arXiv:2603.03886v1 [math.CO] 4 Mar 2026

舒尔函数反粒子的符号反转对合

YOUNGGWANG CHO、BYUNG-HAK HWANG 和 HOJOON LEE

Abstract. 我们通过在Takeuchi展开上构造一个变号对合，得到了对称函数环在舒尔基下的反粒子，从而解决了Benedetti和Sagan提出的问题。

1. 引言

许多组合对象都具有两种自然运算：合并和限制。这类运算通常赋予这些对象自然的霍普夫代数结构，揭示出丰富的组合与代数性质。因此，组合霍普夫代数的研究已成为代数组合学的核心主题。反粒子是霍普夫代数中一个基本而重要的组成部分，在霍普夫代数理论及其应用中都发挥着核心作用。Takeuchi [4]证明，每个连通分次双代数（H， m， u， Δ， ϵ）都是霍普夫代数，其反粒子 S 由下式给出

$$S = \sum_{k\geq 0} (-1)^k m^{k-1} \pi^{\otimes k} \Delta^{k-1}. \tag{1.1}$$

这里， m^{k-1}（分别地， Δ^{k-1}）表示（$k-1$）重乘积（分别地，余乘积），并采用约定 $m^{-1} = u$, $\Delta^{-1} = \epsilon$。此外， π 是满足 $\pi|_{H_0} = 0$ 和$\pi|_{\oplus_{n\geq 1} H_n}$ =id 的投影。尽管这一表达式完全一般，但通常会涉及大量抵消，因此很少适用于显式计算。为处理这一问题，Benedetti 和 Sagan [1]采用了一种结构良好的组合方法，构造了一个变号对合，从Takeuchi展开中优雅地提取无抵消公式。他们成功地将这一技术应用于众多组合Hopf代数。他们的证明不使用代数工具，而仅依赖于每个霍普夫代数的基本组合特征，从而帮助我们在基础层面理解这些霍普夫代数。

组合学中霍普夫代数最著名的实例或许是对称函数环 Sym。它在代数组合学中占据核心地位，作为连接表示论、代数几何及其他领域的通用对象。此外，在其众多具有特殊意义的基中，*Schur*基 $\{s_\lambda\}$ 尤为基础且重要。舒尔函数的反粒子公式是众所周知的：

定理([3])。Sym 中的反粒子由下式给出

$$S(s_{\lambda/\mu}) = (-1)^{|\lambda|-|\mu|} s_{\lambda^t/\mu^t}, \tag{1.2}$$

其中 λ^t/μ^t 表示共轭斜形状。

然而，该公式的现有证明依赖于代数恒等式或 ω对合的性质，而不是从Takeuchi公式直接给出组合推导。缺少这样一种初等证明在该理论中留下了空白，Benedetti与Sagan提出了如下问题：

问题 ([1]). 是否存在一个变号对合，能为Sym 的反粒子给出以*Schur*基表示的无抵消公式?

在本文中，我们通过在Takeuchi展开中构造一个自然的变号对合Φ 来回答该问题，该对合以纯组合方式给出反粒子公式(1.2)，从而补全了主要组合Hopf代数中反粒子的变号对合证明的全貌。

2. Proof of Theorem

我们遵循 [2], 中所采用的约定，下文使用的全部材料均可在其中找到。

众所周知，Sym 具有分次连通Hopf代数结构。舒尔函数上的余乘积Δ由下式给出

$$\Delta(s_{\lambda/\mu}) = \sum_{\mu\subseteq\nu\subseteq\lambda} s_{\nu/\mu} \otimes s_{\lambda/\nu}.$$

因此，我们有

$$\Delta^{k-1}(s_{\lambda/\mu}) = \sum_{\mu=\lambda_0\subseteq\lambda_1\subseteq\cdots\subseteq\lambda_k=\lambda} s_{\lambda_1/\lambda_0} \otimes s_{\lambda_2/\lambda_1} \otimes \cdots \otimes s_{\lambda_k/\lambda_{k-1}}$$

对任意 $k \geq 1$，应用 Takeuchi公式 (1.1)，可见投影 π 强制要求严格包含：

$$S(s_{\lambda/\mu}) = \sum_{k\geq 0} \sum_{\mu=\lambda_0\subsetneq\lambda_1\subsetneq\cdots\subsetneq\lambda_k=\lambda} (-1)^k s_{\lambda_1/\lambda_0} s_{\lambda_2/\lambda_1} \cdots s_{\lambda_k/\lambda_{k-1}}. \tag{2.1}$$

由于这一展开通常会产生大量相互抵消的项，我们构造一个对合，由 Takeuchi展开 (2.1) 推导出(1.2)。

回忆一下，$s_{\lambda/\mu}$ 是形状为 λ/μ的半标准杨表按内容加权后得到的生成函数：

$$s_{\lambda/\mu} = \sum_{T\in\mathsf{SSYT}(\lambda/\mu)} x^T,$$

其中 SSYT(λ/μ) 表示形状为 λ/μ 的半标准杨表集合，而$x^T = \prod_{c\in T} x_{T(c)}$ 其中 $T(c)$ 是 T 的单元格 c 中的整数。因此，(2.1) 可以看作半标准杨表生成函数乘积的带符号求和。对于分拆$\mu \subseteq \lambda$，令

$$\mathcal{C}_\mu^\lambda := \bigsqcup_{k\geq 0} \{(\lambda_0, \ldots, \lambda_k) \mid \mu = \lambda_0 \subsetneq \lambda_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \lambda_k = \lambda\},$$

and

$$X_\mu^\lambda := \bigsqcup_{(\lambda_0,\dots,\lambda_k)\in \mathcal{C}_\mu^\lambda} \prod_{i=1}^{k} \mathsf{SSYT}(\lambda_i/\lambda_{i-1}).$$

对于每个元素 $T=(T_{(1)}T_{(2)}\dots,T_{(k)}) \in X_\mu^\lambda$，定义其长度为 $\ell(T)=k$，其权为 $\mathrm{wt}(T)=x^{T^{(1)}}x^{T^{(2)}}\cdots x^{T_{(k)}}$。于是 (2.1) 变为

$$S(s_{\lambda/\mu}) = \sum_{T\in X_\mu^\lambda} (-1)^{\ell(T)}\mathrm{wt}(T). \tag{2.2}$$

我们构造一个符号反转、权保持对合 Φ于 X_μ^λ 上，从而得到 (1.2)。给定元素 $(T_{(1)}\dots,T_{(k)}) \in X_\mu^\lambda$，我们通过拼接杨表 $T_{(i)}$ 得到形状为 λ/μ 的杨表 T。为简便起见，我们记 $T=(T^{(1)},T_{(2)}\dots,T_{(k)})$。注意，一般而言 T 不是半标准的。现在我们在 T 的单元格上定义一个全序：对于 T 中的单元格$c=(i,j)$ 与 $c'=(i',j')$，若满足下列任一条件，则记 $c<c'$

(i) $T(c)<T(c')$; (ii) $T(c)=T(c')$ 且 $j<j'$；或 (iii) $T(c)=T(c')$, $j=j'$ 且 $i>i'$。

若 T 中具有 $c\in T^{(i)}$ 的单元格 c 满足 $|T_{(i)}|>1$，且它是 $T_{(i)}$ 中最大的单元格，则称其为可分裂；若 $i>1$, $|T^{(i)}|=1$, $T_{(i-1)}\sqcup T_{(i)}$是半标准的，且 c 大于 $T^{(i-1)}$ 中的任意单元格，则称其为可合并。我们用 $\mathsf{cell}(T)$ 表示 T 中最大的可分裂或可合并单元格。若不存在这样的单元格，则令 $\mathsf{cell}(T)=\emptyset$。若 $\mathsf{cell}(T)$ 是可分裂的，则称 T 是可分裂 的；若 $\mathsf{cell}(T)$ 是可合并的，则称 T 是可合并 的。

定义。 定义映射 Φ： $X_\mu^\lambda \to X_\mu^\lambda$ 如下。对于 $T=(T_{(1)}\dots,T_{(k)}) \in X_\mu^\lambda$,

$$\Phi(T) := \begin{cases} (T^{(1)},\dots,T^{(i-1)},T^{(i)}\setminus\{\mathsf{cell}(T)\},T',T^{(i+1)},\dots,T^{(k)}), & \text{if } T \text{ is splittable} \\ (T^{(1)},\dots,T^{(i-1)}\sqcup T^{(i)},T^{(i+1)},\dots,T^{(k)}), & \text{if } T \text{ is mergeable} \\ T, & \text{if } \mathsf{cell}(T)=\emptyset \end{cases}$$

其中 $T^{(i)}$ 包含 单元格(T)，而 T' 是由单个单元格 单元格(T) 组成的杨表 .

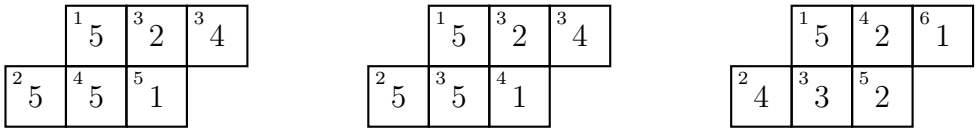
引理 1. 映射 Φ 是良定义的。

证明. 当 T 可合并时无需验证，因此只需证明当 T可分裂时，

$$(T^{(1)},\dots,T^{(i-1)},T^{(i)}\setminus\{\mathsf{cell}(T)\},T',T^{(i+1)},\dots,T^{(k)}) \in X_\mu^\lambda. \tag{2.3}$$

根据全序的定义以及 $T^{(i)}$为半标准且单元格(T)在 $T_{(i)}$中最大这一事实，在 $T^{(i)}$中不存在位于单元格(T)下方或右侧的单元格，这意味着单元格(T)是 $T^{(i)}$的角单元格。于是 $T_{(i)}\setminus\{$单元格$(T)\}$是一个有效的斜形，从而我们推出(2.3)。□

引理 2。 映射 Φ 是一个符号反转、权保持对合。



T_1 T_2 T_3

FIGURE 1. 对合的例子 Φ

证明。设 $T=(T^{(1)},\ \ldots\ldots,\ T^{(k)})\in X_\mu^\lambda$，且 cell$(T)\neq\emptyset$，并设 $c=$cell$(T)\in T^{(i)}$。由于拆分和合并互为逆运算，只需证明 cell$(\Phi(T))=c$。

我们首先假设 T 可分裂。拆分后，我们得到

$$\Phi(T)=(T^{(1)},\ldots,T^{(i-1)},T^{(i)}\setminus\{c\},T',T^{(i+1)},\ldots,T^{(k)}),$$

其中 $T'=\{c\}$。由于 $|T'|=1$, $T^{(i)}=(T^{(i)}\setminus\{c\})\sqcup T'$是半标准的，且 c是$T^{(i)}$中最大的，因此单元格 c在 $\Phi(T)$中可合并。所以我们只需检查 $\Phi(T)$中不存在可分裂或可合并的单元格 $c'>c$。假设存在这样的 c'。由于 c是 $T^{(i)}$中最大的，单元格 c' 必定包含在某个 $T^{(j)}$ 中。再者， c' 在 T中既不可分裂也不可合并，因为 $c=$单元格(T)是 T中所有可分裂或可合并单元格里最大的。回顾一下， c' 是否可分裂（或可合并）仅取决于 $T^{(j)}$ （或$T^{(j-1)}$ 和 $T^{(j)}$）。由此可知， $j=i+1$和 c'在 $\Phi(T)$中可合并，因此 $T^{(i+1)}=\{c'\}$和 $T'\sqcup T^{(i+1)}$是半标准的。然而在这种情况下， c'在 T中也可合并，这就矛盾了。因此我们推得 $c=$单元格$(\Phi(T))$，证毕。

我们现在假设 T 是可合并的。于是我们有

$$\Phi(T)=(T^{(1)},\ldots,T^{(i-1)}\sqcup T^{(i)},T^{(i+1)},\ldots,T^{(k)}),$$

其中 $T^{(i)}=\{c\}$。然后根据定义， c在 $\Phi(T)$中是可分裂的。此外，如果 $c'\neq c$在 $\Phi(T)$中是可分裂或可合并的，那么 c'在 T中也是如此。因此，我们得到单元格$(\Phi(T))=c$，从而完成了 $\Phi(\Phi(T))=T$的证明。

此外，由于拆分和合并过程使 T 的长度改变1，并且权wt(T)仅依赖于 T的单元格中的整数，对合 Φ 是符号反转且权重保持的。□

我们用图1中的三个例子来说明该对合，其中每个单元格左上角的小数字表示杨表 $T^{(i)}$ 包含该单元格的指标 i 。对于 T_1，我们有单元格$(T_1)=(2,2)$，其中包含项5。该单元格是 $T^{(4)}$的唯一单元格，并且由于 $T^{(3)}\sqcup T^{(4)}$是半标准的， T_1是可合并的。对于 T_2，我们有单元格$(T_2)=(2,2)$。由于 $T^{(3)}$中还包含其他单元格， T_2是可分裂的。此外，对合 Φ 将 T_1 映射到 T_2，反之亦然。另一方面， T_3 没有可分裂或可合并的单元格，因此单元格$(T_3)=\emptyset$ ，且 T_3 被 Φ固定。

现在我们来刻画 Φ 的不动点。

引理 3。 对于 $T=(T^{(1)}T^{(2)}\ldots,T^{(\ell(T))})\in X_\mu^\lambda$, T是 Φ 的一个不动点，当且仅当满足以下条件：

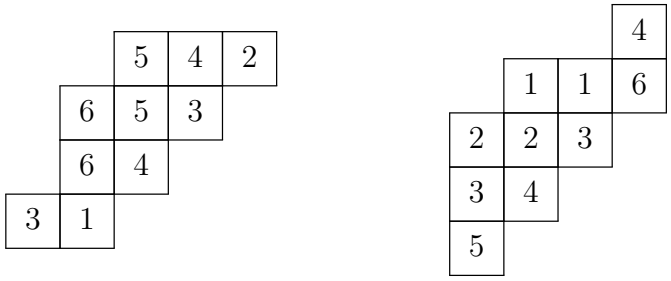


FIGURE 2. 一个行严格平面分拆和一个半标准杨表 u

(F1) $\ell(T) = |\lambda| - |\mu|$, 即 $|T_{(i)}| = 1$ 对所有 i都成立; 且 ***(F2)*** 枚举 T中的单元格 $c_1 < c_2 < \cdots < c_{\ell(T)}$, 对所有 i, 都有 $c_{\ell(T)-i+1} \in T_{(i)}$。

证明。 根据定义, 当且仅当 cell(T) $= \emptyset$ 时, T 才是不动点; 而这当且仅当 T 既不可分裂也不可合并。由于条件 (F1) 等价于 T 不可分裂, 因此只需证明条件 (F2) 等价于 T 不可合并。对于 $i = 2, \ldots, \ell(T)$, 设 c 和 c' 是满足 $T^{(i-1)} = \{c\}$ 和 $T_{(i)} = \{c'\}$ 的单元格。若 $c < c'$, 则根据全序的定义, $T^{(i-1)} \sqcup T_{(i)}$ 是半标准的, 因此 c' 可合并。若 $c > c'$, 则根据可合并单元格的定义, c' 不可合并。由此可得, c' 不可合并当且仅当 $c > c'$。因此, T 不可合并当且仅当条件 (F2) 成立, 证明完毕。□

令 Fix(λ/μ) 表示 Φ 的不动点集合。由 (2.2) 并结合引理 2 和引理 3, 可得

$$S(s_{\lambda/\mu}) = (-1)^{|\lambda|-|\mu|} \sum_{T \in \mathsf{Fix}(\lambda/\mu)} \mathrm{wt}(T). \tag{2.4}$$

现在我们给出 Fix(λ/μ) 的另一种描述。行严格平面分拆 是指列弱递减、行严格递减的平面分拆; 见图2。

Fix(λ/μ) 与形状为 λ/μ 的行严格平面分拆集合 RSPP(λ/μ) 之间存在一个自然的双射。对于任意 $T = (T_{(1)}\, T_{(2)} \ldots, T_{(\ell(T))}) \in$ Fix(λ/μ), 条件 (F2) 和全序的定义保证 $T = \bigsqcup_i T^{(i)}$ 是一个行严格平面分拆。反过来, 给定一个形状为 λ/μ的行严格平面分拆, 按照全序枚举所有单元格:

$$c_1 < c_2 < \cdots < c_{|\lambda|-|\mu|}.$$

令 $T^{(i)}$ 为仅包含 $c_{|\lambda|-|\mu|-i+1}$ 的单元素杨表, 由引理 3 可得一个元素$T = (T_{(1)}\, T^{(2)}, \ldots, T_{(|\lambda|-|\mu|)}) \in$ Fix(λ/μ)。因此, (2.4) 变为

$$S(s_{\lambda/\mu}) = (-1)^{|\lambda|-|\mu|} \sum_{T \in \mathsf{RSPP}(\lambda/\mu)} x^T. \tag{2.5}$$

我们注意到, 将整数的顺序反转后, 行严格平面分拆的行条件和列条件恰好分别变为半标准

杨表的列条件和行条件；见图2。利用这一观察以及舒尔函数的对称性，行严格平面分拆的生成函数可以表示为

$$\sum_{T\in \mathsf{RSPP}(\lambda/\mu)} x^T = s_{\lambda^t/\mu^t}(\dots, x_2, x_1) = s_{\lambda^t/\mu^t}(x_1, x_2, \dots). \tag{2.6}$$

结合 (2.5) 和 (2.6)，得到

$$S(s_{\lambda/\mu}) = (-1)^{|\lambda|-|\mu|} s_{\lambda^t/\mu^t},$$

由此完成证明，并回答了 Benedetti 和 Sagan 提出的问题。

Acknowledgements

Y. Cho 和 H. Lee 获得了韩国政府资助的韩国国家研究基金会（NRF）项目资助，项目编号为 RS-2025-00557835。B.-H. Hwang 获得了韩国高等研究院人工智能与自然科学中心提供的 KIAS个人资助（AP098201）。

References

[1] C. Benedetti 和 B. E. Sagan。《对极与对合》。组合理论杂志*A*辑，148:275–315，2017。[2] D. Grinberg 和 V. Reiner。《组合数学中的霍普夫代数》。预印本，arXiv:1409.8356，2014。[3] P. Hall。《分拆代数》。第四届加拿大数学大会论文集，第147–159页，1959。[4] M. Takeuchi。《由余代数生成的自由霍普夫代数》。日本数学会杂志，23(4):561–582，1971。

Department of Mathematics, Sungkyunkwan University, Suwon, South Korea电子邮箱：brglory@g.skku.edu

Center for Artificial Intelligence and Natural Sciences, Korea Institute for Advanced Study, Seoul, South Korea电子邮箱：byunghakhwang@gmail.com

Department of Mathematics, Sungkyunkwan University, Suwon, South Korea电子邮箱：hojoon1101@g.skku.edu