arXiv:2603.03876v1 [math.OC] 4 Mar 2026

用于改善多发性硬化症诊断的真实 MRI 图像的即插即用盲超分辨率

Matteo Cannas[1],Alice Mariottini[1], Luca Massacesi[1], Federica Porta[2,*], Simone Rebegoldi[2], 和 Andrea Sebastiani[2]

Abstract. 磁共振成像（MRI）是诊断多发性硬化症的关键手段；在此过程中，识别中央静脉征等生物标志物需要借助高分辨率图像。然而，大多数临床脑部磁共振成像扫描使用 1.5 T扫描仪进行，其灵敏度低于更高场强的系统。我们提出一种盲超分辨率框架，用于增强在临床环境中采集的真实 1.5 T MRI 图像，此类环境中仅有后处理数据可用，且退化模型并不完全已知。该问题被建模为一个非凸盲逆问题，需要联合估计高分辨率图像和模糊核。图像正则化通过基于预训练去噪器的即插即用策略实现，同时对模糊核施加适当约束。为求解所得模型，我们设计了一种异构交替分块坐标法，使用不同类型的算法更新两个变量。我们严格证明了其收敛性质。在 1.5 T 下采集的液体衰减反转恢复和 SWI序列上的实验表明，图像结构定义得到改善，临床相关特征的可见性增强，并通过与 3 T图像进行视觉比较加以验证。

1. Introduction

多发性硬化症（MS）是最常见的中枢神经系统（CNS）炎性脱髓鞘性和退行性疾病，全球估计有 290 万人患病 [1]。MS 是一种慢性疾病，典型发病年龄为青年期，临床表现多样，包括运动、小脑和感觉症状 [1]。MS 仍是青年人非创伤性残疾的主要原因之一，但若能及时接受疾病修饰治疗，其病程可能受到影响 [40], ，前提是能够准确、早期地诊断。过去二十年来，磁共振成像（MRI）已成为诊断 MS 不可或缺的工具；最新修订的 McDonald诊断标准已纳入一种可选的 MS 特异性磁共振成像标志物，即中央静脉征（CVS） [50]。尽管可使用不同磁场强度的磁共振成像评估 CVS，但与 3T 设备相比，高场强 7 T 的敏感性更高 [52], ；而 3T 设备的敏感性又高于 1.5 T 磁共振成像 [23]。然而，在临床实践中，绝大多数接受脑部

Date: 2026年2月28日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 65K10、65F22、92C55、90C26。*Key words and phrases.* 超分辨率、即插即用、盲图像复原、块坐标。[1]佛罗伦萨大学药物与儿童健康学院心理学与神经科学系，Viale Pieraccini, 6, 50139 佛罗伦萨，意大利。 matteo.cannas@unifi.it, alice.mariottini@unifi.it,luca.massacesi@unifi.it。[1]摩德纳和雷焦艾米利亚大学物理、计算机科学与数学系，Via Campi 213/b, 41125 摩德纳，意大利。 federica.porta@unimore.it, simone.rebegoldi@unimore.it,andrea.sebastiani@unimore.it。

*通讯作者。

磁共振成像检查的非三级医疗中心，受多种因素影响，通常使用磁场强度为 1.5 T 的设备进行扫描。这些因素包括但不限于成本较高（每特斯拉磁场的名义成本为 100 万美元）、比吸收率（SAR）和声学噪声增加、金属物体（如手术夹）造成的伪影更明显、磁场不均匀性和磁敏感伪影更常见，以及医疗操作中使用的某些材料安全性较低 [57, 60]。因此，无需硬件升级即可提高普及率较高的 1.5 T 磁共振成像系统的诊断效用，将对日常临床实践产生重大影响。

为帮助医生做出准确诊断，本研究的主要目标是提出一种超分辨率方法，以提升多发性硬化症患者所采集的 1.5 T MRI 图像的整体质量。从数学角度来看，该问题可表述为盲超分辨率任务。事实上，由于数据是在真实的临床环境中采集的，关于成像采集过程的信息有限；因此，潜在的模糊退化并未完全明确。具体而言，采集过程可形式化为

$$b = S(\theta * x) + \eta, \tag{1.1}$$

其中，$b \in \mathbb{R}^m$ 表示观测到的低分辨率图像，$*$ 表示未知高分辨率图像 $x \in \mathbb{R}^n$ 与未知模糊核$\theta \in \mathbb{R}^p$之间的卷积算子，$S \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 是一个标准的 s倍下采样矩阵，使得 $n = s^2 \times m$；$\eta \in\mathbb{R}^m$ 表示标准差为 $\sigma \in \mathbb{R}^+$的加性白高斯噪声。卷积乘积通过矩阵向量乘法 $\theta * x = \Theta x = X\theta$计算，其中 X 和 Θ 是适当的结构化矩阵，其形式取决于边界条件 [38]的选择。

与（1.1）相关的逆问题严重病态，因为其解不唯一。根据贝叶斯范式，可通过求解以下一般非凸优化问题，得到一个近似解（x，θ）

$$\underset{x\in\mathbb{R}^n,\theta\in\mathbb{R}^p}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2}\|S(\theta * x) - b\|^2 + \phi(x) + \psi(\theta), \tag{1.2}$$

其中，ϕ： $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 和 ψ： $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$分别是针对 x 和 θ的适当正则化项。

（1.2）中的优化问题是一个分块变量复合问题，其中可分离且可能非光滑的正则化项分别作用于各个变量。从数值计算的角度来看，这类问题通常采用交替优化方案求解，即以高斯-赛德尔方式依次针对一个变量最小化目标函数 [34, 35]。在这些方法中，交替前向-后向（FB）算法已在近期文献中得到广泛研究[5, 6, 14, 32, 35, 55, 62] ，并已成功应用于成像问题 [2, 25, 27]。记数据保真项为 f（x，θ）$\frac{1}{2}\|S$（$\theta * x$）$-b\|^2$，用于求解（1.2）的经典交替 FB 方法可写为

$$\begin{cases} x_{k+1} = \operatorname{prox}_{\alpha_x \phi}\left(x_k - \alpha_x \nabla_x f(x_k, \theta_k)\right) \\ \theta_{k+1} = \operatorname{prox}_{\alpha_\theta \psi}\left(\theta_k - \alpha_\theta \nabla_\theta f(x_{k+1}, \theta_k)\right) \end{cases}, \tag{1.3}$$

其中，α_x 和 α_θ 是两个适当的正步长，$\operatorname{prox}_{\alpha_x\phi}$，$\operatorname{prox}_{\alpha_\theta\psi}$ 分别表示 $\alpha_x\phi(\cdot)$和 $\alpha_\theta\psi$的近端算子。具体而言，给定 $\alpha \in \mathbb{R}^+$ 和一个适当的下半连续函数 h： $\mathbb{R}^s \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$，$\alpha h$ 的近端算子定义为

$$\operatorname{prox}_{\alpha h}(\bar{z}) = \underset{z\in\mathbb{R}^s}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2}\|z - \bar{z}\|^2 + \alpha h(z), \quad \forall \bar{z} \in \mathbb{R}^s.$$

贡献。 为了开发一种有效的方法来提升真实 1.5 T MRI 图像的分辨率，需要在（1.2）中恰当选择正则化项 ϕ和 ψ，并设计一种高效的交替 FB 方法来求解由此得到的优化问题。本文的贡献涵盖这两个方面。具体而言：

(i) 在图像正则化方面，我们采用即插即用（PnP）框架，并利用预训练去噪神经网络。此外，我们对模糊核施加具有物理意义的约束，以避免得到平凡的非物理解。*(ii)* 针对所考虑的优化模型，我们提出了一种专门设计的交替 FB 算法。与方案 (1.3) 相比，我们采用了更通用的策略。具体而言，两个坐标块并非都通过标准近端梯度方案更新（其中近端步骤对应正则化项，梯度步骤对应数据保真项）。相反，每个坐标块均采用针对其相应正则化项专门设计的方法进行更新。计算关于两个变量的梯度时，数据保真项 $f(\cdot,\ \cdot)$ 并不像在 (1.3) 中那样对称地使用，而是在每个坐标块的更新中发挥不同作用。我们严格证明了所提算法的收敛结果。

我们在佛罗伦萨卡雷吉大学医院神经放射科，使用 1.5 T 磁共振成像扫描仪（西门子）采集的图像开展了超分辨率数值实验。研究考察了两种不同的 MRI 序列，即 FLAIR（液体衰减反转恢复）和 SWI（磁敏感加权成像）。FLAIR 图像可用于观察白质病变，而 SWI 图像则能突出显示脑组织内的静脉结构。所提出方法获得的结果颇具前景，可能有助于将 1.5 T MRI 图像更好地应用于特定临床目的，例如识别作为一种诊断影像标志的中央静脉征（CVS）。具体而言，该方法能够以更清晰的边缘和更高的定义度识别白质病变和静脉结构。作为视觉比较的金标准，我们采用了同一患者在该医院神经放射科使用 3T 设备（Ingenia，飞利浦）采集的 FLAIR 和 SWI MRI 图像。

相关工作。 目前最先进的 MRI 超分辨率方法主要基于深度学习方法（例如参见 [30, 31, 43, 44, 69, 72, 73] 及其中引用的文献）。尽管表现出色，深度超分辨率方法仍存在一些局限。首先，大量参数会带来巨大的内存和计算需求。此外，在监督式方法中，性能往往受限于高质量标注数据集的数量有限，这在生物医学领域尤为突出。自监督方法 [72, 73], 通过利用每幅图像自身固有的结构信息，避免了对外部配对训练数据的需求，但通常需要针对每幅新图像单独训练或微调模型。这一要求增加了计算成本和处理时间，并可能限制模型在不同采集设置下的泛化能力。

与此同时，文献中也提出了几种基于模型的 MRI 超分辨率方法（例如，参见 [7, 10, 46, 53, 63]）。然而，这些方法通常依赖经典正则化技术，例如全变分或 Tikhonov 正则化。与 PnP 框架不同，这些方法并未将学习型去噪器作为隐式先验纳入其中。此外，针对由此产生的模型专门设计和分析优化方案，受到的关注有限。

此外，我们指出，在本应用中，我们只能获得经过后处理的 MRI 图像，而无法访问原始采集数据。因此，我们采用了式（1.2）所述的一般盲超分辨率框架，原则上，该框架可扩展至其他成像采集系统。在此设定下，本研究的主要目标是将 PnP正则化融入盲问题表述（1.2），并设计一种具有可证明收敛保证的专用优化方案，以解决真实MRI图像超分辨率问题。尽管近期已有少数研究探讨了采用 PnP正则化处理盲成像问题的块坐标方法 [33, 41, 58], ，但这些方法通常对所有子问题都采用同一类数值求解器。与之不同，我们提出了一种异构优化方案，其中两个块分别通过性质不同的算法进行更新，从而构建出更灵活的框架。

目录。 本文结构安排如下。第 2 节介绍所考虑的完整问题表述，包括正则化项。第 3 节介绍所提出的算法及其收敛性分析。第 4 节报告数值实验。第 5 节总结全文并展望未来研究方向。

2. The proposed model

在盲超分辨率表述 (1.2) 中，适当选择 ϕ 和 ψ 对于获得准确的重建至关重要。本文采用一种基于即插即用（PnP）的方法，对未知图像 x进行正则化。PnP 框架是解决计算成像中逆问题的一种强大且创新的范式，它通过正则化项 [42, 45, 64]将学习先验融入问题表述。过去十年间，PnP 方法在广泛的图像复原任务中取得了最先进的性能 [3, 22, 49, 68, 70]。受这些结果启发，并依照 [42], 提出的方法，我们考虑 (1.2) 中 ϕ 的如下定义：

$$\phi(x) = \frac{\lambda}{2}\|x - N_\sigma(x)\|^2, \tag{2.1}$$

其中， $\lambda \in \mathbb{R}^+$ 是一个正则化参数，且 N_σ ： $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是任意一种可微神经网络架构，已证明在给定噪声水平 $\sigma \in \mathbb{R}^+$时能够有效地进行图像去噪。具体而言，我们将函数 N_σ 固定为 [70] 中提出的 UNet 模型，并按照 [42]所述，随后在 PnP 框架内对其进行训练。我们采用 [42], 的作者发布的预训练网络权重，这些权重可通过 DeepInverse库[59]获取。更多实现细节见第 4 节。值得注意的是，我们的方法完全无监督，因为它仅依赖预训练模型，无需针对特定任务进行额外训练。

另一方面，按照文献中的标准方法，我们对核 θ施加经典物理约束，即各分量非负且满足通量归一化。此外，正如 [11, 47, 54], 中成功采用的方法，我们纳入光学系统斯特列尔比（SR）的先验知识，以进一步限制 (1.2) 的解空间。SR 定义为像差核的峰值强度与理想衍射极限核的峰值强度之比。这一先验信息自然会为核的取值设定一个上界。加入这一额外约束能够有效排除平凡解和非物理解，例如狄拉克 δ 核；否则，这些解也会满足其余约束。因此，(1.2) 中的正则化项 ψ 选为以下闭凸集的指示函数：

选作以下闭凸集的指示函数

$$\Omega = \left\{ \theta \in \mathbb{R}^p \ : \ 0 \leq \theta \leq M \text{ and } \sum_i \theta_i = 1 \right\}, \tag{2.2}$$

其中 M 是超分辨率的一个近似，可由理想核适当地估计（例如参见 [4, 24]）。

3. The proposed approach

在本节中，我们详细阐述一种可用于解决盲超分辨率优化问题（1.2）的方法，并结合第2节中对 ϕ 和 ψ 的定义。为方便起见，我们将所得问题陈述如下。具体而言，我们希望求解

$$\underset{x\in\mathbb{R}^n,\theta\in\mathbb{R}^p}{\operatorname{argmin}} \ F(x,\theta) \equiv \frac{1}{2}\|S(\theta * x) - b\|^2 + \frac{\lambda}{2}\|x - N_\sigma(x)\|^2 + \iota_\Omega(\theta), \tag{3.1}$$

其中

$$\iota_\Omega(\theta) = \begin{cases} 0, & \text{if } \theta \in \Omega \\ +\infty, & \text{otherwise} \end{cases}$$

表示（2.2）中所定义集合Ω的指示函数。此后，数据保真项将记为 $f(x,\theta)$。

我们提出的用于求解问题(3.1)的方法是一种基于交替前向-后向的算法，总结于算法1。与标准交替前向-后向格式(1.3)不同，其中

算法1非　　对称交替前向-后向方法　　thod

选择 $x_{-1}, x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\theta_0 \in \Omega$, $\alpha_x > 0$, $\alpha_\theta > 0$, $\rho \geq 0$ 和 $\nu, \gamma \in (0,1)$。

For $k = 0, 1, \ldots$

Step 1. x_{k+1}的更新。Step 1.1. 设 $y_k = x_k + \rho(\nabla\phi(x_{k-1}) - \nabla\phi(x_k))$。Step 1.2. 设 $x_{k+1} = \mathrm{prox}_{\alpha_x f(\cdot,\theta_k)}(y_k - \alpha_x \nabla\phi(x_k))$。

Step 2. Update of θ_{k+1}.

Step 2.1. Compute $\hat{\theta}_k = \mathrm{proj}_\Omega(\theta_k - \alpha_\theta \nabla_\theta f(x_{k+1}, \theta_k))$.

Step 2.2. Set $d_k = \hat{\theta}_k - \theta_k$ and $\lambda_k = 1$.

If $f(x_{k+1}, \theta_k + \lambda_k d_k) > f(x_{k+1}, \theta_k) + \nu\lambda_k \nabla_\theta f(x_{k+1}, \theta_k)^T d_k$

Set $\lambda_k = \gamma\lambda_k$ and go to Step 2.2;

Else

go to Step 2.3.

Step 2.3. If $f(x_{k+1}, \hat{\theta}_k) < f(x_{k+1}, \theta_k + \lambda_k d_k)$

Set $\theta_{k+1} = \hat{\theta}_k$

Else

Set $\theta_{k+1} = \theta_k + \lambda_k d_k$.

保真项用于在 x_{k+1} 和 θ_{k+1}的更新中执行前向步，算法1在更新 x_{k+1}时则使用保真项执行后向步

以及在更新 θ_{k+1}时执行前向步。这种不对称性反映了两个子问题不同的解析结构，并允许对这两次更新采用有效但不同的算法。更具体地说， x_{k+1} 的更新通过所谓前向-反射-后向方法 [48, 61, 65], 的一步来完成，而 θ_{k+1} 的更新则由带线搜索的近端梯度法的一次迭代 [15, 20]构成。下面我们将说明采用这两种不同策略的动机。

x-更新：在固定 θ 的情况下，关于 x 最小化式（3.1）中的目标函数，可将问题化简为一个带有 PnP正则化项的超分辨率问题。按照 [42], ，该问题可通过如下形式的 FB 算法高效求解

$$x_{k+1} = \mathrm{prox}_{\alpha_x f(\cdot,\theta_k)}(x_k - \alpha_x \nabla\phi(x_k)), \tag{3.2}$$

其中， α_x 是合适的正步长参数。$\alpha_x f$（$\cdot$， θ_k）的近端算子可以通过闭式解高效计算。尽管 f（$\cdot$， θ_k）和 ϕ 都是光滑的，但出于数值和实际应用方面的原因，采用 FB 方法优于完整的梯度方法。具体而言，近端步骤可能改善渐近性能 [26], ：$\nabla\phi + \nabla f$ 的 Lipschitz 常数可能远大于 ∇f [9, 第 9 节的 Lipschitz 常数，3], 这会导致完整梯度方法所允许的步长更小；而 FB 策略结合 PnP正则化项已在成像应用中展现出显著的实证效果 [42]。在 [42], 中，作者还建议在最后一次 FB 迭代后再进行一步去噪，以提高重建质量。事实上，可以证明式（2.1）中的 ϕ 会诱导出去噪算子 D_σ ，其形式为

$$D_\sigma(x) = x - \nabla\phi(x).$$

因此，在 [42]中，最终重建定义为 $D_\sigma(x_K)$，其中 x_K是由(3.2)生成的最后一个迭代。为了在保持收敛保证的同时将这一启发式方法纳入我们的交替FB方案，我们通过纳入反射 Step 1.1来修改(3.2)。该步骤可解释为一种广义去噪操作，并使 x更新落入一类已确立收敛性质且可被我们的方案继承的方法。

θ-更新：未知核上的正则化项自然表明应采用梯度投影法来求解与 θ相关的子问题。具体而言，我们考虑 [16]中提出的算法。到(2.2)中所定义集合Ω上的投影可表述为一个求根问题，并可通过 [28]中提出的类割线算法高效计算。针对附加参数 $\lambda_k \in$ 的线搜索策略（$0, 1$] 确保限制在 θ块上的目标函数充分下降。这也避免了对步长参数 α_θ进行可能较为苛刻的微调。由于 f 关于 θ是连续可微函数，算法1中 Step 2.2 的线搜索过程是良定义的[12,定理2.4]。

所提出的非对称交替 FB 方法在现有文献中可被视为非标准方法，并属于一条尚未被充分探索的研究路线。以下考量支持这一论断。尽管已提出若干面向可能非凸优化的标准块坐标 FB 方法（例如，参见 [18, 25, 32, 37, 51, 66, 67] 及其中的参考文献），但只有 [36] 考虑了一种交替最小化策略，其中每个子问题采用不同的算法求解。此外，仅有少数工作专门讨论块坐标算法

专门针对PnP正则化项 [33, 41, 58]。然而，这些工作中提出的方法采用同一类型的方法来求解与块更新相关的子问题。最后，我们尚未了解到任何涉及前向-反射-后向算法的块坐标方法。

3.1. 收敛性质。本节将分析算法1应用于以下形式的一般优化问题时的收敛性

$$\underset{x\in\mathbb{R}^n,\theta\in\mathbb{R}^p}{\operatorname{argmin}} \quad F(x,\theta)\equiv f(x,\theta)+\phi(x)+\iota_\Omega(\theta), \tag{3.3}$$

其中，Ω 是 $\mathbb{R}^p$ 的非空闭凸子集，函数 f 和 ϕ 满足以下假设。

假设1。*(i)* 函数 $f\colon\ \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$ 关于其所有自变量连续可微，且 ∇f 局部 *Lipschitz*连续，即对于所有有界子集 $K_1\times K_2\subseteq\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p$，存在 $L(K_1,K_2)>0$，使得

$$\begin{aligned}&\|\nabla f(x_1,\theta_1)-\nabla f(x_2,\theta_2)\|\\ &\qquad\le L(K_1,K_2)\|(x_1-x_2,\theta_1-\theta_2)\|,\quad \forall\ x_1,x_2\in K_1,\ \forall\ \theta_1,\theta_2\in K_2.\end{aligned} \tag{3.4}$$

此外，对于任意 $x\in\mathbb{R}^n$、 $\theta\in\mathbb{R}^p$，偏梯度 $\nabla_x f(\cdot,\theta)$ 和 $\nabla_\theta f(x,\cdot)$均为*Lipschitz*连续，即存在 $L_x(\theta)>0$ 和 $L_\theta(x)>0$，使得

$$\begin{aligned}\|\nabla_x f(x_1,\theta)-\nabla_x f(x_2,\theta)\|&\le L_x(\theta)\|x_1-x_2\|,\quad \forall\ x_1,x_2\in\mathbb{R}^n\\ \|\nabla_\theta f(x,\theta_1)-\nabla_\theta f(x,\theta_2)\|&\le L_\theta(x)\|\theta_1-\theta_2\|,\quad \forall\ \theta_1,\theta_2\in\mathbb{R}^p.\end{aligned} \tag{3.5}$$

此外，对于每个有界子集 $K_1\times K_2\subseteq\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p$，都存在 $L（K_1）>0$ 和$L（K_2）>0$，使得

$$\begin{aligned}\sup\{L_\theta(x)\colon\ x\in K_1\}&\le L(K_1)\\ \sup\{L_x(\theta)\colon\ \theta\in K_2\}&\le L(K_2).\end{aligned} \tag{3.6}$$

最后，对于每个固定的 θ， $f（\cdot,\theta）$的近端算子是单值的。

(ii) 函数 $\phi\colon\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 连续可微，且 $\nabla\phi$ 是*Lipschitz*连续的，即存在 $L_\phi>0$ 使得

$$\|\nabla\phi(x)-\nabla\phi(y)\|\le L_\phi\|x-y\|,\quad \forall\ x,y\in\mathbb{R}^n.$$

(iii) 函数 $f+\phi$ 下有界。

注3.1。式（3.1）中的函数 $f(x,\ \theta)=-\frac{1}{2}\|S(\theta*x)-b\|^2$和 $\phi(x)=\frac{\lambda}{2}\|x-N_\sigma(x)\|^2$满足假设1。事实上， f在 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p$上连续可微， ∇f局部Lipschitz连续，且其偏梯度一致Lipschitz连续。此外，对于每个固定的 θ， $f(\cdot,\ \theta)$ 是凸函数。因此，相应的近端子问题是强凸的，并且存在唯一的极小化解。由此，$f(\cdot,\ \theta)$的近端算子是单值的。只要神经网络 N_σ 由导数有界且Lipschitz连续的连续可微函数复合而成，关于 ϕ 的假设便成立 [42, 命题 2]。第4节数值实验中使用的卷积神经网络满足这一条件。

在我们的分析中，我们希望证明问题 (3.3) 收敛到一个驻点。更具体地说，考虑目标函数的极限次微分 F

在任意一点 $(x,\theta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ [56, 定义 2.3], 根据问题 (3.3) 的分块坐标结构和标准微积分法则， [18, 引理 3] 可将其写为

$$\partial F(x,\theta) = \left\{ \begin{pmatrix} \nabla_x f(x,\theta) + \nabla\phi(x) \\ \nabla_\theta f(x,\theta) + w \end{pmatrix} : \ w \in \partial \iota_\Omega(\theta) \right\}, \tag{3.7}$$

其中 $\partial \iota_\Omega(\theta) = \{v \in \mathbb{R}^p : \ v^T(\theta' - \theta) \leq 0, \ \forall \theta' \in \mathbb{R}^p\}$ 是 Ω 在 θ 处的法锥。于是， F 的驻点 $(x_*, \theta_*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ 由如下包含关系定义：

$$0 \in \partial F(x_*, \theta_*). \tag{3.8}$$

我们通过引入价值函数 $H: \ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 来开始收敛性分析，其定义为

$$\begin{aligned} H(x,y,\theta) &= F(x,\theta) + \frac{1}{4\alpha_x}\|x-y\|^2 \\ &= f(x,\theta) + \phi(x) + \iota_\Omega(\theta) + \frac{1}{4\alpha_x}\|x-y\|^2, \quad \forall \ (x,y,\theta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p. \end{aligned} \tag{3.9}$$

(3.9) 中的价值函数将 [21, 65] 中为单块前向-反射-后向方法的收敛性分析所考虑的价值函数推广到块坐标框架。注意，函数 H 的次微分可写为

$$\partial H(x,y,\theta) = \left\{ \begin{pmatrix} \nabla_x f(x,\theta) + \frac{1}{2\alpha_x}(x-y) + \nabla\phi(x) \\ \frac{1}{2\alpha_x}(y-x) \\ \nabla_\theta f(x,\theta) + w \end{pmatrix} : \ w \in \partial \iota_\Omega(\theta) \right\}, \tag{3.10}$$

将 (3.10) 与 (3.7) 进行比较，容易看出：若 (x_*, y_*, θ_*) 是 H 的驻点，则 (x_*, θ_*) 是 F 的驻点。

以下引理确立了价值函数 (3.9) 的递减性质。事实上，尽管算法1并不保证目标函数 F 在每次迭代中都减小（因为 y_k 中的反射点 Step 1.1），但我们仍可证明，价值函数 (3.9) 沿迭代序列递减。证明的第一部分改编自用于证明 [65, 引理3.2]的论证。然而，与 [65], 不同，我们必须考虑算法1的块坐标结构，以及 Step 2.2中线搜索过程的存在。

引理3.2。 设假设*1*成立。假设由算法*1*生成的序列 $\{(x_k, \theta_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ 有界。定义序列 $\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 如下

$$z_k = \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ x_k \end{pmatrix}, \quad \forall \ k \in \mathbb{N},$$

以及由下式给出的序列 $\{\bar{z}_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$

$$\bar{z}_k = \begin{pmatrix} x_k \\ x_{k-1} \\ \theta_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{k-1} \\ \theta_k \end{pmatrix}, \quad \forall \ k \in \mathbb{N}. \tag{3.11}$$

若 $\rho < \frac{1}{2L_\phi}$ 且 $\alpha_x < \frac{1-2L_\phi\rho}{2L_\phi}$，则存在 $c > 0$ 使得

$$H(\bar{z}_{k+1}) \leq H(\bar{z}_k) - c\|\bar{z}_{k+1} - \bar{z}_k\|^2, \quad \forall \ k \in \mathbb{N}. \tag{3.12}$$

证明。 根据算法1的 STEP 1.2 以及 $\alpha_x f(\cdot,\theta_k)$ 的近端算子的定义，有

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \underset{x\in\mathbb{R}^n}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2}\|x-(y_k-\alpha_x\nabla\phi(x_k))\|^2+\alpha_x f(x,\theta_k) \\ &= \underset{x\in\mathbb{R}^n}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2\alpha_x}\|x-y_k\|^2+\nabla\phi(x_k)^T(x-y_k)+f(x,\theta_k). \end{aligned} \tag{3.13}$$

由式（3.13）可知,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\alpha_x}\|x_{k+1}-y_k\|^2+\nabla\phi(x_k)^T(x_{k+1}-y_k)+f(x_{k+1},\theta_k) \le \frac{1}{2\alpha_x}\|x_k-y_k\|^2+ \\ +\nabla\phi(x_k)^T(x_k-y_k)+f(x_k,\theta_k) \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} f(x_{k+1},\theta_k) \le f(x_k,\theta_k)+\nabla\phi(x_k)^T(x_k-x_{k+1})+\frac{1}{2\alpha_x}\|x_k-y_k\|^2 \\ -\frac{1}{2\alpha_x}\|x_{k+1}-y_k\|^2. \end{aligned} \tag{3.14}$$

鉴于假设 1(ii)，我们可以对 ϕ 应用下降引理 [8, 定理 18.15]，从而得到以下不等式

$$\phi(x_{k+1}) \le \phi(x_k)+\nabla\phi(x_k)^T(x_{k+1}-x_k)+\frac{L_\phi}{2}\|x_{k+1}-x_k\|^2. \tag{3.15}$$

结合 (3.14) 和 (3.15) 可得

$$
\begin{aligned}
f(x_{k+1},\theta_k)+\phi(x_{k+1}) &\le f(x_k,\theta_k)+\phi(x_k)+\frac{L_\phi}{2}\|x_{k+1}-x_k\|^2+\frac{1}{2\alpha_x}\|x_k-y_k\|^2\\
&\quad-\frac{1}{2\alpha_x}\|x_{k+1}-y_k\|^2\\
&= f(x_k,\theta_k)+\phi(x_k)+\frac{L_\phi}{2}\|x_{k+1}-x_k\|^2-\frac{1}{2\alpha_x}\|x_k-x_{k+1}\|^2\\
&\quad-\frac{1}{\alpha_x}(x_{k+1}-x_k)^T(x_k-y_k)\\
&= f(x_k,\theta_k)+\phi(x_k)+\left(\frac{L_\phi}{2}-\frac{1}{2\alpha_x}\right)\|x_k-x_{k+1}\|^2\\
&\quad+\frac{1}{\alpha_k}(x_k-x_{k+1})^T(x_k-y_k)\\
&\le f(x_k,\theta_k)+\phi(x_k)+\left(\frac{L_\phi}{2}-\frac{1}{2\alpha_x}\right)\|x_k-x_{k+1}\|^2\\
&\quad+\frac{1}{\alpha_k}\|x_k-x_{k+1}\|\|x_k-y_k\|\\
&= f(x_k,\theta_k)+\phi(x_k)+\left(\frac{L_\phi}{2}-\frac{1}{2\alpha_x}\right)\|x_k-x_{k+1}\|^2\\
&\quad+\frac{\rho}{\alpha_x}\|x_k-x_{k+1}\|\|\nabla\phi(x_{k-1})-\nabla\phi(x_k)\|\\
&\le f(x_k,\theta_k)+\phi(x_k)+\left(\frac{L_\phi(\alpha_x+\rho)}{2\alpha_x}-\frac{1}{2\alpha_x}\right)\|x_k-x_{k+1}\|^2\\
&\quad+\frac{L_\phi\rho}{2\alpha_x}\|x_k-x_{k-1}\|^2\\
&= f(x_k,\theta_k)+\phi(x_k)+\left(\frac{L_\phi(\alpha_x+\rho)}{2\alpha_x}-\frac{1}{2\alpha_x}\right)\|z_k-z_{k-1}\|^2\\
&\quad-\left(\frac{L_\phi(\alpha_x+\rho)}{2\alpha_x}-\frac{1}{2\alpha_x}\right)\|x_k-x_{k-1}\|^2+\frac{L_\phi\rho}{2\alpha_x}\|x_k-x_{k-1}\|^2,
\end{aligned}
$$

其中，第一个等式由恒等式 $\|x_k-y_k\|^2=\|x_{k+1}-y_k\|^2-\|x_{k+1}-x_k\|^2-2(x_{k+1}-x_k)^T(x_k-y_k)$ 得出，第二个不等式是柯西-施瓦茨不等式的推论，第三个等式根据算法1的 Step 1.1 成立。此外，结合假设 1(ii) 和不等式 $2ab\le a^2+b^2$ 可得第三个不等式；回顾 z_k 的定义及范数恒等式可得第四个等式

$$
\|z_k-z_{k-1}\|^2=\|x_{k+1}-x_k\|^2+\|x_k-x_{k-1}\|^2. \tag{3.16}
$$

忽略前一个不等式右侧的负项 $-\frac{L_\phi}{2}\|x_k-x_{k-1}\|^2$，我们可以得出

$$
\begin{aligned}
f(x_{k+1},\theta_k)+\phi(x_{k+1}) &\le f(x_k,\theta_k)+\phi(x_k)+\left(\frac{L_\phi(\alpha_x+\rho)}{2\alpha_x}-\frac{1}{2\alpha_x}\right)\|z_k-z_{k-1}\|^2\\
&\quad+\frac{1}{2\alpha_x}\|x_k-x_{k-1}\|^2.
\end{aligned} \tag{3.17}
$$

现在，我们能够证明与算法1的 Step 1 相关的价值函数具有递减性质。具体而言，

$$\begin{aligned}
&H(z_k,\theta_k)=H(x_{k+1},x_k,\theta_k)=f(x_{k+1},\theta_k)+\phi(x_{k+1})+\frac{1}{4\alpha_x}\|x_{k+1}-x_k\|^2\\
&\le f(x_k,\theta_k)+\phi(x_k)+\left(\frac{L_\phi(\alpha_x+\rho)}{2\alpha_x}-\frac{1}{2\alpha_x}\right)\|z_k-z_{k-1}\|^2+\frac{1}{2\alpha_x}\|x_k-x_{k-1}\|^2\\
&\quad+\frac{1}{4\alpha_x}\|x_{k+1}-x_k\|^2\\
&=f(x_k,\theta_k)+\phi(x_k)+\frac{1}{4\alpha_x}\|x_k-x_{k-1}\|^2+\left(\frac{L_\phi(\alpha_x+\rho)}{2\alpha_x}-\frac{1}{4\alpha_x}\right)\|z_k-z_{k-1}\|^2\\
&=H(z_{k-1},\theta_k)+\left(\frac{L_\phi(\alpha_x+\rho)}{2\alpha_x}-\frac{1}{4\alpha_x}\right)\|z_k-z_{k-1}\|^2,
\end{aligned}$$

其中，第一个不等式直接由 (3.17) 得出，最后一个等式则根据 (3.9) 中价值函数的定义得出。根据对 α_x 和 ρ的假设，很容易看出 $\left(\frac{L_\phi(\alpha_x+\rho}{2\alpha_x}-\frac{1}{4\alpha_x}<0\right)$，因此可以得出结论：存在 $c_x>0$使得

$$H(z_k,\theta_k)\le H(z_{k-1},\theta_k)-c_x\|z_k-z_{k-1}\|^2. \tag{3.18}$$

现在我们分析算法1的 Step 2。与 (3.13) 类似地推理可得

$$\hat{\theta}_k=\underset{\theta\in\mathbb{R}^p}{\operatorname{argmin}}\,\nabla_\theta f(x_{k+1},\theta_k)^T(\theta-\theta_k)+\frac{1}{2\alpha_\theta}\|\theta-\theta_k\|^2+\iota_\Omega(\theta). \tag{3.19}$$

因此，

$$\nabla_\theta f(x_{k+1},\theta_k)^T(\hat{\theta}_k-\theta_k)+\frac{1}{2\alpha_\theta}\|\hat{\theta}_k-\theta_k\|^2\le 0,$$

此外，根据 Step 2.2中 d_k 的定义，我们得到

$$\nabla_\theta f(x_{k+1},\theta_k)^T d_k\le-\frac{1}{2\alpha_\theta}\|d_k\|^2. \tag{3.20}$$

此外，设 $K\subseteq\mathbb{R}^n$为包含 $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$的任意有界子集。由于根据 (3.5)-(3.6)，对于所有 $k\in\mathbb{N}$，$\nabla_\theta f(x_{k+1},\cdot)$ 是关于K的 $L(-)$Lipschitz连续函数，因此可以证明存在一个依赖于 $L(K)$的 $\lambda_{\min}>0$，使得 [15, 命题 3.2]

$$\lambda_k\ge\lambda_{\min},\quad\forall\ k\in\mathbb{N}. \tag{3.21}$$

因此，根据 Step 2.2中的线搜索不等式，我们可以观察到

$$\begin{aligned}
f(x_{k+1},\theta_{k+1})&\le f(x_{k+1},\theta_k)+\nu\lambda_k\nabla_\theta f(x_{k+1},\theta_k)^T d_k\\
&\le f(x_{k+1},\theta_k)-\frac{\nu\lambda_k}{2\alpha_\theta}\|d_k\|^2\\
&\le f(x_{k+1},\theta_k)-\frac{\nu\lambda_k}{2\alpha_\theta}\|\theta_{k+1}-\theta_k\|^2\\
&\le f(x_{k+1},\theta_k)-\frac{\nu\lambda_{\min}}{2\alpha_\theta}\|\theta_{k+1}-\theta_k\|^2,
\end{aligned} \tag{3.22}$$

其中，第二个不等式由（3.20）得出，第三个不等式由性质$\|\theta_{k+1}-\theta_k\|\le\|d_k\|$得出，而该性质可由 Step 2.3 和 $\lambda_k\le 1$推出；最后一个不等式则由

（3.21）得出。此时可得到与算法1的 STEP 2 相关的价值函数具有递减性质。事实上，

$$
\begin{aligned}
H(z_k,\theta_{k+1}) &= H(x_{k+1},x_k,\theta_{k+1}) = f(x_{k+1},\theta_{k+1}) + \phi(x_{k+1}) + \frac{1}{4\alpha_x}\|x_{k+1}-x_k\|^2 \\
&\le f(x_{k+1},\theta_k) + \phi(x_{k+1}) + \frac{1}{4\alpha_x}\|x_{k+1}-x_k\|^2 - \frac{\nu\lambda_{\min}}{2\alpha_\theta}\|\theta_{k+1}-\theta_k\|^2 \\
&= H(z_k,\theta_k) - \frac{\nu\lambda_{\min}}{2\alpha_\theta}\|\theta_{k+1}-\theta_k\|^2,
\end{aligned} \tag{3.23}
$$

其中，该不等式由 (3.22) 得出。将正数 c_θ 记为 $\frac{\nu\lambda_{\min}}{2\alpha_\theta}$，并将 (3.18) 代入 (3.23)，可得

$$
H(z_k,\theta_{k+1}) \le H(z_{k-1},\theta_k) - c_x\|z_k - z_{k-1}\|^2 - c_\theta\|\theta_{k+1}-\theta_k\|^2.
$$

结合 $\bar{z}_k$ 的定义和范数恒等式，可得上述最后一个不等式

$$
\begin{aligned}
\|\bar{z}_{k+1}-\bar{z}_k\|^2 &= \|(z_k,\theta_{k+1}) - (z_{k-1},\theta_k)\|^2 = \|(z_k - z_{k-1}, \theta_{k+1}-\theta_k)\|^2 \\
&= \|z_k - z_{k-1}\|^2 + \|\theta_{k+1}-\theta_k\|^2
\end{aligned}
$$

从而得到

$$
H(\bar{z}_{k+1}) \le H(\bar{z}_k) - c\|\bar{z}_{k+1}-\bar{z}_k\|^2,
$$

其中 $c = \min\{c_x, c_\theta\}$。 □

下一个引理指出，在迭代点 $\hat{z}_{k+1} = (x_{k+1}^T,\ x_k^T,\ \hat{\theta}_k^T)^T$ 处计算的次梯度 v_{k+1} 的范数，上界为一个与算法1生成的两个连续迭代点之间的间隙 $\|\bar{z}_{k+1}-\bar{z}_k\|$成正比的量。 [65, 中的引理 3.5]证明了单块前向反射后向方法的类似结果。

引理3.3。 设假设*1*成立。假设由算法*1*生成的序列 $\{(x_k,\theta_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ 有界。定义序列 $\{\hat{z}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 如下

$$
\hat{z}_k = \begin{pmatrix} x_k \\ x_{k-1} \\ \hat{\theta}_{k-1} \end{pmatrix}, \quad \forall\ k\in\mathbb{N}. \tag{3.24}
$$

若 $\rho < \frac{1}{2L_\phi}$ 和 $\alpha_x < \frac{1-2L_\phi\rho}{2L_\phi}$，则存在 $q>0$ 以及一个向量序列 $\{v_{k+1}\}_{k\in\mathbb{N}}$，使得 $v_{k+1}\in\partial H(\hat{z}_{k+1})$ 且

$$
\|v_{k+1}\| \le q\|\bar{z}_{k+1}-\bar{z}_k\|, \quad \forall\ k\in\mathbb{N}.
$$

证明。 在开始证明之前，我们注意到，由于算法1中 $\{(x_k,\theta_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$,STEP 2.1 的有界性假设，以及投影梯度算子关于变量 x 和 θ的连续性，投影梯度点序列 $\{\theta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 有界。接下来，取任意一个有界子集 $K_1\times K_2\subseteq\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p$，使得

$$
\{(x_k,\theta_k)\}_{k\in\mathbb{N}} \cup \{(x_k,\hat{\theta}_k)\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq K_1\times K_2. \tag{3.25}
$$

这一点至关重要，因为我们希望在一个有界子集上应用假设1(i))，而我们关注的迭代序列都属于该子集。

根据用于计算迭代值 θ_k 的极小化问题 (3.19) 所对应的最优性条件，存在 $w_{k+1}\in\partial\iota_\Omega(\theta_k)$，使得

$$
\nabla_\theta f(x_{k+1},\theta_k) + \frac{1}{\alpha_\theta}(\hat{\theta}_k - \theta_k) + w_{k+1} = 0,
$$

或者等价地

$$w_{k+1} = -\nabla_\theta f(x_{k+1}, \theta_k) + \frac{1}{\alpha_\theta}(\theta_k - \hat{\theta}_k) \in \partial \iota_\Omega(\hat{\theta}_k). \tag{3.26}$$

此外，对于所有 $k \in \mathbb{N}$，我们定义向量

$$v_{k+1} = \begin{pmatrix} \nabla_x f(x_{k+1}, \hat{\theta}_k) + \frac{1}{2\alpha_x}(x_{k+1} - x_k) + \nabla\phi(x_{k+1}) \\ \frac{1}{2\alpha_x}(x_k - x_{k+1}) \\ \nabla_\theta f(x_{k+1}, \hat{\theta}_k) + w_{k+1} \end{pmatrix}. \tag{3.27}$$

$\hat{}$ 通过在点 $\hat{}z_{k+1} = (x_{k+1},\ x_k,\ \theta_k)$ 处显式写出次微分（3.10），并由（3.26）回顾可知 $w_{k+1} \in \partial \iota_\Omega(\theta_k)$，因此可得 $v_{k+1} \in \partial H(\hat{}z_{k+1})$。然后，次梯度 v_{k+1} 的范数的上界如下

$$\begin{aligned} \|v_{k+1}\| &\leq \left\| \nabla_x f(x_{k+1}, \hat{\theta}_k) + \frac{1}{2\alpha_x}(x_{k+1} - x_k) + \nabla\phi(x_{k+1}) \right\| \\ &\quad + \frac{1}{2\alpha_x}\|x_k - x_{k+1}\| + \|\nabla_\theta f(x_{k+1}, \hat{\theta}_k) + w_{k+1}\| \\ &= \left\| \nabla_x f(x_{k+1}, \hat{\theta}_k) + \frac{1}{2\alpha_x}(x_{k+1} - x_k) + \nabla\phi(x_{k+1}) \right\| \\ &\quad + \frac{1}{2\alpha_x}\|x_k - x_{k+1}\| + \left\| \nabla_\theta f(x_{k+1}, \hat{\theta}_k) - \nabla_\theta f(x_{k+1}, \theta_k) + \frac{1}{\alpha_\theta}(\theta_k - \hat{\theta}_k) \right\| \\ &\leq \left\| \nabla_x f(x_{k+1}, \hat{\theta}_k) + \frac{1}{2\alpha_x}(x_{k+1} - x_k) + \nabla\phi(x_{k+1}) \right\| \\ &\quad + \frac{1}{2\alpha_x}\|x_k - x_{k+1}\| + \left(L(K_1) + \frac{1}{\alpha_\theta} \right) \|\hat{\theta}_k - \theta_k\|, \end{aligned} \tag{3.28}$$

其中，通过用（3.26）替换 w_{k+1} 可得到等式；第二个不等式则由三角不等式和假设1(i)推出，同时结合（3.6）中上界 $L(K_2)$ 的定义，其中 K_2 由（3.25）给出。在（3.28）右侧第一个范数中加上并减去 $\nabla_x f(x_{k+1},\ \theta_k)$，并应用三角不等式，可得

$$\begin{aligned} \|v_{k+1}\| &\leq \left\| \nabla_x f(x_{k+1}, \hat{\theta}_k) - \nabla_x f(x_{k+1}, \theta_k) \right\| \\ &\quad + \left\| \nabla_x f(x_{k+1}, \theta_k) + \frac{1}{2\alpha_x}(x_{k+1} - x_k) + \nabla\phi(x_{k+1}) \right\| \\ &\quad + \frac{1}{2\alpha_x}\|x_k - x_{k+1}\| + \left(L(K_1) + \frac{1}{\alpha_\theta} \right) \|\hat{\theta}_k - \theta_k\| \\ &\leq \left(L(K_1) + L(K_1, K_2) + \frac{1}{\alpha_\theta} \right) \|\hat{\theta}_k - \theta_k\| + \frac{1}{2\alpha_x}\|x_k - x_{k+1}\| \\ &\quad + \left\| \nabla_x f(x_{k+1}, \theta_k) + \frac{1}{2\alpha_x}(x_{k+1} - x_k) + \nabla\phi(x_{k+1}) \right\|, \end{aligned} \tag{3.29}$$

第二个不等式是由假设1(i)推得的，具体而言，是由 ∇f 在式（3.25）定义的有界集合 $K_1 \times K_2$ 上的局部利普希茨连续性推得的。根据计算迭代值 x_{k+1} 所对应的最优性条件（见式（3.13））， 我们可以写出

以下等式

$$\nabla_x f(x_{k+1}, \theta_k) = \frac{1}{\alpha_x}(y_k - x_{k+1}) - \nabla\phi(x_k). \tag{3.30}$$

我们将 (3.30) 代入 (3.29)，并再次使用三角不等式，从而得到

$$\begin{aligned}
\|v_{k+1}\| &\leq \left(L(K_1) + L(K_1, K_2) + \frac{1}{\alpha_\theta}\right)\|\hat{\theta}_k - \theta_k\| + \frac{1}{\alpha_x}(\|x_{k+1} - x_k\| + \|y_k - x_{k+1}\|) \\
&\quad + \|\nabla\phi(x_{k+1}) - \nabla\phi(x_k)\| \\
&\leq \frac{1}{\lambda_k}\left(L(K_1) + L(K_1, K_2) + \frac{1}{\alpha_\theta}\right)\|\theta_{k+1} - \theta_k\| + \frac{2}{\alpha_x}\|x_{k+1} - x_k\| \\
&\quad + \frac{\rho}{\alpha_x}\|\nabla\phi(x_k) - \nabla\phi(x_{k-1})\| + \|\nabla\phi(x_{k+1}) - \nabla\phi(x_k)\| \\
&\leq \frac{1}{\lambda_k}\left(L(K_1) + L(K_1, K_2) + \frac{1}{\alpha_\theta}\right)\|\theta_{k+1} - \theta_k\| + \left(\frac{2}{\alpha_x} + L_\phi\right)\|x_{k+1} - x_k\| \\
&\quad + \frac{\rho L_\phi}{\alpha_x}\|x_k - x_{k-1}\|
\end{aligned} \tag{3.31}$$

其中第二个不等式由算法1的 Step 1.1、 Step 2.2、 Step 2.3 以及三角不等式得出，第三个不等式则源于 $\nabla\phi$ 的利普希茨连续性（假设 1(ii)）。

然后，将 (3.21) 应用于 (3.31)，我们便可得到如下上界

$$\begin{aligned}
\|v_{k+1}\| &\leq \frac{1}{\lambda_{\min}}\left(L(K_1) + L(K_1, K_2) + \frac{1}{\alpha_\theta}\right)\|\theta_{k+1} - \theta_k\| + \left(\frac{2}{\alpha_x} + L_\phi\right)\|x_{k+1} - x_k\| \\
&\quad + \frac{\rho L_\phi}{\alpha_x}\|x_k - x_{k-1}\| \\
&\leq \left(\frac{1}{\lambda_{\min}}\left(L(K_1) + L(K_1, K_2) + \frac{1}{\alpha_\theta}\right) + \left(\frac{2}{\alpha_x} + L_\phi\right) + \frac{\rho L_\phi}{\alpha_x}\right)\|\bar{z}_{k+1} - \bar{z}_k\|,
\end{aligned}$$

其中第二个不等式是通过回顾 (3.11) 中序列 $\{\bar{z}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 的定义及其块结构而得到的。因此，令 $q = \frac{1}{\lambda_{\min}}\left(L(K_1) + L(K_1, K_2) + \frac{1}{\alpha_\theta}\right) + \left(\frac{2}{\alpha_x} + L_\phi\right) + \frac{\rho L_\phi}{\alpha_x}$，命题得证。□

接下来，我们证明，在 $\hat{z}_{k+1}$ 处计算的价值函数 (3.9) 的值，受到同一函数在 $\bar{z}_{k+1}$ 处的值的上下界约束。

引理 3.4。 假设假设*1*成立。设由算法*1*生成的序列 $\{(x_k, \theta_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ 有界。令 $\{\bar{z}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 和 $\{\hat{z}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 分别按(3.11) 和(3.24)定义。则存在一个非负实数序列 $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$，使得$\lim_{k\to\infty} t_k = 0$ 且

$$H(\bar{z}_{k+1}) \leq H(\hat{z}_{k+1}) \leq H(\bar{z}_k) + t_k, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}. \tag{3.32}$$

证明。 从 $H(\bar{z}_{k+1})$ 的取值出发，我们立即注意到

$$\begin{aligned} H(\bar{z}_{k+1}) &= H(x_{k+1}, x_k, \theta_{k+1}) \\ &= f(x_{k+1}, \theta_{k+1}) + \phi(x_{k+1}) + \iota_\Omega(\theta_{k+1}) + \frac{1}{4\alpha_x}\|x_{k+1} - x_k\|^2 \\ &\le f(x_{k+1}, \hat{\theta}_k) + \phi(x_{k+1}) + \iota_\Omega(\hat{\theta}_k) + \frac{1}{4\alpha_x}\|x_{k+1} - x_k\|^2 \\ &= H(x_{k+1}, x_k, \hat{\theta}_k) = H(\hat{z}_{k+1}), \end{aligned} \tag{3.33}$$

其中，不等式 (3.33) 成立，是因为算法1的 Step 2.3 ，且 $\hat{}\theta_{k+1}$ 和 θ_k 均属于 Ω。因此，(3.32) 中左侧的不等式成立。

另一方面，利用 (3.5) 中所述的 ∇f 的块利普希茨连续性、(3.6) 中给出的 $\nabla_x f(\cdot, \theta)$ 和 $\nabla_\theta f(x, \cdot)$ 关于所有 $(x, \theta) \in K_1 \times K_2$ 的块利普希茨常数上界 $L(K_1)$ 和 $L(K_2)$（其中 $K_1 \times K_2$ 的定义同 (3.25)），以及 $\nabla\phi$ 的利普希茨连续性，可得

$$\begin{aligned} H(\hat{z}_{k+1}) &= H(x_{k+1}, x_k, \hat{\theta}_k) \\ &= f(x_{k+1}, \hat{\theta}_k) + \phi(x_{k+1}) + \iota_\Omega(\hat{\theta}_k) + \frac{1}{4\alpha_x}\|x_{k+1} - x_k\|^2 \\ &\le f(x_{k+1}, \theta_k) + \nabla_\theta f(x_{k+1}, \theta_k)^T(\hat{\theta}_k - \theta_k) + \frac{L(K_1)}{2}\|\hat{\theta}_k - \theta_k\|^2 \\ &+ \phi(x_k) + \nabla\phi(x_k)^T(x_{k+1} - x_k) + \frac{L_\phi}{2}\|x_{k+1} - x_k\|^2 + \iota_\Omega(\theta_k) + \frac{1}{4\alpha_x}\|x_{k+1} - x_k\|^2 \\ &\le f(x_{k+1}, \theta_k) + \phi(x_k) + \iota_\Omega(\theta_k) + \frac{1}{2}\left(L_\phi + \frac{1}{2\alpha_x}\right)\|x_{k+1} - x_k\|^2 \\ &+ \frac{L(K_1)}{2}\|\hat{\theta}_k - \theta_k\|^2 + \nabla\phi(x_k)^T(x_{k+1} - x_k) \\ &\le f(x_k, \theta_k) + \nabla_x f(x_k, \theta_k)^T(x_{k+1} - x_k) + \frac{L(K_2)}{2}\|x_{k+1} - x_k\|^2 + \phi(x_k) + \iota_\Omega(\theta_k) \\ &+ \frac{1}{2}\left(L_\phi + \frac{1}{2\alpha_x}\right)\|x_{k+1} - x_k\|^2 + \frac{L(K_1)}{2}\|\hat{\theta}_k - \theta_k\|^2 + \nabla\phi(x_k)^T(x_{k+1} - x_k) \\ &\le H(\bar{z}_k) + \frac{1}{2}\left(L_\phi + L(K_2) + \frac{1}{2\alpha_x}\right)\|x_{k+1} - x_k\|^2 + \frac{L(K_1)}{2}\|\hat{\theta}_k - \theta_k\|^2 \\ &+ (\|\nabla_x f(x_k, \theta_k)\| + \|\nabla\phi(x_k)\|)\|x_{k+1} - x_k\|. \end{aligned} \tag{3.34}$$

在上述不等式链中，第一个不等式是通过对函数 $f(x_{k+1}, \cdot)$ 和 $\phi(\cdot)$ 应用下降引理 [8, 定理 18.15] 得出的，并注意到对于所有 $x \in K_1$（见 (3.6)），$\nabla_\theta f(x, \cdot)$ 的块利普希茨常数均以上界 $L(K_1)$ 为界，其中 K_1 的定义同 (3.25)；第二个不等式由 (3.20) 得出；第三个不等式是再次对函数 $f(\cdot, \theta_k)$ 应用下降引理，并利用 (3.6) 中给出的界 $L(K_2)$ 得出的，其中 K_2 的定义同 (3.25)；第四个不等式可通过添加项 $\frac{1}{4\alpha_x}\|x_k - x_{k-1}\|^2$ 并应用柯西-施瓦茨不等式直接得出。

——

由于对于所有 $\theta \in K_2$，$\nabla_x f(\cdot, \theta)$ 是 $L(K_2)$–Lipschitz连续的，$\nabla\phi$ 是 Lipschitz连续的，且序列 $\{(x_k, \theta_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ 有界，因此存在一个常数 $\Lambda > 0$，使得

$$\|\nabla_x f(x_k, \theta_k)\| + \|\nabla\phi(x_k)\| \le \Lambda.$$

因此，不等式 (3.34) 可推出

$$\begin{aligned} H(\hat{z}_{k+1}) &\leq H(\bar{z}_k) + \frac{1}{2}\left(L_\phi + L(K_2) + \frac{1}{2\alpha_x}\right)\|x_{k+1} - x_k\|^2 + \frac{L(K_1)}{2}\|\hat{\theta}_k - \theta_k\|^2 \\ &\quad + \Lambda\|x_{k+1} - x_k\| \\ &\leq H(\bar{z}_k) + \frac{1}{2}\left(L_\phi + L(K_2) + \frac{1}{2\alpha_x}\right)\|x_{k+1} - x_k\|^2 + \frac{L(K_1)}{2\lambda_k}\|\theta_{k+1} - \theta_k\|^2 \\ &\quad + \Lambda\|x_{k+1} - x_k\| \\ &\leq H(\bar{z}_k) + \frac{1}{2}\left(L_\phi + \frac{L(K_1)}{\lambda_{\min}} + L(K_2) + \frac{1}{2\alpha_x}\right)\|\bar{z}_{k+1} - \bar{z}_k\|^2 + \Lambda\|\bar{z}_{k+1} - \bar{z}_k\|, \end{aligned}$$

其中，第二个不等式由算法1的 Step 2.3 和 $\lambda_k \leq 1$得出，最后一个不等式则源于（3.21）以及（3.11）中给出的序列 $\{\bar{z}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 的定义。

因此，得到以下关系

$$H(\hat{z}_{k+1}) \leq H(\bar{z}_k) + t_k,$$

其中

$$t_k = \frac{1}{2}\left(L_\phi + \frac{L(K_1)}{\lambda_{\min}} + L(K_2) + \frac{1}{2\alpha_x}\right)\|\bar{z}_{k+1} - \bar{z}_k\|^2 + \Lambda\|\bar{z}_{k+1} - \bar{z}_k\|, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}. \tag{3.35}$$

最后，令 $H_{low} \in \mathbb{R}$ 为任意满足以下条件的常数：对于所有（x，y，θ）$\in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$，均有 H（x，y，θ）；根据假设1(iii)，这样的常数存在。将不等式（3.12）对$k = 0, \ldots, K$求和，得到

$$\sum_{k=0}^{K} \|\bar{z}_{k+1} - \bar{z}_k\|^2 \leq \frac{1}{c}(H(\bar{z}_0) - H(\bar{z}_{K+1})) \leq \frac{1}{c}(H(\bar{z}_0) - H_{low}),$$

因此

$$\sum_{k=0}^{K} \|\bar{z}_{k+1} - \bar{z}_k\|^2 < \infty, \tag{3.36}$$

由此我们可以得出结论：由(3.35)定义的序列 $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 收敛于零。因此，(3.32)中的右侧不等式成立，证明完毕。□

我们现在可以证明算法1的收敛性。为了得到所需结果，我们将假设(3.9)中的价值函数 H 满足Kurdyka–Lojasiewicz不等式（KL），且该不等式在任意点$(x_*, y_*, \theta_*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ [14, 定义 3]，处成立，即存在 $\upsilon \in (0, +\infty]$、一个邻域 $\mathcal{U}$（属于(x_*, y_*, θ_*)）以及一个连续凹函数ξ：$[0, \upsilon) \longrightarrow [0, +\infty)$，其中 $\xi(0) = 0$，$\xi \in C^1(0, \upsilon)$，并且 $\xi'(s) > 0$对所有 $s \in (0, \upsilon)$成立，使得

$$\xi'(H(x, y, \theta) - H(x_*, y_*, \theta_*))\,\mathrm{dist}(0, \partial H(x, y, \theta)) \geq 1, \tag{3.37}$$

对所有 $(x, y, \theta) \in \mathcal{U} \cap \{(x, y, \theta) \in \mathbb{R}^n : \quad F(x_*, y_*, \theta_*) < F(x, y, \theta) < F(x_*, y_*, \theta_*) + \upsilon\}$。

定理3.5. 设假设*1*成立。假设由算法*1*生成的序列 $\{(x_k, \theta_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ 有界。若 $\rho < \frac{1}{2L_\phi}$ 与 $\alpha_x < \frac{1-2L_\phi\rho}{2L_\phi}$，且价值函数(3.9)在其定义域上满足*KL*不等式(3.37)，则序列 $\{(x_k, \theta_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ 收敛到问题(3.3)的一个驻点。

证明. 基于引理3.2-3.3-3.4，我们已证明存在正常数 c, q以及一个收敛到零的非负序列 $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$，使得对所有 $k \in \mathbb{N}$

$$H(\bar{z}_{k+1}) \leq H(\bar{z}_k) - c\|\bar{z}_{k+1} - \bar{z}_k\|^2 \tag{3.38}$$

$$H(\bar{z}_{k+1}) \leq H(\hat{z}_{k+1}) \leq H(\bar{z}_k) + t_k \tag{3.39}$$

$$\|v_{k+1}\| \leq q\|\bar{z}_{k+1} - \bar{z}_k\|. \tag{3.40}$$

此外，我们有

$$\begin{aligned}\|\hat{z}_{k+1} - \bar{z}_k\| &\leq \|x_{k+1} - x_k\| + \|x_k - x_{k-1}\| + \|\hat{\theta}_k - \theta_k\| \\ &\leq \|x_{k+1} - x_k\| + \|x_k - x_{k-1}\| + \frac{1}{\lambda_k}\|\theta_{k+1} - \theta_k\| \\ &\leq \left(2 + \frac{1}{\lambda_{\min}}\right)\|\bar{z}_{k+1} - \bar{z}_k\|,\end{aligned}$$

其中第二个不等式由 Step 2.3、$\lambda_k \leq 1$ 和 (3.21) 得出，第三个不等式则由 (3.11) 中 $\{\bar{z}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 的定义推出。根据性质 (3.36)，上述不等式意味着

$$\lim_{k\to\infty} \|\hat{z}_{k+1} - \bar{z}_k\| = 0. \tag{3.41}$$

最后，根据 (3.41) 以及价值函数 H 在其定义域上的连续性，可轻易得出

$$\forall\, \{k_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N} \text{ such that } \lim_{j\to\infty} \bar{z}_{k_j} = z_* \quad \Rightarrow \quad \lim_{j\to\infty} H(\hat{z}_{k_j+1}) = H(z_*). \tag{3.42}$$

性质 (3.38)-(3.39)-(3.40)-(3.41)-(3.42)，结合 $\{(x_k,\ \theta_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ 的有界性，以及 H 满足 KL 不等式这一事实，使我们能够将算法1视为此前在 [17] 中提出并随后在 [19] 中简化的抽象收敛框架的一个特例。具体而言，应用 [19, 定理 14], 可得，序列 $\{\bar{z}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 收敛至 H 的一个驻点 $(x_*,\ y_*,\ \theta_*)$，即 $0 \in \partial H(x_*,\ y_*,\ \theta_*)$。根据 (3.10) 中给出的 H 的次微分显式表达式，我们立即得到 $x_* = y_*$，因此

$$0 \in \begin{pmatrix} \nabla_x f(x_*, \theta_*) + \nabla\phi(x_*) \\ 0 \\ \nabla_\theta f(x_*, \theta_*) + w_* \end{pmatrix}, \quad w_* \in \partial\iota_\Omega(\theta_*),$$

并根据式（3.7）中 F 的次微分表达式，我们得出 $0 \in \partial F(x_*,\ \theta_*)$，因此（$x_*,\ \theta_*$）是 F的驻点。□

注记 3.6。如果目标函数 F 在某个 o–极小结构 [13, 定义下是可定义的，那么价值函数 (3.9)在其定义域上满足KL不等式(3.37)，因为可定义函数满足(3.37)，且同一 o–极小结构 [13, 注记 5]中的有限个可定义函数之和仍属于该结构。对于盲模型(3.1)，只要正则项 $\phi(x) = \frac{1}{2}\|x - N_\sigma(x)\|^2$ 与最小二乘项和指示函数处于同一结构中且可定义，就能确保 F可定义。若所采用的神经网络 N_σ 由ReLU、eLU、二次函数和SoftPlus等可定义函数构建，便符合这一条件，因为可定义函数的复合仍然可定义 [29, 第5节2]。

4. Numerical experiments

本节将我们的方法用于真实图像超分辨率，以验证其效果。这些图像由意大利佛罗伦萨卡雷吉大学医院神经放射科使用1.5 T磁共振成像扫描仪（西门子）采集[1]。具体而言，我们评估该方法在不同脑切片上的表现：这些切片分别取自1.5 T采集的液体衰减反转恢复和SWI序列，并通过目视比较超分辨率图像与对应的3 T采集切片进行评估。更具体地说，我们选取同一患者的三个不同切片，每个切片在液体衰减反转恢复和SWI序列中均呈现可见病灶和不同的诊断特征。图1至图6的前两列展示了对应的3 T和1.5 T切片。图1和图2、图3和图4、图5和图6分别展示了同一脑切片对应的液体衰减反转恢复和SWI序列。

实现细节。我们首先介绍与(3.1)中目标函数相关的方案实现细节。术语 b对应于所考虑序列的原始 1.5 T 图像。在假设周期边界条件的情况下，卷积 $\theta * x$ 通过快速傅里叶变换 [39] 执行，而与 $f(\cdot,\ \theta)$ 相关联的近端算子，在算法1的 Step 1.2 中，使用 [74]中给出的闭式表达式进行计算。

对于(2.1)中 ϕ 的定义，我们选择 N_σ 作为 DRUNet 架构的可微版本，该架构最初在 [71] 中提出，随后在 [42]中进行了调整。更具体地说，我们采用随 [42] 代码发布并可通过 DeepInverse库 [59], 获得的预训练网络权重，并将超参数 $\sigma = 0.06$固定为指定值。

最后，在 Step 2.1 算法1中，将模糊核 θ 投影到集合 Ω 上，采用了 [28]中提出的迭代算法。

所有实验均在配备 Intel i9-285K 处理器和 NVIDIA RTXPRO4000 GPU 的工作站上完成。实现采用 Python 编写，并依赖 DeepInverse库 [59]。

模型参数。我们以启发式方式选取了定义（2.1）和（2.2）中的参数 λ 和 M。具体而言，对于液体衰减反转恢复切片，我们设置了 $\lambda = 0.15$ 和 $M = 0.45$；对于磁敏感加权成像数据，则设置了 $\lambda = 0.075$ $M = 0.6$。尺度因子设为 $s = 2$。

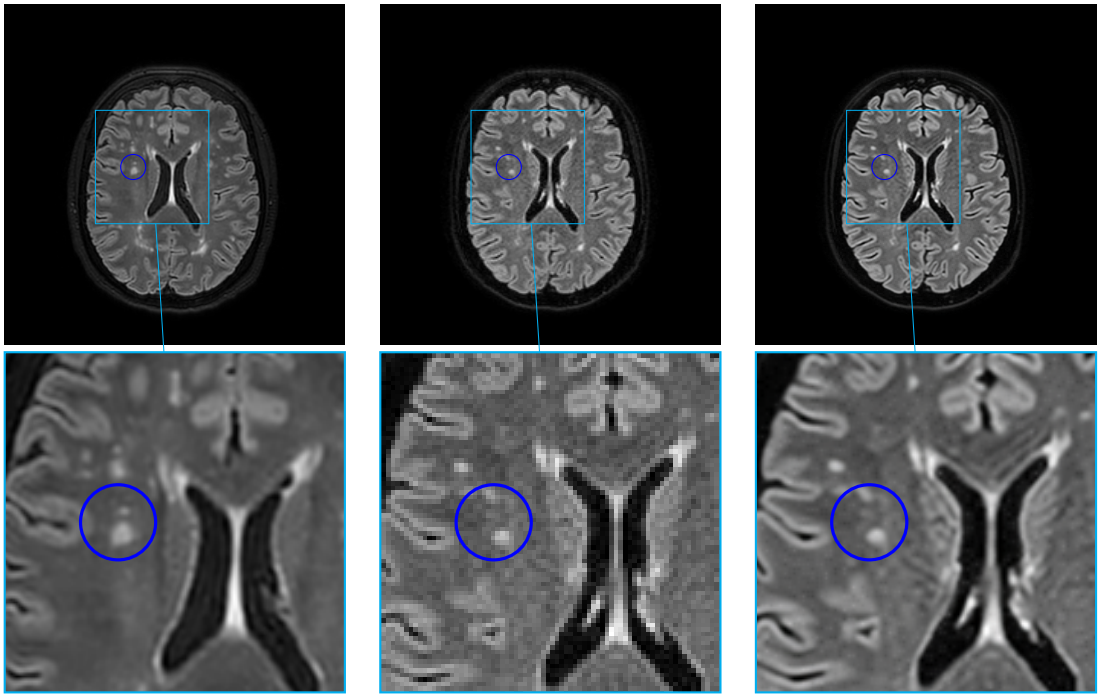
算法参数。初始迭代值 x_{-1} 和 x_0 通过对 b 进行双三次插值（并按照 [70]中的建议进行适当的偏移校正）来初始化。初始迭代值 θ_0 定义为方形滤波器 13×13，其计算方法是将标准差为 1 的高斯滤波器投影到集合 Ω 上。关于算法1中 Step 1 的步长参数，它们固定为 $\rho = 0.5$、$\alpha_x = 1.34$。在 Step 2中，我们设定 $\alpha_\theta = 0.8$，而相关的线搜索参数则选为 $\gamma = 0.5$ 和 $\nu = 10^{-4}$。最大迭代次数设为 100，并结合以下停止准则

$$\frac{|f(x_{k+1},\theta_{k+1}) + \phi(x_{k+1}) - f(x_k,\theta_k) - \phi(x_k)|}{|f(x_k,\theta_k) + \phi(x_k)|} \le \varepsilon, \tag{4.1}$$

[1]数据收集于意大利 PRIN 2022 PNRR 项目“基于磁共振成像的多发性硬化症中央静脉征自动检测的高级优化方法（AMETISTA）”下，项目代码为 P2022J9SNP（CUP E53D23017980001 – B53D23027830001）。研究方案和数据收集程序经意大利托斯卡纳大区“Area Vasta Centro”伦理委员会批准。除项目成员外，其他个人无法获取这些数据。

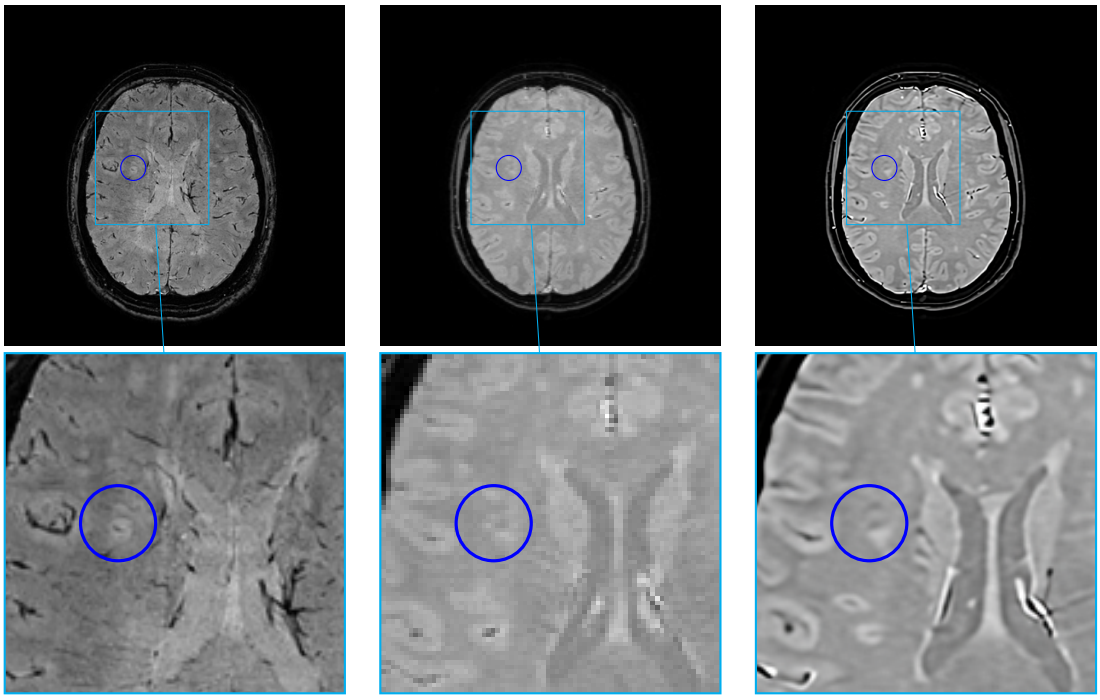
其中 $\varepsilon = 10^{-5}$。

数值结果。 我们在图 1–6 的第三列展示了使用我们的方法得到的超分辨率图像。视觉评估表明，图 1、3 和 5 中的超分辨率 1.5 T FLAIR图像在灰白质分辨和皮质清晰度方面均有显著提升，使白质病变更易于识别和界定。总体而言，其质量与 3 T FLAIR图像非常接近。图 2、4 和 6 中，1.5 T SWI序列的定性改善不那么明显，其血管结构的分辨度远低于 3 T SWI序列。不过，超分辨率 1.5 T SWI图像对小静脉的界定更加清晰，在某些情况下能够更可靠地将白质病变分类为 CVS阳性或CVS阴性。图注中还提供了关于使用我们的方法获得的重建结果的补充说明，以便对照讨论内容与视觉结果。



(A) 3T (B) 1.5 T (C) 我们的方法

FIGURE 1. FLAIR图像超分辨率示例。蓝色圆圈标出了两个白质高信号（即明亮）病灶。与原始 1.5 T FLAIR（b）相比，我们的方法（c）显著改善了病灶边界和皮质的清晰度，呈现出与 3T FLAIR（a）非常相似的视觉效果。

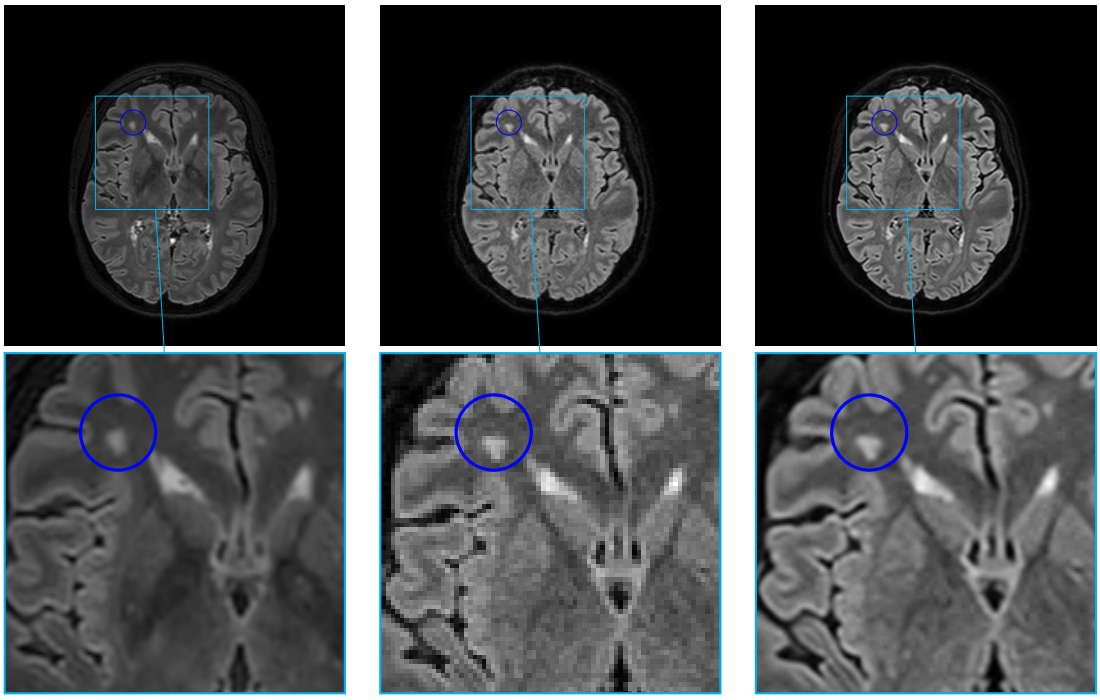


(A) 3T (B) 1.5 T (C) 我们的方法

FIGURE 2. 与图1中FLAIR图像所示的同一脑切片对应的SWI图像超分辨率示例。蓝色圆圈标出了一个静脉周围白质病灶。在3T SWI（a）中，一条呈细长低信号（即黑色）线状的小静脉清晰可辨；而在1.5T SWI（b）中则无法清楚识别。采用我们的方法对1.5T SWI进行超分辨率处理后，中央静脉的显示效果得到改善（c）。

5. 结论

本研究探讨了临床环境中采集的真实 1.5 T MRI 图像的超分辨率问题。我们将该问题表述为一个盲逆问题，涉及对高分辨率图像和模糊核的联合估计。所提出的方法将用于图像的即插即用正则化与针对核的适当约束相结合，并采用异构交替分块坐标方案，由专门设计的算法处理各个子问题。我们严格证明了该方法的收敛性质。对 FLAIR 和 SWI序列的实验结果表明，图像的结构清晰度有所提升，静脉结构和白质病变等具有诊断意义的特征也更加清晰。与同一患者的 3 T图像进行比较后发现，该方法有望在无需硬件升级或有监督配对训练数据的情况下，部分弥合普及的低场系统与高场扫描仪之间的差距。未来工作将着重于在更大规模队列中进行验证，并扩展至三维采集。



(A) 3T (B) 1.5 T (C) 我们的方法

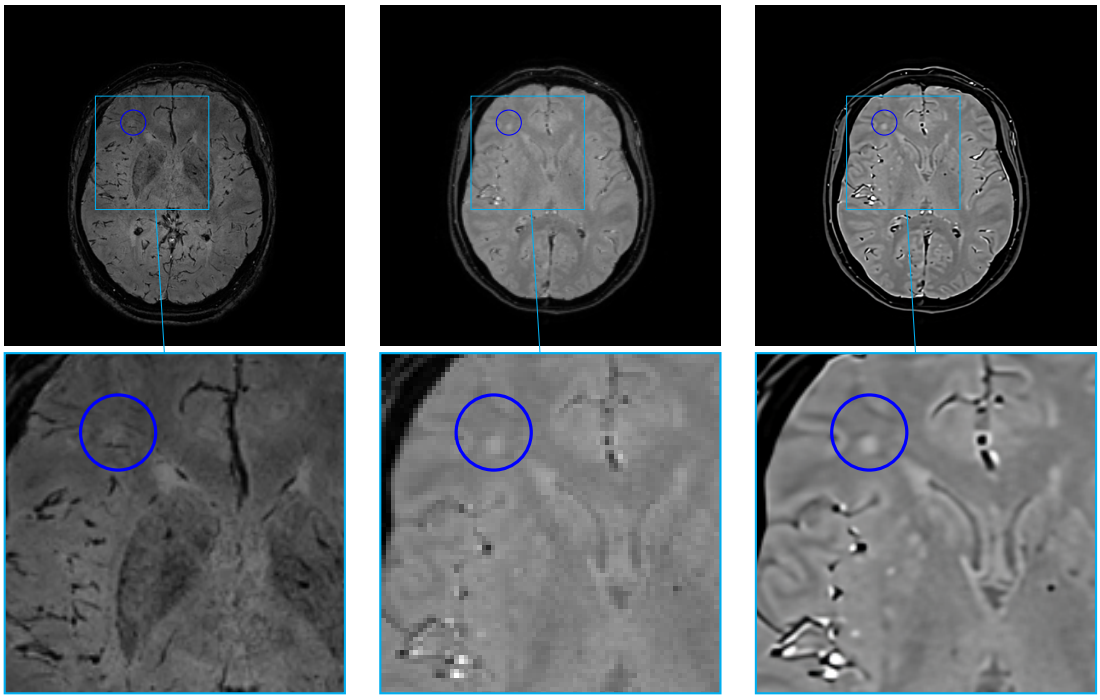
FIGURE 3. FLAIR图像超分辨率示例。蓝色圆圈标出了一个白质高信号（即明亮）病灶。与原始1.5 T FLAIR图像（b）相比，我们的方法（c）显著改善了病灶边界和皮质的清晰度，呈现出与3T FLAIR图像（a）非常相似的视觉效果。

ACKNOWLEDGMENTS

所有作者均部分获得意大利大学与研究部通过PRIN 2022 PNRR项目“用于从磁共振成像中检测多发性硬化症中央静脉征的自动化先进优化方法（AMETISTA）”提供的支持，项目代码：P2022J9SNP（CUP E53D23017980001 - B53D23027830001）。该项目由意大利国家复苏与韧性计划（PNRR）任务04、组成部分2、投资1.1资助，并由欧盟委员会通过下一代欧盟计划提供资金。

L.M. 获得#下一代欧盟（NGEU）的支持，并由大学与研究部（MUR）通过国家复苏与韧性计划（NRRP）项目 MNESYS(PE0000006)——以多尺度综合方法研究健康与疾病状态下的神经系统（第1553号法令，2022年10月11日）提供资金。

F.P.、S. R. 和 A. S. 是意大利国家高等数学研究所（INdAM）国家科学计算组（GNCS）的成员，谨此致谢。

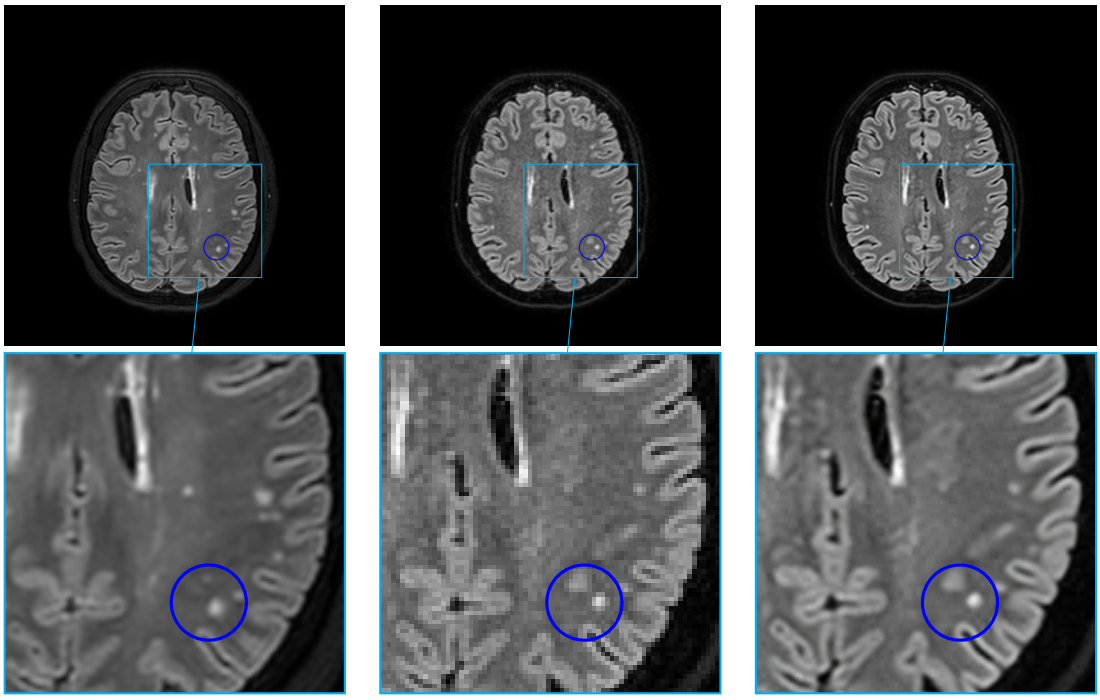


(A) 3T (B) 1.5 T (C) 我们的方法

FIGURE 4. 与图 4 中 FLAIR图像所示的同一脑切片对应的 SWI图像超分辨率示例。蓝色圆圈标出了一个静脉周围白质病灶。小静脉呈细黑线状低信号，在 3T SWI (a) 中界限清晰，而在 1.5T SWI (b) 中则无法清晰辨认。采用我们的方法对 1.5T SWI 进行超分辨率处理，可改善中央静脉的显示效果 (c)。

REFERENCES

1. *The Atlas of MS*, `https://atlasofms.org/map/global/epidemiology/number-of-people-with-ms`. 2. F. Abboud、E. Chouzenoux、J.C. Pesquet、J.H. Chenot 和 L. Laborelli, *Dual block coordinate forward-backward algorithm with application to deconvolution and deinterlacing of video sequences*, 《数学成像与视觉杂志》**59** (2017)，第 3 期，415–431。3. R. Ahmad、C. A. Bouman、G. T. Buzzard、S. Chan、S. Liu、E. T. Reehorst 和 P. Schniter, *Plug-and-Play Methods for Magnetic Resonance Imaging: Using Denoisers for Image Recovery*, 《IEEE信号处理杂志》**37**(2020)，第 1 期，105–116。4. Y. Ashida、Y. Honma、N. Miura、T. Shibuya、H. Kikuchi、Y. Tamada、Y. Kamei、A. Matsuda 和 M. Hattori, *Imaging performance of microscopy adaptive-optics system using scene-based wavefront sensing* **25** 2020 123707, 《生物医学光学杂志》(), 。5. H. Attouch、J. Bolte、P. Redont 和 A. Soubeyran, *Proximal alternating minimization and projection methods for nonconvex problems: an approach based on the kurdyka-Łojasiewicz inequality*, 《数学运筹学》**35** (2010)，第 2 期，438–457。6. H. Attouch、J. Bolte 和 B.F. Svaiter, *Convergence of descent methods for semi-algebraic and tame problems: proximal algorithms forward–backward splitting and regularized gauss-seidel methods*, ,,, 《数学规划》**137** (2013)，第 1–2 期，91–129。



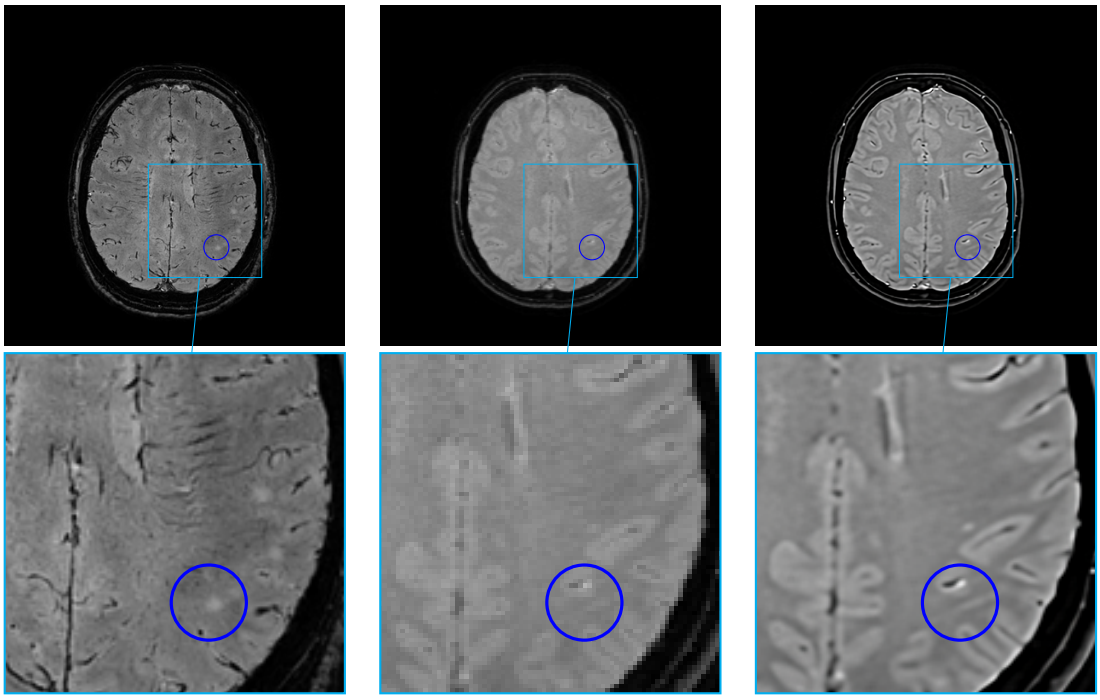
(A) 3T (B) 1.5 T (C) 我们的算法

FIGURE 5. FLAIR图像超分辨率示例。蓝色圆圈标示出一个白质高信号（即亮）病灶。与原生 1.5 T FLAIR图像（b）相比，我们的方法（c）显著改善了病灶边界和皮质的清晰度，呈现的视觉效果与 3T FLAIR图像（a）非常相似。

7. W. Bano, G.F. Piredda, M. Davies, I. Marshall, M. Golbabaee, R. Meuli, T. Kober, J.P. Thiran, and T. Hilbert, *Model-based super-resolution reconstruction of t2 maps*, Magn. Reson. Med. **83** (2020), 906–919. 8. H. H. Bauschke and P. L. Combettes, *Convex analysis and monotone operator theory in hilbert spaces*, Springer, 2017. 9. A. Beck, *First-Order Methods in Optimization*, 工业与应用数学学会, 2017. 10. Q. Beirinckx, B. Jeurissen, M. Nicastro, D. H. Poot, M. Verhove, A. J. den Dekker, and J. Sijbers, *Model-based super-resolution reconstruction with joint motion estimation for improved quantitative MRI parameter mapping* **100** 2022 102071 ,

Comput. Med. Imag. Graph ( ), . 11. A. Benfenati, A. Catozzi, and V. Ruggiero, *Neural blind deconvolution with Poisson data*, Inverse Problems **39** (2023), no. 5, 054003. 12. E.G. Birgin, J. M. Mart´ınez, and M. Raydan, *Nonmonotone spectral projected gradient methods onconvex set*, SIAM J. Optim. **10** (2000), 1196–1211. 13. J. Bolte, A. Daniilidis, and Shiota M., *Clarke subgradients of stratifiable functions*, SIAM J. Optim. **10** (2007), 556–572. 14. J. Bolte, S. Sabach, and M. Teboulle, *Proximal alternating linearized minimization for nonconvex and nonsmooth problems* **146** 2014 1 2, 459 494 , 数学规划

( ), no. - – . 15. S. Bonettini, I. Loris, F. Porta, and M. Prato, *Variable metric inexact line–search based methods for nonsmooth optimization*, SIAM J. Optim.**26** (2016), no. 2, 891–921.



(A) 3T (B) 1.5 T (C) 我们的算法

FIGURE 6. 与图 5 中 FLAIR图像所示的同一脑切片对应的 SWI图像超分辨率示例。蓝色圆圈标出了一个非静脉周围白质病灶，因为在 3T SWI 序列（a）中未检测到静脉。同样地，采用我们的方法对 1.5T SWI 进行超分辨率处理后（c）也未观察到静脉，这表明不会生成假阳性的中央静脉征病灶。

16. S. Bonettini、I. Loris、F. Porta、M. Prato 和 S. Rebegoldi, *On the convergence of a linesearch based proximal-gradient method for nonconvex optimization* **33** 2017 055005 , Inverse Problems （）， 。17. S. Bonettini、P. Ochs、M. Prato 和 S. Rebegoldi, *An abstract convergence framework with application to inertial inexact forward–backward methods* **84** 2023 319 362 , Comput. Optim. Appl.（）， –。18. S. Bonettini、M. Prato 和 S. Rebegoldi, *A block coordinate variable metric linesearch based proximal gradient method*, Comput. Optim. Appl. **71** （2018）， 5–52。19., *A new proximal heavy ball inexact line-search algorithm*, Comput. Optim. Appl. **88** （2024）， 525–565。20. S. Bonettini、R. Zanella 和 L. Zanni, *A scaled gradient projection method for constrained image deblurring* **25** 2009 1, 015002 , Inverse Probl.（）， 第 期。21. R. I. Bot,和 E. R. Csetnek, *An inertial Tseng's type proximal algorithm for nonsmooth and nonconvex optimization problems*, Journal of Optimization Theory and Applications**171**（2016）， 600–616。22. G. T. Buzzard、S. H. Chan、S. Sreehari 和 C. A. Bouman, *Plug-and-Play Unplugged: Optimization-Free Reconstruction Using Consensus Equilibrium*, SIAM J. Imaging Sci.**11**（2018）， 第 3 期，2001–2020。23. M. Castellaro、A. Tamanti、A. I. Pisani、F. B. Pizzini、F. Crescenzo 和 M. Calabrese, *The use of the central vein sign in the diagnosis of multiple sclerosis: a systematic review and meta-analysis*, Diagnostics **10** （2020），第 12 期，1025。24. W.T. Chen、A. Y. Zhu、M. Khorasaninejad、Z. Shi、V. Sanjeev 和 F. Capasso, *Immersion metalensesat visible wavelengths for nanoscale imaging*, Nano Lett. **17** （2017），3188–3194。

25. E. Chouzenoux、J.C. Pesquet 和 A. Repetti, *A block coordinate variable metric forward–backward algorithm* **66** 2016 3, 457 485 ，《全球优化期刊》（），第 – 号。26. P. L. Combettes 和 L. E. Glaudin, *Proximal Activation of Smooth Functions in Splitting Algorithms for Convex Image Recovery* **12** 2019 4, 1905 1935 ，SIAM J. Imaging Sci.（），第 – 号。27. A. Cornelio、F. Porta 和 M. Prato, *A convergent least-squares regularized blind deconvolution ap-proach*，《应用数学与计算》259（2015），173–186。28. Y. H. Dai 和 R. Fletcher, *New algorithms for singly linearly constrained quadratic programming problems subject to lower and upper bounds* **106** 2006 3, 403 421 ，数学规划（），第 – 号。29. D. Davis、D. Drusvyatskiy、S. Kakade 和 J.D. Lee, *Stochastic Subgradient Method Converges on Tame Functions* **20** 2020 119 154 ，《计算数学基础》（），–。30. C. Dong、C.C. Loy、K. He 和 X. Tang, *Learning a deep convolutional network for image super-resolution*，《欧洲计算机视觉会议论文集》，Springer，2014，第184–199页。31. J. Du、Z. He、L. Wang、A. Gholipour、Z. Zhou、D. Chen 和 Y. Jia, *Super-resolution reconstruction of single anisotropic 3d mr images using residual convolutional neural network*，《神经计算》392（2020），209–220。32. P. Frankel、G. Garrigos 和 J. Peypouquet, *Splitting methods with variable metric for kurdyka-Lojasiewicz functions and general convergence rates* **165** 2015 3, 874 900 ，《优化理论与应用期刊》（），第 – 号。33. W. Gan、S. Shoushtari、Y. Hu、J. Liu、H. An 和 U. S. Kamilov, *Block coordinate plug-and-play methodsfor blind inverse problems*，第37届神经信息处理系统大会论文集（美国纽约州雷德胡克），NIPS '23，Curran Associates Inc.，2023，34. L. Grippo 和 M. Sciandrone, *Globally convergent block-coordinate techniques for unconstrained optimization* **10** 1999 4, 587 637 ，《优化方法与软件》（），第 – 号。35. , *On the convergence of the block nonlinear gauss–seidel method under convex constraints*，《运筹学快报》26（2000），第3期，127–136。36. E. Gur、S. Sabach 和 S. Shtern, *Convergent nested alternating minimization algorithms for nonconvexoptimization problems*，《运筹学数学》48（2022），第1期。37. E. Gur、S. Sabach 和 S. Shtern, *Nested alternating minimization with FISTA for non-convex and non-smooth optimization problems* **199** 2023 1130 1157 ，《优化理论与应用期刊》（），–。38. P. C. Hansen、J. G. Nagy 和 D. P. O'Leary, *Deblurring images: Matrices, spectra and filtering*，SIAM，费城，2006。39. Per Christian Hansen、James G Nagy 和 Dianne P O'leary, *Deblurring images: matrices, spectra, andfiltering*，SIAM，2006。40. Stephen L Hauser 和 Bruce AC Cree, *Treatment of multiple sclerosis: a review*，《美国医学杂志》133（2020），第12期，1380–1390。41. C. Huang、Z. Wu、Y. Cheng、T. Zeng、C.-B. Sch

.. *Deep Block Proximal* onlieb 和 A. I. *Linearized Minimization Algorithm for Nonconvex Inverse Problems* **7** 2025 Aviles-Rivero, ，SIAM J. Math. Data Sci.（），第4期，1729–1754。42. Samuel Hurault、A. Leclaire 和 N. Papadakis, *Gradient step denoiser for convergent Plug-and-Play*，国际学习表征会议（ICLR），2022。43. Y. Jia、A. Gholipour、Z. He 和 S.K. Warfield, *A new sparse representation framework for reconstruction of an isotropic high spatial resolution mr volume from orthogonal anisotropic resolution scans*，IEEE Trans. Med. Imaging 36（2017），第5期。44. Y. Jia、Z. He、A. Gholipour 和 S.K. Warfield, *Single anisotropic 3-d mr image upsampling via overcomplete dictionary trained from in-plane high resolution slices* **20** ，IEEE J. Biomed. Health Inform.（2016），第6期，1552–1561。45. U. S. Kamilov、C. A. Bouman、G. T. Buzzard 和 B. Wohlberg, *Plug-and-play methods for integratingphysical and learned models in computational imaging: Theory, algorithms, and applications*，IEEE Signal. Proc. Mag. 40（2023），第1期，85–97。46. H. Lajous、T. Hilbert、C. W. Roy、S. Tourbier、P. de Dumast、T. Yu、J.P. Thiran、J.-B Ledoux、D. Piccini、P. Hagmann、R. Meuli、T. Kober、M. Stuber、R.B. van Heeswijk 和 M. Bach Cuadraet, *T2 mapping from super-resolution-reconstructed clinical fast spin echo magnetic resonance acquisitions*，医学图像计算与计算机辅助干预 - MICCAI（编者：A.L. Martel 等），Springer，2020，第114–124页。47. P. Boccacci、M. Bertero 和 V. Ruggiero, *Inverse imaging with poisson data*，布里斯托尔：IOP Publish，2018，48. Y. Malitsky 和 M. K. Tam, *A forward-backward splitting method for monotone inclusions without cocoercivity* **30** 2020 1451 1472 ，SIAM优化期刊（），–。

49. T. Meinhardt、M. Moller、C. Hazirbas 和 D. Cremers, *Learning proximal operators: Using denoising networks for regularizing inverse imaging problems* 2017, 1781 , IEEE国际计算机视觉会议论文集，第–1790页。50. Xavier Montalban、Christine Lebrun-Fr´enay、Jiwon Oh、Georgina Arrambide、Marcello Moccia、Maria Pia Amato、Lilyana Amezcua、Brenda Banwell、Amit Bar-Or、Frederik Barkhof 等, *Diagnosis of multiple sclerosis: 2024 revisions of the mcdonald criteria*, 《柳叶刀·神经病学》24（2025），第10期，850–865。51. P. Ochs, *Unifying abstract inexact convergence theorems and block coordinate variable metric iPiano*, SIAM优化期刊29（2019），第1期，541–570。52. Lela Okromelidze、Vishal Patel、Rahul B Singh、Alfonso S Lopez Chiriboga、Shengzhen Tao、Xiangzhi Zhou、Sina Straub、Erin M Westerhold、Vivek Gupta、Amit K Agarwal 等, *Central vein sign inmultiple sclerosis: a comparison study of the diagnostic performance of 3T versus 7T MRI*, 《美国神经放射学杂志》45（2024），第1期，76–81。53. D.H.J. Poot、V. Van Meir 和 J. Sijbers, *General and efficient super-resolution method for multi-slice MRI* 615 622 , 医学图像计算与计算机辅助干预（MICCAI），2010，第–页。54. M. Prato、A. La Camera、S. Bonettini 和 M. Bertero, *A convergent blind deconvolution method for post-adaptive-optics astronomical imaging* **29** 2013 065017 , Inverse Problems（），。55. M. Razaviyayn、M. Hong 和 Z.Q. Luo, *A unified convergence analysis of block successive minimizationmethods for nonsmooth optimization*, SIAM优化期刊23（2013），第2期，1126–1153。56. R. T. Rockafellar、R. J.-B. Wets 和 M. Wets, *Variational analysis*, Springer，柏林，1998。57. Mathieu Sarracanie、Cristen D LaPierre、Najat Salameh、David EJ Waddington、Thomas Witzel 和 Matthew S Rosen, *Low-cost high-performance MRI*, 《科学报告》5（2015），第1期，15177。58. Y. Sun、J. Liu 和 U. S. Kamilov, *Block Coordinate Regularization by Denoising*, IEEE Trans. Comput. Imaging 6（2020），908–921。59. Juli´an Tachella、Matthieu Terris、Samuel Hurault、Andrew Wang、Leo Davy、J´er´emy Scanvic、Victor Sechaud、Romain Vo、Thomas Moreau、Thomas Davies 等, *Deepinverse: A python package for solving imaging inverse problems with deep learning* **10** 2025 115, , 《开放源代码软件期刊》（），第期。60. Theofanis Thomas、Vasilios Maliakas、LG Astrakas、Ioannis Giannakelos、Kirillos Samsonidis、VG Syr-giamiotis、Maria Argyropoulou 等, *Pros and Cons of High Field Magnetic Resonance Imaging (MRI)* 2019 14 , 欧洲放射学会（），。61. P. Tseng, *A modified forward-backward splitting method for maximal monotone mappings*, SIAM控制与优化期刊38（2000），431–466。62. P. Tseng 和 S. Yun, *A coordinate gradient descentmethod for nonsmooth separable minimization*, 数学规划117（2009），第1–2期，387–423。63. G. Van Steenkiste、D.H.J. Poot、B. Jeurissen、A.J. den Dekker、E. Vanhevel、P.M. Parizel 和 J. Sijbers, *Super-resolution t1 estimation: quantitative high resolution t1 mapping from a set of low resolution t1 weighted images with different slice orientations* **77** 2017 1818 1830 , 《磁共振医学》（），–。64. S. V. Venkatakrishnan、C. A. Bouman 和 B. Wohlberg, *Plug-and-play priors for model based reconstruction*, IEEE全球信号与信息处理会议，2013，第945-948页。65. X. Wang 和 Z. Wang, *Multiseq: Fast forward-reflected-backward splitting method for nonconvex minimization problems* **82** 2022 441 463 , 《计算优化与应用》（），–。66. Y. Xu 和 W. Yin, *A block coordinate descent method for regularized multiconvex optimization with applications to nonnegative tensor factorization and completion* **6** 2013 , SIAM J. Imaging Sci.（），第3期，1758 1789–。67. , *A globally convergent algorithm for nonconvex optimization based on block coordinate update*, 《科学计算期刊》72（2017），第2期，700–1734。68. X. Yuan、Y. Liu、J. Suo 和 Q. Dai, *Plug-and-play algorithms for large-scale snapshot compressiveimaging*, IEEE/CVF计算机视觉与模式识别会议（CVPR）论文集，2020。69. K. Zhang、H. Hu、K. Philbrick、G. M. Conte、J. D. Sobek、P. Rouzrokh 和 J. E. Bradley, *SOUP-GAN:super-resolution MRI using generative adversarial networks*, 《断层成像》8（2022），905–919。70. K. Zhang、Y. Li、W. Zuo、L. Zhang、L. Van Gool 和 R. Timofte, *Plug-and-Play Image Restoration With Deep Denoiser Prior*, 《IEEE模式分析与机器智能汇刊》44（2021），第10期，6360–6376。71. Kai Zhang、Yawei Li、Wangmeng Zuo、Lei Zhang、Luc Van Gool 和 Radu Timofte, *Plug-and-play image restoration with deep denoiser prior*, 《IEEE模式分析与机器智能汇刊》44（2021），第10期，6360–6376。

72. C. Zhao、B. E. Dewey、D. L. Pham、P. A. Calabresi、D. S. Reich 和 J. L. Prince, *SMORE: a self-supervised anti-aliasing and super-resolution algorithm for MRI using deep learning*，《医学影像汇刊》**40**（2021），805–817。73. C. Zhao、M. Shao、A. Carass、H. Li、B. E. Dewey、L. M. Ellingsen 等, *Applications of a deeplearning method for anti-aliasing and superresolution in MRI*，《磁共振成像》**64**（2019），132–141。74. Ningning Zhao、Qi Wei、Adrian Basarab、Nicolas Dobigeon、Denis Kouam´e 和 Jean-Yves Tourneret, *Fast single image super-resolution using a new analytical solution for ℓ_2–ℓ_2 problems*，《IEEE图像处理汇刊》**25**（2016），第 8 期，3683–3697。