arXiv:2603.03869v1 [math.CA] 4 Mar 2026

用利普希茨函数捕捉度量值映射的跳跃

DMITRIY STOLYAROV 和 ALEXANDER TYULENEV

ABSTRACT. 根据 V. Bakhtin、R. Oleinik 和第二位作者的近期结果，对于度量空间 $\mathcal{X}$，连续映射 $\gamma\colon [a,b]\to\mathcal{X}$是有界变差映射，当且仅当对于每个 Lipschitz 函数$f\colon \mathcal{X}\to\mathbb{R}$，$f\circ\gamma$ 都是有界变差函数。本文表明，连续性假设至关重要：对于许多有趣的度量空间，若不对 γ作连续性假设，就不存在上述刻画的类似结果。这些有趣的例子包括：ℓ_2、无限度量树和 Laakso 型空间。然而，对于超度量空间，即使不作任何连续性假设，上述刻画仍然成立。

1. INTRODUCTION

在开创性论文 [1] 中，L. Ambrosio 提出了取值于度量空间的有界变差映射理论。该方法依赖于与 Lipschitz 函数作复合。给定非空开集 $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ 以及非空、可分且局部紧的度量空间 $\mathcal{X}=(\mathcal{X},\ \rho)$，若博雷尔映射 $\gamma\colon\Omega\to\mathcal{X}$满足：存在 Ω 上的有限博雷尔测度μ_γ，使得对每个 Lipschitz 函数$f\colon\mathcal{X}\to\mathbb{R}$，复合函数 $f\circ\gamma$都是有界变差的标量值函数，则称其为有界变差映射，并且

$$|D(f\circ\gamma)|(B)\le L_f\mu_\gamma(B)\quad\text{for each Borel set}\quad B\subset\Omega, \tag{1.1}$$

其中，$D(f\circ\gamma)$是 $f\circ\gamma$的分布梯度，L_f是 f的全局利普希茨常数（定义见下文 (2.2)），带符号测度 $D(f\circ\gamma)$的绝对值表示其全变差测度。

在一维情形 $\Omega=(a,\ b)$ 中，Ambrosio 的方法与经典方法一致，详情见 [1] 。由于本文只讨论区间上的映射，因此回顾可追溯至 19 世纪的有界变差“一维映射”的经典定义会很有帮助。

设 a 和 b 为满足 $a<b$的实数。令 $\mathfrak{T}$ 表示所有满足 $a=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_N=b$ 的有限有序元组 $\mathrm{T}:=\{t_i\}_{i=0}^N\subset[a,b]$ 的集合。给定度量空间 $\mathcal{X}=(\mathcal{X},\ \rho)$，若 $\gamma\colon[a,b]\to\mathcal{X}$是一个有界变差映射，则记作 $\gamma\in$

Date：2026年3月5日。*Key words and phrases.* 度量空间，有界变差映射。D. Stolyarov 的研究得到俄罗斯联邦科学与高等教育部的资助（协议编号 075–15–2025–343）。

BV($[a,b]$, $\mathcal{X}$)，如果

$$\mathrm{V}_\gamma := \sup_{\mathrm{T}\in\mathfrak{T}} \sum_{i=1}^{N} \rho(\gamma(t_{i-1}),\gamma(t_i)) \tag{1.2}$$

有限。类似地， $\gamma\colon\ [a,b]\to\mathcal{X}$是一个具有有界 *Lipschitz* 变差的映射， $\gamma\in$BLV($[a,b],\mathcal{X}$), 前提是

$$\mathrm{LV}_\gamma := \sup\left\{\mathrm{V}_{f\circ\gamma}\,\middle|\, f\colon\ \mathcal{X}\to\mathbb{R},\ L_f\leqslant 1\right\} \tag{1.3}$$

有限。显然，$\mathrm{LV}_\gamma \leqslant \mathrm{V}_\gamma$。人们可能会想，是否存在合理的反向估计。在 $\mathcal{X}=\mathbb{R}^d$的情况下，根据对 f采用坐标投影的选择，可得 $\mathrm{V}_\gamma \leqslant d\,\mathrm{LV}_\gamma$ ；而根据对 f采用所有线性函数的选择，可得更好的估计 $\mathrm{V}_\gamma \lesssim \sqrt{d}\,\mathrm{LV}_\gamma$；相关解释见下文第 2.4 小节。记号 $A\lesssim B$ 表示存在一个常数 $C>0$ ，使得 $A\leqslant CB$ ，且该常数与某个参数无关；通常，这种独立性可从上下文中看出。例如，在上述估计中，该上界无维数依赖。

命题 1.1 （ [8]中定理 1.2 的简化版）。 设 $\mathcal{X}=(\mathcal{X},\rho)$ 是一个度量空间。那么，

$$\mathrm{V}_\gamma = \mathrm{LV}_\gamma \quad \textit{for each} \quad \gamma\in C([a,b],\mathcal{X}). \tag{1.4}$$

几乎在同一时间，V. Bakhtin [2]以完全不同的方法证明了命题 1.1 的一个稍弱版本。更具体地说，文献 [2] 证明了： $\gamma\in$BLV($[a,b]$, $\mathcal{X}$) $\cap\, C([a,b],\ \mathcal{X})$ 当且仅当 $\gamma\in$BV($[a,b]$, $\mathcal{X}$) $\cap\, C([a,b],\ \mathcal{X})$。该论文 [8] 还通过 Lipschitz 后复合刻画了 p-绝对连续的 $\mathcal{X}$值曲线， $p\in[1,\infty)$，并着重研究了这类映射的几何测度论性质。

本文旨在探讨 γ 不连续的情形。我们不考虑任何 Sobolev 或几何测度论背景，因为关于 BV 和 BLV 不连续映射的问题本身已经足够丰富。正如我们将看到的，对 $\mathcal{X}$ 几何性质的依赖要强得多。

在深入讨论不连续情形的细节之前，我们先简要、非正式地回顾一下命题 1.1 的证明所采用的主要策略。给定映射 $\gamma\colon\ [a,b]\to\mathcal{X}$，若对每个利普希茨函数 $f\colon\ \mathcal{X}\to\mathbb{R}$，都有 $f\circ\gamma\in$BV($[a,b]$, $\mathbb{R}$)，则可以证明，像集 $\Gamma:=\gamma([a,b])$ 的 1-豪斯多夫测度有限。接着，根据经典结果（见 [1]），集合 Γ 配备诱导度量后似乎是一个强可整度量空间。因此，可以充分运用经典几何测度论的工具（例如面积型公式），并设法将问题约化到“局部欧几里得情形”。此外，只需关注利普希茨函数的无穷小行为（即相对于 Γ 的利普希茨函数的雅可比矩阵）。正如我们将看到的，所有这些强大的工具都不适用于不连续情形。

定义 1.2. 给定 $\mathcal{X}=(\mathcal{X},\rho)$，我们称在 $\mathcal{X}$*Lipschitz* 函数能够捕捉跳跃，若对于任意映射 $\gamma\colon\ [a,b]\to\mathbb{R}$，只要 $\mathrm{LV}_\gamma<\infty$， γ 的全变差也有限。此类度量空间记为 $\mathcal{LCJ}$。

许多有趣的度量空间并不属于类 $\mathcal{LCJ}$。最简单的例子包括无限度量树、无限维巴拿赫空间和 Laakso 型空间。为了研究这一现象，我们考虑对 $\mathcal{LCJ}$-性质进行量化：

$$\mathrm{LCJ}(\mathcal{X}) = \inf\left\{\frac{\mathrm{LV}_\gamma}{\mathrm{V}_\gamma}\;\middle|\;\gamma \in \mathrm{BV}([a,b],\mathcal{X})\right\}. \tag{1.5}$$

显然，$\mathrm{LCJ}(\mathcal{X}) \in [0,1]$；若 $\mathrm{LCJ}(\mathcal{X}) > 0$，则 Lipschitz 函数能在 $\mathcal{X}$ 上捕捉跳跃，即 $\mathcal{X} \in \mathcal{LCJ}$。容易看出，$\mathrm{LCJ}(\mathbb{R}) = 1$，且 $\mathrm{LCJ}(\mathbb{R}^d) \gtrsim d^{-\frac{1}{2}}$；关于第二个不等式的解释，见第 2.4 小节。

除非另有说明，我们均在 $\mathbb{R}^d$ 上赋予标准欧几里得范数。本文的第一个主要结果如下。

定理 1.3。对于每个 $d > 1$,

$$\mathrm{LCJ}(\mathbb{R}^d) \lesssim d^{-\frac{1}{2}}(\log d)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.6}$$

推论 1.4。对于任意无限维巴拿赫空间 $\mathcal{X}$，$\mathrm{LCJ}(\mathcal{X}) = 0$。

上述推论或许会让人以为，空间的倍增性质可能与 $\mathcal{LCJ}$-性质有关。遗憾的是，事实并非如此。下面的第二个主要结果表明，存在一些非倍增度量空间，其中 Lipschitz 函数能够捕捉跳跃。关于一致不连通度量空间及其与超度量空间之间关系的信息，请参阅 [4] 的第 15 章；我们将在第 2 节中简要介绍这些内容。

定理 1.5. 设 $\mathcal{X}$ 是一致不连通的度量空间。那么，$\mathrm{LCJ}(\mathcal{X}) > 0$。

正如我们将从定理 1.5 的证明中看到的，这个界对于第 2.1 小节中一致不连通性的定义所涉及的参数是统一的。一旦接受了使用随机 Lipschitz 函数这一恰当思路，定理 1.5 的证明就相对简单。

另一方面，存在一些倍增度量空间，其中 Lipschitz 函数无法捕捉跳跃。Laakso 型空间最早在 [6] 中提出。它们是首批 Ahlfors Q-正则度量空间的例子，其中 $Q \geqslant 1$ 可以是任意的，并且满足 Poincaré 型不等式。这些空间是倍增的，但不能双 Lipschitz 嵌入到 $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$ 中。我们给出第三个主要结果。

定理 1.6. 存在一个 *Laakso* 空间 $\mathfrak{L}$，它不属于 $\mathcal{LCJ}$-类。

最后，我们考察最简单的度量树。这个例子非常有趣，因为它能够展示上述两种现象。

定理 1.7。设 $\mathcal{T}$ 为深度为 N 的二叉树，并赋予标准图度量。那么，

$$\mathrm{LCJ}(\mathcal{T}) \lesssim (\log N)^{-\frac{1}{2}}. \tag{1.7}$$

然而，若 $\mathcal{L}$ 表示其叶子集合，并赋予从 $\mathcal{T}$ 诱导的度量，那么，

$$\mathrm{LCJ}(\mathcal{L}) \gtrsim 1. \tag{1.8}$$

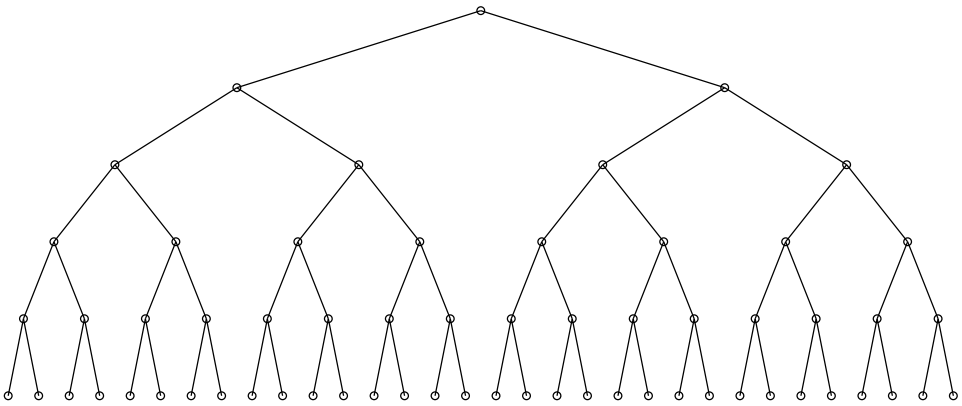


FIGURE 1. $N = 5$的二叉树。

定理 1.7 中的第二个断言由定理 1.5 推出，因为 $\mathcal{L}$ 可以赋予一种与标准图度量等价的超度量：两片叶子之间的距离等于其最近共同祖先的层数。

定理 1.6 的证明以及对 (1.7) 的论证稍微复杂一些。令人惊讶的是，这些证明的关键思想相同，都依赖于一个特殊的鞅及其正交性论证。在第 4 节中，我们先在一般度量空间的背景下阐述这一共同思想，然后再考察两个感兴趣的情形。

关于例子选择的评论。定理 1.3 表明，某些无限维空间可能不满足 $\mathcal{LCJ}$-性质。我们从度量空间的角度看待维数：非倍增空间是无限维的。更精巧的定理 1.6 表明，无限维并不一定是导致这种违背的原因。Laakso 空间是有限维的，然而它具有“高度弯曲”的性质，因为其局部测地线不唯一。度量树的例子表明，曲率也与 $\mathcal{LCJ}$-性质无关，因为树是非正曲率且 0-双曲的。有趣的是，希尔伯特空间中的任何度量加倍子集是否都具有 $\mathcal{LCJ}$-性质。将这类度量空间双 Lipschitz 嵌入欧几里得空间的问题可追溯至 [7] ，并已受到广泛关注。根据定理 1.5， $\mathcal{LCJ}$ 比嵌入欧几里得空间更弱。

本文其余部分安排如下：第 2 节介绍预备知识，包括记号和专门的背景内容；第 3 节包含与测度集中现象相关的论证，并给出定理 1.3 和推论 1.4 的证明；在第 4 节中，我们证明定理 1.6 和定理 1.7 的第一部分，相关论证基于正交性技术；最后，第 5 节通过构造一个特定的随机 Lipschitz 函数来证明定理 1.5。

我们谨此感谢 Roman Karasev 提供写作建议，并感谢 Mikhail Lifshits 就与定理 1.5 表述相关的超度量空间问题提供建议。

2. Preliminaries and notation

2.1. 度量空间。 在 $\mathcal{X}=(\mathcal{X},\rho)$ 中，球 $B_r(x)$ 始终指以给定点 $x\in\mathcal{X}$ 为中心、半径为 $r>0$ 的闭球。对于每个 $x\in\mathcal{X}$ 和 $r>0$，我们用 $N_r(x)\in\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$ 表示覆盖 $B_r(x)$ 所需的半径为 $r/2$ 的球的最小数量。若 $\mathcal{X}$ 度量加倍，则

$$\sup_{x\in\mathcal{X}}\sup_{r>0}N_r(x)<+\infty. \tag{2.1}$$

给定非空度量空间 $\mathcal{X}=(\mathcal{X},\ \rho)$ 和 $\mathcal{Y}=(\mathcal{Y},\ \mathrm{d})$，定义映射 $F\colon\ \mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ 的全局利普希茨常数如下：

$$L_F=\sup_{x_1\neq x_2}\frac{\mathrm{d}(F(x_1),F(x_2))}{\rho(x_1,x_2)}. \tag{2.2}$$

若 $L_F\leqslant L$，则称 F 是 L-利普希茨的。从$\mathcal{X}$到 $\mathcal{Y}$的所有 L-利普希茨映射构成的集合记为 $\mathrm{LIP}_L(\mathcal{X},\ \mathcal{Y})$。

沿用 [4] 的说法，若存在常数 $c>0$，使得对于每个 $x\in\mathcal{X}$ 和 $r>0$，都能找到一个闭集 A，满足 $B_{cr}(x)\subset A\subset B_r(x)$ 且 $\mathrm{dist}(A,\ \mathcal{X}\setminus A)\geqslant cr$，则称度量空间 $\mathcal{X}=(\mathcal{X},\ \rho)$ 是一致不连通的。我们还回顾一下，若集合$\mathcal{X}$上的度量 ρ' 满足：对于所有三元组 $x,\ y,\ z\in\mathcal{X}$，都有 $\rho'(x,\ z)\leq\max\{\rho'(x,\ y)\ \rho'(y,\ z)\}$，则称其为超度量。超度量空间是一致不连通的。

命题 2.1（命题 15.7，见 [4]）。给定一个一致不连通度量空间 $\mathcal{X}=(\mathcal{X},\ \rho)$，存在 $\mathcal{X}$ 上的超度量 ρ' 以及常数 $C>0$，使得

$$\frac{1}{C}\rho'(x,y)\leq\rho(x,y)\leq C\rho'(x,y)\quad \textit{for all}\quad (x,y)\in\mathcal{X}\times\mathcal{X}\,. \tag{2.3}$$

2.2. 鞅。 如前所述，我们将使用初等概率论的若干部分。虽然我们假定读者熟悉独立同分布随机变量的概念，但提供一些鞅工具似乎是可取的；关于一般鞅理论，我们也广泛参考 [9] 的第七章。我们固定一个概率空间（Ω $\mathcal{F}$，P）。设 $\mathcal{F}_0\subset\mathcal{F}_1\subset\mathcal{F}_2\subset\ldots$是 $\mathcal{F}$的 σ-子域的一个递增（可能有限）序列。为简单起见，假定所有这些 σ-域都是有限的。换言之，我们有将Ω划分为有限多个部分的一列划分，并且该序列在如下意义下递增：随着 n 增大，这些划分提供更多信息。回想一下，划分中的集合称为原子，它们自然对应于 σ-域中的不可分元素。将 $\mathcal{F}_n$ 中所有原子的集合记为 $\mathcal{AF}_n$。随机变量序列 $M_0,\ M_1,\ \ldots\ldots$ 称为鞅，只要它满足两个要求：每个 M_n 是 $\mathcal{F}_n$-可测的，并且 $\mathbb{E}\left(M_{n+1}\mid\mathcal{F}_n\right)=M_n$。我们将使用记号

$$dM_n=M_n-M_{n-1},\qquad n\in\mathbb{N}, \tag{2.4}$$

表示鞅差序列。如果 $\omega\in\mathcal{AF}_n$，则函数 $dM_{n+1}|_\omega$ 取有限个值且均值为零。可以验证，dM_n 与 dM_m 在如下意义下正交：

$$\mathbb{E}(dM_n\cdot dM_m)=0,\qquad m\neq n. \tag{2.5}$$

最后，我们 称鞅 M 有界，若 $\sup_n \|M_n\|_{L_\infty} < \infty$；我们还定义

$$\|M\|_{L_p} = \sup_n \|M_n\|_{L_p}, \qquad 1 \leqslant p \leqslant \infty. \tag{2.6}$$

这个序列 ce $\|M_n\|_{L_p}$ 对任意 $p \geqslant 1$ 均单调不减；这由詹森不等式得出 y.

例 2.2。 设 $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ 是一个利普希茨函数。设 $\mathbb{D}_n$ 为由 $[0,1]$ 的第 n 代二进制子区间生成的 σ-域。考虑分段常数函数

$$M_n(t) = 2^n\Big(f(2^{-n}k) - f(2^{-n}(k-1))\Big), \quad t \in \Big[2^{-n}(k-1), 2^{-n}k\Big), \quad k = 1, 2, \dots, 2^n. \tag{2.7}$$

*The*这些函数构成一个鞅 M，适应于 $\mathbb{D}_n$，它还满足有界 d

$$\|M\|_{L_\infty} \leqslant L_f. \tag{2.8}$$

我们还注意到

$$dM_{n+1}(t) = \begin{cases} 2^n\big(2f(B) - f(C) - f(A)\big), & t \in \big[A, B\big); \\ 2^n\big(f(C) + f(A) - 2f(B)\big), & t \in \big[B, C\big), \end{cases} \tag{2.9}$$

其中 $A = 2^{-n}(k-1)$，$B = 2^{-n-1}(2k-1)$，以及 $C = 2^{-n}k$。因此，

$$\mathbb{E}|dM_{n+1}|\chi_{[2^{-n}(k-1),2^{-n}k)} = \Big|f(C) + f(A) - 2f(B)\Big|. \tag{2.10}$$

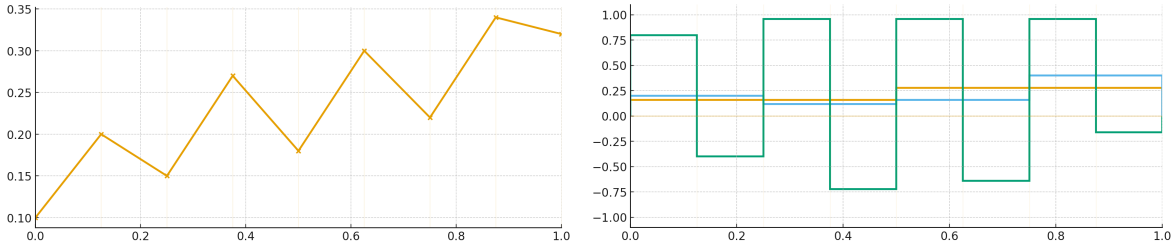


FIGURE 2. 一个利普希茨函数 f 以及通过式（2.7）由其构造的函数 M_1（橙色）、M_2（蓝色）和 M_3（绿色）。

我们以一个正交性论证结束鞅工具部分，该论证在定理 1.6 和界（1.7）的证明中发挥着关键作用。

引理 2.3。 设 M 为一个鞅。则，对每个 $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^{N} \|dM_n\|_{L_1} \leqslant \sqrt{N}\|M\|_{L_\infty}. \tag{2.11}$$

证明。 我们将上述正交性与柯西–施瓦茨不等式结合使用：

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{N} \|dM_n\|_{L_1} \leqslant \sum_{n=1}^{N} \|dM_n\|_{L_2} \\ &\leqslant \sqrt{N}\Big(\sum_{n=1}^{N} \|dM_n\|_{L_2}^2\Big)^{\frac{1}{2}} \overset{(2.5)}{\leqslant} \sqrt{N}\|M\|_{L_2} \leqslant \sqrt{N}\|M\|_{L_\infty}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

□

2.3. **Laakso 空间**。 这里我们简要回顾所谓 Laakso 型空间中最简单的一个例子。关于这些空间的文献浩如烟海。请参阅开创性论文 [6] 以及近期综述 [3] （其中也列出了相关参考文献）。我们将研究 Laakso 型空间的一个特例，并遵循 [7]中的论述。该度量空间将构造为一列有限度量空间 X_i 的极限，使得 $X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \ldots$。空间 X_0 是点对 $\{0,1\}$，将其视为单位区间的子集，并将单位区间与图 G_0等同。为构造 X_1，我们将单位区间分成四个等长区间，并用一个菱形替换中间的两个区间，如图 3 所示。我们为所得图 G_1 赋予自然图度量 $1/4$，并令 X_1 为其顶点集。注意， $X_0 \subset X_1$ 以自然方式成立。然后，我们用 G_1的一个副本替换 G_1 的每条边，得到新图 G_2，如图 3 所示，为其赋予自然图度量 $1/16$，并令 X_2 为其顶点集。我们再次以自然方式得到 $X_1 \subset X_2$。接着，我们用 G_1的一个副本替换 G_2 的每条边，为所得图 G_3 赋予标准图度量 $1/64$，依此类推。Laakso 空间是序列 $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$的 Gromov–Hausdorff 极限。可以验证，所得度量空间是倍增的。我们也将在记号中使用相应的图 G_i，因为我们研究的不仅是顶点 X_i，还包括 G_i 中的路径。我们将 G_i视为度量空间，其度量是自然图度量的 4^{-i}。

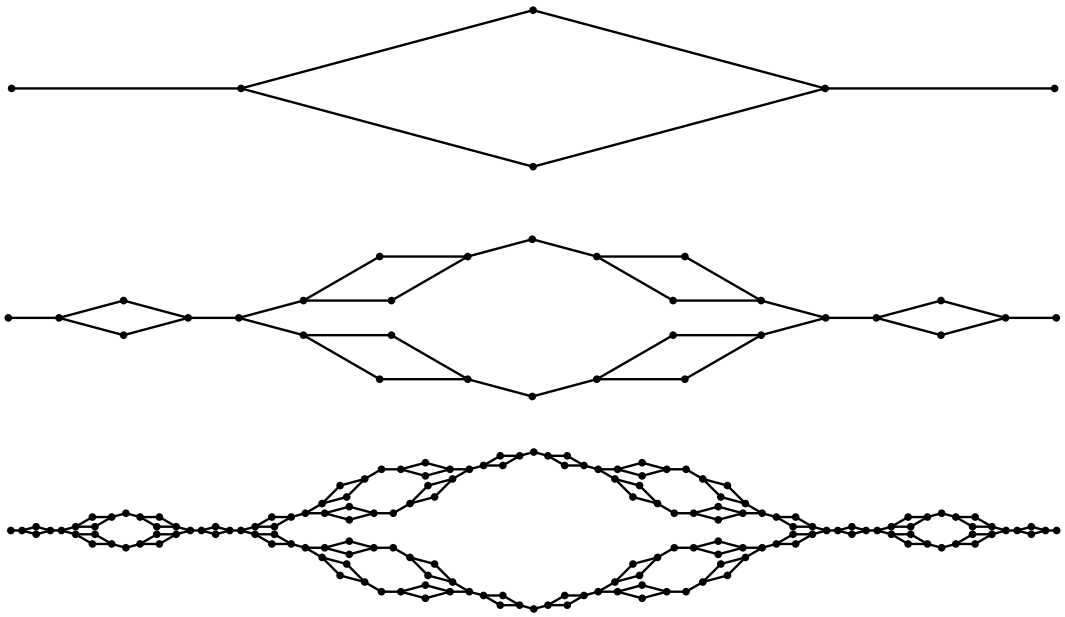


FIGURE 3. 图形 G_1、 G_2和 G_3。

2.4. 用线性函数捕捉上的跳跃 $\mathbb{R}^d$。 在本小节中，我们将证明此前所述的界 $\mathrm{LCJ}(\mathbb{R}^d) \gtrsim d^{-\frac{1}{2}}$。令 π_h为到直线 $\mathbb{R}\cdot h$的正交投影，该直线由向量 $h \in \mathbb{R}^d$张成；在 $h = e_j$的情况下，我们也将该投影记为π_j ，其中 j为第 $j = 1$个基向量，2，……， d。显然，只要 $\|h\| = 1$，就有 $\pi_h \in \mathrm{LIP}_1(\mathbb{R}^d)$。现在，我们来看看将 h 代入 (1.3) 中的 f 后能得到什么。首先，不等式

$$\mathrm{V}_\gamma \leqslant \sum_{j=1}^{d} \mathrm{V}_{\pi_j\circ\gamma} \tag{2.13}$$

可得以下界：$\mathrm{V}_\gamma \leqslant d\,\mathrm{LV}\gamma$，对任意 $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^d$ 均成立，这意味着 $\mathrm{LCJ}(\mathbb{R}^d) \geqslant d^{-1}$。注意，仅依靠坐标投影 π_j 无法得到更好的估计，因为对于映射

$$\gamma(t) = \sum_{j=1}^{[td]} e_j + \{td\}e_{[td]}, \qquad t \in [0,1], \tag{2.14}$$

我们有 $\mathrm{V}_\gamma = d$ 和 $\mathrm{V}_{\pi_j\circ\gamma} = 1$，对任意 $j = 1$，2，.. .，d 均成立；这里我们使用了记号 $[x]$ 和 $\{x\}$，分别表示数 $x \in \mathbb{R}$ 的整数部分和小数部分。

为证明一个更好的界，令 $\{\varepsilon_j\}_{j=1}^d$ 为中心化独立伯努利随机变量，并将 $h = d^{-\frac{1}{2}}\sum_j \varepsilon_j e_j$ 视为一个单位长度的随机向量。那么，对任意 $v \in \mathbb{R}^d$，我们有

$$\mathbb{E}|\pi_h[v]| = \mathbb{E}d^{-\frac{1}{2}}\Big|\sum_{j=1}^{d}\varepsilon_j v_j\Big| \asymp d^{-\frac{1}{2}}\|v\| \tag{2.15}$$

由欣钦不等式可得。因此，对任意映射 $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^d$，我们有

$$\mathbb{E}\,\mathrm{V}_{h\circ\gamma} \asymp d^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{V}_\gamma, \tag{2.16}$$

这意味着 $\mathrm{LCJ}(\mathbb{R}^d) \gtrsim d^{-\frac{1}{2}}$。请注意，我们在证明这一界时所用的唯一利普希茨函数是线性函数。能否通过使用更复杂的函数得到更好的界，从而弥合该界与定理 1.3 中得到的上界之间的差距?

3. What is given by the concentration of measure?

注 3.1。 对于巴拿赫空间 X，

$$\mathrm{LCJ}(X) = \inf\Big\{\mathrm{LV}_\gamma \,\Big|\, \gamma\colon [a,b] \to X, \mathrm{V}_\gamma = 1\Big\}. \tag{3.1}$$

根据定义 (1.5)， 证明归结为以下断言： 对于任意 $\gamma\colon [a,b] \to X$，存在一个映射 $\tilde{\gamma}\colon [a,b] \to X$，使得 $\mathrm{V}_{\tilde{\gamma}} = 1$ 且 $\mathrm{LV}\tilde{\gamma} = \mathrm{LV}_\gamma / \mathrm{V}\gamma$， 见(1.5)。为证明该断言，任取一个映射 $\gamma\colon [a,b] \to X$。那么，对于任意 $\lambda > 0$， 考虑映射

$$\gamma_\lambda(t) = \lambda\gamma(t), \qquad t \in [a,b]; \tag{3.2}$$

它是 γ 的膨胀。于是，$\mathrm{V}_{\gamma_\lambda} = \lambda\,\mathrm{V}\gamma$ 若令 $f_\lambda(x) = \lambda f(x/\lambda)$, 则$\mathrm{V}f_\lambda\circ\gamma_\lambda = \lambda\mathrm{V}f\circ\gamma$ 且 f_λ 是 1-*Lipschitz*，前提是 f 是。取 $\lambda = (\mathrm{V}\gamma)^{-1}$ 即可证明该断言。

由定理 *1.3* 推出推论 *1.4*。设 $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ 是 X 的线性子空间，且每个 X_n 都与 $\mathbb{R}^{2^n}$ 2-线性同构；根据 Dvoretsky 定理（例如参见 [5] 中的第 19 节），这样的空间确实存在。由定理 1.3 和注 3.1，存在一个单位变差映射 $\gamma_n\colon [0,1] \to X_n$，使得

$$\mathrm{LV}_{\gamma_n} \lesssim \sqrt{n} 2^{-n/2}. \tag{3.3}$$

构造这些映射的拼接

$$\tilde{\gamma}_{n+1}(t) = \begin{cases} \tilde{\gamma}_n(n) + \gamma_{n+1}(t) - \gamma_{n+1}(0), & t \in [n, n+1]; \\ \tilde{\gamma}_n(t), & t \in [0, n). \end{cases} \tag{3.4}$$

在这种情况下，$\mathrm{V}_{\tilde{\gamma}_n} = n$，并且我们有

$$\mathrm{V}_{f\circ\tilde{\gamma}_n} \leqslant \sum_{m\leqslant n} \sqrt{m} 2^{-\frac{m}{2}} \lesssim 1 \tag{3.5}$$

对任意 1-利普希茨函数 f, □

为了证明定理 1.3，我们需要稍微修改量 LCJ($\mathcal{X}$)。设 $\bar{x} = \{x_n\}_n$ 和 $\bar{y} = \{y_n\}_n$ 是度量空间 $\mathcal{X}$ 中的两个序列。令

$$\mathrm{V}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_n \rho(x_n, y_n) \tag{3.6}$$

并定义

$$\mathrm{LV}(\bar{x}, \bar{y}) = \sup\Big\{ \sum_n |f(x_n) - f(y_n)| \;\Big|\; f\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R} \text{ is a 1-Lipschitz function} \Big\}. \tag{3.7}$$

最后，令

$$\mathrm{LCJ}_{\mathrm{seq}}(\mathcal{X}) = \inf\Big\{ \frac{\mathrm{LV}(\bar{x}, \bar{y})}{\mathrm{V}(\bar{x}, \bar{y})} \;\Big|\; \bar{x}, \bar{y} \text{ are finite sequences in } \mathcal{X}, \quad \bar{x} \neq \bar{y} \Big\}. \tag{3.8}$$

引理 3.2. 对于任意度量空间 $\mathcal{X}$，我们有 $\mathrm{LCJ}^{\mathrm{seq}}(\mathcal{X}) = \mathrm{LCJ}(\mathcal{X})$。

证明。 证明自然地分为两部分。

第一部分是验证不等式 LCJ$^{\mathrm{seq}}$($\mathcal{X}$) $\leqslant$LCJ($\mathcal{X}$)。固定 $\varepsilon > 0$ 并选取 $\gamma\colon [0,1] \to \mathcal{X}$ 使得

$$\frac{\mathrm{LV}_\gamma}{\mathrm{V}_\gamma} \leqslant \mathrm{LCJ}(\mathcal{X}) + \varepsilon. \tag{3.9}$$

根据 v 的定义，存在一个有限递增序列 $\{t_i\}_{i=0}^N \subset [0,1]$，使得

$$\mathrm{V}_\gamma \leqslant (1+\varepsilon) \sum_{i=1}^N \rho(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)). \tag{3.10}$$

我们对 $i = 1,2,\ldots,N$ 令 $x_i := t_{i-1}$, $y_i := t_i$，并得到

$$\begin{aligned} \mathrm{V}(\bar{x}, \bar{y}) &\geqslant (1+\varepsilon)^{-1} \mathrm{V}_\gamma; \\ \mathrm{LV}(\bar{x}, \bar{y}) &\leqslant \mathrm{LV}_\gamma, \end{aligned} \tag{3.11}$$

由此得到

$$\mathrm{LCJ}_{\mathrm{seq}}(\mathcal{X}) \leqslant \frac{\mathrm{LV}(\bar{x},\bar{y})}{\mathrm{V}(\bar{x},\bar{y})} \leqslant (1+\varepsilon)\frac{\mathrm{LV}_\gamma}{\mathrm{V}_\gamma} \leqslant (1+\varepsilon)(\mathrm{LCJ}(\mathcal{X})+\varepsilon). \tag{3.12}$$

由于 ε 可以任意小，这就得到了所需的不等式。

在**第二部分**中，我们希望证明界 $\mathrm{LCJ}(\mathcal{X}) \leqslant \mathrm{LCJ}^{\mathrm{seq}}(\mathcal{X})$：对于任意一对 $(\bar{x},\bar{y})$ 有限序列以及给定的 $\varepsilon>0$，我们希望构造一个映射 $\gamma\colon\ [0,1]\to\mathcal{X}$ 使得

$$\frac{\mathrm{LV}_\gamma}{\mathrm{V}_\gamma} \leqslant \frac{\mathrm{LV}(\bar{x},\bar{y})}{\mathrm{V}(\bar{x},\bar{y})} + \varepsilon. \tag{3.13}$$

取一个较大的数 K。按如下算法定义所要寻找的映射 γ：它从 x_1 跳到 y_1 并往返 $2K$ 次，然后从 x_1 走到 x_2；从 x_2 跳到 y_2 并往返 $2K$ 次，然后从 x_2 走到 x_3；如此继续直到 x_N。于是，$\mathrm{V}_\gamma \geqslant 2K\,\mathrm{V}(\bar{x},\bar{y})$。

设 $f\in\mathrm{LIP}_1(\mathcal{X})$。那么，$f\circ\gamma$ 的全变差不超过

$$2K\,\mathrm{LV}(\bar{x},\bar{y}) + \sum_j \rho(x_j,x_{j+1}). \tag{3.14}$$

因此，

$$\frac{\mathrm{LV}_\gamma}{\mathrm{V}_\gamma} \leqslant \frac{\mathrm{LV}(\bar{x},\bar{y})}{\mathrm{V}(\bar{x},\bar{y})} + o(1), \quad \text{as} \quad K\to\infty, \tag{3.15}$$

通过选取足够大的 K，即可证明 (3.13) 成立。 □

推论 3.3. 还可以进一步将一对序列替换为 $\mathcal{X}\times\mathcal{X}$ 上的有限测度 μ:

$$\begin{aligned}&\mathrm{LCJ}(\mathcal{X})\\ &= \inf\left\{\sup\left\{\frac{\int_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}}|f(x)-f(y)|\,d\mu(x,y)}{\int_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}}\rho(x,y)\,d\mu(x,y)}\,\middle|\, f\in\mathrm{LIP}_1(\mathcal{X})\right\}\,\middle|\,\mu\ \textit{measures}\ \mathcal{X}\times\mathcal{X}\right\},\end{aligned} \tag{3.16}$$

我们假设 μ 不集中在对角线 $\{(x,x)\in\mathcal{X}\times\mathcal{X}\mid x\in\mathcal{X}\}$ 上，并且分母中的积分有限。

证明。我们将在证明过程中，将 (3.16) 右侧的量记为 $\mathfrak{S}$。 f.

对于 $\mathcal{X}$ 中的每一对有限点序列 $(\bar{x},\bar{y})$，都对应一个测度 $\mu_{(\bar{x},\bar{y})} := \sum_{i=1}^N \delta_{(x_i,y_i)}$。这一对应关系和引理 3.2 表明，$\mathrm{LCJ}(\mathcal{X})$ 大于或等于 $\mathfrak{S}$。为了证明反向不等式，我们希望以某种方式用形如 $\sum_{i=1}^N \delta_{(x_i,y_i)}$ 的测度来逼近 $\mathcal{X}\times\mathcal{X}$ 上的任意概率测度 μ。注意，通过在序列 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$ 中重复点并乘以一个乘法常数，我们可以扩大形如 $\sum_{i=1}^N a_i\delta_{(x_i,y_i)}$、$a_i\in\mathbb{Q}$ 的测度所构成的可逼近类别。

为此，固定 $\varepsilon>0$ 以及定义在 $\mathcal{X}\times\mathcal{X}$ 上的有限测度 μ，使得 $\int_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}}\rho(x,y)\,d\mu(x,y)$ 有限且为正，并且，

$$\frac{\int_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}}|f(x)-f(y)|\,d\mu(x,y)}{\int_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}}\rho(x,y)\,d\mu(x,y)} \leqslant (1+\varepsilon)\mathfrak{S}. \tag{3.17}$$

我们将 $\mathcal{X}\times\mathcal{X}$分解为两两不交的博雷尔集 $\{Q_\alpha\}_\alpha$，使得 $\operatorname{diam} Q_\alpha<\delta$，后一个符号表示另一个小参数。如果集合 Q_α 不包含在对角线上，令 $x_\alpha\in Q_\alpha$ 为一个不在对角线上的点。构造一个测度

$$\mu_\delta=\sum_\alpha \mu(Q_\alpha)\delta_{x_\alpha}. \tag{3.18}$$

在这个和式中，至多可数个加数非零，因为 μ 是有限的；测度 μ_δ 也有限。注意

$$\Big|\int\limits_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}} g(x,y)\,d\mu_\delta(x,y)-\int\limits_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}} g(x,y)\,d\mu(x,y)\Big|\leqslant\delta \tag{3.19}$$

对任意 $g\in \mathrm{LIP}_1(\mathcal{X}\times\mathcal{X})$，都有此结论。因此，

$$\frac{\int_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}}|f(x)-f(y)|\,d\mu_\delta(x,y)}{\int_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}}\rho(x,y)\,d\mu_\delta(x,y)}\leqslant\frac{\int_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}}|f(x)-f(y)|\,d\mu(x,y)+2\delta}{\int_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}}\rho(x,y)\,d\mu(x,y)-\delta} \tag{3.20}$$

对任意 $f\in\mathrm{LIP}_1(\mathcal{X})$，都有此结论。若 δ 足够小，则可得

$$\frac{\int_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}}|f(x)-f(y)|\,d\mu_\delta(x,y)}{\int_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}}\rho(x,y)\,d\mu_\delta(x,y)}\leqslant(1+\varepsilon)^2\mathfrak{S} \tag{3.21}$$

对某个 f 的取值成立。同样的逼近论证允许将 (3.18) 中的和限制在有限个指标上，并将系数 $\mu(Q_\alpha)$ 替换为其有理数近似；记这个修改后的测度为 $\tilde{\mu}$。如前所见，这类测度由 $\mathcal{X}$ 中点的有限序列对生成，因此，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{LV}(\bar{x},\bar{y})}{\mathrm{V}(\bar{x},\bar{y})}&=\frac{\int_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}}|f(x)-f(y)|\,d\tilde{\mu}(x,y)}{\int_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}}\rho(x,y)\,d\tilde{\mu}(x,y)}\\&\leqslant(1+\varepsilon)\frac{\int_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}}|f(x)-f(y)|\,d\mu_\delta(x,y)}{\int_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}}\rho(x,y)\,d\mu_\delta(x,y)}\leqslant(1+\varepsilon)^3\mathfrak{S}\end{aligned} \tag{3.22}$$

对于某些有限序列 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$。由于 ε 可以任意小，因此可得 $\mathrm{LCJ}(\mathcal{X})\leqslant\mathfrak{S}$。 □

令 S^{d-1} 为 $\mathbb{R}^d$中的单位球面。令 λ_{d-1} 为 S^{d-1}上的勒贝格测度。将 λ_{d-1} 归一化为概率测度，并将$(S^{d-1},\ \lambda_{d-1})$视为一个概率空间，这样处理会比较方便。我们将使用以下经典定理，见 [5]中的推论 19。31。

定理 3.4（列维集中不等式）。 假设 $d\geqslant 4$。令 $f\colon\ S^{d-1}\to\mathbb{R}$ 为一个1-利普希茨函数，并将其视为随机变量。令 c为其中位数。那么，

$$\lambda_{d-1}\Big(\Big\{x\in S^{d-1}\ \Big|\ |f(x)-c|>\varepsilon\Big\}\Big)\leqslant 6e^{-\frac{d\varepsilon^2}{8}}. \tag{3.23}$$

定理 *1.3* 的证明。 我们希望证明一个稍强的陈述 $\mathrm{LCJ}(S^{d-1})\lesssim d^{-\frac{1}{2}}(\log\ d)^{\frac{1}{2}}$。我们将使用推论 3.3 中给出的 LCJ 公式。 μ 上的测度 $S^{d-1}\times S^{d-1}$由下式隐式给出

$$\int\limits_{S^{d-1}\times S^{d-1}} g\,d\mu=\int\limits_{S^{d-1}} g(x,-x)\,d\lambda_{d-1}(x), \tag{3.24}$$

对于任意连续函数 $g \in C(S^{d-1} \times S^{d-1})$。于是，

$$\int\limits_{S^{d-1}\times S^{d-1}} \rho(x,y)\, d\mu(x,y) = \int\limits_{S^{d-1}} \rho(x,-x)\, d\lambda_{d-1}(x) = 2, \tag{3.25}$$

而

$$\int\limits_{S^{d-1}\times S^{d-1}} |f(x)-f(y)|\, d\mu(x,y) = \int\limits_{S^{d-1}} |f(x)-f(-x)|\, d\lambda_{d-1}(x) \leqslant 12e^{-d\varepsilon^2/8} + 2\varepsilon \tag{3.26}$$

对于任意 ε，由（3.23）可得。取 $\varepsilon = 4d^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\log\, d}$即完成证明。 □

4. Martingale method for bounding LCJ

我们从一个技术性命题开始，该命题为定理 1.6 和 1.7 提出了一种统一的方法。

命题 4.1。 固定 $N \in \mathbb{N}$，并假设度量空间 $\mathcal{X}$ 满足两个要求。

1. 存在一个有限滤过 $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_n\}_{n=1}^N$，使得对于每个 $n = 1$、2、...、N， n 层的原子具有相同的概率，并且对于任意 $\omega \in \mathcal{AF}_n$，都有一个点 $x_\omega \in \mathcal{X}$ 与之对应。此外， $\mathcal{AF}_n$ 的原子被分成若干对； 如果 ω_1 和 ω_2 配对， 则常数 $c_{\omega_1,\,\omega_2}$ 由下式定义

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = c_{\omega_1,\omega_2}\rho(x_{\omega_1}, x_{\omega_2}). \tag{4.1}$$

2. 对于任意 $f \in \mathrm{LIP}_1(\mathcal{X})$，存在一个鞅 M，它适应于 $\mathcal{F}$，使得 $\|M\|_{L_\infty} \leqslant 1$，并且对于任意 $n = 1$、2、. . .、$N-1$，以及任意一对原子 ω_1、$\omega_2 \in \mathcal{AF}_n$，

$$\mathbb{E}|dM_{n+1}|\chi_{\omega_1\cup\omega_2} \gtrsim c_{\omega_1,\omega_2}|f(x_{\omega_1}) - f(x_{\omega_2})|. \tag{4.2}$$

于是，$\mathrm{LCJ}(\mathcal{X}) \lesssim N^{-\frac{1}{2}}$。

证明。我们希望使用推论 3.3 并构造测度

$$\mu = \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{\mathcal{AF}_n} c_{\omega_1,\omega_2}\delta_{(x_{\omega_1},x_{\omega_2})}; \tag{4.3}$$

在 $\mathcal{X}\times\mathcal{X}$ 上；内部求和是指对 $\mathcal{AF}_n$ 中所有原子对求和。另一方面，

$$\int\limits_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}} \rho(x,y)\, d\mu(x,y) = \sum_{n=1}^{N-1}\sum_{\mathcal{AF}_n} c_{\omega_1,\omega_2}\rho(x_{\omega_1},x_{\omega_2}) = \sum_{n=1}^{N-1}\sum_{\mathcal{AF}_n} P(\omega_1) = \frac{N-1}{2}. \tag{4.4}$$

另一方面，对于任意 $f \in \mathrm{LIP}_1(\mathcal{X})$，我们按照上述方式构造鞅 M，并得到

$$\int\limits_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}} |f(x)-f(y)|\, d\mu(x,y) = \sum_{n=1}^{N-1}\sum_{\mathcal{AF}_n} c_{\omega_1,\omega_2}\big|f(x_{\omega_1}) - f(x_{\omega_2})\big|$$

$$\lesssim \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{\mathcal{AF}_n} \mathbb{E}|dM_{n+1}|\chi_{\omega_1 \cup \omega_2} = \sum_{n=1}^{N-1} \mathbb{E}|dM_{n+1}| \overset{(2.11)}{\leqslant} \sqrt{N}. \quad (4.5)$$

因此，由推论 3.3 可得 $\mathrm{LCJ}(\mathcal{X}) \lesssim N^{-\frac{1}{2}}$。 □

（*1.7*）的证明。不失一般性，我们可以假设树的深度是 2 的幂，因此在记号中用 2^N 替换 N。我们希望应用命题 4.1，并从对滤过 $\mathcal{F}$ 的一种便利描述开始。令配备标准勒贝格测度的正方形 $[0,1]^2$ 为概率空间 Ω。我们将 $\mathcal{T}$ 的叶子依次编号为 1、2、……、2^{2^N}，并以自然的方式为每个叶子指定矩形

$$P_j = \left[\frac{j-1}{2^{2^N}}, \frac{j}{2^{2^N}}\right] \times [0,1] \subset \Omega \quad (4.6)$$

以自然的方式。

滤过 σ 是由矩形 P_1、P_2、……、$P_{2^{2^N}}$ 生成的。滤过 σ 是由矩形生成的

$$\left[\frac{j-1}{2^{2^N}}, \frac{j}{2^{2^N}}\right] \times \left[\frac{\ell-1}{2^k}, \frac{\ell}{2^k}\right], \qquad \ell = 1, 2, \ldots, 2^k, \quad j = 1, 2, \ldots, 2^{2^N}. \quad (4.7)$$

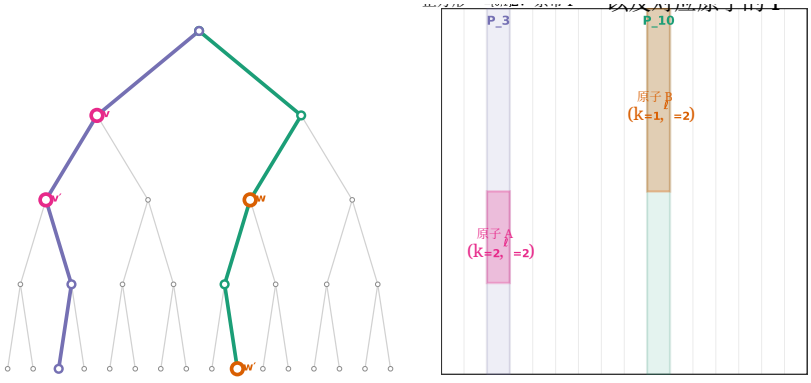


FIGURE 4. $N = 2$ 的两个顶点及对应的原子。

注意，原子的概率仅取决于其层级 k，这正是命题 4.1 所要求的。我们将滤过中的原子自然地对应于三元组（k、j、ℓ）。对于 $\mathcal{F}_k$ 的每个原子，我们在树中指定两个顶点：考虑从根到第 j 个叶子的路径，并将路径上第 $(\ell-1)\,2^{N-k}$ 个和第 $\ell 2^{N-k}$ 个顶点分别记为 $v_{k,j,\ell}$ 和 $v'_{k,j,\ell}$。注意

$$\rho(v_{k,j,\ell}, v'_{k,j,\ell}) = 2^{N-k}. \quad (4.8)$$

示例的可视化见图 4。正如我们将看到的，顶点$v_{k,j,\ell}$ 的作用是辅助性的，而$v'_{k,j,\ell}$ 将作为命题 4.1 术语中的 x_ω，对应于（$\omega \in \mathcal{F}_k$（k、j、ℓ））。目前为止，我们已经描述了滤过 $\mathcal{F}$和对应关系 $\omega \longleftrightarrow x_\omega$。

接下来，我们说明如何从 $f \in \mathrm{LIP}_1(\mathcal{T})$构造适应于 $\mathcal{F}$ 的鞅 M。我们按以下方式构造 M：在原子（k、j、ℓ）上，我们设

$$M_k(k,j,\ell) = 2^{k-N}\Big(f(v_{k,j,\ell}) - f(v'_{k,j,\ell})\Big). \tag{4.9}$$

可以看出，这确实是一个鞅，而 f 的 Lipschitz 界给出 $\|M\|_\infty \leqslant 1$；这两个结论都与例 2.2 完全类似。事实上，这里构造的鞅不过是由 $\mathcal{T}$的根到叶的路径上的 f 的限制所生成的、例 2.2 中所述类型的 2^{2^N} 个鞅的拼接。

现在我们来描述鞅差。取一个原子 (k,j,ℓ)，并令 $u_{k,j,l}$ 为线段 $[v_{k,j,\ell}, v'_{k,j,\ell}]$的中点；假设 $k < N$。那么，根据 (2.10)，

$$\Big|dM_{k+1}(k,j,\ell)\Big| = 2^{k-N}\Big|f(v_{k,j,\ell}) + f(v'_{k,j,\ell}) - 2f(u_{k,j,\ell})\Big|. \tag{4.10}$$

现在该把原子两两配对了。考虑所有满足 $u_{k,j,\ell} = U$（树中某个固定顶点）的原子 (k,j,l)。可以看出，选择 $u_{k,j,\ell}$ 后，参数 k和 ℓ便确定了，而 j 仍可变化；顶点$v_{k,j,\ell}$ 是固定的，并且 $v'_{k,j,\ell}$ 有多种可能的选择。我们注意到，所考虑的顶点分成两个等大的组：从 W 向下到 $v'_{k,j,\ell}$ 的路径在 U 处左转的顶点，以及在此处右转的顶点。我们将这些顶点任意两两配对，使每对中各有一个“左”顶点和一个“右”顶点。设 v'_1 和 v'_2 是这样一对顶点，分别对应指标 (k,j_1,ℓ) 和 (k,j_2,ℓ)，并对应于 $\mathcal{AF}_n$中的原子 ω_1, ω_2。那么，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|dM_{k+1}|\chi_{\omega_1\cup\omega_2} &\\ = 2^{-2^N-k}\cdot 2^{k-N}\Big(\big|f(v) + f(v'_1) - 2f(U)\big| + \big|f(v) + f(v'_2) - 2f(U)\big|\Big)&\\ \geqslant 2^{-2^N-N}\big|f(v'_1) - f(v'_2)\big|.&\end{aligned} \tag{4.11}$$

注意到 $P((k,\ j,\ \ell)) = 2^{-2^N-k}$ 以及 $\rho(v'_1,\ v'_2) = 2^{k-N+1}$，这意味着 (4.2) 中 $c_{\omega_1,\ \omega_2} = 2^{-2^N-N}$。应用命题 4.1 即可完成证明。□

定理 *1.6* 的证明。 我们将采用前一个证明中的思想。由于细节也非常相似，我们省略其中一部分。回顾第2.3小节中引入的记号。只需证明以下界

$$\mathrm{LCJ}(X_N) \lesssim N^{-\frac{1}{2}}. \tag{4.12}$$

为此，我们将应用命题 4.1。

我们从描述滤过 $\mathcal{F}$ 开始。考虑 G_N中所有从 0 到 1、从左向右延伸的路径。设它们的总数为 M。我们以自然的方式将正方形 $[0,1]^2$划分为 M 个尺寸为 $[0,1]\times M^{-1}$ 的矩形，并将一条路径与一个这样的矩形对应起来。这定义了 $\mathcal{F}_0$的原子；将与路径 γ 对应的矩形记为 R_γ。对于每个 $k = 1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ N$，我们考虑 γ在 X_k上的限制，然后将其延拓到 G_k，此时它成为一条由 4^k 段长度为 4^{-k}的线段组成的路径。这自然地定义了 R_γ

划分为如下类型的矩形

$$\left[\frac{j-1}{4^k},\frac{j}{4^k}\right]\times\left[\frac{s-1}{M},\frac{s}{M}\right],\qquad j=1,2,\dots,4^k,\quad R_\gamma=[0,1]\times\left[\frac{s-1}{M},\frac{s}{M}\right]. \tag{4.13}$$

这类矩形定义了 $\mathcal{F}_k$ 的原子。注意， $\mathcal{F}_k$ 的原子具有相同的概率。

我们已经构造了滤过，现在转而讨论如何由 Lipschitz 函数构造鞅。对于每条具有上述类型的路径 γ 以及 $f\in \mathrm{LIP}_1(X_N)$，我们将函数 $f|_\gamma$ 视为区间上的函数（将其延拓为分段仿射函数）。该区间配备了从 $\mathcal{F}$ 继承而来的自然四进滤过。该滤过进而生成一个有界鞅，与例 2.2 中的鞅类似。

我们需要为滤过中的每个原子指定 X_N 中的一个顶点。根据构造，在 k 的第 ω 层，每个原子都对应于 G_N 中的一条路径 γ，以及连接 G_k 中两个相邻顶点的一条边 $\ell\in G_k$，这两个顶点都位于 γ 上。在图 G_{k+1} 中， ℓ 被替换为四条边，其端点位于 γ 上；我们选择中间两条边的公共端点，作为命题 4.1 术语中的 x_ω。

最后，我们需要描述 $\mathcal{F}_k$中原子的配对。固定一条边 $\ell\in G_k$，并考虑滤过中与之对应的所有原子（其路径都经过 ℓ的两个端点）。根据所选的点，这些原子自然分为两组（分别选择“上方”中点和“下方”中点的原子），且两组的基数相等。因此，我们可以任意地将“上方”原子与“下方”原子配对。

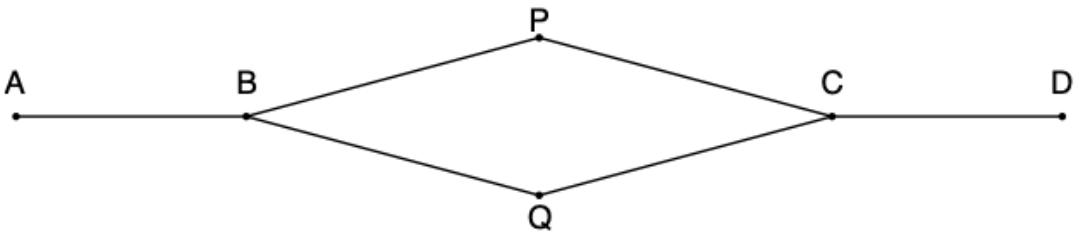


FIGURE 5. (4.11) 的类似结果的证明示意图

剩下的就是验证 (4.2)。计算与 (4.11) 类似。考虑两条在 G_k 中经过 $\ell=[A,D]$，且经过 G_{k+1}中不同点 P， Q 的路径（示意见图 5）。我们有 $\rho(P,\ Q)=2\cdot 4^{-k-1}$，以及 $P(\omega_1)=P(\omega_2)=4^{-k}M^{-1}$。因此， $c_{\omega_1,\ \omega_2}=2M^{-1}$。于是，数学期望中相应的部分为

$$M^{-1}4^{-k-1}\cdot 4^k\Big(2|f(D)+3f(A)-4f(B)|+2|f(A)+3f(D)-4f(C)|+|f(D)-f(A)+4f(B)-4f(P)|$$
$$+|f(D)-f(A)-4f(C)+4f(P)|+|f(D)-f(A)+4f(B)-4f(Q)|+|f(D)-f(A)-4f(C)+4f(Q)|\Big)$$
$$\geqslant \frac{1}{4M}|f(P)-f(Q)|, \tag{4.14}$$

由此得到（ 对于我们的图（4.2）。应用命题 4.1 即可完成证明。 □

5. Proof of Theorem 1.5

不失一般性，假设 $\mathcal{X}$ 是可分的，且直径为 1。注意，双 Lipschitz 度量变换不会影响属于 $\mathcal{LCJ}$类这一性质。因此，根据命题 2.1，我们可以假设 ρ 是 $\mathcal{X}$上的超度量。

我们将构造一个随机 1-Lipschitz 函数 Ψ，定义在 $\mathcal{X}$ 上，使得

$$\mathbb{E}\big|\Psi(x)-\Psi(y)\big| \gtrsim \rho(x,y), \qquad \text{for any } x,y\in\mathcal{X}\,. \tag{5.1}$$

显然，这就证明了定理。更准确地说，我们将构造一个随机 C-利普希茨函数 Φ， $C\in\mathbb{R}$, 使其也满足 (5.1)；然后，我们可以令 $\Psi=\Phi/C$。

对于任意给定的 r，超度量空间 $\mathcal{X}$ 可以划分为球 $B_r(x_j)$，使得

$$\rho(B_r(x_j),B_r(x_i))\geqslant r, \qquad i\neq j, \tag{5.2}$$

细节参见 [4] 中的第 15.3 节。取一个充分小的数 $q\in$ ，满足 0,1。固定上述针对 $r=q^n$、$n\in\mathbb{N}$所述的划分，并将第 n 次划分中各球的中心记为 $x_{n,j}$。令 $\{\varepsilon_{n,j}\}_{n,j}$ 为一族相互独立的伯努利随机变量。现在可以定义所需的函数 Φ:

$$\Phi(x)=\sum_{n=1}^{\infty} q^n \sum_j \varepsilon_{n,j}\chi_{B_{q^{-n}}(x_{n,j})}(x), \qquad x\in\mathcal{X}\,. \tag{5.3}$$

我们需要证明两个断言：当 C 足够大时， Φ 几乎必然是 C-Lipschitz 的，以及（5.1）。先从第一个断言开始。固定 x 和 y 于 $\mathcal{X}$ 中，并令 n_0 为满足以下条件的最小整数： n ，使得 x 和 y 属于第 n 个划分中的不同球。特别地， $\rho(x,\ y)\asymp q^{n_0}$。于是，根据构造，

$$|\Phi(x)-\Phi(y)|=\Big|\sum_{k\geqslant n_0} q^n(\xi_k-\eta_k)\Big|\leqslant \frac{2q^{n_0}}{1-q}\lesssim\rho(x,y); \tag{5.4}$$

其中 ξ_k 和 η_k 是某些 $\varepsilon_{n,\ j}$。这里我们使用了族 $\{B_{q^{-n}}(x_{n,\ j})\}_j$ 两两不相交这一性质。因此，所构造的函数确实是 C-Lipschitz 的，其中 $C=C(q)$。

现在证明（5.1）。由同一公式可得,

$$\mathbb{E}\big|\Phi(x)-\Phi(y)\big|\geqslant q^{n_0}\mathbb{E}|\xi_{j_0}-\eta_{j_0}|-\sum_{k>n_0} q^n\mathbb{E}\big|\xi_k-\eta_k\big|\geqslant\frac{1}{2}q^{n_0}-\frac{q^{n_0+1}}{1-q}. \tag{5.5}$$

只要 q 足够小，该量就被 $\frac{1}{4}q^{n_0}\asymp\rho(x,\ y)$ 与零隔开。我们固定这样的 q，从而得到（5.1）以及关于 Φ 的一致 Lipschitz 界。

References

[1] Luigi Ambrosio.度量空间值有界变差函数。 *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.(4)*, 17(3):439–478, 1990。[2] Victor Bakhtin.度量空间中曲线绝对连续性的判据。arXiv:2406.08941。[3] Marco Capolli.Laakso 空间概览。 *Note Mat.*, 44(2):53–75, 2024。

[4] Guy David 和 Stephen Semmes. *Fractured fractals and broken dreams, Oxford Lecture Series*第 7 卷 *in Mathematics and its Applications*。克拉伦登出版社、牛津大学出版社，纽约，1997。通过度量与测度研究自相似几何。[5] Joe Diestel、Hans Jarchow 和 Andrew Tonge. *Absolutely summing operators, Cambridge* 第 43 卷*Studies in Advanced Mathematics*。剑桥大学出版社，剑桥，1995。[6] T. J. Laakso. 具有任意 Q的 Ahlfors 正则空间，满足弱 Poincar´é 不等式。 *Geom.Funct. Anal.*, 10(1):111–123, 2000。[7] U. Lang 和 C. Plaut. 度量空间到空间形式的双利普希茨嵌入。 *Geometriae Dedicata*, 87:285–307, 2001。[8] Roman Oleinik 和 Alexander Tyulenev. 通过利普希茨后复合刻画 AC 曲线和索伯列夫曲线。arXiv:2408.08762。[9] Albert N. Shiryaev. *Probability. 2*, 第 95 卷 *Graduate Texts in Mathematics*。施普林格，纽约，第三版，2019。

St. Petersburg State University, Department of Mathematics and Computer Sciences, 7/9Universitetskaya emb., St. Petersburg, 199034 Russia*Email address*: d.m.stolyarov@spbu.ru

Steklov Mathematical Institute of Russian academy of Sciences
Email address: tyulenev-math@yandex.ru,tyulenev@mi-ras.ru