρ_2'的双曲型元素的无穷远吸引点集合，由 [Kim01，引理 3] 可知，存在一个双射 $f: L_1 \to L_2$，且保持交比不变。根据推论 4.20，存在一个等变等距变换 $\varphi: \mathbf{H}^{\kappa_1} \to \mathbf{H}^{\kappa}$。特别地，$\kappa = \kappa_1$，从而$t = 1$，这意味着 $\kappa_1 = \kappa_2$。

□

以下将 [Kim01的引理 3] 推广到无限维。

引理 4.22（平移长度在极限集上恢复交比）。对 $i \in \{1, 2\}$，考虑表示 $\rho_i: \Gamma \to$ 等距变换群$(\mathbf{H}^{\kappa_i})$，其平移长度函数非零且相等。存在它们的极限集之间的等变映射 $\varphi: \Lambda_1 \to \Lambda_2$，保持交比，使得每个 ρ_i-双曲型 $\gamma \in \Gamma$ 的不动点 $\rho_i(\gamma)^{\pm}$ 满足 $\varphi(\rho_1(\gamma)^{\pm}) = \rho_2(\gamma)^{\pm}$。

证明。由于 ℓ_i 非零，其双曲型元素的不动点子集 $L_i \subset \partial\mathbf{H}^{\kappa_i}$ 具有基数 $L_i \in \{2, \infty\}$，并且由 [DSU17的命题7.4可知它稠密6] 于其极限集 $\Lambda_i \subset \mathbf{H}^{\kappa_i}$中。

由于平移长度函数一致，Γ中相对于 ρ_1 和 ρ_2 以双曲型方式作用的元素子集也一致。对于两个这样的双曲型元素 α、$\beta \in \Gamma$，由定理 1.23 可得 $\rho_1(\alpha)^+ = \rho_1(\beta)^+ \iff \rho_2(\alpha)^+ = \rho_2(\beta)^+$。因此，我们有一个由公式 $\rho_1(\gamma)^+ \mapsto \rho_2(\gamma)^+$定义的双射 $\varphi: L_1 \to L_2$。让我们证明 φ 保持交比。事实上，对于任意相对于 ρ_1、ρ_2为双曲型的元素 α、$\beta \in \Gamma$，由公式 (10) 我们有

$$\left[\rho_1(\alpha)^+, \rho_1(\alpha)^-, \rho_1(\beta)^+, \rho_1(\beta)^-\right] = \left[\rho_1(\alpha)^+, \rho_1(\alpha)^-, \rho_1(\beta)^+, \rho_1(\beta)^-\right].$$

此外，对于任意相对于 ρ_i为双曲型的群元素 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$，且满足 $\rho_i(\alpha)^+ \neq \rho_i(\beta)^+$和 $\rho_i(\gamma)^+ \neq \rho_i(\delta)^+$，我们有 $\rho_i(\alpha^n\beta^{-n})^+ \to \rho_i(\alpha)^+$、$\rho_i(\alpha^n\beta^{-n})^- \to \rho_i(\beta)^+$、$\rho_i(\gamma^n\delta^{-n})^+ \to \rho_i(\gamma)^+$ 以及 $\rho_i(\gamma^n\delta^{-n})^- \to \rho_i(\delta)^+$。因此

$$\begin{aligned}\left[\rho_1(\alpha)^+, \rho_1(\beta)^+; \rho_1(\gamma)^+, \rho_1(\delta)^+\right] &= \lim_n \left[\rho_i(\alpha^n\beta^{-n})^+, \rho_i(\alpha^n\beta^{-n})^-; \rho_i(\gamma^n\delta^{-n})^+, \rho_i(\gamma^n\delta^{-n})^-\right] \\ &= \left[\rho_2(\alpha)^+, \rho_2(\beta)^+; \rho_2(\gamma)^+, \rho_2(\delta)^+\right]\end{aligned}$$

这证明了 $\varphi: L_1 \to L_2$ 保持交比。它通过连续性延拓为极限集 $\Lambda_1 \to \Lambda_2$ 之间保持交比的映射。

注意，如果 $\operatorname{Card} L_i = 2$，那么关于交比的条件为空。 □

回顾定理2.20 可知，不可约表示是不含无穷远不动点的极小表示。以下命题表明，彼此之间距离一致有界的双曲型函数，在共轭意义下对应于不可约表示。

命题 4.23 (标记长度谱刚性)。 设群 Γ 具有极小表示 $\rho_i\colon G \to$ 等距变换群$(\mathbf{H}^{\kappa_i})$，其中 $i = 1, 2$。若 ρ_1、ρ_2 具有非平凡且相等的长度函数 $\ell_{\rho_1} = \ell_{\rho_2}$，则 $\kappa_1 = \kappa_2$ 和 ρ_1、ρ_2 由等距变换 $\mathbf{H}^{\kappa_1} \to \mathbf{H}^{\kappa_2}$共轭。

证明。 引理 4.22 给出了一个 ρ_i-等变交比保持映射 $\varphi\colon \Lambda_1 \to \Lambda_2$，并且我们有 Card Λ_i 为 2 或不可数。若 Card $L_i = \infty$ 不可数，由于 ρ_i的极小性，集合 Λ_i 在 $\partial\mathbf{H}^{\kappa_i}$中是总体，因此推论 4.20 给出了一个 ρ_i-等变等距变换 $\mathbf{H}^{\kappa_1} \to \mathbf{H}^{\kappa_2}$。若Card $L_i = 2$，那么我们有 Γ 在实直线上的两个等距作用，而容易证明，具有相同（非零）标记长度谱的两个此类作用是共轭的。□

推论 4.24 （长度等价）。 对于 $i \in \{1, 2\}$，考虑产生非零长度函数 $\ell_i\colon \Gamma \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 的非中性 $F_i \in \mathcal{F}_{nn}(\Gamma)$。对于实现 F_i 的任意极小表示 $\rho_i\colon \Gamma \to$ 等距变换群$(\mathbf{H}^{\kappa_i})$，以下各项等价：

F：函数$\log(F_1/F_2)$ 或等价地$\cosh^{-1} F_1 - \cosh^{-1} F_2$ 有界。ℓ_F：长度函数 ℓ_1 和 ℓ_2 相等。ρ_F：表示 ρ_1 和 ρ_2 共轭。

证明。 若 $\log(F_1/F_2)$ 有界，则引理 3.23 由 F 恢复 ℓ_F 可得 $\ell_1 = \ell_2$。

在这种情况下，表示 ρ_1，ρ_2 实现 F_1 和 F_2 是非中性且极小的，因此由命题 4.23 可知它们由等距变换 $\varphi\colon \mathbf{H}^{\kappa_1} \to \mathbf{H}^{\kappa_2}$共轭。

在这种情况下，取 $o_i \in \mathbf{H}^{\kappa_i}$ 满足 $o_2 = \varphi(o_1)$，则有$\mathbf{d}(o_1, \rho_1(\gamma)o_1) = \mathbf{d}(o_2, \rho_2(\gamma)o_2)$，因此$\|\cosh^{-1} F_1(\gamma) - \cosh^{-1} F_2(\gamma)\|$ 有界，或等价地，$\log(F_1/F_2)$有界。□

注记 4.25（中性例外）。 定理 4.24 不能推广到中性情形。例如，回想第2.4 节，椭圆型或抛物型表示的长度函数为零，但根据引理3.27 ，它们各自关联的双曲型函数分别有界和无界。

推论 4.26 （相似标记长度谱）。 考虑双曲型函数$F_i\colon \Gamma \to \mathbb{R}_{\geq 1}$，其给出非平凡长度函数 $\ell_i\colon \Gamma \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，以及任意极小表示 $\rho_i\colon \Gamma \to$ 等距变换群$(\mathbf{H}^{\kappa_i})$ 实现 F_i。对于每个 $t \in (0, 1]$，以下条件等价：

F：F_i 是 t-等价的，即$\log(F_1/F_2^t)$ 有界。ℓ_F：ℓ_i 是 t-相似的，即 $\ell_1 = t\ell_2$。ρ_F：表示 ρ_1 与 t-变形表示 $\chi_t \circ \rho_2$共轭。

在这种情况下，F_i 具有与ℓ_i的相似类相关联的相同对象和属性，例如初等性和中性（从而得到定理 的一个 -变体 *3.25*）。

证明。 若 $\log(F_1/F_2^t)$ 有界，则引理 3.23 从 ℓ_F 恢复 F 推出 $\ell_1 = t\ell_2$。在这种情况下，表示 ρ_1、$\chi_t \circ \rho_2$ 实现 F_1 和 F_2^t 均为非中性且极小，因此由命题 4.23 可知它们由 φ共轭：$\mathbf{H}^{\kappa_1} \to \mathbf{H}^{\kappa_2}$。

在这种情况下，取 $o_i \in \mathbf{H}^{\kappa_i}$，使得 $o_2 = \varphi(o_1)$，我们有 $\mathbf{d}(o_1, \rho_1(\gamma)o_1) = \mathbf{d}(o_2, (\rho_t \circ \rho_2)(\gamma)o_2)$，因此 $\|\cosh^{-1} F_1(\gamma) - \cosh^{-1} F_2^t(\gamma)\|$ 有界，或者等价地，$\log(F_1/F_2^t)$ 有界。□

5 树作用的变形与退化

5.1 临界指数、维数、代表元

定义 5.1 （双曲型核的临界指数）。 对于双曲型核 $K\colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 1}$，我们将 $t_K \in [1, \infty]$ 的上确界定义为其临界指数，其中 $t \in [1, \infty)$ 满足 K^t 是一个双曲型核。

当 $t_K < \infty$ 时，我们称 K^{t_K} 为 K的临界代表元，因此定理 3.13 定义了相应的临界维数 κ_K，对于该维数，存在一个本质上唯一的临界嵌入 $f_{K^{t_K}}$： $X \to \mathbf{H}^{\kappa_K}$，其全像满足 $K^{t_K} =$双曲余弦$\circ \mathbf{d}$。

定义5.2（树状）。双曲型核 $K \in \mathcal{K}(X)$ 在存在一棵实树（T, d）以及一个函数 f: $X \to T$使得 $K(x, y) = \exp\ d(f(x)\ f(y))$ 时称为树状。

命题5.3（树状 =无限临界指数）。双曲型核 $K \in \mathcal{K}$（X）是树状的，当且仅当其临界指数为 $t_K = \infty$。

证明。假设 X 是树状的，并考虑一个映射到实树的函数 f: $X \to T$，使得$K(x, y) = \exp(d(f(x)\ f(y)))$。对于所有 $t > 0$，我们有 $\exp(td) \in \mathcal{K}(T)$，因此与 f复合可得 $K^t \in \mathcal{K}(X)$。

反过来，假设 $t_K = +\infty$，即对所有 $t > 0$，幂 K^t: $X \times X \to \mathbb{R}_{>0}$ 是双曲型核。根据定理 3.13，存在一个嵌入 f_t: $X \to \mathbf{H}^{\kappa_t}$，其全像为整体，且满足 $K^t(x, y) = \cosh(\mathbf{d}(f_t(x)\ f_t(y)))$。因此，对所有 $t > 1$，有:

$$\log K(x, y) = \tfrac{1}{t} \log\cosh \mathbf{d}(f_t(x), f_t(y)).$$

由此可知 $\mathbf{d}(f_t(x)\ f_t(y)) \to +\infty$ 当 $t \to \infty$，并且由于 $\log\cosh(u) \sim u$ 当 $u \to +\infty$，我们有:

$$\log K(x, y) \sim \tfrac{1}{t}\, \mathbf{d}(f_t(x), f_t(y)).$$

取极限后，我们发现 $\log K$ 满足三角不等式，并且由于它是对称的，它在 X上定义了一个半度量。因此，在 X 上，关系 $\log\ K(x, x') = 0$ 是一个等价关系，并且商 $X \bmod K = 1$ 被赋予度量 $\log K$。此外，由 $\log\ K$ 的渐近性以及 $(\mathbf{H}^{\kappa_t}, \mathrm{d})$ 是 Gromov-log(2)-双曲这一事实，我们推出度量空间 $(X \bmod K = 1, \log\ K)$ 是 0-双曲的。该结果现在由定理 1.6 得出。 □

注记 5.4（无限可分）。对于正型核，存在一个与树状类似的概念：无限可分。正型核 K 若取非负值，则它是无限可分的，当对所有 $t > 0$，核 K^t 为正定型（见 [BCR84，定义 2.6 与命题 2.7]）。

这不仅仅是一种类比：如果 K 是树状的双曲型核，那么 K^{-1}就是无限可分的正型核。事实上，如果 K 是树状的，那么存在f： $X \to T$和 d如定理 5.2 所述，使得 $K = \exp(D_T)$，其中 D_T: $(x, y) \mapsto d(f(x)\ f(y))$。核 D_T 是条件负型（对于树，这可见于 [JV84]；对于实树，这是由有限多个点的凸包可用边任意短的有限树逼近而得出的）。因此，核 $K^{-1} = \exp(-D_T)$取非负值，并满足 [BCR84 命题 2.7], 中的条件 (ii)，故它是无限可分的。

反过来则不成立（也就是说 K^{-1} 可能是无限可分的，而 K 却不是树状的），例如参见 [BCR84，习题 2。14]。

命题 5.5（临界指数是上半连续的）。将双曲型核 $K \in \mathcal{K}$（X） 映射到其临界指数 $t_K \in \mathbb{R}_{\geq 1} \sqcup \{\infty\}$ 的函数是上半连续的。此外，如果 $t_K < \infty$，那么 $K^{t_K} \in \mathcal{K}$（X）。

证明。对于上半连续性，我们将证明 $t \in \mathbb{R}_{\geq 1} \sqcup \{\infty\}$ 的原像$[1, t)$，即 $K \in \mathcal{K}(X)$ 中满足 $K^t \notin \mathcal{K}(X)$ 的子集 $\mathcal{V}^t$，是开集。固定 $x = (x_0, \ldots, x_n) \in X^{1+n}$ 后，$K \in \mathcal{K}(X)$ 中满足条件 K^t 在 x 处违反双曲型 Cayley–Menger 行列式不等式（HCM），即满足 $\det(-K^t(x_i, x_j))_{0 \leq i,j \leq n} > 0$ 的子集 $\mathcal{V}_x^t$，在逐点收敛下是开集。根据定义，$\mathcal{V}^t$ 是所有 $n \in \mathbb{N}$ 和 $x \in X^{1+n}$ 对应的 $\mathcal{V}_x^t$ 的并集，因此它是开集。

现在假设 $t_K < \infty$，反设 $K^{t_K} \notin \mathcal{K}$。根据定义，存在 $n \in \mathbb{N}$ 和 $x \in X^{1+n}$，使得 $\det\left(-K^{t_K}(x_i, x_j)\right)_{0\le i,j\le n} > 0$。由于对每个 x，函数 $t \mapsto \det\left(-K^{t}(x_i, x_j)\right)_{0\le i,j\le n}$ 连续，因此存在 $t_x < t_K$ 使得 $K \in \mathcal{V}_x^t$，这将推出 $t_K \le t_x$，矛盾。因此，$K^{t_K} \in \mathcal{K}(X)$，证毕。 □

应用 临界指数的上半连续性在 $t_K = \infty$ 处给出如下结果 .

推论 5.6 (树状的集合是闭的)。 在双曲型核的空间中，树状核构成一个闭集。

定义 5.7 （临界维数与代表元）。 设 $K \in \mathcal{K}(X)$。

当 $t_K < \infty$ 时，我们将临界代表元 定义为 K，即 $K^{t_K} \in \mathcal{K}(X)$；定理 3.13定义了相应的临界维数 κ_K，对于该维数，存在本质上唯一的临界映射 $f_{K^{t_K}}\colon\ X \to \mathbf{H}^{\kappa_K}$，其全像满足 $K^{t_K} = \cosh \circ \mathbf{d}$。

当 K 为树状时，我们定义临界维数 κ，使得对所有 $t > 0$，都有映射 $f_{K^t}\colon\ X \to \mathbf{H}^{\kappa}$，其全像满足 $K^t = \cosh \circ \mathbf{d}$，如定理 3.13所述。

命题 5.8。 对于 $K_0 \in \mathcal{K}(X)$，若满足 $\kappa_{K_0} < \infty$，且 $t_{K_0} < \infty$，则临界维数函数 $K \mapsto \kappa_K$ 在 K_0处下半连续。

注记 5.9（变体假设）。 当 X 为无限时，若 $\kappa_{K_0} < \infty$ 且 K_0 分离点（即 $K_0(x,\ y) = 1 \implies x = y$），则 $t_{K_0} < \infty$ （否则我们会有 $\dim(K_0^{t_{K_0}}) = \mathrm{Card}(X) - 1 = \infty$，由定理 3.30 可知，这与 $\kappa_0 < \infty$矛盾），因此定理 5.8 适用。

证明。 任取一个在 $\mathcal{K}(X)$ 上收敛到 K_0 的超滤子 $\mathcal{F}$。

由定理 5.5，极限 $t_{\mathcal{F}} = \lim_{\mathcal{F}} t_K$ 满足 $t_{\mathcal{F}} \le t_{K_0} < \infty$。此外，我们有$\lim_{\mathcal{F}} K^{t_K} = K_0^{t_{\mathcal{F}}}$，因此由定理 3.18 关于维数下半连续性的结论可得$\lim_{\mathcal{F}} \kappa_K \ge \dim(K_0^{t_{\mathcal{F}}})$。

最后，定理3.30 中证明的线性无关性 $K \in \mathcal{K}(X)$ 表明，对于任意 $t \le 1$，都有$\dim(K^t) \ge \dim(K)$，因此 $\dim(K_0^{t_{\mathcal{F}}}) \ge \kappa_{K_0}$。

将这些不等式串联起来，得到 $\lim_{\mathcal{F}} \kappa_K \ge \dim(K_0^{t_{\mathcal{F}}}) \ge \kappa_{K_0}$，从而证明了 $K \mapsto \kappa_K$ 在 K_0处所需的下半连续性。

注意，当 X 可数时，双曲型核空间是可度量化的，因此可以简化此证明：提取两个连续的子序列后，用收敛序列替代超滤子。 □

注记 5.10（定理 5.8 在树状情形下可能不成立。 当 X 至少有四个元素 o，x，y，z，若 K_0 是树状的，则定理5.8 可能不成立，下面将对此加以说明。

在 $\mathbf{H}^2$ 中，对每个 $n \in \mathbb{N}_{\ge 1}$，考虑一个顶点为 x_n、y_n、z_n 且内心为 o_n 的等边三角形，使得 $d(o_n, x_n) = n$。映射 $f_n\colon\ X \to \mathbf{H}^2$ 将 (x, y, z) 映为 $\mapsto (x_n, y_n, z_n)$，并将所有其他点映为 o_n，由此在 X 上定义一个双曲型核 $K_n(u, v) = \cosh\, \mathrm{d}(f_n(u)\ f_n(v))$；特别满足 $K_n(o,\ x) = K(o, y) = K(o, z) = \cosh(n)$。核序列 $K_n^{1/n}$收敛到与三条边长度均为 e的星形树相关联的树状双曲型核 K_0。对所有 n、$\kappa_{K_n^{1/n}} = 2$，但不包括 $\kappa_{K_0} = 3$，因此这与下半连续性相矛盾。问题在于 $t_{K_n^{1/n}} = n \to \infty$。

当 X 是无限的，且 K_0 满足 $\kappa_0 < \infty$ 分离点（如定理5.9中所述）时，不会出现此类反例。

5.2 实树到 $\mathbf{H}^\omega$ 的等变嵌入

在 [MS84、Bes88和Pau88],中，人们将有限维双曲空间上包含非阿贝尔自由群的群作用空间，通过实树上的作用空间进行了紧化。

事实上，群 Γ 在实树上的作用 T 也通过以下嵌入定理导出一个$\mathbf{H}^\omega$ 上的作用。该定理针对单纯树的情形由 [BIM05], 证明，并在实树的情形中由 [DSU17（定理 13.1）、1] 和 [Mon20（命题 1）5]作了推广。

定理 5.11（树到双曲空间的等变等距嵌入）。 设 T 为一棵实树。对于任意 $\lambda \in \mathbb{R}_{>1}$，存在一个基数 κ 和一个表示 π_λ: 等距变换群(T) $\to$ 等距变换群($\mathbf{H}^\kappa$)，以及一个等距变换群(T)-等变连续单射 $\mathfrak{p}_\lambda$: $T \to \mathbf{H}^\kappa$，使得

$$\lambda^{d(x,y)} = \cosh \mathbf{d}(\mathfrak{p}_\lambda(x), \mathfrak{p}_\lambda(y)). \tag{23}$$

此外，嵌入 $\mathfrak{p}_\lambda$ 可扩展为一个等距变换群(T)-等变嵌入 $\partial \mathfrak{p}_\lambda$: $\partial T \to \partial \mathbf{H}^\kappa$，它在其像上是一个同胚。

注记 5.12（唯一性）。 由双曲型核的唯一性结论（定理 3.13）可知，若任意函数 f: $T \to \mathbf{H}^{\kappa'}$ 具有全像并满足方程（23），则$\kappa = \kappa'$ 且存在 $\varphi \in$ 等距变换群($\mathbf{H}^\kappa$) 使得 $f = \varphi \circ \mathfrak{p}_\lambda$。

注记 5.13（可能不可约）。 定理 5.11 中构造的表示通常不是不可约的，即使 T 上的作用是极小的（即没有不变凸子空间）。例如，若它 T 是一棵单纯树，则顶点像的闭线性张成将是不变子空间，其中不包含任何边的中点。事实上，要证明这一点，可以考虑该树的重心细分，并应用[BIM05，§8]中的显式构造，从而看到顶点的像位于由狄拉克函数张成的希尔伯特空间中 δ_v 其中 v 是一个顶点，而对于一条边的中点 m，其像在 δ_m 方向上有非零分量；该向量是一个单位向量，与所有 δ_v正交。

注记 5.14（相似）。 由此可知，对于带有固定基点 $o \in T$ 的树 T，对λ_0，$\lambda_1 > 1$与 P_i($\gamma \in$ 等距变换群(T) $\mapsto \cosh \mathbf{d}(\mathfrak{p}_{\lambda_i}(o)\ \pi_{\lambda_i}(\gamma)\ \cdot \mathfrak{p}_{\lambda_i}(o)) \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ 相关、定义在等距变换群(T)上的双曲型函数，在 $\mathfrak{p}_{\lambda_i}(o)\ \pi_{\lambda_i}$ 下满足 $P_{\lambda_1} = P_{\lambda_0}^t$，其中 $t = \log(\lambda_1)\log(\lambda_0)$，因此 P_i 是相似的。

注记 5.15（大尺度下相似、小尺度下不可求长）。 定理 $\mathfrak{p}_\lambda$ 中的嵌入 5.11 按不同的尺度区间对度量进行缩放。

在大尺度下，$\mathfrak{p}_\lambda$ 的表现类似于比例为 $\log(\lambda)$ 的相似变换，因为当 $d(x,y) \to \infty$ 时（见引理 5.18），$\mathbf{d}(\mathfrak{p}_\lambda(x)\ \mathfrak{p}_\lambda(y))$ 渐近于 $\log(\lambda) \cdot d(x,y)$。在无穷小尺度下，这个嵌入要复杂得多。例如，$T$ 中一条测地线的像不是可求长曲线，因为根据方程 (23)，有 $\mathbf{d}(\mathfrak{p}_\lambda(x)\ \mathfrak{p}_\lambda(y)) = H(d(x,y))$，其中 H: $\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 是一个连续函数，在 $\mathbb{R}_{>0}$ 上可微，并满足 $\sinh(H(d))\ H'(d) = \log(\lambda)\lambda^d$。因此 $\lim_{d\to 0} H'(d) = +\infty$，这意味着任意测地线的像都具有无限长度。

现在我们可以刻画一个表示何时 ρ: $\Gamma \to \mathrm{Isom}(\mathbf{H}^\kappa)$ 来自于定理 5.11 中所述的实树上的作用。

推论 5.16（树状）。 对于 $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$，以下条件等价：

- 由 $K(\alpha,\beta) = F(\alpha^{-1}\beta)$ 定义的核 $K \in \mathcal{K}(\Gamma)$ 是树状的（定理 *5.2*）。
- 对于所有 $t \in \mathbb{R}_{>0}$，函数 F^t: $\Gamma \to \mathbb{R}_{\geq 1}$ 都是双曲型的。
- 对于任意相应的表示 ρ: $\Gamma \to \mathrm{Isom}(\mathbf{H}^\kappa)$，存在一棵实树 (T,d) 以及一个表示 ρ_T: $\Gamma \to \mathrm{Isom}(T)$，使得 $\rho = \pi_e \circ \rho_T$，其中 π_e 由定理 *5.11* 给出。

证明。 由定理 5.3 并利用定理 5.11 中核与嵌入的等变性即可得出证明。

□

注记 5.17（与树状函数有界距离并不意味着其本身树状）。 在群 Γ 上，可能存在与某个树状函数相距有界的双曲型函数，但它们本身并非树状函数。

例如，取 $\Gamma = \mathbb{Z}$，考虑表示 $\rho\colon \Gamma \to \mathbf{H}^2$，将生成元映射为一个双曲平移，并选取其轴外的任意一点 o，即可得到这样的双曲型函数 $F = F_{\rho,\, o}$。

更一般地，考虑群 Γ 在无穷实树 (T, d) 上的任意极小作用。由嵌入 $\mathfrak{p}_\lambda\colon T \to \mathbf{H}^\kappa$，我们得到一个不可约表示 $\rho\colon \Gamma \to \mathrm{Isom}(\mathbf{H}^\kappa)$。选取基点 $o \in \mathbf{H}^\kappa$，即可得到一个双曲型函数 $F_{\rho,o}$：当且仅当 $o \in \mathfrak{p}_\lambda(T)$ 时，它是树状的。这些函数彼此之间的距离都有界。

在此背景下，我们可以应用引理 3.32，以确定表示 π_λ 如何改变 $\mathrm{Isom}(T)$ 上的长度函数以及 ∂T 上的交比。关于长度函数的结论已见于 [DSU17，注记 13.1。6]。

引理 5.18. 设 T 为一棵实树，并考虑一个 $\mathrm{Isom}(T)$-等变嵌入 $\pi_\lambda\colon \mathrm{Isom}(T) \to \mathrm{Isom}(\mathbf{H}^\omega)$，它满足方程 (23)，其中 $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 1}$。

对于 $\gamma \in$ 等距变换群(T)，我们有 $\ell_{\mathbf{H}^\omega}(\pi_\lambda(\gamma)) = \log(\lambda)\ell_T(\gamma)$。对于 x^-，x^+，y^-，$y^+ \in \partial T$，我们有 $[\mathfrak{p}_\lambda(x^-)\ \mathfrak{p}_\lambda(x^+);\ \mathfrak{p}_\lambda(y^-)\ \mathfrak{p}_\lambda(y^+)] = [x^-, x^+, y^-, y^+]^{\log(\lambda)}$.

注记 5.19（变形 $\mathfrak{c}_t$ 与 $\mathfrak{p}_\lambda$）。对于双曲空间的等变嵌入$\mathfrak{c}_t\colon \mathbf{H}^n \to \mathbf{H}^\omega$ 由奇异变形定理 3.28给出的长度谱只能被压缩 $t' \leq 1$。对于实树的等变嵌入 $\mathfrak{p}_\lambda\colon T \to \mathbf{H}^\omega$ 在定理 5.11中，长度谱可被压缩或扩张，这取决于 λ 是小于还是大于 $\exp(1)$。

注记 5.20（从 $\mathfrak{p}_\lambda$ 在 ∂T的稠密子集上的交比刻画 $\mathfrak{p}_\lambda$）。考虑一个实树（T, d）和一个子群 $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(T)$。假设 Γ 在 T 上极小作用（因此不存在严格的非空闭凸 Γ-不变子集）。在这种情况下，$\mathfrak{p}_\lambda$ 可以刻画为满足以下条件的唯一不可约表示 $\rho\colon \Gamma \to \mathrm{Isom}(\mathbf{H}^\kappa)$，且每个 $\gamma \in \Gamma$ 都满足$\ell_\rho(\gamma) = \lambda\ell_T(\gamma)$。等价地，这是满足以下条件的唯一不可约表示 $\rho\colon \Gamma \to \mathrm{Isom}(\mathbf{H}^\kappa)$，且任意双曲型元素的像都是双曲型元素，并且对于任意双曲型 α，$\beta \in \Gamma$都有 $[\rho(\alpha)^-, \rho(\alpha)^+; \rho(\beta)^-, \rho(\beta)^+] = [\alpha^-, \alpha^+;\ \beta^-, \beta^+]^\lambda$。这由定理 4.23 和定理 4.20 得出。

5.3 $\mathbf{G}\mathbf{H}^\kappa$ 上的作用到实树上的作用的几何极限 T

我们赋予 $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^\omega)$ 以波兰拓扑（由伪度量 $(g, h) \mapsto d(gx, hx)$（$x \in \mathbf{H}^\omega$，参见 [Duc23]）诱导）。对于可数群 Γ，$\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^\omega)^\Gamma$ 上的乘积拓扑也是波兰拓扑，因此这在表示空间 $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{Isom}(\mathbf{H}^\omega))$ 这一闭子集上诱导出波兰拓扑。更具体地说，表示序列 ρ_m 收敛到表示 ρ，当且仅当对于所有 $(\gamma, x) \in \Gamma \times \mathbf{H}^\omega$，我们都有 $\rho_m(\gamma)(x) \to \rho(\gamma)(x)$ 收敛（只需考虑 x 取遍 $\mathbf{H}^\omega$ 的某个总体子集）。

定义 5.21（位移长度下确界）。对于 $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^\kappa)$ 的有限子集 $S \subset$，我们将位移长度下确界定义为

$$\Delta(S) = \inf\{\max\{\mathbf{d}(\gamma o, o) \colon \gamma \in S\} \colon o \in \mathbf{H}^\kappa\}.$$

引理 5.22 (达到下确界位移)。如果有限集 S 生成的子群 等距变换群$(\mathbf{H}^\kappa)$在 $\partial\mathbf{H}^\kappa$ 中没有不动点，那么定义 $\Delta(S)$ 的下确界会在某个点 $o \in \mathbf{H}^\kappa$ 处取得。

证明。函数 $f\colon \mathbf{H}^\kappa \to \mathbb{R}^+$ 由 $f(x) = \max\{\mathrm{d}(\gamma x, x) \colon \gamma \in S\}$ 定义，是连续凸函数的最大值，因此连续且凸。对于 $l \in (\Delta(S)\ +\infty)$，集合 $C_l = f^{-1}([\Delta(S)\ l])$ 是 $\mathbf{H}^\kappa$ 的闭凸子集，因此我们得到递减交集$C_\cap = \bigcap_l C_l$ 和 $C_\cap = \bigcap_l (C_l \cup \partial C_l)$。根据 Duc13，命题 4.4]，，要么 $C_\cap \neq \emptyset$，此时f 在 $\mathbf{H}^\kappa$ 中达到最小值，正如所需；要么 $C_\cap$ 由单点 $\xi \in \partial\mathbf{H}^\kappa$ 构成，该点必被 S 固定（因为 S 中的每个元素对 C_l 的位移至多为 l），矛盾。 □

定理 5.23（几何收敛到树上的作用）。 设群 Γ 有有限生成集 S、基数序列 $\kappa_m \in \mathbb{N}\cup\{\omega\}$ 以及表示序列 $\rho_m\colon\ \Gamma \to$ 等距变换群 $(\mathbf{H}^{\kappa_m})$。

如果没有 ρ_m 具有无穷远不动点，但位移长度下确界 $\Delta(\rho_m(S))$ 随 $m\to\infty$无界，则在提取(ρ_m)的一个子序列后，存在：

1. 一棵实树*(T, d)*以及一个等距作用 $\rho_T\colon\ \Gamma \to$ 等距变换群*(T)* *2.* 一个嵌入 $\mathfrak{p}_\lambda\colon\ T \to H^\omega$ 关于 $\pi_\lambda\colon$ 等距变换群*(T)* $\to$ 等距变换群*(H^ω)*等变，且满足 $\lambda = e$，*3.* 一个保持 $\mathfrak{p}_\lambda($*T)*的等距作用 $\rho_\omega\colon\ \Gamma \to$ 等距变换群*(H^ω)*，*4.* 一个表示序列 $\rho'_m\colon\ \Gamma \to$ 等距变换群*(H^ω)*，使得 $F_{\rho'_m} \sim F_{\rho_m}$ 以及*5.* 一个*(ρ_m, ρ'_m)*-等变奇异嵌入序列 $\mathfrak{c}_{t_m}\colon\ H^{\kappa_m} \to H^\omega$。

使得$(\rho'_m)_m\colon\ \Gamma \to$等距变换群$(\mathbf{H}^\omega)$ 收敛到 $\rho_\omega\colon\ \Gamma \to$等距变换群$(\mathbf{H}^\omega)$ 且 $\rho_\omega = \pi_\lambda \circ \rho_T$。

此外，存在点 $o_m \in$核(ρ_m) 和 $o \in T$，使得对每个有限集 $K \subset \Gamma$，都有 $\mathfrak{c}_{t_m}(\mathrm{Conv}(\rho_m(K)\cdot o_m))$ 到 $\mathfrak{p}_\lambda(\mathrm{Conv}(\rho_\omega(K)\cdot o))$的豪斯多夫收敛。

注记 5.24（重获先前结果）。 首先需要强调，我们的一项新贡献在于，可以考虑在双曲空间上的作用 ρ_m，这些空间的维数$\kappa_m \in \mathbb{N}\cup\{\omega\}$ 构成一个非恒定的可数基数序列；而以往所有工作都局限于 κ_m 有界于或等于某个固定有限整数 n的情形。

若将我们的定理 5.23 应用于群 Γ（该群并非实质阿贝尔群，且其忠实离散表示 $\rho_m\colon\ \Gamma \to$ 等距变换群$(\mathbf{H}^n)$ 的维数序列为常数且均为有限维 $\kappa_m = n$），那么我们得到的树与 Morgan [Mor86定理 36] 所得的树之一等距（另见 [Ota15]，其中综述了 Culler、Morgan、Shalen 和 Otal 关于类似结果的研究），后来 Bestvina [Bes88定理 A]和 Paulin [Pau88]又独立地得到了这些结果。在这些附加假设下，他们推导出 Γ 在 T 上的极限作用具有小边稳定子。我们的证明并未使用他们的结果，而是通过不同的方法重新构造这棵树，但仍依赖于重整化度量这一思想。

作用于 $\mathbf{H}^{\kappa_m}$ 一旦嵌入 $\mathbf{H}^\omega$ 便以一种精确的几何意义收敛，正如轨道有限部分的凸包的豪斯多夫收敛所阐明的那样。 步骤 7 中的证明可与 [CG24第 1.3 节和命题 1 中的证明相比较。9] 后者讨论的是维数序列 κ_m 为常整数 $\kappa_m = n \in \mathbb{N}$的情形。

证明。 假设有限生成集 S 是对称的且包含 1，因此半径为 $k \in \mathbb{N}$ 的球是 $S^k \subset \Gamma$。

步骤 *1*：将凸核 $\mathrm{Core}(\rho_m)$ 置于不动点 o周围。

由于 ρ_m 在无穷远处没有不动点，根据定理 5.22，我们可以找到一个基点 $o_m \in \mathbf{H}^{\kappa_m}$，使位移函数 $o \in \mathbf{H}^\omega \mapsto \max\{d(\rho_m(\gamma)(o)\ o)$关于 $\rho_m(S)$ 取最小值：$\gamma \in S\}$。通过将每个 $\mathbf{H}^{\kappa_m}$ 等距嵌入 $\mathbf{H}^\omega$，并在 $\mathbf{H}^{\kappa_m}$像的张成空间的正交补上作平凡延拓，我们可以且将假设对所有 $m \in \mathbb{N}$都有 $\kappa_m = \omega$。对每个 ρ_m作共轭后，我们可以假设每个 o_m 都与同一个基点 $o \in \mathbf{H}^\omega$重合。

由于 ρ_m 在无穷远处没有不动点，因此存在一个最小的非空闭凸不变集 $\mathbf{Core}(\rho_m) \subset \mathbf{H}^\omega$。由于到闭凸子集上的投影会收缩距离，我们必须有 $o \in$Core(ρ_m)。令 $C_m^k \subset \mathbf{H}^\omega$ 为 $\rho_m(S^k)(o)$ 的闭凸包。注意，$\cup_{k\in\mathbb{N}} C_m^k$ 是 Core(ρ_m) 的一个非空不变闭凸子集，因此这两个子集相同。

第 *2* 步：通过奇异变形 $\mathfrak{c}_{t_m}$ 进行缩放，以聚焦于凸核。

令 $d_m = \max\{\mathbf{d}(\rho_m(\gamma)(o)\ o)\colon\ \gamma \in S\}$ 且 $t_m = d_m^{-1}$。考虑定理 $\mathbf{H}^\omega \to \mathbf{H}^\omega$ 中的等变奇异变形 3.28，使得：

$$\forall x, y \in \mathbf{H}^\omega\colon \quad \cosh \mathbf{d}(\mathfrak{c}_{t_m}(x), \mathfrak{c}_{t_m}(y)) = (\cosh \mathbf{d}(x, y))^{t_m}\,. \tag{24}$$

并假设（在与 $\mathfrak{c}_{t_m}$ 复合一个等距变换后）$\mathfrak{c}_{t_m}(o) = o$。令 $\rho'_m = \chi_{t_m} \circ \rho_m\colon\ \Gamma \to$Isom$(\mathbf{H}^\omega)$。三角不等式表明，每个 $\gamma \in S^k$ 都满足 $\mathbf{d}(\rho_m(\gamma)(o)\ o) \le k d_m$，因此

取 $\cosh^{-1}$ 的对数（24），并对 $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 使用不等式 $\cosh^{-1}\exp(x) \leq x + \log(2)$ 以及 $\log\cosh(x) \leq x$ 可得：

$$\mathbf{d}\left(\rho'_m(\gamma_0)(o), o\right) \leq \cosh^{-1}\exp(t_m \log\cosh(kd_m)) \leq (t_m \log\cosh(kd_m)) + \log(2) \leq k + \log(2$$

因此 $\mathfrak{c}_{t_m}(C_m^k) \subset B(o, k + \log(2))$。

步骤 3：构造 $X^{k,m,i}$ 的二进细分，并重新定位 $Y^{k,m,i} = \mathfrak{c}_{t_m}(X^{k,m,i})$ 于 $\mathbf{H}^\omega$ 中。

对于 $\gamma_0, \gamma_1 \in \Gamma$ 和 $\delta \in [0,1]$，令 $x_m(\gamma_0, \gamma_1; \delta)$ 为 $[\rho_m(\gamma_0)(o)\ \rho_m(\gamma_1)(o)]$ 上距 $\rho_m(\gamma_0)(o)$ 为 $\delta \times \mathbf{d}(\rho_m(\gamma_0)(o)\ \rho_m(\gamma_0)(o))$ 的点，并令 $y_m(\gamma_0, \gamma_1; \delta) = \mathfrak{c}_{t_m}(x_m(\gamma_0, \gamma_1; \delta))$。

对于 $i \in \mathbb{N}$，记深度-i 二进立方体 $D_i = [0,1] \cap \frac{1}{2^i}\mathbb{Z}$，以及 $D_\infty = \bigcup_i D_i = [0,1] \cap \mathbb{Z}[1/2]$。定义深度-$i$ 二进细分 $X^{k,m,i} = \{x_m(\gamma_0, \gamma_1; \delta) : \gamma_0, \gamma_1 \in S^k, \delta \in D_i\}$ 的 1-骨架，以及其异类缩放 $Y^{k,m,i} = \mathfrak{c}_{t_m}(X^{k,m,i}) \subset \mathfrak{c}_{t_m}(C_m^k)$。注意，若 $k \leq k'$ 且 $i \leq i'$，则 $Y^{k,m,i} \subset Y^{k',m,i'}$。

子集 $Y^{k,m,i} \subset \mathbf{H}^\omega$ 的基数至多为 $1 + \kappa_{k,i} = (1 + 2^i) \times \mathsf{Card}(S^k)^2$，因此它包含在一个维数为 $\kappa_{k,i}$ 且包含 o 的全测地子空间中。由于 o 在 $\mathsf{Isom}(\mathbf{H}^\omega)$ 中的稳定子对包含 o 且维数序列为 (κ_n, n) 的全测地子空间旗具有传递作用，我们可以假设（通过对 ρ'_m 作共轭）存在这样一个维数为 $\kappa_{n,n}$ 的子空间旗 $(\mathbf{H}^{\kappa_n})$，位于 $\mathbf{H}^\omega$ 中，使得对所有 m, k, i，都有 $Y^{k,m,i} \subset \mathbf{H}^{\kappa_n, n}$，其中 $n = \max\{k, i\}$。

步骤 4：抽取一个收敛子列 $Y^{k,m,i}$ 当 $m,\ k,\ i \to \infty$ 以找到 $Y^{\infty,\infty,\infty} \subset \mathbf{H}^\omega$.

对所有 m，都有 $Y^{k,m,i} \subset B(o, k + \log(2)) \cap \mathbf{H}^{\kappa_n, n}$，其中 $n = \max\{k, i\}$。因此，利用有限维双曲空间中闭球的紧性，我们可以假设（通过抽取一个子序列），每个序列 $y_m(\gamma_0, \gamma_1; \delta) \in Y^{k,m,i}$ 都收敛到 $\mathbf{H}^\omega$ 中的某个点。对 m 作对角抽取后，我们可以假设，对所有 $\gamma_0, \gamma_1 \in \Gamma$ 和 $\delta \in D_\infty$，序列 $y_m(\gamma_0, \gamma_1; \delta)$ 收敛到某个 $y(\gamma_0, \gamma_1; \delta) \in \mathbf{H}^\omega$：令 $Y^{\infty,\infty,\infty} = \{y(\gamma_0, \gamma_1; \delta) : \gamma_0, \gamma_1 \in \Gamma, \delta \in D_\infty\}$。记 $T \subset \mathbf{H}^\omega$ 为 $Y^{\infty,\infty,\infty}$ 在 $\mathbf{H}^\omega$ 中的拓扑闭包。

步骤5：在 T 上定义一个距离 d，它是0-双曲的。

对于 $y, y' \in T$，定义 $d(y, y') = \log\cosh \mathbf{d}(y, y')$。我们利用(24)以及当 $x \to \infty$时的渐近式 $(\log\cosh\ x)/x \to 1$，计算 $y = \lim\ y_m(\gamma_0, \gamma_1; \delta)$与$y' = \lim y_m(\gamma'_0, \gamma'_1; \delta')$，得到

$$\begin{aligned} d(y, y') &= \lim_{m\to\infty} \log\left(\cosh\left(\mathbf{d}(y_m(\gamma_0, \gamma_1; \delta), y_m(\gamma'_0, \gamma'_1; \delta'))\right)\right) \\ &= \lim_{m\to\infty} t_m \log\left(\cosh\left(\mathbf{d}(x_m(\gamma_0, \gamma_1; \delta), x_m(\gamma'_0, \gamma'_1; \delta'))\right)\right) \\ &= \lim_{m\to\infty} t_m\, \mathbf{d}(x_m(\gamma_0, \gamma_1; \delta), x_m(\gamma'_0, \gamma'_1; \delta')). \end{aligned}$$

由于$\mathbf{H}^\omega$ 上的双曲型距离是格罗莫夫双曲的，且 $t_m \to 0$，因此$(Y^{\infty,\infty,\infty}, d)$是一个0-双曲度量空间。此外，$(Y^{\infty,\infty,\infty}, d)$中的柯西序列必定是完备空间$(\mathbf{H}^\omega, \mathbf{d})$中的柯西序列，因而收敛于其闭包 T中的一个点。因此(T, d)与$(Y^{\infty,\infty,\infty}, d)$的完备化重合。此外，由于 $Y^{\infty,\infty,\infty}$容许近似中点（对任意 $\varepsilon > 0$ 以及 $x, y \in Y^{\infty,\infty,\infty}$，存在 $m \in Y^{\infty,\infty,\infty}$，使得 $d(x, m)\ d(m, y) \leq d(x, y)/2 + \varepsilon$），由定理 1.4，其完备化$(T, d)$是一棵实树。由构造：

$$\forall y, y' \in T: \quad \cosh(\mathbf{d}(y, y')) = e^{d(y,y')}$$

因此，包含 $T \hookrightarrow \mathbf{H}^\omega$ 对应于嵌入 $\mathfrak{p}_\lambda$，即定理 5.11 对 $\lambda = e$。

步骤 6：非等距嵌入 $T \hookrightarrow \mathbf{H}^\omega$ 是 Γ-等变的，且 Γ 等距地作用。

对于 $\gamma_0, \gamma_1 \in \Gamma$ 和 $\delta \in D_\infty$ 和 $\alpha \in \Gamma$，我们有 $y_m(\alpha\gamma_0, \alpha\gamma_1; \delta) = \rho_m(\alpha) y_m(\gamma_0, \gamma_1; \delta)$。因此，我们得到 Γ 在 Y^∞ 上的作用 $\rho_{\omega,\infty}$，其定义为 $\rho(\alpha)(y(\gamma_0, \gamma_1; \delta)) = y(\alpha\gamma_0, \alpha\gamma_1; \delta)$。该作用是等距的，因为对于所有 $\gamma_0, \gamma_1, \gamma'_0, \gamma'_1 \in \Gamma$ 和 $\delta, \delta' \in D_\infty$ 和 $\alpha \in \Gamma$，当 $m \to \infty$ 时，$\mathbf{d}(\rho_m(\alpha) y_m(\gamma_0, \gamma_1; \delta)\ \rho_m(\alpha) y_m(\gamma'_0, \gamma'_1; \delta')) = \mathbf{d}(y_m(\alpha\gamma_0, \alpha\gamma_1; \delta)\ y_m(\alpha\gamma'_0, \alpha\gamma'_1; \delta'))$ 的极限为

$$\mathbf{d}\,\rho(\alpha) y(\gamma_0, \gamma_1; \delta), \rho(\alpha) y(\gamma'_0, \gamma'_1; \delta')) = \mathbf{d}(y(\gamma_0, \gamma_1; \delta), y(\gamma'_0, \gamma'_1; \delta')).$$

Γ 在 $Y^{\infty}{}_{,\infty}{}^{\infty}$ 上的等距作用唯一地延拓为 Γ 在其拓扑闭包 (T,d) 上的等距作用，并延拓至包含它们的最小闭全测地子空间；我们仍将其记为 $(\mathbf{H}^{\omega},\mathbf{d})$。嵌入 $\mathfrak{p}_e\colon (T,d)\hookrightarrow\mathbf{H}^{\omega}$ 是 Γ-等变的。

步骤 7：豪斯多夫 收敛 $\mathfrak{c}_{t_m}$(凸包($\rho_m(S^k)\cdot o_m$)) $\xrightarrow{m\to\infty}$ $\mathfrak{p}_\lambda$(凸包($\pi_\lambda(S^k)\cdot o$)) 于 $\mathbf{H}^{\omega}$.

让我们先明确目标和记号。固定 $k\in\mathbb{N}$。回顾一下， X^k、$_m{}^0=\rho_m(S^k)\cdot o_m$ 的凸包 C_m^k 也是其 1-骨架的凸包，或者是其深度-i 二进细分 X^k、$_m{}^i$的凸包。注意，对于有限的 i，集合 $\mathfrak{c}_{t_m}(X^k$、$_m{}^i)=Y^k$、$_m{}^i$逐点收敛；当 $m\to\infty$趋于 Y^k时，$_\infty{}^i$。此外，在实树 T（Y^{∞}、$_\infty{}^{\infty}$的闭包）中，有限多个点 $\pi_\lambda(S^k)\cdot o=Y^k$、$_\infty{}^0$的凸包是连接它们的测地线段的并，即 Y^k、$_\infty{}^{\infty}=\{y(\gamma_0$、$\gamma_1;\ \delta)$ γ_0、$\gamma_1\in S^k$、$\delta\in D_\infty\}$的闭包。话虽如此，我们旨在证明，$\mathfrak{c}_{t_m}(C_m^k)\subset\mathbf{H}^{\omega}$ 豪斯多夫收敛于 Y^k、$_\infty{}^{\infty}$的闭包。

现在我们来概述这一策略的步骤。根据三角不等式，对所有 m， i ，我们有：

$$\mathbf{d}_H(\overline{Y_\infty^{k,\infty}},\mathfrak{c}_{t_m}(C_m^k))\le\mathbf{d}_H(\overline{Y_\infty^{k,\infty}},Y_\infty^{k,\infty})+\mathbf{d}_H(Y_\infty^{k,\infty},Y_\infty^{k,i})+\mathbf{d}_H(Y_\infty^{k,i},Y_m^{k,i})+\mathbf{d}_H(Y_m^{k,i},\mathfrak{c}_{t_m}(C_m^k))$$

第一项趋于零。对所有有限的 $i\in\mathbb{N}$，有限集 $Y^k{}_{,\ m}{}^i$（逐点，因而也在豪斯多夫意义下）收敛到 $Y^k{}_{,\ \infty}{}^i$，当 $m\to\infty$ 时，因此第三项已得到处理。所以我们必须界定第二项和第四项。

固定 $\varepsilon>0$。令 $M^k=\sup\{t_m\operatorname{diam}(C_m^k):\ m\in\mathbb{N}\}\le t_m2kd_m=2k$。假设 $i\in\mathbb{N}$ 足够大，使得 $\exp(M^k/2^i)<\cosh(\varepsilon)$。对任意 γ_0、γ_1、γ_0'、$\gamma_1'\in\Gamma$ 和 δ、$\delta'\in[0,1]$，以及任意 $m\in\mathbb{N}$，应用方程 (24)，并利用 $t\in\mathbb{R}_{\ge1}$ 下的不等式 $(\cosh d)^t\le\exp(td)$，我们有：

$$\cosh\mathbf{d}(y_m(\gamma_0,\gamma_1;\delta),y_m(\gamma_0',\gamma_1';\delta'))\le\exp\left(t_m\,\mathbf{d}(x_m(\gamma_0,\gamma_1;\delta),x_m(\gamma_0',\gamma_1';\delta'))\right).$$

对于 $\delta\in[0,1]$，我们可以选择 $\delta'\in D_i$，使得 $|\delta-\delta'|<1/2^i$，因此对于所有 γ_0，$\gamma_1\in S^k$，我们有：

$$\exp(t_m\,\mathbf{d}(x_m(\gamma_0,\gamma_1;\delta),x_m(\gamma_0,\gamma_1;\delta')))\le\exp(M^k/2^i)$$

因此 $\mathbf{d}(y_m(\gamma_0,\ \gamma_1;\ \delta)\ y_m(\gamma_0,\ \gamma_1;\ \delta'))\le\cosh^{-1}\exp(M^k/2^i)<\varepsilon$。于是 $\mathbf{d}_H(Y^k{}_{,\ m}{}^{\infty},\ Y^k{}_{,\ m}{}^i)\le\varepsilon$。

接下来，假设 i 至少与上文所述一样大。根据推论 2.1，对于任意 m ，多面体 $C_m^k\subset\mathbf{H}^{\omega}$ 与其 1-骨架之间的 Hausdorff 距离至多为 $\sinh^{-1}(1)$。因此，当 i 足够大时，我们有 $\mathbf{d}_H(C_m^k,\ X^k{}_{,\ m}{}^i)<2\sinh^{-1}(1)$。现在，如果 m 足够大，使得 $(\cosh 2\sinh^{-1}(1))^{t_m}\le\exp(M^k/2^i)$，那么它们在 $\mathfrak{c}_{t_m}$下的像满足 $\mathbf{d}_H(\mathfrak{c}_{t_m}(C_m^k)\ Y^k{}_{,\ m}{}^i)<\varepsilon$。

最后请注意，可以重写步骤 7，将 S^k 替换为任意有限子集 $K\subset\Gamma$ ，从而证明定理中所述的结论。 □

5.4 U双曲空间的超积与实树上的作用 S

本小节的目标是从一个略有不同的角度，介绍定理 T 中$\mathbf{H}^{\omega}$ 的构造5.23，该构造使用了超积。关于超滤子和超积（或超极限）的背景知识，参见 [BH99，第一章。5]。关键在于，代数双曲空间的超积仍然是代数双曲空间。令 $\beta\mathbb{N}$ 表示 $\mathbb{N}$的斯通–切赫紧化，即 $\mathbb{N}$上的超滤子空间。

引理 5.25（双曲空间的超积）。对于由基数构成的序列(κ_m)，其指标集为$\mathbb{N}$ ，且给定超滤子 $\mathfrak{u}\in\beta\mathbb{N}$，存在一个基数 κ ，使得超积 $X=\prod_{\mathfrak{u}}\mathbf{H}^{\kappa_m}$及其距离 $d_{\mathfrak{u}}(x,y)=\lim_{\mathfrak{u}}d(x,y_m)$ 与$\mathbf{H}^{\kappa}$等距。

当每个 κ_m 均可数，且该序列不被有限基数有界时，基数κ 等于连续统的那个 $\mathfrak{c}=\operatorname{Card}(\mathbb{R})$ 。

证明。 令$\mathbf{d}_m$为$\mathbf{H}^{\kappa_m}$上的距离函数。函数 $\cosh\circ\mathbf{d}_m$ 是一个双曲型核。因此， X 上的距离 $d_{\mathfrak{u}}$ 通过 $\cosh\circ d_{\mathfrak{u}}=\lim\cosh\circ\mathbf{d}_m$给出了一个双曲型核，

因此存在一个最小基数 κ，使得 X 等距同构于$\mathbf{H}^{\kappa}$的一个子集。由于每个$\mathbf{H}^{\kappa_m}$ 都是测地的，且每条测地线段都包含于一条双无限测地线中， X 也具有相同的性质。此外， X 是完备的（对于所有非主滤子的超积 $\mathfrak{u}$，这一点都成立）。因此， X 是完备且全测地的，所以它等距同构于$\mathbf{H}^{\kappa}$。□

现在让我们重新导出定理 5.23，利用超极限。

考虑由有限 S生成的群 Γ，以及基数的序列 κ_m 和表示的序列 ρ: $\Gamma \to$ 等距变换群$(\mathbf{H}^{\kappa_m})$，且没有无穷远处的不动点。

根据定理 5.22 我们可以找到一个基点 $o_m \in \mathbf{H}^{\kappa_m}$，实现$\rho_m(S)$-位移函数 $o \in \mathbf{H}^{\omega} \mapsto \max\{\mathbf{d}(\rho_m(\gamma)(o)\ o)$的最小值: $\gamma \in S\}$，我们将其简记为$\Delta_m = \Delta(\rho_m(S))$。

假设 Δ_m 是无界的，并考虑 $\mathbb{N}$ 上的一个超滤子 $\mathfrak{u}$，使得$\lim_{\mathfrak{u}} \Delta_m = +\infty$。

超积 $\prod_{\mathfrak{u}} (\mathbf{H}^{\kappa_m},\ \mathbf{d}_m/\Delta_m,\ o_m)$是一个带基点实树 $(T_{\mathfrak{u}},\ d,\ o_{\mathfrak{u}})$，因为它是道路连通且0-双曲的完备度量空间（因为（$\mathbf{H}^{\kappa_m}$, d_m/Δ_m）是Gromov log(2)/Δ_m-双曲型的，且lim $_{\mathfrak{u}} \Delta_m = +\infty$）。它被赋予由$\rho_T = \prod_{\mathfrak{u}} \rho_m$给出的等距 Γ-作用。

此外，应用定理3.28 可得 $t_m = 1/\Delta_m$ 奇异嵌入 $\mathfrak{c}_{t_m}$: $\mathbf{H}^{\kappa_m} \to \mathbf{H}^{\kappa'_m}$ 从而得到奇异缩放表示 $\rho'_m = \chi_{t_m} \circ \rho_m$: $\Gamma \to$ 等距变换群$(\mathbf{H}^{\kappa'_m})$。

超积 $\prod_{\mathfrak{u}} \left(\mathbf{H}^{\kappa'_m},\ \mathbf{d}'_m,\ \mathfrak{c}_{t_m}(o_m)\right)$ 是一个带基点代数双曲空间$(\mathbf{H}^{\kappa_{\mathfrak{u}}},\ \mathbf{d}_{\mathfrak{u}},\ \mathfrak{c}_{\mathfrak{u}}(o_{\mathfrak{u}}))$。根据定理5.25，它带有等距对角线 Γ作用 $\rho'_{\mathfrak{u}} : = \prod_{\mathfrak{u}} \rho'_m$。

由乘积映射 $\prod_{\mathfrak{u}} \mathfrak{c}_{t_m}$ 诱导的超积映射 $\mathfrak{c}_{\mathfrak{u}}$ 是一个嵌入，将带基点实树 $(T_{\mathfrak{u}},\ d,\ o_{\mathfrak{u}})$ 映入带基点代数双曲空间 $(\mathbf{H}^{\kappa_{\mathfrak{u}}},\ \mathbf{d}_{\mathfrak{u}},\ \mathfrak{c}_{\mathfrak{u}}(o_T))$，且该映射关于等距 Γ-作用 $\prod_{\mathfrak{u}} \rho_m$ 和 $\prod_{\mathfrak{u}} \rho'_m$ 是等变的。

此外， $T_{\mathfrak{u}}$ 中的点与它们在$\mathbf{H}^{\kappa_{\mathfrak{u}}}$ 中的像之间的距离满足如下关系：若 $x, y \in T_{\mathfrak{u}}$ 由 $x = \lim_{\mathfrak{u}} x_m$ 与 $y = \lim_{\mathfrak{u}} y_m$ 给出，则 $d(x, y) = \lim_{\mathfrak{u}} t_m\, \mathbf{d}_m(x_m, y_m)$。由此可得 $d(x_m, y_m) \to \infty_{\mathfrak{u}}$。由于对每个 $m \in \mathbb{N}$，我们有等式 $\cosh(\mathbf{d}(\mathfrak{c}_{t_m}(x_m)\ \mathfrak{c}_{t_m}(y_m)) = \cosh(\mathbf{d}_m(x_m, y_m))^{t_m}$，并且由于 $\lim_{\mathfrak{u}} t_m = 0$，我们有

$$\cosh\left(\mathbf{d}_{\mathfrak{u}}(\mathfrak{c}_{\mathfrak{u}}(x), \mathfrak{c}_{\mathfrak{u}}(y))\right) = e^{d(x,y)}.$$

定理*5.26*（几何极限与超滤子极限一致）。考虑由有限 S生成的群 Γ，以及基数序列 κ_m 和表示序列 ρ: $\Gamma \to$ 等距变换群*(H^{κ_i})*，它们在无穷远处没有不动点，且满足 Δ*($\rho_m(S)$)* $\to +\infty$。根据定理 *5.23*，可以从*(ρ_m)*中提取 Γ 在实树*(T, d)*上由等距变换给出的极限作用，并带有到 H^{ω}的等变嵌入，该嵌入对等距作用 ρ_T, ρ_{ω}是 Γ-等变的。

存在一个超滤子 $\mathfrak{u} \in \beta\mathbb{N}$，使得在取唯一的极小不变实子树之后，实树 $T_{\mathfrak{u}}$ 和 T 以一种 Γ-等变的方式等距；并且在取包含 T 和 $T_{\mathfrak{u}}$ 的嵌入的唯一极小全测地不变子空间之后，Γ 在$\mathbf{H}^{\omega}$ 上的作用 $\rho'_{\mathfrak{u}}$ 和 ρ_{ω} 共轭。

证明。我们说明 $T_{\mathfrak{u}}$ 和 T 之间的等距变换。对于 γ_0, $\gamma_1 \in \Gamma$ 和 $\delta \in [0, 1]$，我们将 $z_{\mathfrak{u}}$(γ_0, γ_1, δ) 记为测地线段 $[\gamma_0 o_{\mathfrak{u}}, \gamma_1 o_{\mathfrak{u}}]$ 上距离 $\gamma_0 o_{\mathfrak{u}}$ 为 $\delta d_{\mathfrak{u}}$($\gamma_0 o_{\mathfrak{u}}$, $\gamma_1 o_{\mathfrak{u}}$) 的唯一一点。

我们首先进行定理 5.23 的证明中步骤 1 所做的所有逐次抽取，并在 $\mathbb{N}$ 上选取一个包含这些抽取的所有像的超滤子 $\mathfrak{u}$。由 $\beta\mathbb{N}$ 的紧性可知，这样的 $\mathfrak{u}$ 存在。特别地，采用定理 5.23 中的记号，并令 $\gamma_0, \gamma_1, \gamma'_0, \gamma'_1 \in \Gamma$ 和 δ, δ' 为 $[0, 1]$, 中的二进数，对于 $y =$，有 lim $y_m(\gamma_0, \gamma_1, \delta)$ $y' = \lim y_m(\gamma'_0, \gamma'_1, \delta')$ 且 $z = z_{\mathfrak{u}}(\gamma_0, \gamma_1, \delta)$ $z' = z_{\mathfrak{u}}(\gamma'_0, \gamma'_1, \delta')$

$$\begin{aligned} d_T(y,y') &= \lim_{m\to\infty} \log\cosh \mathbf{d}(y_m(\gamma_0,\gamma_1,\delta), y_m(\gamma_0',\gamma_1',\delta')) \\ &= \lim_{m\to\infty} t_m\, \mathbf{d}(x_m(\gamma_0,\gamma_1,\delta), x_m(\gamma_0',\gamma_1',\delta')) \\ &= \lim_{\mathfrak{u}} t_m\, \mathbf{d}(x_m(\gamma_0,\gamma_1,\delta), x_m(\gamma_0',\gamma_1',\delta')) \\ &= d_{T_{\mathfrak{u}}}(z,z'). \end{aligned}$$

因此，将 y 映射到 z 的映射 $f_{\mathfrak{u}}$ 从 T 到 $T_{\mathfrak{u}}$ 中 $o_{\mathfrak{u}}$ 的轨道的闭凸包，是一个等变等距变换。实树 T 是极小的，因为它等于 Γ 中元素的轴的并集的闭包。将 $T_{\mathfrak{u}}$ 替换为 $f_{\mathfrak{u}}$ 的像后， T 和 $T_{\mathfrak{u}}$ 以 Γ-等变的方式等距。

此外，根据定理 T和 $T_{\mathfrak{u}}$这两棵树通过映射 $\mathfrak{c}\colon T\to\mathbf{H}^\omega$和 $\mathfrak{c}_{\mathfrak{u}}\colon T_{\mathfrak{u}}\to\mathbf{H}^\omega$嵌入到 $\mathbf{H}^\omega$中，且对应于相同的参数 $\lambda = e$。

现在，定理 5.12 表明这两个表示 ρ_ω 和 $\rho'_{\mathfrak{u}}$ 共轭。 □

6 双曲型函数的等价类

给定拓扑群 Γ 和基数 $\kappa \le \mathrm{Card}(\Gamma)$，我们希望考察连续表示空间 $\Gamma \to \mathrm{Isom}(\mathbf{H}^\kappa)$，并将目标端 $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^\kappa)$ 的作用视为等价关系，即内自同构和奇异表示 $\rho_t\colon \mathrm{Isom}(\mathbf{H}^\kappa) \to \mathrm{Isom}(\mathbf{H}^\kappa)$。

为此，我们将考察模去有界扰动（由共轭产生）和幂（由奇异变形产生）后的双曲型函数。

回顾一下，在（拓扑）群 Γ 上，双曲型函数空间 $\mathcal{F}(\Gamma)$ 赋有逐点收敛拓扑。

定义 6。 **1**（可比性和相似变换）。 在一个群 Γ 上，我们称 F_1， $F_2 \in \mathcal{F}(\Gamma)$ 为 re

可比较的 ，当 $\log(F_1/F_2)$ 或等价地 $\cosh^{-1} F_1 - \cosh^{-1} F_2$ 有界时；当存在 t_1，$t_2 \in (0,1]$ 使得 $F_1^{t_1}$ 和 $F_2^{t_2}$ 可比较时，称其为相似变换的 。

这些在 $\mathcal{F}(\Gamma)$ 上定义了等价关系，后者比前者更粗，并赋予商空间以商拓扑，从而得到连续的商映射 $^-$，记为 $\mathcal{F}(\Gamma) \to \mathcal{C}(\Gamma) \to \mathbf{P}\mathcal{C}(\Gamma)$，将 $F \mapsto F \mapsto [F]$ 发送到。

证明。 可比关系显然具有自反性和对称性，其传递性则由上确界范数的三角不等式推出。相似关系粗于可比关系；其自反性由令 $t_1 = 1 = t_2$ 得出，对称性由可比关系的对称性结合反演 $t \mapsto 1/t$ 得出，而传递性则由可比关系的传递性以及 t 上存在量词的存在性得出。

□

在 $\mathcal{F}(\Gamma)$ 中，恒等于 **1** 的常值函数的可比类是所有有界函数的集合。无界可比类的集合记为 $\mathcal{C}^*(\Gamma) = \mathcal{C}(\Gamma) \setminus \bar{\mathbf{1}}$ ，相应的相似类记为 $\mathbf{P}\mathcal{C}^*(\Gamma) = \mathbf{P}\mathcal{C}(\Gamma) \setminus [\mathbf{1}]$。

空间$\mathbf{P}\mathcal{C}(\Gamma)$ 不是豪斯多夫空间，因为类 $[\mathbf{1}]$ 属于任意其他类的闭包：若 F 是双曲型函数，则 $F^t \to \mathbf{1}$ 当 $t \to 0$。

6.1 $\mathbf{TP}\mathcal{C}(\Gamma) \supset \mathbf{P}\mathcal{C}_{nn}(\Gamma) \supset \mathbf{P}\mathcal{C}_{ne}(\Gamma)$ 的拓扑与长度函数

初等性和中性的概念在可比性（定理3.25）与相似变换（定理4.26）下是不变的。我们将相应的可比类空间记为

$\mathcal{C}_{ne}(\Gamma) \subset \mathcal{C}_{nn}(\Gamma) \subset \mathcal{C}^*(\Gamma)$，将相似类空间记为 $\mathbf{P}\mathcal{C}_{ne}(\Gamma) \subset \mathbf{P}\mathcal{C}_{nn}(\Gamma)\ \mathbf{P}\mathcal{C}^*(\Gamma)$。本小节旨在说明这些子空间上的拓扑性质相当良好。

回顾一下，限制在非中性函数子集 $\mathcal{F}_{nn}(\Gamma)$上时，可比性和相似关系可分别通过长度谱及其关联的极小表示，由定理 4.24 和定理 4.26 刻画。

令 $\mathbb{R}^\Gamma$ 为带有乘积拓扑的乘积向量空间，并令 $\mathbf{P}\mathbb{R}^\Gamma$ 为带有商拓扑的相应射影空间。去除平凡元素 $\{0\}$（其等价类仅包含自身）后，得到空间 $\mathbf{P}\mathbb{R}^\Gamma \setminus \{0\}$；当 Γ 可数时，该空间可度量化。

定理 6.2（$\mathbf{P}\mathcal{C}_{nn}(\Gamma) \subset \mathbf{P}\mathcal{C}_{ne}(\Gamma)$ 上的长度函数）。设 Γ 是一个群。

长度函数 $\ell\colon \mathcal{F}(\Gamma) \to \mathbb{R}^\Gamma$ 定义为 $F \mapsto (\ell_F(\gamma))_{\gamma\in\Gamma}$，它下降为函数 $\ell\colon \mathcal{PC}(\Gamma) \to \mathcal{P}\mathbb{R}^\Gamma$，该函数限制在 $\mathcal{PC}_{nn}(\Gamma)$ 上时连续且单射；特别地，集合 $\mathcal{PC}_{nn}(\Gamma)$ 和 $\mathcal{PC}_{ne}(\Gamma)$ 是豪斯多夫的，并且在 $\mathcal{PC}(\Gamma)$ 中是开集。

注记 6.3。这可以与秩为1的李群中离散子群的表示进行比较：某些可数群的不可约离散忠实表示的共轭类 Γ 在其表示到$\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^n)$的簇中构成一个良好的子空间，由长度函数参数化。例如，参见 [Ota90] 的早期结果，以及 [Kim01] 的更全面结果。

证明。函数 $\ell\colon \mathcal{F}(\Gamma) \to \mathbb{R}^\Gamma$由 $F \mapsto (\ell_F(\gamma))_{\gamma\in\Gamma}$定义，根据引理 3.26 是连续的。根据推论 4.26，该函数下降为函数 $\mathbf{P}\ell\colon \mathbf{P}\mathcal{C}(\Gamma) \to \mathbf{P}\mathbb{R}^\Gamma$，由 $[F] \mapsto [(\ell_F(\gamma))_\gamma]$定义，它是连续且单射的。由于 $\mathbf{P}\mathbb{R}^\Gamma \setminus \{0\}$ 是开集且为豪斯多夫空间，其原像 $\mathbf{P}\mathcal{C}_{nn}(\Gamma)$ 也是如此。我们通过给出一个开覆盖来证明 $\mathbf{P}\mathcal{C}_{ne}(\Gamma)$ 在 $\mathbf{P}\mathcal{C}(\Gamma)$ 中是开的。对于 α、$\beta \in \Gamma$，令 $\mathcal{U}(\alpha,\beta)$ 为 $\mathbf{P}\ [F] \in \mathbf{P}\mathcal{C}(\Gamma)$ 的子集，使得 $\ell_F(\alpha)\ \ell_F(\beta)\ \ell_F(\alpha\beta) > 0$ 且 $\ell_F(\alpha\beta) \neq |\ell_F(\alpha) \pm \ell_F(\beta)|$。$\mathbf{P}\mathcal{C}(\Gamma)$ 的这个定义良好的子集是开的。如果 $[F] \in \mathcal{U}(\alpha,\beta)$，那么 ℓ_F 不是由 α 和 β 生成的子群上的同态的绝对值，因此根据定理 2.17，$[F] \in \mathbf{P}\mathcal{C}_{ne}(\Gamma)$。反之，如果 $[F] \in \mathbf{P}\mathcal{C}_{ne}(\Gamma)$，那么 F它不是同态的绝对值，存在 α、$\beta \in \Gamma$，使得 $\ell_F(\alpha)\ \ell_F(\beta)\ \ell_F(\alpha\beta) > 0$ 且 $\ell_F(\alpha\beta) \neq |\ell_F(\alpha)+\ell_F(\beta)|$，从而 $[F] \in \mathcal{U}(\alpha,\beta)$。

□

在本节余下部分中，我们假设 Γ 是有限生成的：我们的目标是证明下一个定理 定理 6.4，它将进一步阐明以下空间的拓扑：$\mathbf{P}\mathcal{C}(\Gamma) \supset \mathbf{P}\mathcal{C}_{nn}(\Gamma) \supset \mathbf{P}\mathcal{C}_{ne}(\Gamma)$。

定理 6.4 ($\mathbf{P}\mathcal{C}(\Gamma)$的拓扑，对于有限生成的 Γ)。设 Γ 是一个有限生成群。

1. 空间 $\mathcal{PC}(\Gamma)$ 是紧的。*2.* 子空间 $\mathcal{PC}_{nn}(\Gamma)$ 是紧致可度量子空间 $\mathcal{A}_{nn}(S;2,\varepsilon)$ 的一个滤过并，因此限制映射 $\mathcal{P}\ell\colon \mathcal{A}_{nn}(S;2,\varepsilon) \to \mathcal{P}\mathbb{R}^\Gamma \setminus \{0\}$ 是到其像上的同胚。*3.* 子空间 $\mathcal{PC}_{ne}(\Gamma)$ 是紧致可度量子空间 $\mathcal{A}_{ne}(S;2,\varepsilon)$ 的一个滤过并，因此限制映射 $\mathcal{P}\ell\colon \mathcal{A}_{ne}(S;2,\varepsilon) \to \mathcal{P}\mathbb{R}^\Gamma \setminus \{0\}$ 是到其像上的同胚。

证明。定理 6.5 证明了条目 1。定理 6.6和定理 6.7 证明了 $\mathbf{P}\mathcal{C}_{nn}$ 和 $\mathbf{P}\mathcal{C}_{ne}$是紧子集的滤过并。下面说明如何推出可度量化和同胚性质。对 $\mathbf{P}\ell\colon \mathbf{P}\mathcal{C}_{nn}(\Gamma) \to \mathbf{P}\mathbb{R}^\Gamma \setminus \{0\}$的限制，根据定理 6.2，它是连续单射，因此限制在任意紧子集上时，它到其像的映射是同胚。空间 $\mathbf{P}\mathbb{R}^\Gamma \setminus \{0\}$ 的拓扑有可数基（因为 Γ 是可数的），并且它是豪斯多夫分离的，所以其紧子集都是可度量化的。

□

引理 6.5 (紧性$\mathbf{P}\mathcal{C}(\Gamma)$)。对于 Γ 和 $\mu \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 的有限生成集 S，我们定义子集 $\mathcal{B}(S;\ \mu) = \{F \in \mathcal{F}(\Gamma)\colon \max F(S) \leq \cosh(\mu)\}$属于 $\mathcal{F}(\Gamma)$。

对于生成集 $S \subset \Gamma$ 和 $\mu > 0$，子集 $\mathcal{B}(S;\mu)$ 是紧的，并且连续商映射 $\mathcal{F}(\Gamma) \to \mathbf{P}\mathcal{C}(\Gamma)$ 在限制到 $\mathcal{B}(S;\ \mu)$时是满射。特别地，$\mathbf{P}\mathcal{C}(\Gamma)$ 是紧的。

证明。为简化记号，假设生成集 S 是对称的 $S = S^{\pm 1}$ 且包含单位元 1，因此若 $|\cdot|_S\colon \Gamma \to \mathbb{N}$ 表示其关联的词长函数，则对于 $n \in \mathbb{N}$ 有 $S^n = \{\gamma \in \Gamma\colon |\gamma|_S \le n\}$。

我们将证明，双曲型函数的增长有一个上界，该上界由某个绝对函数给出，且仅取决于它在生成集上的取值。固定 $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$，对于$n \in \mathbb{N}$，令 $\cosh \mu_n = \max F(S^n)$。对于写成 $\gamma = \alpha\beta$ 的 $\gamma \in S^{n+1}$，其中 $\alpha \in S^1$ 和 $\beta \in S^n$：

$$\begin{aligned}\cosh^{-1}(F(\gamma)) &\le \mathbf{d}(\alpha\beta o, \alpha o) + \mathbf{d}(\alpha o, o) + \mathbf{d}(o, \beta o) + \mathbf{d}(\beta o, o)\\ &\le \mathbf{d}(\beta o, o) + \mathbf{d}(\alpha o, o) + \mathbf{d}(o, \beta o) + \mathbf{d}(\beta o, o)\\ &\le \mu_1 + 3\mu_n.\end{aligned}$$

因此 $\mu_{n+1} \le \mu_1 + 3\mu_n$，所以 $\mu_n \le 4^n\mu_1$，于是每个满足 $1 \le F(\gamma) \le \cosh(4^{|\gamma|_S}\mu_1)$ 的 $\gamma \in \Gamma$ 都成立。

因此，对于 $\mu > 0$，$F \in \mathcal{F}$ 中满足 $\max F(S) \le \cosh \mu$ 的子集是闭集，且包含于紧子集 $\prod_{\gamma\in\Gamma}[1, \cosh(4^{|\gamma|_S}\mu)]$, 中，所以它是 $\mathcal{F}(\Gamma)$ 的紧子集。

令 $\mu > 0$。对于 $[F] \in \mathbf{PC}(\Gamma)$，可以任取一个代表元 F，并找到 $t \in (0, 1)$，使得 $(\max F(S))^t \le \cosh(\mu)$，因此 $F^t \in \mathcal{B}(S; \mu)$。这证明了 $\mathcal{B}(S; \mu) \to \mathbf{PC}(\Gamma)$ 的满射性。 □

引理 6.6（紧空间的滤过并到 $\mathbf{PC}_{nn}$）。对于有限生成的 $S \subset \Gamma$ 和 $\mu \in \mathbb{R}_{\ge 0}$以及 $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$，我们定义子集 $\mathcal{A}_{nn}(S; \mu, \varepsilon)$，它属于 $F \in \mathcal{B}(S; \mu)$，满足 $\max \ell_F(S) \ge \varepsilon$。

$\bar{}$它是紧的，并且包含于 $\mathcal{F}_{nn}(\Gamma)$ 中，因此可商为一个紧的 $\mathbf{PA}_{nn}(S; \mu, \varepsilon) \subset \bar{}\mathbf{PC}_{nn}(\Gamma)$。此外，对于所有 $\mu > 0$，空间 $\mathbf{PC}_{nn}(\Gamma)$ 是 $\mathbf{PA}_{nn}(S; \mu, \varepsilon)$ 在递增的有限生成集 $S \subset \Gamma$ 和递减的 $\varepsilon > 0$下的滤过并。

证明。$\mathcal{B}(S; \mu)$中的子集 $\mathcal{A}_{nn}(S; \mu, \varepsilon)$ 是闭的，因此根据定理 6.5 是紧的。此外，根据定义，$\mathcal{A}_{nn}(S; \mu, \varepsilon)$ 包含于 $\mathcal{F}_{nn}(\Gamma)$ 中，因此通过连续性可商为紧的$\bar{}\mathbf{PA}_{nn}(S; \mu, \varepsilon) \subset \mathbf{PC}_{nn}(\Gamma)$。

设 $\mu \in \mathbb{R}_{\ge 0}$。令 $[F] \in \mathbf{PC}_{nn}(\Gamma)$，并任取代表元 $F \in \mathcal{F}_{nn}(\Gamma)$。由于 F 是非中性的，我们可以找到 $\alpha \in \Gamma$，使得 $\ell_F(\alpha) > 0$。任取包含 α 的有限生成集 S（还可以将其扩大为对称的并包含单位元）。令 $t \in (0, 1]$，使得 $\max F^t(S) \le \cosh(\mu)$，从而 $F^t \in \mathcal{B}(S; \mu)$。取 $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$，使得 $\varepsilon \le \max \ell_{F^t}(S)$。于是我们找到了所需的 S，ε，使得 $[F]$ 在 $\mathcal{A}_{nn}(S; \mu, \varepsilon)$ 中有一个代表元 F^t。 □

引理 6.7（紧空间到 $\mathcal{PC}_{ne}$ 的滤过并）。对于有限生成 $S \subset \Gamma$、$\mu \in \mathbb{R}_{\ge 0}$ 和 $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$，我们定义 $F \in \mathcal{B}(S; \mu)$ 的子集 $\mathcal{A}_{ne}(S; \mu, \varepsilon)$，其中满足存在 α、$\beta \in S$，使得 $\ell_F(\alpha)\,\ell_F(\beta) \ge \varepsilon$ 且 $\ell_F(\alpha\beta) \ge \ell_F(\alpha) + \ell_F(\beta) + \varepsilon$。

$\bar{}$它是紧的，且包含于 $\mathcal{F}_{ne}(\Gamma)$，因此商为一个紧子集 $\mathbf{PA}_{ne}(S; \mu, \varepsilon) \subset \bar{}\mathbf{PC}_{ne}(\Gamma)$。此外，对所有 $\mu > 0$，空间 $\mathbf{PC}_{ne}(\Gamma)$ 是 $\mathbf{PA}_{ne}(S; \mu, \varepsilon)$关于递增有限生成集 $S \subset \Gamma$ 与递减 $\varepsilon > 0$的滤过并。

证明。$\mathcal{B}(S; \mu)$ 的子集 $\mathcal{A}_{ne}(S; \mu, \varepsilon)$ 是闭的，因而由定理 6.5 是紧的。此外，$\mathcal{A}_{ne}(S; \mu, \varepsilon)$ 由定义与定理 2.17 包含于 $\mathcal{F}_{ne}(\Gamma)$，因而它由连$\bar{}$续性商为一个紧子集 $\mathbf{PA}_{ne}(S; \mu, \varepsilon) \subset \mathbf{PC}_{nn}(\Gamma)$。

设 $\mu \in \mathbb{R}_{\ge 0}$。固定 $[F] \in \mathbf{PC}_{nn}(\Gamma)$，并选取任意代表元 $F \in \mathcal{F}_{ne}(\Gamma)$，其相应表示为 $\rho\colon \Gamma \to$ 等距变换群$(\mathbf{H}^\kappa)$。

由于 ρ 是非初等的，我们可以找到 α、$\beta \in \Gamma$，使得 $\ell_F(\alpha)\,\ell_F(\beta) \ge 1$，其 ρ-不动点满足 $L := 2\log[\rho(\beta)^-, \rho(\alpha)^+; \rho(\alpha)^-, \rho(\beta)^+] > 0$。注意，数量 L 在将 α、β 替换为它们任意的正整数次幂后保持不变；由定理 1.19，当 m、$n \to \infty$ 时，我们有极限 $\ell_F(\alpha^m\beta^n) - \ell_F(\alpha^m) - \ell_F(\beta^n) \to L$。因此，将 α、β 替换为其幂后，我们可以假设 $\ell_F(\alpha)\,\ell_F(\beta) \ge 1$，并且对所有 m、$n \in \mathbb{N}_{\ge 1}$，都有 $\ell_F(\alpha^m\beta^n) - \ell_F(\alpha^m) - \ell_F(\beta^n) \ge L/2$。

任取一个包含 α, β 的有限生成 $S \subset \Gamma$。令 $t \in (0, 1]$ 使得 $F^t \in \mathcal{B}(S; \mu)$。我们有 $\ell_{F^t}(\alpha)\,\ell_{F^t}(\beta) \ge t$ 且 $\ell_{F^t}(\alpha\beta) - \ell_{F^t}(\alpha) - \ell_{F^t}(\beta) \ge tL/2$，因此对于 $\varepsilon = t\min\{1, L/2\} \in \mathbb{R}_{>0}$，有 $F^t \in \mathcal{A}_{ne}(S; \mu, \varepsilon)$，如所求。 □

注记 6.8（非闭）。 我们将 $\mathcal{C}(\Gamma)$ 的紧性与有限维中的经典结果进行比较。

在有限维情形下 $n \in \mathbb{N}$，对于有限生成非实质阿贝尔群 Γ，离散忠实表示 ρ的空间 $\Gamma \to \mathrm{Isom}(\mathbf{H}^n)$ 由 [Wie77定理 3]证明是闭的。原因之一是Margulis引理，它指出存在 $\varepsilon_n > 0$ 这样的常数，使得对于任意此类 ρ，由 $\{\gamma \in \Gamma\colon\ d(\rho(\gamma)x,\ x) < \varepsilon\}$ 生成的子群都是实质阿贝尔群。

在无穷维情形下，情况则有所不同。对于表示 $\Gamma \to$Isom($\mathbf{H}^\kappa$)，当 κ 为无穷维时，不存在Margulis常数。事实上， [DSU17, Observation 11.1.4] 表明，对于所有 $\varepsilon > 0$，都可以找到 $\alpha, \beta \in$Isom($\mathbf{H}^\kappa$)，使得 $\Delta(\{\alpha, \beta\}) < \varepsilon$ 自由生成一个秩2自由子群 $\Gamma \subset$Isom($\mathbf{H}^\kappa$)（具有一个无穷远不动点），且该子群是强离散的（对于 $B \subset \mathbf{H}^\kappa$ 的每个有界子集，集合 $\{\gamma \in \Gamma\colon \gamma B \cap B \neq \emptyset\}$ 都是有限的，见 [DSU17, 定义5.2.1]）。

6.2 等变 Gromov-Hausdorff 拓扑的背景

本节余下部分的目标是，将我们的紧空间 $\mathbf{P}\mathcal{C}(\Gamma)$（由有限生成群 Γ 上双曲型函数的等价类构成）与此前关于等变 *Gromov-Hausdorff* 拓扑的特征簇紧化进行比较。该拓扑由 Paulin 在[Pau87、Pau88、Pau89], 中形式化。我们先回顾相关内容。

固定一个群 Γ 和一个集合 X。由 X 上度量空间与 Γ 作用的三元组 (X, d, ρ) 构成的集合记为 $\tilde{\mathcal{X}}(\Gamma, X)$。

$\tilde{\mathcal{X}}$ 上的拓扑由以下子集 $V((X, d)\ \rho, K, \varepsilon) \subset \tilde{\mathcal{X}}$ 定义，这些子集以有限的 $P \subset \Gamma$、紧的 $K \subset X$ 和 $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ 为指标。子集 $V(P, K, \varepsilon)$ 由所有满足以下条件的 $((X', d')\ \rho') \in \tilde{\mathcal{X}}$ 组成：存在一个紧的 $K' \subset X'$ 以及一个从 K 到 K' 的闭 P-等变 ε-逼近。 K 与 K' 之间的 ε-逼近是一个闭子集 $R \subset K \times K'$，其在 K 和 K' 上的投影均为满射，并且对所有的 (x, x')、$(y, y') \in R$，都有 $|d(x, y) - d'(x', y')| < \varepsilon$。若对所有 $\gamma \in P$ 及 $(z, z') \in R$，都有 $\rho(\gamma)z \in K \implies (\rho(\gamma)z, \rho'(\gamma)z') \in R$，则称其为 P-等变。

这定义了等变 *Gromov-Hausdorff* 拓扑。当存在一个等变等距变换 $X_1 \to X_2$ 时，元素 $((X_i,\ d_i)\ \rho_i)$ 属于 $\tilde{\mathcal{X}}$ 同一个等价类：我们将拓扑商空间记为 $\mathcal{X}$；这样的空间称为一个*Gromov-Hausdorff*空间。

注记 6.9（Gromov-Hausdorff不可分性）。 在拓扑空间中，若两个元素存在不相交开邻域（在 [Pau88]中称为可区分），则称它们是可分的。

下面给出一些非等距作用的例子：在任何包含它们的 Gromov-Hausdorff 空间中，这些作用都是不可分的。

不动点： 如果一个 Γ-作用通过等距变换作用且具有不动点，那么它与单点集上的平凡作用不可分。一般而言，一个 Γ-等距作用 $((X,\ d)\ \rho)$ 与单点集上的平凡作用不可分，当且仅当对于所有有限的 $P \subset \Gamma$ 和 $\varepsilon > 0$，存在一个直径为 $\max\{d(x,\ y)$ 的紧 $K \subset X\colon\ x,\ y \in K\} < \varepsilon$ 且该集合是 P-不变的。特别地，如果 Γ 在 $\mathbf{H}^\kappa$ 上的作用是抛物型的，那么它与单点集上的平凡作用不可分。

不变子空间：一个由等距变换构成的 Γ-作用，与其在任意 Γ-不变子空间上的限制在 Gromov-豪斯多夫意义下不可分。特别地，对于两个由等距变换构成的 Γ-作用 $((X_i,\ d_i)\ \rho_i)$，笛卡尔乘积 Γ-作用 $\prod_i \rho_i$ of Γ on $\prod_i X_i$ 保持任意乘积度量不变（例如采用 $p \in [1, \infty]$ 的度量的 L^p 组合）。如果 ρ_0 有一个不动点，那么这些乘积作用在 Gromov-豪斯多夫意义下都与 ρ_1 不可分。

对于 Gromov-Hausdorff空间 $\mathcal{X}(\Gamma)$，当存在一个 Γ-等变双射 $f\colon\ X \to Y$ 和 $\lambda > 0$，使得对于所有 $x, x' \in X$，$d_Y(f(x)\ f(x')) = \lambda d_X(x, x')$ 时，我们将其在如下等价关系 $((X, d_X)\ \rho_X) \sim ((Y, d_Y)\ \rho_Y)$ 下的商记为 $\mathbf{P}\mathcal{X}(\Gamma)$。

6.3 将Gromov-Hausdorff 空间嵌入$\mathbf{PC}(\Gamma)$

考虑所有在某个代数双曲空间上的 Γ-等距作用的共轭类的集合 $\mathcal{H}(\Gamma)$，其中该空间的基数为 κ ，并赋予等变 Gromov-Hausdorff 拓扑；再考虑其由极小非中性作用组成的子集 $\mathcal{H}_{mnn}(\Gamma)$。我们也可能希望将作用限制在某个固定维数为 κ 的代数双曲空间上，并将相应的空间记为上标为 κ的 $\mathcal{H}^{\kappa}(\Gamma)$。

注记 6.10（凸核）. 没有无穷远处的不动点的表示 $\rho\colon\ \Gamma\to$ 等距变换群$(\mathbf{H}^n)$容许唯一的极小闭凸 Γ-不变子空间 $X\subset\mathbf{H}^n$ （称为其凸核）。在此情形下， $\Gamma\to$ 等距变换群(X,d)的作用的任一Gromov–Hausdorff 邻域都包含完整作用 $\Gamma\to$ 等距变换群$(\mathbf{H}^n,d)$，因此这两个作用彼此不可分离。

当 Γ 可数时，由 [Pau87，第4章，定理2。6] 可知，对于 $i\in\{1,2\}$两个表示 $\rho_i\in\mathcal{H}^{\kappa_i}(\Gamma)$ 若没有无穷远处的不动点，则它们是Gromov-Hausdorff不可分离的，当且仅当它们在相伴凸核上的作用是共轭的。特别地，若 ρ_i 不可约且 $\kappa_i\geq 2$，则这些作用是Gromov-Hausdorff不可分离的，当且仅当 $\kappa_1=\kappa_2$ 且这些表示是共轭的。事实上，在线性模型 $\mathbb{R}^{1+\kappa_i}$中，凸核的线性张成等于整个空间，且这些作用是线性的。

命题 6.11. 对于群 Γ，由 $[\rho]\mapsto[F_\rho]$ 定义的函数 $\mathcal{H}(\Gamma)\to\mathbf{PC}(\Gamma)$是连续的，且其到 $\mathcal{H}_{mnn}(\Gamma)$ 的限制是单射。

证明。我们首先证明 $\mathcal{H}(\Gamma)\to\mathbf{PC}(\Gamma)$ 在 $\rho\in\mathcal{H}^{\kappa}(\Gamma)$ 处的连续性。固定 $o\in\mathbf{H}^{\kappa}$。对于所有 $\eta>0$ 以及有限的 $F\subset\Gamma$ ，我们必须构造一个有限的 $P\subset\Gamma$、紧的 $K\subset\mathbf{H}^{\kappa}$ 以及实数 $\varepsilon>0$，使得若 $\rho'\in V_\rho(P,K,\varepsilon)$，则存在某个基数 κ'以及 $o'\in\mathbf{H}^{\kappa'}$，使得$\forall\gamma\in F\colon |F_{\rho,o}(\gamma)-F_{\rho',o'}(\gamma)|<\eta$。令 $P=F$, $K=\rho(P)\cdot o$，以及 $\varepsilon=\eta/\sinh(M)$，其中$M=$diam$(K)$。由Gromov-Hausdorff 邻域的定义可知，若$\rho'\in V_\rho(P,K,\varepsilon)$，则存在 $o'\in\mathbf{H}^{\kappa'}$，使得 $\forall\gamma\in P\colon\ |\mathrm{d}(\rho(\gamma)o,o)-\mathrm{d}(\rho'(\gamma)o',o')|<\varepsilon$。由此，利用 cosh 在 $[0,M]$上的 ε-连续模由$\varepsilon\sinh(M)$给出这一事实，我们有 $\forall\gamma\in F\colon |F_{\rho,o}(\gamma)-F_{\rho',o'}(\gamma)|<\varepsilon\times\sinh(M)=\eta$，即为所求。

现在我们来证明限制 $\mathcal{H}_{mnn}(\Gamma)\to\mathbf{PC}(\Gamma)$ 是单射。考虑 $i=\{1,2\}$ 个极小非中性表示 $\rho_i\colon\Gamma\to\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^{\kappa_i})$，其双曲型函数彼此相似。由定理 4.26 可知 $\kappa_1=\kappa_2$，并且存在一个参数 $t\in(0,1]$ ，对应于定理 3.28 中的奇异变形 χ_t ，使得 ρ_1 与 $\chi_t\circ\rho_2$ 共轭，或 ρ_2 与 $\chi_t\circ\rho_1$ 共轭，因此 ρ_1、 ρ_2 在 $\mathcal{H}_{mnn}(\Gamma)$ 中定义同一个点。 □

考虑 $\mathcal{T}(\Gamma)$，它由所有在完备实树上的 Γ-等距作用的共轭类组成。若实树上的等距作用不存在闭不变实子树（也就是说，在这种情况下不存在闭不变凸子空间），则称该作用为极小 作用。集合 $\mathcal{T}(\Gamma)$ 包含极小作用组成的子集 $\mathcal{T}_m(\Gamma)$，而该子集又包含 $\mathcal{T}_{mnn}(\Gamma)$，其中的作用还具有非中性这一性质；此外，它还包含 $\mathcal{T}_{mne}(\Gamma)$，其中的作用是极小且非初等的。我们在所有这些空间上赋予等变 Gromov-Hausdorff 拓扑。

注记 6.12（Gromov–豪斯多夫邻域中的极小代表元）。 除非存在唯一的无穷远不动点且所有元素都是椭圆型，否则实树上的任意作用都有一个极小不变闭子树。特别地，实树上的每个非中性作用都与某个完备实树上的极小非中性作用戈罗夫–豪斯多夫不可分。

实树上的所有中性作用都与点上的平凡作用戈罗夫–豪斯多夫不可分。

令 $\mathbf{PT}(\Gamma)\supset\mathbf{PT}_m(\Gamma),\mathbf{PT}_{mnn}(\Gamma),\mathbf{PT}_{mne}(\Gamma)$ 为它们在 $\mathbb{R}_{>0}$ 的相似变换作用下的商，其中 $t\in\mathbb{R}_{>0}$ 对类 $((T,d)\ \rho)\in\mathbf{PT}(\Gamma)$ 的作用为 $\lambda\cdot(T,d)=(T,td)$。

命题 6.13 （树上作用空间的紧致可度量性）。 若 Γ 是有限生成的，则 *Gromov–*豪斯多夫空间 $\mathbf{PT}_{mnn}$（Γ）是紧致可度量的。

证明。 在 Γ包含一个由 2 个生成元生成的自由子群这一假设下，Paulin 在 [Pau87，第 2 章，定理 6 中证明了这一结论对于实树上具有小边稳定子的等距作用类构成的子空间 $\mathbf{P}\mathcal{TS}$（Γ）成立。由于假设 Γ 是有限生成的，$\mathbf{P}\mathcal{T}_{mnn}$（$\Gamma$）上的拓扑是第二可数的，因此只需证明它是序列紧的。下面我们将说明如何将 Paulin 的证明调整到我们的情形。

设 $(T_n,\ \rho_n)$ 是一列作用在完备实树 T_n 上的极小非中性 Γ-作用。由于在 T_n 中没有不动点，因此至多有 2 个无穷远不动点。经过抽取子列，我们可以假设对于所有 n，∂T_n 中的不动点数量都相同。现在我们区分这三种情况。

如果每个 ρ_n 都没有不动点，那么这些作用是极小且不可约的：Paulin 的证明表明，可以抽取一个极限，并且极限表示含有一个双曲型元素（关于小稳定子的假设仅用于确保极限表示没有无穷远不动点，并证明极限表示也具有小稳定子。因此，这个假设对我们而言并非必要）。

如果每个 ρ_n 都有唯一的不动点，那么对于一个有限生成元集，它们的极小子集（轴或不动点集）的交集非空，因此我们可以在这个交集中选取基点 o_n，并应用 Paulin 的构造，得到一个含有双曲型生成元的极限表示，因而该表示是非中性的。

若每个 ρ_n 都有两个不动点，则极小性假设蕴含树 T_n 是实直线，且 ρ_n 的像仅由平移（可能是平凡的）组成；因此，任取基点 $o_n \in T_n \simeq \mathbb{R}$，按生成元平移长度的最大值进行重新缩放，并抽取一个子序列，使得对任意 n 该最大值由同一生成元实现，我们便得到 $\mathbb{R}$ 上的一个极限表示，其中某个生成元以平移 ± 1 作用。 □

注记 6.14（极小代表元）。考虑有限生成群 Γ。可分实树上的等距作用空间 $\mathcal{T}(\Gamma)$ 具有一个极大豪斯多夫分离商 $\mathcal{T}(\Gamma)$：记 $\mathbf{P}\mathcal{T}(\Gamma)$ 为其相似类集合，并赋予商拓扑。定理 6.13 表明 $\mathbf{P}\mathcal{T}(\Gamma)$ 是紧可度量化的，且同胚于 $\mathbf{P}\mathcal{T}_{mnn}(\Gamma) \sqcup \{[\bar{1}]\}$，其中孤立点 $[\bar{1}]$ 对应于平凡作用的类。这可与定理 6.10 相比较。

命题 6.15 （比较树上的作用所对应的拓扑）。 设 Γ 是一个群。

映射 $\mathbf{P}\mathcal{T}(\Gamma) \to \mathbf{P}\mathcal{C}(\Gamma)$ 将 $((T,d)\ \rho)$ 的等价类映至双曲型函数的等价类 $\gamma \mapsto \exp d(o,\rho(\gamma)o)$，对于 $o \in T$ 是连续的。

因此，若 Γ 是有限生成的，则限制映射 $\mathbf{P}\mathcal{T}_{mnn}(\Gamma) \to \mathbf{P}\mathcal{C}_{nn}(\Gamma)$ 是其像上的同胚。

证明。将树上的等距 Γ-作用 $((T,d)\ \rho) \in \tilde{\mathcal{T}}(\Gamma)$ 和点 $o \in T$映至双曲型函数 $\gamma \mapsto F(\gamma) = \exp d(o, \rho(\gamma)o)$ 的等价类的映射与 o 无关，并且在相似变换下保持不变。此外，它在 $((T,d)\ \rho)$ 的 Gromov-Hausdorff 等价类上为常值。连续性的证明与定理 6.11 证明中的论证非常相似

取某个 $((T,d)\ \rho)$ 和 $o \in T$。对于有限集 $P \subset \Gamma$，令 $K = \rho(P) \cdot o$，并令 $\varepsilon = \eta e^{-M}$，其中 $M = \operatorname{diam}(K)$。根据 Gromov-Hausdorff 邻域的定义，若 $((T',d')\ \rho') \in V_\rho(P,K,\varepsilon)$，则存在 $o' \in T'$，使得对所有 $\gamma \in P$，都有 $|d(\rho(\gamma)o,o) - d'(\rho'(\gamma)o',o')| < \varepsilon$。这意味着，利用指数映射在 $[0,M]$ 上的一个 ε-连续模为 εe^{-M} 这一事实，可得对所有 $\gamma \in P$，都有 $|F_{\rho,o}(\gamma) - F_{\rho',o'}(\gamma)| < \varepsilon \times e^M = \eta$，证毕。

因此，映射 $((T,d)\ \rho) \mapsto F_\rho$ 可下降为映射 $\mathcal{T}(\Gamma) \to \mathbf{P}\mathcal{C}(\Gamma)$。此映射在 $((T,d)\ \rho)$ 的 Gromov-Hausdorff 等价类上为常值，且在相似变换下不变，因此可下降为连续映射 $\mathbf{P}\mathcal{T} \to \mathbf{P}\mathcal{C}(\Gamma)$。

现在考虑它在 $\mathbf{P}\mathcal{T}_{mnn} \to \mathbf{P}\mathcal{C}(\Gamma)$ 上的限制。为证明该映射是单射，我们将说明如何从无穷远交比恢复树 T 上的极限等距作用。由极小性可知，树 T 必定是 $\rho(\Gamma)$ 中双曲型元素的轴的并，因此该

双曲型函数决定了 ∂T上的交比。因此，下面定理6.17 中通过交比从 ∂T 到 T 的重构过程给出了单射性。

限制在$\mathbf{P}\mathcal{T}_{mnn}$（Γ）上的映射，根据定理 6.13是紧且可度量化的，是连续且单射的，因此它是其像上的同胚。 □

注记 6.16。 与 $\mathbf{P}\mathcal{C}(\Gamma)$ 中双曲型函数空间对应的树状作用子空间，根据定理 5.6是闭的。对于有限生成的 Γ，定理 6.15和定理 6.14 表明，它对应于紧致可度量空间 $\mathbf{P}\mathcal{C}(\Gamma)$ ，其中平凡函数的等价类是孤立的。

此外，根据 [Pau87，定理 5.1 和 5.3], 可知，$\mathbf{P}\mathcal{T}_{mne}(\Gamma)$上的拓扑由射影化标记长度谱给出。

命题 6.17 （从交比重建树）。 考虑 $i \in \{1,2\}$ 两棵（完备）实树 (T_i, d_i)，使得 ∂T_i 的凸包为 T_i。若 $\varphi\colon \partial T_1 \to \partial T_2$ 是一个保持边界交比的双射，则存在一个等距变换 $f\colon T_1 \to T_2$，其边界扩张与 $\varphi\colon \partial T_1 \to T_2$一致。

此外 当 Γ 通过等距变换作用于 T_i时，若 φ 是 Γ-等变的，则 f 是 Γ-等变的 $t.$

证明。 首先，注意到若 ∂T_i 由少于4个点组成，则树 T_i 均为一条直线或一棵无限三叉树，从而结论成立。现假设 ∂T_i 至少有4个点。

在 [Dav24中，定理1.1], 作者考虑了秩 1 仿射建筑的情形（即无叶的单纯树）。她的重构程序将树 T 给出为切空间 $\mathfrak{u}(T)$的一个商，该切空间定义为由无穷远处的三元组$((\xi_1,\xi_2,\xi_3)\ t) \in (\partial T)^{(3)} \times \mathbb{R}$ 连同一个实参数 t 构成的集合。点 $((\xi_1,\xi_2,\xi_3)\ t)$ 对应于有向测地线 (ξ_1,ξ_2) 上、在以 ξ_3 在(ξ_1,ξ_2)上的投影为原点的弧长参数化下参数为 t 的点。同一构造适用于作为双无限测地线之并的实树 T，或等价地，适用于作为其边界 ∂T之凸包的实树。

等变命题由该构造得出。 □

6.4 对先前紧化的识别

对于一个包含秩为 2 的自由群的有限生成无挠群 Γ，以及一个整数 $n \geq 2$，根据以下内容 [Pau88], ，令 $\mathcal{H}^n_{fd}(\Gamma)$ 为 $\mathcal{H}^n(\Gamma)$ 中对应于忠实离散表示 $\Gamma \to \mathrm{Isom}(\mathbf{H}^n)$ 的子空间：赋予其等变 Gromov-Hausdorff 拓扑，并令 $\mathbf{P}\mathcal{H}^n_{fd}(\Gamma)$ 为其关于相似关系的商，赋予商拓扑。注意，对于 $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$，若 $n_1 < n_2$，则 $\mathcal{H}^{n_1}_{fd} \subset \mathcal{H}^{n_2}_{fd}$。商映射 $\mathcal{H}^n_{fd}(\Gamma) \to \mathbf{P}\mathcal{H}^n_{fd}(\Gamma)$ 是一个同胚。

回顾一下，树上极小非初等作用的 Gromov-Hausdorff 空间 $\mathbf{P}\mathcal{T}_{mne}(\Gamma)$ 包含由小稳定子作用构成的子空间 $\mathbf{P}\mathcal{TS}(\Gamma)$。注意，$\mathbf{P}\mathcal{TS}(\Gamma)$ 是紧的。Paulin 在 [Pau88, Théorème 6.4] 中证明，空间 $\mathbf{P}\mathcal{H}^n_{fd}(\Gamma) \sqcup \mathbf{P}\mathcal{TS}(\Gamma)$ 是紧的。因此，$\mathbf{P}\mathcal{TS}(\Gamma)$ 包含 Γ 在 $\mathbf{H}^n$ 上的忠实离散表示空间的等变 Gromov-Hausdorff 紧化。

我们将证明，这种紧化也适用于相应的双曲型函数相似类空间。为此，记$\mathbf{P}\mathcal{C}^n_{fd}(\Gamma)$ 为与 Γ 在$\mathbf{H}^n$上的忠实离散作用相关联的双曲型函数相似类空间，即 $\mathcal{H}^n_{fd}(\Gamma) \subset \mathcal{H}_{mnn}(\Gamma)$ 在（单射且连续）函数 $\mathcal{H}_{mnn}(\Gamma) \to \mathbf{P}\mathcal{C}(\Gamma)$下的像，该函数定义为 $\rho \mapsto [F_\rho]$ 由定理 6.11得到。

定理 6.18 （恢复忠实离散作用的紧化）。 设 Γ 是一个有限生成的无挠群，且包含一个秩为2的自由群。*Gromov-Hausdorff*空间 $\mathbf{P}\mathcal{H}^n_{fd}(\Gamma) \sqcup \mathbf{P}\mathcal{TS}(\Gamma)$ 与其在$\mathbf{P}\mathcal{C}(\Gamma)$中的像$\mathbf{P}\mathcal{C}^n_{fd}(\Gamma) \sqcup \mathbf{P}\mathcal{TS}(\Gamma)$ 同胚。

证明。由定理 6.11，我们有一个连续单射函数 $\mathcal{H}^n_{mnn}(\Gamma) \to \mathrm{P}\mathcal{C}(\Gamma)$，由$\rho \mapsto [F_\rho]$给出。将其限制在 $\mathcal{H}^n_{fd}(\Gamma)$ 上，再取商，得到一个函数 $\mathrm{P}\mathcal{H}^n_{mnn}(\Gamma) \to \mathrm{P}\mathcal{C}^n_{fd}(\Gamma)$；根据定理 4.26，该函数仍为单射。其像记为 $\mathrm{P}\mathcal{C}^n_{fd}(\Gamma)$，由与 Γ在 $\mathbf{H}^n$上的忠实离散作用相关联的双曲型函数的相似类构成。因此，我们得到一个连续双射函数 $\mathrm{P}\mathcal{H}^n_{fd}(\Gamma) \to \mathrm{P}\mathcal{C}^n_{fd}(\Gamma)$。

由引理 6.11 和 6.15，良定义映射 $\Psi\colon \mathrm{P}\mathcal{H}^n(\Gamma) \sqcup \mathrm{P}\mathcal{T}(\Gamma) \to \mathrm{P}\mathcal{C}^n(\Gamma)$ 在限制到 $\mathrm{P}\mathcal{H}^n_{fd}(\Gamma)$ 和 $\mathrm{P}\mathcal{T}\mathcal{S}(\Gamma)$ 时是连续的，我们希望证明 Ψ 限制到 $\mathrm{P}\mathcal{H}^n_{fd}(\Gamma) \sqcup \mathrm{P}\mathcal{T}\mathcal{S}(\Gamma)$ 时也是连续的。由于 $\mathrm{P}\mathcal{T}\mathcal{S}(\Gamma)$ 是紧的，且 $\mathrm{P}\mathcal{H}^n_{fd}(\Gamma) \cup \mathrm{P}\mathcal{T}\mathcal{S}(\Gamma)$ 是可度量化的，只需证明：若 $\alpha_m \in \mathcal{H}^n_{fd}(\Gamma)$ 的一个序列的相似类收敛到某个 $T_1 \in \mathrm{P}\mathcal{T}\mathcal{S}(\Gamma)$，那么与之关联的双曲型函数等价类也会收敛。由定理 5.11 即可得出这一点：该定理实际上构造了一棵带有一点的实树 T_2，以及一个双曲型函数序列 F_{ρ_m}，它们分别等价于与 α_m 关联的函数，并且 F_{ρ_m} 收敛到与 T_2 上的作用关联的双曲型函数。根据等变 Gromov-Hausdorff 拓扑下长度谱的连续性 [Pau89，定理 4.2]，，T_1 和 T_2 的长度谱相似类相同，因此根据定理 4.26，双曲型函数类也相同。故映射 Ψ 连续。根据 Pau89，注记 4.6]，由于 $\mathbf{H}^n$ 上的作用以及实树 [上的作用具有长度谱刚性，该映射是单射。由于 $\mathrm{P}\mathcal{H}^n_{fd}(\Gamma) \sqcup \mathrm{P}\mathcal{T}\mathcal{S}(\Gamma)$ 是紧的，而 $\mathrm{P}\mathcal{C}_{nn}(\Gamma)$ 是豪斯多夫的，Ψ 是到其像上的同胚。

□

注记 6.19（恢复先前的紧化）。由定理6.18可知，特征簇 $\mathcal{H}^n_{fd}(\Gamma)$ 在 $\mathbf{P}\mathcal{C}(\Gamma)$ 中的紧化与 Culler、Morgan、Otal 和 Shalen 在多篇著作中得到的紧化同胚 [MS84、Mor86、CM87、MO93]。因此，对于 n 的所有取值，我们的紧化都包含这些紧化。

注记 6.20（双曲流形的基本群）。当 Γ是亏格为 ≥ 2的闭曲面的基本群时，由 [Sko96，定理 3.2] 可知，对所有 $n \geq 2$，$\mathcal{H}^n_{fd}(\Gamma)$ 在此紧化中的闭包就是整个 $\mathbf{P}\mathcal{T}\mathcal{S}(\Gamma)$，这与通过测地层对 Teichmüller空间进行的 Thurston 紧化一致。

例 6.21（不在闭包中的小作用树）。存在一些有限生成群 Γ，其包含关系 $\bigcup_n \mathbf{P}\mathcal{C}^n_{fd}(\Gamma) \subset \bigcup_n \mathbf{P}\mathcal{C}^n_{fd}(\Gamma) \sqcup \mathbf{P}\mathcal{T}\mathcal{S}(\Gamma)$ 是严格的。

事实上，我们可以找到这样的群：其忠实（可能是非离散）作用类集合 $\mathbf{P}\mathcal{C}^n_{fd}(\Gamma)$ 为空，而 $\mathbf{P}\mathcal{T}\mathcal{S}(\Gamma)$ 非空。

为此，考虑两个有限生成群 A, B，使得对于所有 $n \in \mathbb{N}$，它们都不承认在 $\mathbf{H}^n$ 上的忠实作用（例如，任何非-$\mathbb{R}$-线性群，或任何具有性质-T的群，如当 $k \geq 3$ 时的 $\mathrm{SL}_k(\mathbb{Z})$）。amalgam $\Gamma = A \star B$ 也具有 $\bigcup_n \mathbf{P}\mathcal{C}^n_{fd}(\Gamma) = \emptyset$，但它作用于其 Bass-Serre树上时边稳定子平凡（因而很小），所以 $\mathbf{P}\mathcal{T}\mathcal{S}(\Gamma) \neq \emptyset$。

注记 6.22（当 $\mathbf{P}\mathcal{T}\mathcal{S} \subsetneq \mathbf{P}\mathcal{T}$ 时）。注意，$\mathbf{P}\mathcal{T}\mathcal{S}(\Gamma)$ 在 $\mathbf{P}\mathcal{T}(\Gamma)$ 中是闭集，因此，差集 $\mathbf{P}\mathcal{T}(\Gamma) \setminus \mathbf{P}\mathcal{T}\mathcal{S}(\Gamma)$ 中的任意一点，与紧化 $\bigcup_n \mathbf{P}\mathcal{C}^n_{fd}(\Gamma) \sqcup \mathbf{P}\mathcal{T}\mathcal{S}_n(\Gamma)$ 隔离。

满足 $\Gamma\ \mathbf{P}\mathcal{T}(\Gamma) \setminus \mathbf{P}\mathcal{T}\mathcal{S}(\Gamma) \neq \emptyset$ 的例子包括由 ≥ 2 个生成元生成的自由群，以及价数为 $k \geq 3$ 的 k-正则单纯树的自同构群。

以下 例子表明，$\mathbf{P}\mathcal{C}(\Gamma)$ 可能远大于 $\bigcup_n \mathbf{P}\mathcal{C}^n(\Gamma) \sqcup \mathbf{P}\mathcal{T}(\Gamma$).

例 6.23 (弯曲)。设 $\Gamma = \pi_1(\Sigma)$ 是亏格为 ≥ 2 的闭可定向曲面的基本群。[Xu24 中，定理 1.3], Xu 构造了一个表示 $\Gamma \to$等距变换群$(\mathbf{H}^\omega)$ 的无穷维变形空间（由某个无限维李群参数化）。这些表示不是树状的，我们预期其中大多数表示的临界指数为1 （也就是说，它们不是映入某个等距变换群$(\mathbf{H}^n)$ 的有限$n \in \mathbb{N}$维表示的奇异变形，也不是这类表示的极限（因为这会产生一个树状表示）。

简言之，这些表示是通过以下弯曲过程从初始表示 ρ 得到的。

首先，考虑一条简单闭曲线 $\gamma \subset \Sigma$，它将曲面 Σ 分离开来，从而（根据范坎彭定理）得到其基本群的一个 amalgamated积表示 $\Gamma = A *_{\mathbb{Z}} B$，其中 A、B 是 γ 两侧亏格为 ≥ 1 的带孔曲面的基本群。选择一个表示 $\rho\colon \Gamma \to \mathrm{Isom}(\mathbf{H}^\kappa)$，它是由 Σ 上的双曲度量得到的表示 $\Gamma \to \mathrm{Isom}(\mathbf{H}^2)$ 的一种奇异变形。 [Xu24，命题 4.11] 表明 $\rho(A)$ 不可约。

接下来，对于中心化 $\rho(\mathbb{Z})$的 $g \in$ 等距变换群$(\mathbf{H}^\kappa)$，通过在 $\beta \in B$ 上对取值作 g-共轭，即 $\rho_A^g(\alpha) = g\rho(\beta)g^{-1}$，同时保持 $\alpha \in A$的取值不变，即 $\rho_A^g(\alpha) = \rho(\alpha)$，来定义弯曲 $\rho_A^g\colon \Gamma \to$ 等距变换群$(\mathbf{H}^\kappa)$。对所有 g，表示 ρ_A^g 仍为非初等的；选取从 g 到单位元的此类元素的一条路径（例如在某个单参数子群中变化），我们便得到从 ρ 到 ρ_A^g 的一条非初等表示的连续路径。

最后，若 $\ell(g_1) \neq \ell(g_2)$ 则弯曲 ρ_{g_1} 与 ρ_{g_2} 在 $\mathbf{PC}(\Gamma)$ 中给出互异点，我们现在说明如下。一方面，由 [Xu24，命题4.19] $\rho_A^{g_1}$ 与 $\rho_A^{g_2}$ 不能彼此共轭，因为 $g_1 \neq g_2$。另一方面，$\rho_A^{g_i}$ 是非初等的，并且在 A 上重合，而该集合包含一个双曲型元素，因此若两个这样的表示给出的双曲型函数是相似的，则相似因子 $t > 0$ 必须为 1，从而两个表示必须具有相同的长度谱，故由命题 4.23它们是共轭的，这与前述观察相矛盾。

7 对 $\mathbf{H}^\kappa$ 上某些群作用的全局刚性

在本节中，我们运用第 4.1 节中得到的抽象交比（取幂后）的唯一性，证明对于某些群，双曲型非初等函数的相似类空间 $\mathbf{PC}_{ne}(\Gamma)$ 只有一个点；也就是说，在某些 $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^\kappa)$中，除共轭和奇异变形外，非初等表示是唯一的。

7.1 群的有界性性质

为了处理我们关注的群，首先需要将讨论范围扩展到局部紧群之外，并借助 Rosendal 所发展的拓扑群粗几何[Ros21]。我们简要回顾所用的几个概念；一般性的论述请参见前述参考文献，或参见 [Ros23]，其中有较简短的介绍。

核心思想是定义一个良好的有界性概念，以便将几何群论扩展到局部紧群这一类别之外。Rosendal 沿用 Roe 的思路，在 $\mathcal{E}$ 群上引入粗结构，见 [Ros21，定义 2。2]。对于拓扑群 G，我们只会用到两种这样的粗结构：左粗结构 $\mathcal{E}_L$，以及 $\mathcal{E}_d$ 由 G 在 $(X,\ d)$上的连续等距群作用所诱导的粗结构。实际上，我们只需用到并回顾相对于这些粗结构的有界子集概念。

定义 7.1 （$\mathcal{E}_d$-有界子集）。设 G 为拓扑群。考虑其在度量空间 (X, d) 上的连续等距作用。若对任意 $x \in X$，都有 $\sup\{d(gx, hx)\colon\ g, h \in B\} < \infty$，则称子集 $B \subset G$ 为 $\mathcal{E}_d$-有界。

证明。 三角不等式表明，该条件与 x 的选取无关（这也解释了“任意”一词的使用），其含义是：B 在任意轨道映射 $g \mapsto gx$ 下的像都有界。 □

注记 7.2（逆元与乘积）。 G 中 $\mathcal{E}_d$-有界子集的全体在取逆元和有限乘积下封闭：若 $A, B \subset G$ 为 $\mathcal{E}_d$-有界，则 A^{-1} 和 AB 为 $\mathcal{E}_d$-有界。

定义 7.3 （有界保持作用与粗适当作用）. 设 G是某个等距变换群(X, d)的子群，其中 (X, d) 是度量空间。 G 通过连续等距变换在另一个度量空间 (X', d') 上的作用是：

$\mathcal{E}_d$-有界保持 当每个 $\mathcal{E}_d$-有界子集均为 $\mathcal{E}_{d'}$-有界时。$\mathcal{E}_d$-粗适当 当每个 $\mathcal{E}_{d'}$- 有界子集均为 $\mathcal{E}_d$- 有界时。

定义 7.4（粗有界子集）。 在拓扑群 G 中，子集 B 若对于 G 在度量空间（X， d）上的每个连续等距作用都是 $\mathcal{E}_d$-有界的，则称其为粗有界。特别地，如果拓扑群 G 在度量空间上的每个连续等距作用都有有界轨道，那么拓扑群 G 本身就是粗有界的。

注记 7.5（具有见证粗有界性的作用的群）。 对于某些拓扑群 G，存在一个在度量空间（X， d）上的忠实等距作用，使得粗有界子集恰好是 $\mathcal{E}_d$-有界子集。根据粗有界性的定义，在这种情况下， G 在度量空间上的每个连续等距作用都是 $\mathcal{E}_d$-有界保持的。正如我们将在定理 7.10 中看到的，$\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^\omega)$ 在其对称空间 $\mathbf{H}^\omega$ 上的作用便是如此。

例 7.6（第二可数局部紧群）。 第二可数局部紧群具有左不变真度量 d，因此其粗有界子集恰好是其 $\mathcal{E}_d$-有界子集，并且对应于其相对紧子集。

定义 7.7（局部有界群）。 拓扑群 G 若存在一个粗有界的单位元邻域，则称为局部有界。这也涵盖了局部紧性。

定义 7.8（余有界作用）。 对于度量空间 (X, d) 和子群 $G \subset \mathrm{Isom}(X, d)$，当存在 $o \in X$ 和 $M \geq 0$，使得对每个 $x \in X$，都有 $d(x, Go) \leq M$ 时， G 在 X 上的作用称为余有界。

注记 7.9（准等距）。 请注意，当 G 在测地空间 X 上的作用既粗适当又余有界时，空间 G 和 X 是 准等距的（采用 Rosendal 的术语，参见 [Ros21，定理 2。57]）。

关于粗几何的第一个例子是 $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^\kappa)$ 及其在 $\mathbf{H}^\kappa$上的作用。下文特别解决了 [Ros21，问题 A。11]。

命题 7.10（等距变换群$(\mathbf{H}^\kappa)$的有界性）。对于可数基数 κ，波兰群 等距变换群$(\mathbf{H}^\kappa)$ 由单位元的一个粗有界邻域生成，并以粗真且余有界的方式作用于$\mathbf{H}^\kappa$ 。特别地，等距变换群$(\mathbf{H}^\kappa)$的一个子集粗有界，当且仅当它在对$(\mathbf{H}^\kappa,\mathbf{d})$的作用下是 $\mathcal{E}_\mathbf{d}$-有界的。

证明。回顾一下， $G = \mathrm{Isom}(\mathbf{H}^\kappa) = \mathrm{PO}(1, \kappa)$ 包含子群 $K = \mathrm{PO}(\kappa)$，并通过左乘作用于齐性空间 $X = \mathbf{H}^\kappa = G/K$： $o = 1\,K$ 的稳定子是群 K，它在 G 中粗有界（当 $\kappa \in \mathbb{N}$ 时它是紧的；当 $\kappa = \infty$ 是可数无限时，详见 [Ros09, §6] 或 [Duc23, §3] ）。

嘉当分解 $G = KA(\mathbb{R})K$ （其中 $A\colon\ \mathbb{R} \to G$ 是一个单参数双曲变换群 $A(t)$，它沿公共轴通过平移 $|\ell(A(t))| = t$ 作用）表明， G 由 $KA([0, 1])K$ 生成。子集 $A([0, 1])$ 是粗有界的，因为它是紧的。这证明 G 由单位元的一个粗有界邻域 $K \cdot A([0, 1]) \cdot K$ 生成，因此它是局部有界的。此外，这表明子集 $B \subset G$ 粗有界，当且仅当存在 $R \geq 0$ 使得 $B \subset K \cdot A([0, R]) \cdot K$。

G 在 $X = G/K$ 上的作用是传递的（因而余有界），且任意点的轨道映射都与点 o的轨道映射等距共轭。由于 K 是粗有界的， $X = G/K$ 的子集有界当且仅当它经由 o的轨道映射在 G 中的原像是粗有界的，因此该作用是粗适当的。 □

7.2 在 CAT(−1) 空间上完全作用的群的刚性

主要定理 7.14 在本节中是一个一般刚性结果：某些群在$\mathbf{H}^\kappa$ 上至多容许一个连续等距作用（在共轭与奇异变形的意义下）。

定义7.11 （CAT(−1) 空间上的3-满作用）。 设拓扑群 G通过等距变换连续作用于 CAT(−1) 空间 (X, d)。

我们称 群 G 在 (X, d) 上的作用是3-满的，如果它是非初等的且满足：

边界作用是三重传递的： G 在 ∂X 上的作用是三重传递的，边界稳定子群是可和的：对于每个 $\xi \in \partial X$，其稳定子群 G_ξ 都是可和的，秩-*1* 粗 *Cartan* 分解：对于每个双曲型 $a \in G$，存在一个 $\mathcal{E}_d$-有界子集 $B \subset G$，使得 $G = BAB$，其中 A 是由 a 生成的子群。

注记 7.12。 G 在 ∂X 上的传递性意味着，对于所有 $\xi, \xi' \in \partial X$，群G_ξ 和 $G_{\xi'}$ 在 G中共轭，因此每个 G_ξ 都包含一个在X 上双曲型作用的元素（否则它们都不包含这样的元素，这与该作用的非初等性矛盾）。

此外， G 在 ∂X 上的作用具有三重传递性，这意味着对于所有 $\xi \in \partial X$， G_ξ 在 $\partial X \setminus \{\xi\}$ 上的作用都是传递的，因此对于任意三个不同点 ξ_1、ξ_2、$\xi_3 \in \partial X$，我们有$G = G_{\xi_1} G_{\xi_2} \cup G_{\xi_3} G_{\xi_2}$。

注记 7.13（CAT(−1)-空间的几何）。 我们简要回顾一下 CAT(−1)-空间 (X, d) 的一些性质，后文将用到这些性质。

作为强-1双曲型空间，其几何满足前面各节所述的所有结论。特别地，它的交比按定理 4.1 的意义生成拓扑。

对于每对互异的边界点 ξ、$\xi' \in \partial X$，存在一条连接它们的唯一测地线（ξ、ξ'） $= \{p \in X : (\xi$、$\xi')_p = 0\}$；任意两点 η、$\eta' \in X \sqcup \partial X$ 都有唯一投影 p、$p' \in (\xi'$、$\xi)$，并且它们满足 $|\log [\xi, \eta, \xi', \eta']| = d(p$、$p')$（参见 [Bou96，第 1] 节）。

定理 7.14 (完全作用于 $\mathrm{CAT}(-1)$ 空间的群的刚性)。 设拓扑群 G 在 *CAT(-1)* 空间3上完全作用，$\mathrm{CAT}(-1)$-空间(X, d)。

若 G 在$\mathbf{H}^\kappa$ 上的每个非初等连续作用都是 $\mathcal{E}_d$-有界保持的，则$\mathbf{PC}_{ne}(G)$ 至多有一个点。

证明的策略是找到一个 G-等变边界映射 $\partial X \to \partial \mathbf{H}^\kappa$，它在其像上是同胚，并将交比从 $\partial \mathbf{H}^\kappa$ 拉回到 ∂X。然后，我们可以利用定理 4.7中证明的交比唯一性（相差一个幂），以及交比决定表示的长度谱这一事实（定理 1.18），从而根据定理 4.26得出表示的共轭类。

引理 7.15 (边界映射)。 设拓扑群 G 在 3-完全作用于 $\mathrm{CAT}(-1)$-空间 (X, d)，如定理 *7.11*所述。

考虑一个非初等的 $\mathcal{E}_d$-有界保持连续表示 $\rho\colon G \to$ 等距变换群$(\mathbf{H}^\kappa)$。对每个 $\xi \in \partial X$，群 $\rho(G_\xi)$ 固定唯一一点 $\varphi(\xi) \in \partial \mathbf{H}^\kappa$，并且对每个满足 $a^+ = \xi$ 的双曲型$a \in G$，其像 $\rho(a)$ 是双曲型的，且 $\rho(a)^+ = \varphi(\xi)$。

此外， G 在 $\mathbf{H}^\kappa$ 上的作用是 $\mathcal{E}_d$-粗适当的。

证明。 可 amenable 群的连续作用 $\rho(G_\xi)$ （它们全都共轭）在 $\mathbf{H}^\kappa$上必须根据 [Duc23，命题 5.1]，同时落入下列情形中的（至少）一种：

1. $\forall \xi \in \partial X$，群 $\rho(G_\xi)$ 固定 $\mathbf{H}^\kappa$ 中的一个点；2. $\forall \xi \in \partial X$，群 $\rho(G_\xi)$ 稳定一条测地线；3. $\forall \xi \in \partial X$，群 $\rho(G_\xi)$ 在 $\partial \mathbf{H}^\kappa$ 中固定一个点

我们将证明情形 1 和情形 2 均不可能发生，因此只会出现情形 3。

假设出现情形 1：对于任意三个不同点 ξ_1、ξ_2、$\xi_3 \in \partial X$，群 $\rho(G_{\xi_i})$ 在 $\mathbf{H}^\kappa$ 中有一个不动点，因此 $G = G_{\xi_1}G_{\xi_2} \cup G_{\xi_3}G_{\xi_2}$ 有有界轨道（根据三角不等式），进而有一个不动点，这与非初等性矛盾。

现在假设只出现情形 2：对于每个 $\xi \in \partial X$，$\rho(G_\xi)$ 的作用都不固定 $\mathbf{H}^\kappa$ 中的点，而是稳定一条测地线 L。我们可以选取一个 $a \in G_\xi$，它在 X 上的作用下是双曲型，且满足 $a^+ = \xi$，并记作 $\xi' = a^-$。由于 $\rho(a)$ 保持 L，它要么是双曲型，要么是椭圆型。若它是椭圆型，那么根据性质 $G = BAB$，对于某个 $\mathcal{E}_d$-有界子集 $B \subset G$ 和 A，由 a生成的群，其像 $\rho(G)$ 将有一个有界轨道，这与其在$\mathbf{H}^\kappa$上的作用的非初等性矛盾。因此 $\rho(a)$ 是双曲型；又由于$a \in G_\xi \cap G_{\xi'}$，由 $\rho(G_{\xi'})$ 保持不变的测地线 L 是 $\rho(a)$ 的轴。最后，由于 G_ξ 在固定 L的同时传递地作用于 $\partial X \setminus \{\xi\}$，对于每个 $\eta \in \partial X$，群 $\rho(G_\eta)$ 都稳定 L，因此 L是 G-不变的，这与非初等性矛盾。

现在我们知道，每个 $\rho(G_\xi)$ 都在 $\partial\mathbf{H}^\kappa$ 中固定一个点。

考虑一个具有 $a^+ = \xi$ 的双曲型 $a \in G_\xi$，并将 $a^- = \xi' \in \partial X$ 记为其排斥不动点。与之前相同的推理表明，$\rho(a)$ 不可能是椭圆型。若 $\rho(a)$ 是抛物型，则它在 $\zeta \in \partial\mathbf{H}^\kappa$ 中有唯一的不动点，因此 $G_{\xi'}$ 也固定 ζ；如前所述，G_ξ 在 $\partial X \setminus \{\xi\}$ 上的传递性表明，对于 $\eta \in \partial X$，群 $\rho(G_\eta)$ 固定 ζ，因此 ζ 被 $\rho(G)$ 固定，这与非初等性矛盾。因此，$\rho(a)$ 必须是双曲型。现在我们来证明，$\rho(G_\xi)$ 的不动点是 $\rho(a)^+$，而不是 $\rho(a)^-$。取轴上一个点 $x \in X$，其中轴属于 a 和 $b \in G_\xi \setminus G_{\xi'}$。三角形 (x, bx, ξ) 中的一个比较不等式表明，对所有 $n \in \mathbb{N}$，都有 $d(a^{-n}ba^n x, x) = d(b(a^n x)\ a^n x) \le d(bx, x)$。特别地，存在一个 $\mathcal{E}_d$-有界子集 $B \subset G$，使得对所有 $n \in \mathbb{N}$，都有 $a^{-n}ba^n \in B$。然而，由于 $\xi' \neq b\xi'$，$d(a^n ba^{-n}x, x) = d(b(a^{-n}x)\ a^{-n}x) \to \infty$。对 $\rho(a)$ 和 $\rho(b)$ 及其轴和不动点，同样的不等式也成立：由于该表示是有界保持的，我们推得 $\rho(a)^+$ 是 $\rho(G_\xi)$ 的不动点。

为证明该作用是粗适当的，考虑一个双曲型 a，并令 $G = BAB$ 为由定理 7.11 给出的粗 Cartan 分解。由前文可知 $\rho(a)$是双曲型的：在其轴上选取一点 $y \in \mathbf{H}^\kappa$。上确界 $M = \sup\{\mathsf{d}(\rho(b)\ y, y)\colon\ b \in B\}$是有限的，因为 B 是 $\mathcal{E}_d$-有界的，且 G 在$\mathbf{H}^\kappa$ 上的作用是 $\mathcal{E}_d$-有界保持的。对于元素$g = b_1a^nb_2 \in BAB$，两条三角不等式表明 $\mathsf{d}(\rho(g)y, y) \ge |n|\ell(\rho(a)) - 2M$。再由两条三角不等式可知，对每个有界集 Y，对所有 $y \in Y$都成立类似的不等式，因此 G 在$\mathbf{H}^\kappa$ 上的作用是 $\mathcal{E}_d$-粗适当的。 □

下述引理将用于推出边界映射的双连续性 φ 在定理 7.15 中由其（无）有界性得出。

引理 7.16. 设拓扑群 G 在$\mathrm{CAT}(-1)$空间(Y, d)上连续地等距作用，并在 ∂Y上传递地三重作用。设 $a \in G$ 是一个双曲型元素。考虑边界点序列 $\xi_n \in \partial Y \setminus \{a^\pm\}$。记 $A_n(\xi) = \{g \in G_{a^-} \cap G_{a^+}\colon\ g(\xi_0) = \xi_n\}$。

当且仅当以下两项均成立时，有 $\xi_n \to a^+$：

- 集合 $A_n(\xi)$ 随着 $n \to \pm\infty$，离开 G 中的任意有界集 $\mathcal{E}_d$
- 存在一个有界集 $B \subset G$ $\mathcal{E}_d$，使得对于 $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists k_n \in \mathbb{N}$: $a^{-k_n}A_n(\xi) \subset B$。

证明. 回忆一下 ξ_n 在(a^-, a^+)上的唯一投影 p_n 的定义和性质。有 $\xi_n \to a_+ \iff p_n \to a_+$。此外，每个 $g \in A_n(\xi)$都满足 $g(p_0) = p_n$。

若 $\xi_n \to a^+$，则对于任意 $g_n \in A_n(\xi)$，有 $d(g_n p_0,\ p_0) \to \infty$，因此对于任意 $\mathcal{E}_d$-有界子集 $B \subset G$，当 n 足够大时，$A_n(\xi) \cap B = \emptyset$。此外，对于任意 n，我们可以找到 $k_n \in \mathbb{N}$，使得 $a^{-k_n}p_n \in B(p_0,\ \ell(a))$，从而 $a^{-k_n}A_n(\xi)$ 是 $\mathcal{E}_d$-有界的。

反过来，如果 $A_n(\xi)$ 逃离 G 中任意 $\mathcal{E}_d$-有界子集，那么 $d(p_0,\ p_n) \to \infty$，因此经抽取子列后，p_n 收敛到 $a^\pm$；但由于 $\{a^{-k_n}p_n\colon\ k \in \mathbb{N}\}$ 到 p_0 的距离有界，极限实际上必定是 a^+。 □

定理的证明 7.14。考虑一个非初等连续表示 $\rho\colon\ G \to$ 等距变换群$(\mathbf{H}^\kappa)$。根据定理 7.15，存在一个边界函数 $\varphi\colon\ \partial X \to \partial\mathbf{H}^\kappa$，将 $\xi \in \partial X$ 映到其唯一不动点 $\rho(G_\xi)$。下面证明 φ 是其像上的同胚。

由于 ∂X 和 $\partial\mathbf{H}^\kappa$ 上的拓扑均可度量化，我们将证明，序列 $\xi_n \in \partial X$收敛当且仅当 $\varphi(\xi_n) \in \partial\mathbf{H}^\kappa$ 收敛。固定互异的 $\xi^\pm \in \partial X$，并选取一个双曲型$a \in G$，使得 $a^\pm = \xi^\pm$。现在令 $Y = X$，应用定理 7.16：$\partial X\backslash\{\xi^+\}$中的序列 (ξ_n) 收敛到 ξ^+，当且仅当子集 $A_n(\xi) = \{g \in G_{a^+} \cap G_{a^-}\colon\ g(\xi_0) = g(\xi_n)\}$ 离开 G 中的任意$\mathcal{E}_d$-有界子集，并且存在一个 $\mathcal{E}_d$-有界子集 $B \subset G$，使得 $\forall n \in \mathbb{N}, \exists k_n \in \mathbb{N}\colon\ a^{-k_n}A_n(\xi) \subset B$。由于 G 在 $\mathbf{H}^\kappa$ 上的作用是 $\mathcal{E}_d$-粗适当（由定理 7.15 得出）且$\mathcal{E}_d$-有界保持的，这等价于说，ρ的像

$$A'_n(\xi) = \{g \in G\colon \rho(g)(\varphi(\xi^\pm)) = \varphi(\xi^\pm) \text{ and } \rho(g)(\varphi(\xi_0)) = \rho(g)(\varphi(\xi_n))\}$$

从 $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^\kappa)$ 的任意 $\mathcal{E}_\mathbf{d}$-有界子集逃逸，并且存在 $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^\kappa)$ 的一个 $\mathcal{E}_\mathbf{d}$-有界子集$B \subset$，使得对所有 $n \in \mathbb{N}$，存在 $k_n \in \mathbb{N}$，满足 $\rho(a)^{-k_n}A'_n(\xi) \subset B$。

根据定理 7.16，对于 $Y = \mathbf{H}^\kappa$ 这等价于 $\varphi(\xi_n)$ 收敛到 $\varphi(\xi^+)$。这证明了 $\varphi\colon\ \partial X \to \partial\mathbf{H}^\kappa$ 在其像上是一个同胚。

为完成证明，考虑 $i \in \{1, 2\}$ 两个非初等表示 $\rho_i\colon\ G \to \mathrm{Isom}(\mathbf{H}^\kappa)$，其边界映射为 $\varphi_i\colon\ \partial X \to \partial\mathbf{H}^\kappa$。根据定理 4.7，存在 $t > 0$，使得对所有 $\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ \xi_4 \in (\partial X)^{(4)}$,

$$[\varphi_1(\xi_1), \varphi_1(\xi_2); \varphi_1(\xi_3), \varphi_1(\xi_4)] = [\varphi_2(\xi_1), \varphi_2(\xi_2); \varphi_2(\xi_3), \varphi_2(\xi_4)]^t$$

特别地，通过与 ρ_1 奇异表示 ρ_t 或 ρ_2 与$\rho_{1/t}$（取决于 $t \le 1$ 还是 $t > 1$）复合，我们可以归结为 $t = 1$ 的情形，并由定理4.20 推出 ρ_i 在它们的最小不变全测地子空间上的限制彼此共轭，因此它们对应的双曲型函数属于同一类。 □

7.3 等距变换群（$\mathbf{H}^\kappa$）、自同构群（T_κ）、$\mathbf{PGL}_2(\mathbb{K})$ 的刚性

推论 7.17（经典群的刚性）。如果 G 是以下拓扑群之一：

1. 实双曲空间$\mathbf{H}^\kappa$（维数为可数 κ）的等距变换群等距变换群$(\mathbf{H}^\kappa)$，*2.* κ正则单纯树 T_κ（其中 $\kappa \ge 3$ 可数）的自同构群自同构群(T_κ)，*3.* 群$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$，其中 $\mathbb{K}$ 是完备非阿基米德赋值域

则空间 $\mathbf{P}\mathcal{C}_{ne}(G)$ 恰好有一个点。

注记 7.18（恢复先前的结果）。定理 7.17 以不同的证明恢复了以下情形。等距变换群$(\mathbf{H}^\kappa)$ 关于 $\kappa \in \mathbb{N}$ 的情形（特别是 $\mathbf{PGL}_2(\mathbb{K})$ 关于 $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ 的情形）以及等距变换群$(\mathbf{H}^\omega)$ 的情形分别在 [MP14] 和 [MP19] 中处理。$\mathbf{PGL}_2(\mathbb{K})$ 在 $\mathbb{K}$ 为非阿基米德局部域时的情形在 [BIM05，定理 C] 中处理。

注记 7.19（关于 $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$ 的新例子）。在定理 7.17 中，$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$ 的情形在域 $\mathbb{K}$为非局部时是新的，因此它特别提供了以下新例子的来源。

我们强调，当 $\mathbb{K}$ 为波兰时，群 $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$ 对于由一致拓扑所诱导的拓扑是波兰的（正如我们将在第 7.3.3 节中看到的）。

- $\mathbb{K} = \mathbb{C}_p$，$p$-进域 $\mathbb{Q}_p$ 的代数闭包的完备化，该空间是波兰空间。
- $\mathbb{K} = \mathbb{k}((t))$），任意域 $\mathbb{k}$ 上的洛朗级数域；当 $\mathbb{k}$ 可数时，它是波兰空间 .

- $\mathbb{K}=\Bbbk((t^{\Lambda}))$，域 $\Bbbk$ 上、指数取自子群 $\Lambda\subset\mathbb{R}$ 的 Hahn 级数域（前一种情形对应 $\Lambda=\mathbb{Z}$）；当 $\Bbbk$ 可数且 Λ 离散时，它是波兰空间。

注记 7.20（从 Aut(T_k) 到 Burger-Mozes 群）。对于具有无限可数价数的正则树，其自同构群 Aut(T_k) 的情形应当可以推广如下。

考虑无限正则树 $T_{\mathbb{N}}$，其顶点链接与 $\mathbb{N}$ 存在双射。可数集 $\mathfrak{S}(\mathbb{N})$ 上的全体置换构成一个非阿基米德波兰群。对于其闭子群 $\Gamma\subset\mathfrak{S}(\mathbb{N})$，可以构造相应的通用 Burger-Mozes 群 $U(\Gamma)$；该群由 $T_{\mathbb{N}}$ 的那些自同构组成，它们在顶点链接上的局部作用属于 Γ。

如果 Γ 在 $\mathbb{N}$ 上的作用是三重传递的，那么 $U(\Gamma)$ 在 $\partial T_{\mathbb{N}}$ 上的作用也具有相同性质。如果 Γ 在 $\mathbb{N}$ 上的作用是寡形的，那么根据 DT25 命题 5.2], 的证明中的辐角，$U(\Gamma)$ 在 $T_{\mathbb{N}}$ 上的作用具有粗有界的顶点稳定子。定理 7.11 中的粗 Cartan 分解由顶点稳定子的粗有界性，以及无穷远处的三重传递性意味着顶点稳定子在 ∂T_{ω} 上传递地作用这一事实得出。在这些假设下，定理 7.11 中唯一尚待验证的条件是无穷远点稳定子的可 amen 性：这一点不太容易，但可能可以由 Γ 在 $\mathbb{N}$ 上的作用所具有的其他性质推出，例如其点稳定子的可 amen 性。若这一条件成立，我们便可应用定理 7.14，将这些新例子纳入其中，包括 Basilica Julia 集及其他兔子 Julia 集的同胚群 [DT25]。

注记 7.2　1（对拓扑的依赖）。定理 7.17是针对拓扑群陈述的　　s.

在某些情况下，表示的连续性并不是限制条件。例如，群 等距变换群($\mathbf{H}^{\omega}$) 具有自动连续性性质，因此当 κ 可数时，任何到等距变换群($\mathbf{H}^{\kappa}$) 中的群表示都会自动连续（关于这些特定表示，参见 [MP19，定理 III]；关于一般的自动连续性性质，参见 [Duc23，定理 1。4] ）。

对于其他群，拓扑是一个关键因素。域 $\mathbb{C}$和 $\mathbb{C}_p$ 在代数上同构（因为它们是具有特征零和连续统基数的唯一代数闭域），但并不同胚，因为 $\mathbb{C}$ 是局部紧的阿基米德域，而 $\mathbb{C}_p$不是局部紧的非阿基米德域。因此，群 $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ 和 $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}_p)$ 在代数上同构，但并不同胚。

定理 7.17 表明，这两个拓扑群都只有一个非初等双曲型函数的相似类。不过，它们的相应表示并不相同。事实上，对于 $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$，这些表示限制到$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z})$ 时具有无界轨道；而对于 $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}_p)$，限制到 $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z})$ 时则是有界的。

注记 7.22（盖尔范德对）。文献 [BIM05，定理 C] 的证明依赖于盖尔范德对 (G,K)，而这只有在 G 局部紧时才定义良好（此时它具有哈尔测度）。

Rosendal 将盖尔范德对的概念推广到了通过等距变换作用的拓扑群，见 [Ros17]。可以验证，定理 7.14 的假设，尤其是无穷远处的三重传递性，意味着 G 在 X 上的作用按照 Rosendal 的术语构成一个几何盖尔范德对。我们的证明并未使用这一概念。

在其余各小节中，我们证明定理 7.17的各个情形。注意 $\mathbf{P}\mathcal{C}_{ne}(G)$ 的非空性在每种情形下都源于在某个 $\mathbf{H}^{\kappa}$ 上或某棵实树上存在非初等作用。

7.3.1 等距变换群($\mathbf{H}^{\kappa}$)的情形

定理 *7.17* 对于 等距变换群($\mathbf{H}^{\kappa}$) 在其波兰拓扑下的证明。我们验证定理 7.11 与定理 7.14 中对于 $G=$ 等距变换群($\mathbf{H}^{\kappa}$) 与 $X=\mathbf{H}^{\kappa}$ 且 κ 可数时的条件。

我们看到 G 在 ∂X 中2.1上的作用是三重传递的。无穷远处一点的稳定子由 [Duc23引理 5 证明是可和的。4]。定理7.11中的秩1 的粗 Cartan 分解

可由$\mathrm{PO}(1,\infty)$ 的嘉当分解（回顾见2.1）以及$\mathrm{PO}(1,\infty)$ 在$\mathbf{H}^{\omega}$上的作用的传递性得出。

最后， G 在 $(X,\ d)$ 上的作用由定理 7.10可知是粗适当的，因此任何 $\mathcal{E}_d$-有界子集都是粗适当的，从而任何连续等距作用都是 $\mathcal{E}_d$-有界保持的。 □

7.3.2 Aut(T_κ) 的情形

设 T_κ 是价数为 $\kappa \geq 3$ 的可数 κ-正则单纯树。其自同构群 $G = \mathrm{Aut}(T_\kappa)$ 配备顶点集 T_κ 上的逐点收敛拓扑后，是一个非阿基米德波兰群。

对于有限整数 $\kappa \geq 3$，群 $\mathrm{Aut}(T_\kappa)$ 是局部紧的（例如参见 [GGT18]），且众所周知，它在 T_κ 上的作用满足定理 7.11。因此，我们将重点讨论 $\kappa = \omega$ 为无限可数度数的情形，尽管我们的所有论证都可以推广到有限基数。

Aut(T_ω) 的定理 7.17 的证明。我们首先检验定理 7.11 中的条件。在 ∂T_ω 上， G 对 ∂T_ω 的作用是三重传递的，这一点可由标准的来回论证得出。我们将在下文的定理 7.23 中证明，∂T_ω 中各点的稳定子都是可和的。现在来证明粗嘉当分解。首先注意，根据 [Ros23，例 3.6]，，点的稳定子是粗有界的。因此，对于一条线段 $[x,x'] \subset T_\omega$ ，子集 $B(x,x') = \{g \in \mathrm{Aut}(T_\omega)\colon\ gx \in [x,x']\}$ 是有限个粗有界子集的平移之并，故为粗有界。现在考虑一个平移长度为 $\ell(a) = l \in \mathbb{N}_{>0}$ 的双曲型 $a \in G$。取其轴 L 上的一点 x，并令 $B = \{g \in G\colon\ gx \in [x,ax]\}$。对于 $g \in G$，存在 $s \in \mathrm{Stab}(x)$ 使得 $s^{-1}gx \in L$，因此存在 $m \in \mathbb{Z}$ 使得 $a^m s^{-1} g(x) \in [x,x']$ ，于是 $a^m s^{-1} gx \in B$，即 $g \in BAB$。

最后， G 在 T_ω 上的作用根据 [Ros23的例 3 是粗适当的。6], 特别地， $\mathcal{E}_d$-有界子集与粗有界子集重合，因此每个连续等距作用都是 $\mathcal{E}_d$-有界保持的。

□

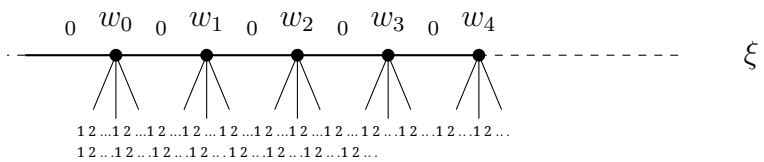
对于 $\xi \in \partial T_\omega$，其稳定子 G_ξ 被赋予布塞曼特征 Busξ： $G_\xi \to \mathbb{Z}$，其核 $G_\xi^0 \subset G_\xi$ 由稳定每个以 ξ为中心的等高线面的元素组成。注意，由正则性可知，布塞曼特征是满射，因此我们得到一个扩张 $G_\xi^0 \to G_\xi \to \mathbb{Z}$。

命题 7.23 （ G_ξ的可 amen 性）。 存在有限子群的一个递增序列$G_\xi^0(n) \subset G_\xi^0$，以 $n \in \mathbb{N}$为指标，使得对每个 $g \in G_\xi^0$以及 T_ω中顶点的每个有限子集 F，存在 $n \in \mathbb{N}$与 $h \in G_\xi^0(n)$ ，使得 g与 h在 F上重合。

因此， G_ξ^0 是可和的，故 G_ξ 是可和的。

证明。 固定一个基顶点 w_0 ，并将其到 ξ的路径记为$(w_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 。注意，对于 $g \in G_\xi$，存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $[w_0,\xi) \cap [gw_0,\xi) = [w_m,\xi)$，且若 $g \in G_\xi^0$，则 $i \geq m \implies g(w_i) = w_i$。此外，对任意有限顶点子集 F，我们可以考虑由 F 和 w_m中的顶点所诱导的子树 Conv(w_m,F)。我们将展示如何构造一个有限阶元素 $h \in$Aut(T_ω)，使其在限制到 Conv(w_m,F) 时的作用与 f一致；此外，还将说明如何通过一个有限群序列穷尽所有此类有限阶元素。

对于 T_ω 的每个顶点 v ，我们用 E_v 表示与 v 相连且满足 $e_{v,\ \xi} \in E_v$ 是从 v 到 ξ 的路径上唯一一条边的边集，并选择一个双射（称为着色） $C_v\colon E_v \setminus \{e_{v,\xi}\} \to \mathbb{N}$ ，使得对所有 $i \in \mathbb{N}$ ，都有 $C_{w_{i+1}}(w_{i+1}w_i) = 0$，如图所示。



对于 $g \in G_\xi$，其在顶点 v 处的局部作用是双射 $E_v \setminus \{e_{v,\xi}\} \to E_{gv} \setminus \{e_{gv,\xi}\}$，可编码为置换 $\sigma(g,\ v)$: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$，定义为 $C_{gv} \circ g_{|E_v \setminus \{e_{v,\xi}\}} \circ C_v^{-1}$。这些局部作用满足余循环关系 $\sigma(gh,\ v) = \sigma(g,\ hv) \circ \sigma(h,\ v)$。

对于顶点 v 和 k，$n \in \mathbb{N}_{>0}$，我们定义有限子树 $S_{k,\ n}(v) \subset T_\omega$，它是所有长度不超过 n 且出边标签为$C_{v_i}((v_i,\ v_{i+1})) \in \mathbb{N}_{<k}$的路径 $(v = v_0$、……、$v_n)$ 的并。因此，$S_{k,\ n}(v)$ 是以 v 为根、深度为 n的 k-正则树。

现在令 $G_{k,n}(v)$ 为 $g \in G_\xi$ 的子集，使得对于每个不是叶节点的顶点 $u \in S_{k,n}(v)$，置换 $\sigma(g, u)$ 逐点固定 $\mathbb{N}_{\geq k}$；而对于每个其他顶点 $u \in T_\omega$，我们有$\sigma(g, u) = \mathbf{1}$。因此，$G_{k,n}(v)$ 是保持 $S_{k,n}(v)$ 且在 $S_{k,n}(v)$ 之外的所有边上刚性作用的 G_ξ 子群（即保持不属于 $E(S_{k,n}(v))$ 的边的颜色）。特别地，$G_{k,n}(v)$ 中的元素完全由其在$S_{k,n}(v)$ 上的限制决定（依据初始着色）。因此，群 $G_{k,n}(v)$ 同构于深度为 n的 k-正则根树的自同构群，该树是有限的。

我们注意到 $S_{n,\ 2n}(w_n) \subset S_{n+1,\ 2(n+1)}(w_{n+1})$，并断言 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}} S_{n,\ 2n}(w_n) = T_\omega$。事实上，只要 n 大于 $d(v,\ w_0)$，且从 w_0 到 v 的路径上所有边的颜色都小于 n，顶点 v 就属于 $S_{n,\ 2n}(w_n)$。

对于 $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$，记 $G_\xi^0(n) = G_{n,\ 2n}(w_n)$。由于 $S_{n,\ 2n}(w_n) \subset S_{n+1,\ 2(n+1)}(w_{n+1})$，我们有 $G_\xi^0(n) \subset G_\xi^0(n+1)$，最后证明 $\bigcup G_\xi^0(n)$ 在 G_ξ^0 中稠密。

设 $g \in G_\xi^0$ 和 $m \in \mathbb{N}$ 满足 $i \geq m \implies g(w_i) = w_i$。对于顶点的有限子集 F，存在足够大的 $n \geq m$，使得 $F \cup g(F) \subset S_{n,\ 2n}(w_n)$（只需考虑子树 $\mathrm{Conv}(w_m,\ F)$ 及其边颜色）。由于 $S_{n,\ 2n}(w_n)$ 的任意部分自同构（即包含根 w_n 的子树之间的同构）都可以延拓为 $S_{n,\ 2n}(w_n)$ 的自同构，因此 $G_\xi^0(n)$ 中存在一个元素，使其在 F 上与 g 一致。

这证明 G_ξ^0 包含一个由有限子群构成的可数稠密并。因此 G_ξ^0 是可和的，所以其 $\mathbb{Z}$-扩张 G_ξ 也是可和的。 □

7.3.3$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$**的情形。**

固定一个带有非平凡完备非阿基米德范数 $|\cdot|$ 的（交换）域 $\mathbb{K}$。赋值环 $\mathcal{O} = \{x \in \mathbb{K}:\ |x| \leq 1\}$ 有极大理想 $\mathfrak{m} = \{x \in \mathbb{K}:\ |x| < 1\}$，剩余域为 $\Bbbk = \mathcal{O}/\mathfrak{m}$。注意，剩余映射 $\mathcal{O} \to \Bbbk$ 对 $\Bbbk$ 上的离散拓扑（由平凡范数诱导）是连续的，因此对任何其他拓扑（包括由非平凡范数诱导的拓扑）也是连续的。

更一般地，对于 $r \in \mathbb{R}_{>0}$，记 $\mathcal{O}_r = \{x \in \mathbb{K}:\ |x| \leq r\} \supset \mathfrak{m}_r = \{x \in \mathbb{K}:\ |x| < r\}$。它们都是 $\mathbb{K}$ 的既开又闭子集，并作为 $r \to 0$ 给出 $0 \in \mathbb{K}$ 的一个邻域基。对所有 $r \in \mathbb{R}_{>0}$，子集 $\mathfrak{m}_r \subset \mathcal{O}_r$ 都是 $\mathbb{K}$ 的分式理想，其商 $\mathcal{O}_r/\mathfrak{m}_r$ 同构于 $\Bbbk$ 或 $\mathbf{0}$，具体取决于 $\mathbb{K}$ 是否含有范数为 r 的元素（若 $\lambda \in \mathcal{O}_r \setminus \mathfrak{m}_r$，则乘以 λ 会将理想对 $\mathcal{O} \supset \mathfrak{m}$ 映为理想对 $\mathcal{O}_r \supset \mathfrak{m}_r$）。

对于 $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$，赋范的 $\mathbb{K}$-向量空间 $\mathbb{K}^n$ 带有一个延拓 $||$ 在 $\mathbb{K}$上的范数；该范数利用其典范标架，在任意 $v = (v_1,\ \ldots\ldots,\ v_n) \in V$上定义为 $|v| = \max\{|v_i|:\ 1 \leq i \leq n\}$，并在 $\mathbb{K}^n$上诱导出超度量。因此，矩阵 $\mathbb{K}$-代数 $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ 带有由 $\|g\| := \sup\{|gv|/|v|:\ v \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}\}$ 定义的算子范数，它诱导出由其在 $\mathbb{K}^n$上的作用的一致收敛所确定的拓扑。利用 $|\cdot|$ 的超度量不等式，可将其计算为 $\|g\| = \max\{|g_{i,j}|:\ 1 \leq i,\ j \leq n\}$，因此它也与 $\mathbb{K}$-向量空间 $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ 上的典范范数一致，并诱导其各分量的乘积拓扑。

可逆元群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ 配备诱导拓扑后是一个拓扑群，其射影化 $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})/\mathbb{K}^\times\mathbf{1}$ 带有商拓扑。若 $\mathbb{K}$可分，则 $\mathbb{K}$ 是一个波兰域，而 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$，$\mathrm{PGL}_n(\mathbb{K})$ 是波兰群。

群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ 作用在其 Bruhat-Tits 仿射建筑及其本质化上：我们仅回顾该建筑作为度量空间的定义，以及 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ 的等距作用，但

更多细节请参阅 [Rou23，§6。2] 以及 [Par23]（或其法语原版 [Par00]）。

在一个 $\mathbb{K}$维数为 $n \in \mathbb{N}$ 的向量空间 V 上，范数 是一个函数 $\eta\colon V \to \mathbb{R}_+$，满足 t

- $\eta(v) = 0 \iff v = 0$,
- 对所有 $v \in V$ 和 $\lambda \in \mathbb{K}$，都有 $\eta(\lambda v) = |\lambda|\eta(v)$
- 对所有 $u,\ v \in V$，都有 $\eta(u+v) \leq \max(\eta(u)\ \eta(v))$

在 V 上，两个范数 $\eta_1,\ \eta_2$ 之间的距离 d_∞ 定义为

$$d_\infty(\eta_1, \eta_2) = \sup\left\{\left|\log \tfrac{\eta_1(v)}{\eta_2(v)}\right| : v \in V \setminus \{0\}\right\}$$

给定 V的一组基（e_1、……、e_n），称 V上的范数 η为分裂的，若对所有 λ_1、……、$\lambda_n \in \mathbb{K}$,

$$\eta\left(\textstyle\sum_i \lambda_i e_i\right) = \max\{|a_i|\eta(e_i) \colon 1 \leq i \leq n\}.$$

若存在一组基使范数在该基下分裂，则称该范数为可分裂的。仿射建筑 $\mathcal{I}$(GL(V))是所有可分裂范数构成的集合，其距离为 d_∞。群GL(V)通过前复合给出的作用是连续且等距的。其本质化记作 $\mathcal{I}^e$(GL(V))，是由可分裂范数的相似类构成的拓扑空间，而两个相似类之间的距离是其代表元之间距离的下确界。GL(V)通过等距变换在$\mathcal{I}$(GL(V))上的作用，商化为PGL(V)通过等距变换在 $\mathcal{I}^e$(GL(V))上的作用。

在 V^n上固定一个行列式后，我们可以将 $\mathcal{I}^e$(GL(V))实现为 $\mathcal{I}$(GL(V))中体积为1的可分裂范数所构成的子空间，因此它带有诱导度量 d_∞。 $M \in$ PGL(V)在 $\eta \in \mathcal{I}^e$(GL(V))上的等距作用，对于任意代表元 $M \in$ GL(V)，由$(\eta \circ M)/\sqrt[n]{|\det(M)|}$给出。

我们现在关注情形 $n = 2$，并选取一组基 $e = (e_1, e_2)$，用以将 $V = \mathbb{K}^2$ 与GL(V) = GL$_2$($\mathbb{K}$)等同起来。我们还利用与该基相关联的行列式，按上文方式等同布吕阿-蒂茨建筑 $\mathcal{I}^e$(GL$_2$($\mathbb{K}$))：它是一棵实树 [Rou23, §6.2.20]，此后我们将其记为 T。当与该范数相关联的赋值是离散的时，这棵树的构造可借助格得到（见 [Rou23, §6.2.23]），否则该实树并非单纯树的几何实现。

我们将基点 $\eta_e \in T$定义为标准范数 $\eta(a_1e_1+a_2e_2)$ =max$\{|a_1|, |a_2|\}$的相似类；其稳定子为PGL$_2$($\mathcal{O}$)。 η_e 在PGL$_2$($\mathbb{K}$)下的轨道由所有像包含于 $|\mathbb{K}| \subset \mathbb{R}$的可分裂范数组成。 T 中位于该轨道内的点称为特殊点[Par23, §3B1]；它们的稳定子群均共轭于PGL$_2$($\mathcal{O}$)。

射影直线 $\mathbb{K}\mathbf{P}^1$ 自然等同于边界 ∂T（见 [Rou23，§ 6.2。20]），且射影直线 $\Bbbk\mathbf{P}^1$ 等同于补集的连通分支集合$T \setminus \eta_e$（这由 [Rou23，定理 6.2.16.1(b)]得出）。特别地，非常特殊点 $x \in T$是一个分支点，意即其补集 $T \setminus x$ 至少有 ≥ 3 个分支（这些分支是开的，因为 T 是局部连通的）。

我们现在证明作用在 ∂T 上的三重传递性，并描述边界点的稳定子群 s.

引理 7.24（边界上的作用）。拓扑群 PGL$_2$（$\mathbb{K}$）通过其实树的等距变换所给出的作用 （T，d_∞）满足定理 *7.11*中的前两个条件：

- 在 ∂T 上的作用是3重传递的
- 每个 $\xi \in \partial T$ 的稳定子 $G_\xi \subset$ PGL$_2$（$\mathbb{K}$）是可和的。

证明。边界 ∂T 自然等同于射影直线 $\mathbb{K}\mathbf{P}^1$,，从而PGL$_2$($\mathbb{K}$)的作用是3-传递的（见 [Rou23，§ 6.2.20]）。

对于 $\xi \in \partial T$ 中的一个点，其稳定子 $G_\xi \subset$ PGL$_2$($\mathbb{K}$) 共轭于上三角矩阵的射影化群；该群是可解群，因此也是可和群。 □

在树 T中，在基 e 下分解的范数的相似类构成子集 T_A，该子集与实直线等距（用建筑的术语来说，这是一个公寓）。在 $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$中，对角矩阵的相似类构成子集 A，并由 $\lambda \in \mathbb{K}^\times$ 唯一参数化，依据 $A^\lambda = \left[\begin{smallmatrix}\lambda & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right]$。这样的矩阵 A^λ 作用于 T时是一个双曲型元素，其平移轴为 T_A，平移长度为 $|\log|\lambda||$（根据 $\|\cdot\|$ 和 d_∞的定义即可得出这一计算，详情参见 [Par23，§3B2]）。

由于 $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$ 在 ∂T 上是三重传递的，对于所有不同的 ξ_1、$\xi_2 \in \partial T$，都存在 $g \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$ 将测地线 (ξ_1, ξ_2) 映到 T_A，特别是测地线 (ξ_1, ξ_2) 包含特殊点。事实上，$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$ 在由公寓中包含的特殊点构成的点对上具有传递性（这是因为 $\mathbb{K}$ 完备，这意味着公寓系是极大的 [Rou23，注记 6.2.17.3 (c)] 和 [Par23，命题 2.18.]）。

我们将不会用到下面的定理 7.25 但它能使整个讨论更加连贯，尤其是接下来的定理 7.26。

注记 7.25（关于 PGL_2（$\mathbb{K}$） 的拓扑）。文献 [Rou23，§6.2.10.1.(2)] 解释了，由算子范数诱导的拓扑（该文献中称为强拓扑）与所谓的建筑拓扑一致（使有界子集的逐点稳定子群成为开集的最粗拓扑）。

由于 T 具有非离散的度量拓扑，我们也可以考虑 $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$ 上的逐点收敛拓扑，也就是使轨道映射连续的最粗拓扑。根据 T 上距离的构造，赋予算子范数所诱导拓扑的 $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$ 的作用是连续的；换言之，算子拓扑比逐点收敛拓扑更精细。

我们来简述逆命题的证明。任取一点 $x \in T$。首先我们断言：若 $g_n \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$ 中的一个序列在逐点收敛拓扑下收敛到单位元，那么当 $n \in \mathbb{N}$ 足够大时，我们有 $g_n x = x$。

首先假设 $x \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{K}) \cdot e$ 是一个特殊点（即它是一个分支点），并选取三个点 x_1，x_2，x_3，使它们分别位于 $T \setminus \{x\}$ 的三个不同连通分支中，且 x 是唯一的交点$\cap_{i\neq j}[x_i, x_j]$。当 n 足够大时，元素 $g_n x_i$ 与 x_i 位于 $T \setminus \{x\}$ 的同一个（开）连通分支中，因此 $g_n x = x$。

因此，对于范数 $M \in |\mathbb{K}^\times| \subset \mathbb{R}_{>0}$ 的任意正值，存在 $n(M) \in \mathbb{N}$，使得若 $n > n(M)$，则 g_n 固定基点 $\eta \in T$ 以及将以 η 为中心、半径为 M 的球面与直线 $(\eta, 0)$、$(\eta, 1)$、(η, ∞) 相交所得的三个特殊点，因此 $g_n \equiv \mathbf{1}$ 模 O_M，即 $\|g_n - \mathbf{1}\| \leq 1/M$。这证明逐点收敛蕴含一致收敛。

现在我们验证 $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$ 在 T 上的作用具有粗 Cartan 分解。

引理 7.26 (秩-粗 Cartan 分解1)。拓扑群$G = \mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$ 通过等距变换作用于其实树 (T, d_∞) 具有如定理 7.11 所述的秩 *-1* 粗 *Cartan* 分解：对于每个双曲型 $a \in G$ 生成子群 A 的，都存在一个$\mathcal{E}_{d_\infty}$-有界子集 B，使得 $G = BAB$。

证明。考虑一个双曲型元素 $a' \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$，它生成一个记为 A' 的子群，其平移轴记为 $T_{A'}$。选取一个特殊点 $x \in T_{A'}$（位于基点的 $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$ 轨道中）。集合 $B = \{g \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{K}) : d_\infty(gx, x) \leq \ell(a')\}$ 按定义是 $\mathcal{E}_{d_\infty}$-有界的，并注意它包含 $\mathrm{Stab}(x)$。

选取 $g \in G$。由于 G 传递地作用在由一个公寓与该公寓中一个特殊点组成的对上，存在 $k \in \mathrm{Stab}(x)$ 使得 $kg(x) \in T_{A'}$。因此存在 $a'' \in A'$ 使得 $d(a''kgx, x) \leq \ell(a')$。从而 $a''kg$ 属于 B 且 $G = BA'B$。

□

至此，我们已经验证了定理 7.11 中的所有条件。接下来需要证明定理7.14中的假设。这将通过定理7.33来完成，该定理需要一些引理。

对于 $\lambda,\ \mu,\ \nu \in \mathbb{K}$ 给定 $\lambda \neq 0$，记 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ 中的以下矩阵为：

$$D^\lambda = \left[\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{smallmatrix}\right] \quad L^\mu = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ \mu & 1 \end{smallmatrix}\right] \quad R^\nu = \left[\begin{smallmatrix} 1 & \nu \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] \qquad S = \left[\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right] \tag{25}$$

它们满足“广义辫群”恒等式：$L^{-\lambda}R^{1/\lambda}L^{-\lambda} = R^{1/\lambda}L^{-\lambda}R^{1/\lambda} = -SD^\lambda$。

引理 7.27 (幺幂因子分解)。对于所有 $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$，存在 $i, j \in \{0,1\}$ 和 $\mu, \nu \in \mathcal{O}$ 以及 $\lambda \in \mathbb{K}^*$，使得 $|\lambda| = \|g\|$

$$g = S^i \cdot L^\mu \cdot D^\lambda \cdot R^\nu \cdot S^j = (S^i \cdot L^\mu S) \cdot (R^{1/\lambda}L^{-\lambda}R^{1/\lambda}) \cdot (R^\nu \cdot S^j). \tag{26}$$

证明。设 $g = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right] \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$。将 g 替换为某个 $i,\ j \in \{0,1\}$ 后，我们可以假设 $|a| = \|g\|$，而高斯消元给出 $g = L^\mu \operatorname{diag}(a,\ d')R^\nu$，其中 $\mu = c/a,\ \nu = b/a \in \mathcal{O}$ 且 $d' = \det(g)/a \in \mathcal{O}$。因此，若 $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$，则 $d' = 1/a$，所以 $\operatorname{diag}(a,\ d') = D^\lambda$，且 $\lambda = a$，故 $g = L^\mu D^\lambda R^\nu$；写作 $D^\lambda = SR^{1/\lambda}L^{-\lambda}R^{1/\lambda}$ 即得所求。□

下面的引理根据 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ 在其建筑 T 上的作用，或根据算子范数 $\|\cdot\|$，描述其粗有界子集。若存在 $M \in \mathbb{R}_{\geq 0}$，使得每个 $g \in B$ 都满足 $\|g\| \leq R$，则称子集 $B \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ 是 $\|\cdot\|$-有界的。

引理 7.28（$\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ 的粗有界子集）。对于子集 $B \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$，以下条件等价：

1. B 是粗有界的
2. B 是 $\mathcal{E}_{d_\infty}$-有界的
3. B 是 $\|\cdot\|$-有界的。

证明。(*1* $\Longrightarrow$ *2*) 若 B 是粗有界的，那么根据定义，它尤其是 $\mathcal{E}_{d_\infty}$-有界的。

(*2* $\Longrightarrow$ *3*) 假设 B 是 $\mathcal{E}_{d_\infty}$-有界的。令 $\eta \in \mathcal{T}$ 为 $\mathbb{K}^2$ 在基 e 下的典范范数，其定义为 $\eta(\sum_i a_i e_i) = \max_i |a_i|$。存在 $M > 0$，使得对所有 $g \in B$，都有 $d_\infty(g\eta, \eta) = d_\infty(\eta, g^{-1}\eta) \leq M$。特别地，对所有 $j = \{1,2\}$，都有 $\max_i |\log|g_{ij}|| = \left|\log \left(\begin{smallmatrix} \eta(g(e_j)) & () \\ \eta & e_j \end{smallmatrix}\right)\right| \leq M$，这意味着 B 是 $\|\cdot\|$-有界的。

(*3* $\Longrightarrow$ *1*) 假设 B 被某个实数 $M \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ 所 $\|\cdot\|$-有界。考虑 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ 中由 $U_\varepsilon = 1 + \varepsilon\{g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{K}) : \|g\| < 1\}$ 为 $\varepsilon > 0$ 定义的单位元邻域。注意，当 ε 趋于 0 时，这些集合构成单位元的邻域基。

首先证明，对于 $\varepsilon \in (0,1]$，存在有限个 $F_\varepsilon \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$，使得 $B \subset (F_\varepsilon U_\varepsilon)^{16}$。令 $\lambda \in \mathbb{K}$ 满足 $|\lambda| \geq \sqrt{M/\varepsilon} \geq 1$ 且 $F_\varepsilon = \overline{\left\{\left[\begin{smallmatrix} \lambda^s & 0 \\ 0 & \lambda^{-s} \end{smallmatrix}\right] : s \in \{-1, 0, +1\}\right\}}$。集合 $(F_\varepsilon U_\varepsilon)^2$ 包含 $F_\varepsilon U_\varepsilon F_\varepsilon \supset \{L^\mu, R^\nu : \mu, \nu \in \mathcal{O}_M\}$，并且包含 $U_\varepsilon F_\varepsilon U_\varepsilon \supset \{S^i : i \in \mathbb{Z}/4\}$。方程（26）表明 $B \subset (F_\varepsilon U_\varepsilon)^{2\times 8}$，如所需。

最后，我们推得 B 是粗有界的。考虑 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ 通过连续等距变换作用于度量空间 (X, d)。固定 $x \in X$，并考虑单位元的开邻域 $U = \{g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{K}) : d(gx, x) < 1\}$。存在 $\varepsilon \in (0,1]$ 使得 $U_\varepsilon \subset U$，因此我们可以找到如上所述的有限 $F_\varepsilon \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$，使得 $B \subset (F_\varepsilon U_\varepsilon)^{16}$。令 $M = \max\{d(gx, x) : g \in F_\varepsilon\}$。对于所有 $f \in F_\varepsilon$ 和 $u \in U_\varepsilon$，我们有 $d(fux, x) \leq d(fux, fx) + d(fx, x)$，因此对于所有 $g \in F_\varepsilon U_\varepsilon$，我们有 $d(gx, x) \leq 1 + M$，并且 $16 - 1$ 类似的三角不等式表明，每个 $g \in (F_\varepsilon U_\varepsilon)^{16}$ 都满足 $d(gx, x) \leq 16(M+1)$，故 B 在轨道映射 $g \mapsto gx$ 下的像在 X 中有界。□

注记 7.29（局部有界）。拓扑群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$、$\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ 和 $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$ 是局部有界的。

事实上，子群 $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ 在 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ 和 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ 中都是开且粗有界的，因此它在 $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$ 中的像是单位元的一个粗有界邻域。

例 7.30 (洛朗级数域并非局部粗有界)。 考虑一个域 $\Bbbk$，其范数 $|\cdot|'$非平凡，并记 $\mathcal{O}' = \{c \in \Bbbk\colon \ |c|' = 1\}$ 为其赋值环。（回顾一下，一个域不存在非平凡范数，当且仅当它是有限域$\mathbb{F}_p$ 的代数扩张，其中该有限域的特征为 $p \neq 0$，参见 [Bou61，第 6]章。）

考虑域 $\mathbb{K} = \Bbbk((x))$，它由 $\Bbbk$ 上的洛朗级数组成，即形式级数 $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n x^n$，其中负指标的非零系数 $c_n \in \Bbbk$ 只有有限个。它带有离散赋值 $v(f) = \inf\{n \in \mathbb{Z}\colon \ c_n \neq 0\}$，由此得到（非平凡且完备的非阿基米德）范数 $|f| = e^{-v(f)}$。赋值环 $\mathcal{O} = \Bbbk[[x]]$ 由正则形式幂级数组成 $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n x^n$，其极大理想 $\mathfrak{m} = x\Bbbk[[x]]$ 由满足 $c_0 = 0$ 的元素组成，而剩余映射 $\mathcal{O}_{\mathbb{K}} \to \Bbbk$ 定义为 $f \mapsto f(0) = c_0$

此剩余映射可扩张为加法群同态 $(\mathbb{K},\ |\cdot|) \to (\Bbbk,\ |\cdot|')$，该同态连续且满射，因此其像无界（因为范数 $|\cdot|'$ 非平凡）。更一般地，第 n 个分量映射 $D^n\colon \Bbbk[[x]] \to \Bbbk$ 定义为 $D^n\colon \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n x^n \mapsto c_n$，它是局部常值的，因而连续；它是一个（可裂）群同态，且限制在 $x^n\mathcal{O}$ 上时为满射。

将 $\Bbbk$ 认作等距变换群 $\mathrm{Isom}(\Bbbk) = \Bbbk \rtimes \mathcal{O}'$的平移子群后，对于非常 $n \in \mathbb{N}$，这便给出了 $\mathbb{K} \to \mathrm{Isom}(\Bbbk)$的一个连续表示，且其像 $x^n\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ 无界。由于集合 $x^n\mathcal{O}$ 作为 $n \in \mathbb{N}$ 构成了 $\mathbb{K}$ 中原点的邻域基，我们由此推得 $\mathbb{K}$ 不是局部粗有界的。

可以将这一思路推广，以证明其他赋值域（$\mathbb{K}$、$||$）也不是局部粗有界的，但要用模型论术语给出一般性刻画似乎力有未逮 [Kar24]。此外，对于每个正特征域 $\Bbbk$（其中许多是无限域，例如 $\mathbb{F}_p(T)$），都存在一个零特征的离散赋值环 $\mathcal{O}$，以该域为剩余域（若该域 $\Bbbk$ 是完美的，则可由维特向量构造出 $\mathbb{K}$；否则 Cohen 的一个结果保证了这种域 $\mathbb{K}$的存在，见 [Bou83，第 9] 章）。其分式域 $\mathbb{K} = \mathrm{Frac}(\mathcal{O})$ 的特征为 0，且其加法群是可除群，因此它不能在特征为 p 的 $\Bbbk$ 上等距地作用（例如，$1/p$ 会平凡作用）。

注记 7.31（幂零元局部粗有界仅在 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ 内）。由 $\mu \in \mathbb{K}$ 按照 $R^\mu = \left[\begin{smallmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ 参数化的幂零矩阵群作为拓扑群同构于 $(\mathbb{K},\ +)$。因此，对于许多域（例如定理 7.30中的域），该幂零元并非局部粗有界。不过，由定理 7.28我们可得，在 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ 内，该幂零子群是局部粗有界的。

问题 7.32（$\mathcal{E}_d$-有界蕴含粗有界）。定理 7.28表明，对于 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{K})$ 的一个表示，$\mathcal{E}_{d_\infty}$-有界是否蕴含粗有界?

对于 $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$ 的表示，是否也成立?

从现在起，G表示 $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$。当 $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$ 中的元素在 T 上的作用是双曲型时，称该元素为双曲型。

命题 7.33（有界保持且粗适当）。 考虑一个非初等连续表示$\rho\colon \mathrm{PGL}_2(\mathbb{K}) \to \mathrm{Isom}(\mathbf{H}^\kappa)$。

存在一个 $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$-等变边界映射 $\varphi\colon \partial T \to \partial\mathbf{H}^\kappa$，它是单射。
此外，$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$在$\mathbf{H}^\kappa$ 上的作用是$\mathcal{E}_{d_\infty}$-有界保持的。

证明。令 $\xi \in \partial T = \mathbb{K}\mathbf{P}^1$，并考虑它在 $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$ 中的稳定子 G_ξ。我们在定理 7.24 中看到，$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$ 在 $\mathbb{K}\mathbf{P}^1$, 上传递作用，因此群 G_ξ 共轭于由相似变换 $\{A^\lambda\colon \ \lambda \in \mathbb{K}^\times\}$ 和平移变换 $\{R^\mu\colon \ \mu \in \mathbb{K}\}$ 生成的标准抛物子群 G_∞；特别地，它是可和的。因此，由于 ρ 的连续性，子群 $\rho(G_\xi) \subset \mathrm{Isom}(\mathbf{H}^\kappa)$ 是可和的。于是（如同定理 7.15 的证明中那样），它必定满足以下情况中的至少一种:

1. $\forall \xi \in \partial T$，群 $\rho(G_\xi)$ 在 $\mathbf{H}^\kappa$ 中固定一个点，

2. $\forall \xi \in \partial T$，群 $\rho(G_\xi)$ 稳定一条测地线，3. $\forall \xi \in \partial T$，
群 $\rho(G_\xi)$ 在 $\partial \mathbf{H}^\kappa$ 中固定一个点

并且我们将证明（对于 $\xi = \infty$），情形 1 和情形 2 都不可能发生，因此只有情形 3 会发生。

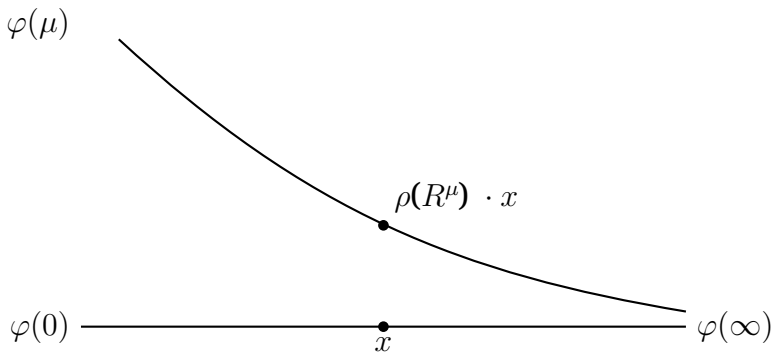
第一种情形将意味着，如定理7.15中所示，$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$ 在 $\mathbf{H}^\kappa$中有一个不动点。注意，若 $\rho(G_\infty)$ 在 0 或 ≥ 3 个不动点位于 $\partial \mathbf{H}^\kappa$中，那么它必定在 $\mathbf{H}^\kappa$中有一个不动点。因此，只需证明 $\rho(G_\infty)$ 的不动点集的基数不等于 2。

反设 $\rho(G_\infty)$ 恰有两个不动点 $\xi_1, \xi_2 \in \partial \mathbf{H}^\kappa$，且在 $\mathbf{H}^\kappa$ 中没有不动点。特别地，所有 A^λ 都是椭圆型或双曲型。固定 $\mu \in \mathbb{K}^\times$，并考虑满足 $|\lambda| \to \infty$ 的 $\lambda \in \mathbb{K}$ 序列。我们有 $A^{\lambda^{-1}} R^\mu A^\lambda = \left[\begin{smallmatrix} 1 & \mu/\lambda \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] \to \mathbf{1}$，因此由 ρ 的连续性可得$\rho(A^{\lambda^{-1}})\rho(R^\mu)\rho(A^\lambda) \to \mathbf{1}$。由于长度函数在共轭下不变且连续，我们有 $\ell(\rho(R^\mu)) = 0$，因此 $\rho(R^\mu)$ 是椭圆型或抛物型，并且其类型与 μ 无关。由于$\rho(G_\infty)$ 在 $\partial \mathbf{H}^\kappa$ 中恰有两个不动点，唯一的可能性是 R^μ 为椭圆型，因此固定测地线 (ξ_1, ξ_2) 上的每一个点。若所有 A^λ 都是椭圆型，那么测地线 (ξ_1, ξ_2) 将被 $\rho(G_\infty)$ 逐点固定，矛盾。因此存在 $\lambda \in \mathbb{K}^\times$，使得 $\rho(A^\lambda)$ 为双曲型，故以 $\{\xi_1, \xi_2\}$ 为一对不动点。由于 $A^\lambda \in G_0$ 也如此，点 ξ_1, ξ_2 在 $\partial \mathbf{H}^\kappa$ 中也被 $\rho(G_0)$ 固定。最后，由于 G_∞ 在 $\mathbb{K}\mathbf{P}^1 \setminus \{\infty\}$ 上传递作用，点 ξ_1, ξ_2 被 $\mathbf{PGL}_2(\mathbb{K})$ 固定。这与 $\mathbf{PGL}_2(\mathbb{K})$ 在 $\mathbf{H}^\kappa$ 上作用的非初等性矛盾。

这证明，对于所有 $\xi \in \partial T$，群 $\rho(G_\xi)$ 在 $\mathbf{H}^\kappa$ 中没有不动点，并且有一个唯一的不动点，记作 $\varphi(\xi) \in \partial \mathbf{H}^\kappa$。因此，我们定义了边界函数 $\varphi\colon \xi \in \partial T \mapsto \varphi(\xi) \in \partial \mathbf{H}^\kappa$，它是 ρ-等变的。由于 G 在 ∂T 上二重传递地作用，群 $\rho(G)$ 在像 $\varphi(\partial T)$ 上二重传递地作用，因此映射 φ 必定是单射或常值映射；但若它是常值映射，则 ρ 将有一个无穷远处的全局不动点，这与非初等性矛盾，所以 φ 是单射。

上三角矩阵子群 G_∞ 与下三角矩阵子群G_0 的交是对角矩阵群 $\{A^\lambda\colon \lambda \in \mathbb{K}^\times\}$，因此 $\rho(A^\lambda)$ 稳定测地线 $(\varphi(\infty)\ \varphi(0))$，且其由椭圆型或双曲型元素组成。定义函数$\Xi\colon \mathbb{K}^\times \to \mathbb{R}$，使得 $\lambda \mapsto s \cdot \ell(\rho(A^\lambda))$，其中符号 $s \in \{+1, -1\}$ 仅在$\rho(A^\lambda)$ 是双曲型时才需要定义：当 $s = +1$ 若 $\rho(A^\lambda)^+ = \varphi(\infty)$，而当 $s = -1$ 若 $\rho(A^\lambda)^+ = \varphi(0)$。此函数$\Xi$ 是一个同态（作为同态 $\lambda \in \mathbb{K}^\times \mapsto A^\lambda \in A$ 和 $s\ell\colon \rho(A) \to \mathbb{R}$ 的复合）。下面证明其核等于单位元子群 $\mathcal{O}^\times \subset \mathbb{K}^\times$。

固定 $\mu \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ 和 $x \in (\varphi(0)\ \varphi(\infty))$。由 ρ的连续性可知，对所有 $\varepsilon > 0$，存在 $M > 0$，使得若 $\lambda \in \mathbb{K}^\times$ 具有 $|\lambda| > M$，则 $\mathsf{d}(\rho(A^{\lambda^{-1}} R^\mu A^\lambda)x, x) < \varepsilon$。等距变换 $\rho(R^\mu)$将测地线 $(\varphi(\infty)\ \varphi(0))$映射到测地线 $(\varphi(\infty)\ \varphi(\mu))$。特别地，对于固定的 $\mu \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$，以 $y \in (\varphi(\infty)\ \varphi(0))$为变量的函数 $y \mapsto \mathsf{d}(\rho(R^\mu)y, y)$ 是单调的，其极限为：当 $y \to \varphi(\infty)$ 时，$\mathsf{d}(\rho(R^\mu)y, y) \to 0$；当 $y \to \varphi(0)$ 时，$\mathsf{d}(\rho(R^\mu)y, y) \to +\infty$。



设 $\lambda \in \mathbb{K}^\times \setminus \mathcal{O}^\times$。经过反演后，不妨设 $|\lambda| > 1$，因此当 $n \in \mathbb{N}$ 趋于 $+\infty$ 时，$|\mu/\lambda^n|$ 趋于 0。我们有 $\mathsf{d}(\rho(R^{\mu/\lambda^{-n}})x,\ x) = \mathsf{d}(\rho(A^{\lambda^{-n}} R^\mu A^{\lambda^n})x,\ x) = \mathsf{d}(\rho(R^\mu)\rho(A^{\lambda^n})x,\ \rho(A^{\lambda^n})x)$，由 ρ 的连续性，左端趋于 $\mathsf{d}(\mathbf{1} \cdot x,\ x) = 0$。因此，应用前面的

由关于 $y_n = \rho(A^{\lambda^n})x$的观察，我们推得当 $n \in \mathbb{N}$ 趋于 $+\infty$时， $\rho(A^{\lambda^n})x$ 趋于 $\varphi(\infty)$；因此 $\rho(A^\lambda)$是双曲型的，其（吸引、排斥）不动点为 $(\varphi(\infty)\ \varphi(0))$。

设 $\lambda \in \mathcal{O}^\times$。反设 $\ell(\rho(A^\lambda)) > 0$，因此通过取反 λ，我们也可以假设，当 $n \in \mathbb{N}$ 趋于 $+\infty$ 时，有 $\rho(A^\lambda)^n x \to \varphi(\infty)$。于是，根据前面的观察，我们有 $\mathsf{d}(\rho(R^\mu)\rho(A^\lambda)^n x, \rho(A_\lambda)^n x) \to 0$。然而，$\mathsf{d}(\rho(R^\mu)\rho(A_\lambda)^n x, \rho(A_\lambda)^n x) = \mathsf{d}(\rho(R^{\mu/\lambda^n})x, x)$，并且由于 $|\mu/\lambda^n| = |\mu|$，我们有 $\{\rho(R^{\lambda^n\mu})$：根据定理 7.28，$n \in \mathbb{N}\}$ 是粗有界的，因此 $\mathsf{d}(\rho(R^{\mu/\lambda^n})x, x)$ 有界，因为 $n \to \infty$。这就导出了矛盾。

到目前为止，我们已经证明 Ξ 可经由商 $\mathbb{K}^\times \bmod \mathcal{O}^\times \to \mathbb{R}$ 分解为一个函数，该函数在如下意义下是适当的：$|\lambda| \to \infty \implies |\ell(\rho(A^\lambda))| \to \infty$。此外，我们还看到，若 $|\lambda| > 1$，则 $\rho(A^\lambda)^+ = \varphi(\infty)$；若 $|\lambda| < 1$，则 $\rho(A^\lambda)^+ = \varphi(0)$。因此，存在一个适当的递增函数 $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$，使得 $\Xi(\rho(A^\lambda)) = f(|\lambda|)$，故 $f\colon (\mathbb{R}_{>0}, \times) \to\to (\mathbb{R}, +)$ 是一个群同态。这样的递增同态 f 必连续，因此存在 $c > 0$使得 $f = c\log$。特别地，对所有 $M > 0$，集合 $A_M = \{A^\lambda\colon \lambda, \lambda^{-1} \in \mathcal{O}_M\}$ 在 $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^\kappa)$ 中经 ρ 映射后的像有界。

最后，$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$ 的嘉当分解为 $= KAK$ with $K = \mathrm{PSL}_2(\mathcal{O})$。由于根据定理 7.28，$K$ 是粗有界的，我们由前一段推得，子集 $B \subset PGL_2(\mathbb{K})$ 是 $\mathcal{E}_{d_\infty}$- 有界的（即任意点 $x \in T$ 在 B 作用下的位移都有界），当且仅当存在 $M > 0$ 使得 $B \subset KA_MK$。这证明了 $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$ 在 $\mathbb{H}^\kappa$ 上的 ρ-作用是 $\mathcal{E}_{d_\infty}$-有界保持的。 □

$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$ 情形下定理 7.17 的证明。定理 7.24 和定理 7.26 表明，$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$ 在 (T, d_∞) 上的作用满足定理 7.11；定理 7.33 表明，非初等表示 $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{K}) \to \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^\kappa)$ 是 $\mathcal{E}_{d_\infty}$- 有界保持的，因此定理 7.14 适用。 □

参考文献

[BCR84] Christian Berg、Jens Peter Reus Christensen 和 Paul Ressel。《半群上的调和分析》，《数学研究生教材》第100卷。施普林格出版社，纽约，1984。正定函数及相关函数理论。26, 27, 28, 40[BdlHV08] Bachir Bekka、Pierre de la Harpe 和 Alain Valette。《卡日丹性质》，《新数学专著》第11卷。剑桥：剑桥大学出版社，2008。36[Bes88] Mladen Bestvina。双曲空间的退化。《杜克数学杂志》，56(1):143–161，1988。8, 21, 41, 44[BF06] Jeffrey Brock 和 Benson Farb。Teichmüller空间的曲率与秩。《美国数学杂志》，128(1):1–22，2006。12[BH99] Martin R. Bridson 和 André Haefliger。《非正曲率度量空间》，《数学科学基本原理》第319卷。 /数学科学基本原理/施普林格出版社，柏林，1999。13, 17, 20, 25, 46[BIM05] Marc Burger、Alessandra Iozzi 和 Nicolas Monod。树到双曲空间的等变嵌入。《国际数学研究通报》，2005(22):1331–1369，2005。6, 9, 42, 60, 61[Blu70] L. M. Blumenthal。《距离几何理论与应用》。第2版。纽约布朗克斯：切尔西出版公司。XI，347页（1970）。1970。4, 27, 29[Bon86] Francis Bonahon。三维双曲流形的端部。《数学年刊》(2)，124(1):71–158，1986。21

[Bon88] Francis Bonahon。通过测地流研究Teichmüller空间的几何。《数学发明》，92(1):139–162，1988。12[Bou61] Nicolas Bourbaki。《交换代数》。第1至7章。Hermann出版社，巴黎，1961。67[Bou83] Nicolas Bourbaki。《交换代数》。第8、9章。Masson，巴黎，1983。67[Bou96] Marc Bourdon。($CAT(-1)$空间边界上的交比。《高等科学研究所数学出版物》，83:95–104，1996。6, 15, 20, 58[Can11] Serge Cantat。曲面双有理变换群。《数学年刊》(2)，174(1):299–340，2011。24[CDP90] M. Coornaert、T. Delzant 和 A. Papadopoulos。《几何与群论》，《数学讲义》第1441卷。施普林格出版社，柏林，1990。《Gromov双曲群》。 [Gromov 双曲群],附英文摘要。17[CG24] Gilles Courtois 和 Antonin Guilloux。豪斯多夫维数、发散的Schottky表示与无限维双曲空间，2024。9, 30, 44[CLdC13] Serge Cantat、Stéphane Lamy 和 Yves de Cornulier。克雷莫纳群中的正规子群。《数学学报》，210(1):31–94，2013。24[CM87] Marc Culler 和 John W. Morgan。R 树上的群作用。《伦敦数学学会会刊》(3)，55(3):571–604，1987。55[d'A94] 亚历山大的欧几里得。《几何原本》。第二卷。《科学史丛书》。[科学史图书馆] 法国大学出版社，巴黎，1994。第五至第六卷：比例与相似。第七至第九卷：算术。 [第五至第六卷：比例与相似。第七至第九卷：算术],译自 I. L. Heiberg 的文本 [Johan Ludwig Heiberg] 并由 Bernard Vitrac 作评注。22[Dav24] Isobel Davies。通过边界刻画树与双曲空间。《几何学杂志》，115(2):论文编号27，17，2024。54[DS25] Bruno Duchesne 和 Christopher-Lloyd Simon。内切半径最大的双曲单纯形，2025。9, 21[DSU17] Tushar Das、David Simmons 和 Mariusz Urbański。《Gromov双曲度量空间中的几何与动力学：着重讨论非恰当情形》，《数学调查专著》第218卷。罗得岛州普罗维登斯：美国数学会（AMS），2017。13, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 24, 25, 30, 38, 42, 43, 51[DT25] Bruno Duchesne 和 Matteo Tarocchi。Basilica、Rabbit和Airplane Julia集的同胚群，2025。61[Duc13] Bruno Duchesne。有限秩的无限维非正曲率对称空间。《国际数学研究通报》，2013(7):1578–1627，2013。43[Duc23] Bruno Duchesne。无限维双曲空间等距变换群的波兰拓扑。《群、几何与动力学》，17(2):633–670，2023。43, 57, 58, 61

[Eva08] Steven N. Evans。《概率与实树》，数学讲义第1920卷。Springer，柏林，2008年。本文收录了2005年7月6日至23日在Saint-Flour举行的第35届概率论暑期学校的讲稿。14[FH74] Jacques Faraut和Khélifa Harzallah。齐性空间上的不变希尔伯特距离。《格勒诺布尔傅里叶研究所年刊》，24(3):xiv，171–217，1974年。36[Fur02] Alex Furman。负曲率流形与群的粗几何视角。载于《动力学与几何中的刚性》。本文集收录了在英国剑桥艾萨克·牛顿数学科学研究所举行的“遍历理论、几何刚性与数论”项目的成果，项目时间为2000年1月5日至7月7日，页149–166。柏林：Springer，2002年。11[GdlH90] Etienne Ghys和Pierre de la Harpe，编。《关于Mikhael Gromov所述的双曲群》（On the hyperbolic groups à la M. Gromov），数学进展第83卷。美国马萨诸塞州波士顿：Birkhäuser，1990年。14[GGT18] Alejandra Garrido、Yair Glasner和Stephan Tornier。树的自同构群：一般性质与指定的局部作用。载于《局部紧群的新方向》，页92–116。剑桥：剑桥大学出版社，2018年。62[GM24] Mario Gómez和Facundo Mémoli。四点条件：对托勒密不等式的一种初等热带化。《美国数学月刊》，131(3):187–203，2024年。29, 30, 35[Gol86] William M. Goldman。李群上的不变函数与曲面群表示的哈密顿流。《数学发明》，85(2):263–302，1986。10[Gro93] M. Gromov。无限群的渐近不变量。载于《几何群论》第2卷（Sussex，1991），伦敦数学学会讲义丛书第182卷，页1–295。剑桥：剑桥大学出版社，1993年。11[Ham09] Ursula Hamenstädt。有界上同调与交比。载于《群论与计算机科学中的图极限》，页41–57。洛桑：EPFL出版社，2009年。22[How79] Edward Howorka。关于某些团图的度量性质。《组合理论杂志B辑》，27(1):67–74，1979年。11[HP21] Yi Huang和Athanase Papadopoulos。单孔环面上的最优Lipschitz映射与Teichmüller空间的Thurston度量理论。《几何专题》，214:465–488，2021年。12[Iva97] N. Ivanov。曲线复形与Teichmüller空间的自同构。国际数学研究通知，14:651–666，1997年。12[JV84] Pierre Julg和Alain Valette。($SL_2(\mathbb{Q}_p)$的K理论可和性，以及在关联树上的作用。《泛函分析杂志》，58:194–215，1984年。40[Kar24] Konstantinos Kartas。具有全剩余映射的赋值域。《数理逻辑杂志》，24(03):2450005，2024年。67[Kim01] Inkang Kim。秩一对称空间及其乘积的标记长度刚性。《拓扑》，40(6):1195–1323，2001年。3, 7, 15, 18, 24, 38, 49[Lab08] Fran¸cois Labourie。交比、Anosov表示与Teichmüller空间上的能量泛函。《高等师范学校科学年刊》（第4辑），41(3):437–469，2008年。6, 15

[LM09] François Labourie和Gregory McShane。高阶Teichmüller-Thurston理论中的交比与恒等式。《杜克数学杂志》，149(2):279–345，2009年。15[Luo00] Feng Luo。曲线复形的自同构。《拓扑》，39(2):283–298，2000年。12[MM99] Howard A. Masur和Yair N. Minsky。曲线复形的几何。I. 双曲性。《数学发明》，138(1):103–149，1999年。12[MO93] John W. Morgan和Jean-Pierre Otal。双曲结构变化时曲面上闭测地线的相对增长率。《瑞士数学评论》，68(2):171–208，1993年。55[Mon20] Nicolas Monod。关于双曲型函数的札记。《比利时数学学会公报——西蒙·斯蒂芬》，27(2):167–202，2020年。6, 32, 33, 42[Mor86] John W. Morgan。树上的群作用与SO(n, 1)表示共轭类空间的紧化。《拓扑》，25(1):1–33，1986年。3, 8, 44, 55[MP14] Nicolas Monod和Pierre Py。一种双曲空间的奇异变形。《美国数学杂志》，136(5):1249–1299，2014年。60[MP19] Nicolas Monod和Pierre Py。莫比乌斯群的自表示。《亨利·勒贝格年刊》，2:259–280，2019年。3, 9, 28, 29, 30, 31, 32, 60, 61[MS84] John W. Morgan和Peter B. Shalen。赋值、树与双曲结构的退化。I。《数学年刊》（第2辑），120:401–476，1984年。8, 41, 55[MS12] Renlong Miao和Viktor M. H. Schröder。双曲空间与托勒密莫比乌斯结构。预印本，arXiv:1210.5133 [math.MG] (2012)，2012年。6, 35[MW95] Howard A. Masur和Michael Wolf。Teichmüller空间不是Gromov双曲的。《芬兰科学院年刊》，A辑I，数学，20(2):259–267，1995年。12[Nic19] Bogdan Nica。强双曲性的两个应用。《京都数学杂志》，59(2)，2019年。11[NŠ16] Bogdan Nica和Ján Špakula。强双曲性。《群、几何与动力学》，10(3):951–964，2016年。11, 13, 14, 17, 20, 35[OR18] Eduardo Oregón-Reyes。Gromov双曲空间中等距变换集的性质。《群、几何与动力学》，12(3):889–910，2018年。16, 31[OR23] Eduardo Oregón-Reyes。双曲群上的度量结构空间。《伦敦数学学会杂志》（第2辑），107(3):914–942，2023年。10, 11[Ota90] Jean-Pierre Otal。负曲率曲面的标记长度谱。《数学年刊》（第2辑），131(1):151–162，1990年。49[Ota92] Jean-Pierre Otal。负曲率流形测地线空间的辛几何。（On the symplectic geometry of the space of geodesics of a manifold with negative curvature）。《伊比利亚美洲数学评论》，8(3):441–456，1992年。6, 15

[Ota15] J.-P. Otal. Culler、Morgan 和 Shalen 之后的表示空间紧化。载于《Berkovich 空间及其应用》，《数学讲义》2119 卷，第 367–413 页。Springer，查姆，2015年。44[Par00] Anne Parreau. 仿射建筑：利用范数构造并研究等距变换。载于《晶体群及其推广 II：研讨会论文集》，鲁汶天主教大学科特赖克校区，比利时，1999年5月26日至28日，第 263–302 页。罗得岛州普罗维登斯：美国数学会（AMS），2000年。64[Par23] Anne Parreau. 仿射建筑：通过范数构造并研究等距变换。《创新交几何》，20(2-3):471–517，2023年。64, 65[Pau87] Frédéric Paulin. 等变 Gromov 拓扑、双曲结构与实树。博士论文，巴黎南大学，1987年12月。51, 52, 53, 54[Pau88] Frédéric Paulin. 等变 Gromov 拓扑、双曲结构与实树。《数学发明》，94(1):53–80，1988。3, 8, 41, 44, 51, 54[Pau89] Frédéric Paulin. $\mathbb{R}$-树上的 Gromov 拓扑。《拓扑学及其应用》，32(3):197–221，1989年。51, 55[Rat19] John G. Ratcliffe.《双曲流形基础》，《数学研究生教材》第 149 卷。Springer，查姆，第三版， [2019] ©2019。29[Ros09] Christian Rosendal. Bergman 性质的拓扑版本。《数学论坛》，21(2):299–332，2009年。57[Ros17] Christian Rosendal. Banach 空间与拓扑群的等变几何。《数学论坛：西格玛》，5:62，2017年。编号/编号 e22。61[Ros21] Christian Rosendal. 拓扑群的粗几何，《剑桥数学丛书》第 223 卷。剑桥：剑桥大学出版社，2021年。56, 57[Ros23] Christian Rosendal. 拓扑群的几何化问题。KIAS Springer 数学系列。Springer，2023年。56, 62[Rou23] Guy Rousseau. 欧几里得建筑。载于《几何与群作用》，《欧洲数学会数学丛书》第 35 卷。柏林：欧洲数学会（EMS），2023年。64, 65[Sim23] Christopher-Lloyd Simon. $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{K})$ 中的共轭类。《数学研究报告》，4:23–45，2023年。arXiv 版本。22[Sko96] R. Skora. 曲面的分裂。《美国数学会杂志》，9(2):605–616，1996年。8, 55[Thu22] William P. Thurston. 双曲曲面之间的最小伸张映射。载于《William P. Thurston 文集及评述》第 I 卷：《叶状结构、曲面与微分几何》，第 533–585 页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯， [2022]©2022。1986 年预印本，1998 年电子版。10[Val70] Joseph E. Valentine. 双曲几何中托勒密定理的类比及其逆定理。《太平洋数学杂志》，34:817–825，1970。35[Wie77] Norbert J. Wielenberg. 离散莫比乌斯群：基本多面体与收敛。《美国数学杂志》，99(4):861–877，1977年。51[Xu24] David Xu. 到无限维双曲空间等距变换群的凸共紧表示，2024年。11, 55, 56