arXiv:2603.03889v1 [math.MG] 4 Mar 2026

吕罗斯展开中的最大游程长度函数

Dingding Yu[a],*

[a] 湖北第二师范学院数学与统计学院，武汉，430205，中国

摘要

令 $\ell_n(x)$ 表示 $x \in (0,1]$ 的吕罗斯展开的前 n 个数字中的最大连续段长度。尽管 $\ell_n(x)$ 以对数速度增长，我们研究了其中 $\ell_n(x)$ 呈线性增长的例外集更精细的多重分形性质。具体而言，我们确立了集合的豪斯多夫维数

$$\left\{x \in (0,1] : \liminf_{n\to\infty} \frac{\ell_n(x)}{n} = \alpha,\ \limsup_{n\to\infty} \frac{\ell_n(x)}{n} = \beta\right\},$$

对所有 $0 \le \alpha \le \beta \le 1$。

关键词： 吕罗斯展开、连续段长度函数、豪斯多夫维数*2010* 年数学主题

分类： 11K50, 28A80

1. 引言

令 $T\colon (0,1] \to (0,1]$ 为吕罗斯变换，定义如下

$$T(x) := \lfloor 1/x \rfloor \left(\lfloor 1/x \rfloor + 1\right)\left(x - \frac{1}{\lfloor 1/x \rfloor + 1}\right), \tag{1.1}$$

其中 $\lfloor\cdot\rfloor$ 表示整数部分函数。对于每个 $x \in (0,1]$, ，我们定义 $d_1(x) := \lfloor 1/x \rfloor + 1$，一般地， $d_n(x) = d_1(T^{n-1}(x))$，其中 $n \ge 2$。这导出了 x 的吕罗斯展开：

$$x = \frac{1}{d_1(x)} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{d_1(x)(d_1(x)-1)\cdots d_{n-1}(x)(d_{n-1}(x)-1)d_n(x)}. \tag{1.2}$$

这里，对于任意 $n \ge 1$， $d_n(x) \ge 2$ 都是整数，称为展开数字。我们用数字序列 $[d_1(x)\ d_2(x)\ \ldots]$ 表示 x 的展开。

本文研究吕罗斯展开中最大游程长度函数的渐近行为。对于任意 $x \in (0,1]$, ，第 n 个最大游程长度函数定义为

$$\ell_n(x) = \max\left\{k \ge 1 : d_{j+1}(x) = \cdots = d_{j+k}(x) \text{ for some } j, 0 \le j \le n-k\right\},$$

表示吕罗斯展开的前 n 个数字中相同数字的最长连续块的长度，其中 x。Sun 和 Xu [12] 为 ℓ_n建立了大数定律x:

*通讯作者电子邮箱： yudingding@hue.edu.cn (Dingding Yu)

定理 1.1。 *[12, 定理 1。1]* 对于几乎所有的 $x \in (0,1]$, 极限$_{n\to\infty} \ell_n(x)/$ 对数$_2\, n = 1$。

此外，对于任意 $0 \le \alpha \le \beta \le \infty$，例外集

$$\left\{x \in (0,1] : \liminf_{n\to\infty} \frac{\ell_n(x)}{\log_2 n} = \alpha,\ \limsup_{n\to\infty} \frac{\ell_n(x)}{\log_2 n} = \beta\right\}$$

已在 [12]中证明具有满豪斯多夫维数。Sun 和 Xu [12] 将这一结果推广如下：令 φ： $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$为单调递增函数，满足 $\lim_{n\to\infty} \varphi(n) = \infty$ 且 $\liminf_{n\to\infty} \varphi(n)/n = 0$，则例外集

$$\left\{x \in (0,1] : \liminf_{n\to\infty} \frac{\ell_n(x)}{\varphi(n)} = \alpha, \limsup_{n\to\infty} \frac{\ell_n(x)}{\varphi(n)} = \beta\right\}$$

的豪斯多夫维数也为 1。另一方面，对于数字子集 $\mathcal{A} \subset \{2,3,\dots,\}$，令 $\ell_n(x,\mathcal{A})$表示元素均属于 $\mathcal{A}$ 的最长连续块的长度。对于非递减整数序列 $\{\varphi(n)\}_{n\ge1}$，Zhou [18] 确定了集合

$$\left\{x \in (0,1] : \limsup_{n\to\infty} \frac{\ell_n(x,\mathcal{A})}{\varphi(n)} = 1\right\}.$$

受上述结果启发，我们沿着这一研究方向，考察 $\ell_n(x)$ 相对于 n 的渐近增长率。具体而言，对于任意 $0 \le \alpha \le \beta \le 1$，我们定义例外集

$$E(\alpha,\beta) = \left\{x \in (0,1] : \liminf_{n\to\infty} \frac{\ell_n(x)}{n} = \alpha, \limsup_{n\to\infty} \frac{\ell_n(x)}{n} = \beta\right\}. \tag{1.3}$$

我们确定 $E(\alpha,\ \beta)$ 的豪斯多夫维数。记 $\dim_{\mathrm{H}}$ 为豪斯多夫维数。

定理 1.2。 对于任意 $u \ge 0$，记 $s(u)$ 为方程的解

$$\sum_{t=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2^u t(t-1)}\right)^s = 1. \tag{1.4}$$

设 $0 \le \alpha \le \beta \le 1$ 为两个实数，并设 $E(\alpha,\ \beta)$ 如 (1.3)所定义。那么

$$\dim_{\mathrm{H}} E(\alpha,\beta) = \begin{cases} 1, & \text{if } \beta = 0, \\ s\left(\frac{\beta^2(1-\alpha)}{(1-\beta)[\beta-\alpha(1+\beta)]}\right), & \text{if } 0 \le \alpha < \frac{\beta}{1+\beta} < \beta < 1, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

值得一提的是，类似问题最初由 Erdös 和 Rényi 针对二进制展开进行了研究 [3]。关于二进制展开中游程长度函数的更多信息，读者可参阅文献 [8–10、13、 17]、 β- 展开 [6, 14], 连分数展开 [11, 15, 16] 以及幂α衰减的类高斯展开 [7]。

2. 预备知识

本节旨在介绍吕罗斯展开的一些基本性质和维数结果，后文将用到这些内容。

引理 2.1。 *([2])* 随机变量序列 $\{d_n(x)\}_{n\geq 1}$ 关于勒贝格测度独立同分布。

这一独立性为研究吕罗斯展开的度量理论提供了概率论基础。设 $\Sigma = \{2, 3, 4, \ldots\}$。对于任意 $n \in \mathbb{N}$ 和 $(d_1, \ldots\ldots, d_n) \in \Sigma^n$，我们称

$$I_n(d_1, \ldots, d_n) = \{x \in (0, 1] : d_i(x) = d_i \text{ for } 1 \leq i \leq n\}$$

一个 n 阶柱集。柱集 $I_n(d_1, \ldots\ldots, d_n)$ 表示 $(0, 1]$, 中以 $d_1, \ldots\ldots, d_n$ 开头的吕罗斯展开的数所组成的集合。

引理 2.2。 *([4])* 对任意 $(d_1, \ldots\ldots, d_n) \in \Sigma^n$, $n \in \mathbb{N}$, $I_n(d_1, \ldots\ldots, d_n)$ 是端点为

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_1(d_1 - 1) \ldots d_{i-1}(d_{i-1} - 1)d_i}$$

and

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_1(d_1 - 1) \ldots d_{i-1}(d_{i-1} - 1)d_i} + \frac{1}{d_1(d_1 - 1) \ldots d_n(d_n - 1)}.$$

Thus

$$|I_n(d_1, \ldots, d_n)| = \frac{1}{d_1(d_1 - 1) \ldots d_n(d_n - 1)},$$

其中 $|I|$ 表示区间 I的长度。

下面的引理给出了展开数字有界时例外集的豪斯多夫维数，其计算依赖于一种莫兰型公式。

引理 2.3。 *([12])* 对任意 $M \in \Sigma$, 令

$$E_M = \{x \in (0, 1] : 2 \leq d_i(x) \leq M \ \textit{for all} \ i \geq 1\}.$$

那么 维数$_{\mathrm{H}}$ $E_M = s_M$，其中 s_M 由 *Moran* 公式给出

$$\sum_{k=2}^{M} \left(\frac{1}{k(k-1)}\right)^{s_M} = 1,$$

且 极限$_{M\to\infty}$ $s_M = 1$.

此外，如果数字仅在零密度的指标集上有界，则相应集合可以达到满维数。

引理 2.4. *([12])* 给定一个正整数集 $\mathcal{J} = \{j_1 < j_2 < \cdots\}$ 和一个无限有界序列$\{d_i\}_{i\geq 1}$，且对于某个 $M \in \Sigma$有 $2 \leq d_i \leq M$，令

$$E(\mathcal{J}, \{d_i\}) = \{x = [d_1(x), d_2(x), \ldots] \in (0, 1] : d_i(x) = d_i, \forall i \in \mathcal{J}\}.$$

如果 $\mathcal{J}$的密度为零，即

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#\{i \leq n : i \in \mathcal{J}\}}{n} = 0,$$

则 维数$_{\mathrm{H}}$ $E(\mathcal{J}, \{d_i\}) = 1$，其中 $\#$ 表示集合的元素个数。

现在我们需要一些用于估计豪斯多夫维数的一般工具。

引理 2.5. *([5])* 设 $E \subset \mathbb{R}$，并设 $f\colon E \to \mathbb{R}$ 是一个 η-赫尔德函数，即对于任意 $x, y \in E$,

$$|f(x) - f(y)| \ll |x - y|^{\eta},$$

其中，$\ll$中的常数是一个绝对常数。于是

$$\dim_{\mathrm{H}} f(E) \leq \frac{1}{\eta} \dim_{\mathrm{H}} E.$$

要建立豪斯多夫维数的下界，以下质量分布原理至关重要。

引理 2.6. *([4])* 设 E 是一个博雷尔集，μ 是一个测度，且 $\mu(E) > 0$。假设对于某个 $s > 0$，存在常数 $C > 0, r_0 > 0$，使得对于任意 $x \in E$ 和 $r < r_0$,

$$\mu(B(x, r)) \leq C r^s,$$

其中，$B(x, r)$ 表示以 x 为中心、半径为 r的开球。于是 维数$_{\mathrm{H}}$ $E \geq s$。

取 $u > 0$ 和一个整数 $M \in \Sigma$，令 $s(u)$ 和 $s_M(u)$ 分别为方程（1.4）及

$$\sum_{t=2}^{M} \left(\frac{1}{2^u t(t-1)} \right)^s = 1, \tag{2.1}$$

分别地。下面的引理揭示了 $s(u)$ 和 $s_M(u)$ 所共有的一些基本性质。

引理 2.7。令 $M \in \Sigma$ 和 $u \geq 0$，有

(1) $s(u)$ 和 $s_M(u)$ 关于 u 均为非增且连续；*(2)* $s(0) = 1$ 以及 $\lim_{u \to \infty} s(u) = 0$；*(3)* 极限 $\lim_{M \to \infty} s_M(u)$ 存在，且等于 $s(u)$。

证明。记 $a_t = 2^{-u}/[t(t-1)]$ 为 $t \geq 2$，并定义

$$F_u(s) = \sum_{t=2}^{\infty} a_t^s, \qquad F_{M,u}(s) = \sum_{t=2}^{M} a_t^s.$$

对于固定的 u，每个 a_t^s 关于 s 都严格递减，因此 $F_u(s)$ 和 $F_{M,u}(s)$ 关于 s 都严格递减。由于$F_u(0+) = +\infty$, $F_u(\infty) = 0$，对于 $F_{M,u}$（其中 $F_{M,u}(0) = M - 1 \geq 1$）同样如此，方程$F_u(s) = 1$ 和 $F_{M,u}(s) = 1$ 分别具有唯一的正解 $s(u)$ 和 $s_M(u)$。

(1) 对固定的 s，a_t 关于 u 严格递减，因此 $F_u(s)$ 关于 u 严格递减。若 $u_1 < u_2$，设 $s(u_1) \leq s(u_2)$。那么

$$1 = F_{u_1}(s(u_1)) \geq F_{u_1}(s(u_2)) > F_{u_2}(s(u_2)) = 1,$$

矛盾。因此，$s(u_1) > s(u_2)$，且 $s(u)$ 关于 u 严格递减。相同的论证也适用于 $s_M(u)$。由隐函数定理可知其连续。

(2) 当 $u=0$, $a_t = 1/[t(t-1)]$。直接计算可得 $\sum_{t=2}^{\infty} a_t = 1$，因此 $s(0) = 1$。对于 $s<1$，$F_0(s) > 1$；对于 $s>1$，$F_0(s) < 1$；因此 $s(0)=1$ 唯一确定。当 $u \to \infty$ 时，对于任意固定的 $s>0$，a_t^s 趋于 0，因此 $F_u(s) \to 0$。所以，为满足 $F_u(s)=1$，$s(u)$ 必须趋于 0。

(3) 对每个固定的 u, $F_{M,\,u}(s)$ 随 $M \to \infty$ 的变化单调趋于 $F_u(s)$。令 $s^* = \limsup_{M\to\infty} s_M(u)$。若 $s^* > s(u)$，取子序列 $s_{M_k} \to s^*$，当 k 充分大时，$s_{M_k} > s(u)+\varepsilon$，于是

$$1 = F_{M_k,u}(s_{M_k}) < F_{M_k,u}(s(u)+\varepsilon) \le F_u(s(u)+\varepsilon) < F_u(s(u)) = 1,$$

矛盾。若 $s^* < s(u)$，取子序列 $s_{M_k} \to s^* < s(u)-\varepsilon$，于是

$$1 = F_{M_k,u}(s_{M_k}) > F_{M_k,u}(s(u)-\varepsilon) \to F_u(s(u)-\varepsilon) > 1,$$

这也导致矛盾。因此 $\lim_{M\to\infty} s_M(u) = s(u)$。

□

在豪斯多夫测度的计算中，我们将反复使用以下初等估计。

引理 2.8. 设 $s>0$ 和 $L \ge 1$ 为整数。则存在一个常数 $C>0$（与 L 无关），使得

$$\sum_{i=2}^{\infty} \left(\frac{1}{i(i-1)} \right)^{sL} \le C \left(\frac{1}{2} \right)^{sL}.$$

特别地，若 $s = s(u) + \varepsilon$ 对于某个 $u \ge 0$ 和 $\varepsilon > 0$，其中 $s(u)$ 由 (1.4)定义，则常数C 可以选为仅依赖于 ε（而不依赖于 u 或 L）。

证明。记 $a_i = {}_i{}^1{}_{(i-1)}$ 为 $i \ge 2$。注意到 $a_2 = \frac{1}{2}$，且对于 $i \ge 3$，有 $i(i-1) \ge \frac{1}{2} i^2$，因此，对于 $i \ge 3$, $a_i \le \frac{2}{i^2}$. 将求和拆分为

$$\sum_{i=2}^{\infty} a_i^{sL} = a_2^{sL} + \sum_{i=3}^{\infty} a_i^{sL}.$$

第一项等于 $(1/2)^{sL}$。对于尾项，利用不等式

$$\sum_{i=3}^{\infty} a_i^{sL} \le \sum_{i=3}^{\infty} \left(\frac{2}{i^2} \right)^{sL} = 2^{sL} \sum_{i=3}^{\infty} i^{-2sL}.$$

由于 $s>0$ 和 $L \ge 1$，对于充分大的 L，我们有 $2sL > 1$。对于有限多个较小的 L，该和显然有一个仅依赖于 s的常数上界。现在假设 $2sL > 1$。那么

$$\sum_{i=3}^{\infty} i^{-2sL} \le \int_2^{\infty} x^{-2sL}\, dx = \frac{2^{1-2sL}}{2sL-1}.$$

因此，

$$\sum_{i=3}^{\infty} a_i^{sL} \le 2^{sL} \cdot \frac{2^{1-2sL}}{2sL-1} = \frac{2^{1-sL}}{2sL-1}.$$

综合这两部分，

$$\sum_{i=2}^{\infty} a_i^{sL} \le \left(\frac{1}{2}\right)^{sL} + \frac{2^{1-sL}}{2sL-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{sL}\left[1+\frac{2}{2sL-1}\right].$$

若 $s = s(u) + \varepsilon$ 且 $\varepsilon > 0$，则 $sL \ge \varepsilon L$。取 L_0 使得 $2\varepsilon L_0 > 1$。对于所有 $L \ge L_0$，我们有

$$1+\frac{2}{2sL-1} \le 1+\frac{2}{2\varepsilon L_0 - 1}.$$

对于 $L < L_0$（只有有限多个取值），原不等式的左边有一个仅依赖于 ε（以及固定的 L_0）的常数作为上界。因此存在一个常数 $C = C(\varepsilon)$，使得

$$\sum_{i=2}^{\infty} a_i^{sL} \le C\left(\frac{1}{2}\right)^{sL} \qquad \text{for all } L \ge 1.$$

证明至此完成。 □

3. 定理1.2：上界

We 根据参数（α，β）的取值范围逐一讨论，其中 $0 \le \alpha \le \beta \le 1$.

3.1. **情形 1：** $\beta = 0$

由于 $\beta = 0$，该条件意味着 $\alpha = 0$。由定理1.1，我们注意到$\lim_{n\to\infty} \ell_n(x)/\log_2 n = 1$对几乎所有的 $x \in (0,1]$，（因此，$\mathcal{L}(E(0,0)) = 1$。因此，

$$\dim_{\mathrm{H}} E(0,0) = 1.$$

3.2. **情形 2：** $\beta = 1$

这里 $0 \le \alpha \le 1$。根据 $E(\alpha, 1)$ 的定义，我们有

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\ell_n(x)}{n} = 1.$$

于是，对于任意 $0 < \rho < 1$，都存在无穷多个 n，使得 $\ell_n(x)/n > \rho$。因此

$$\begin{aligned} E(\alpha,1) &\subset \{x \in (0,1] : \ell_n(x) > \rho n \text{ for infinity many } n\} \\ &\subset \bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}\bigcup_{i=2}^{\infty}\bigcup_{j=0}^{n-\lfloor \rho n\rfloor} \{x \in (0,1] : d_{j+1}(x) = \cdots = d_{j+\lfloor \rho n\rfloor}(x) = i\} \\ &\subset \bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}\bigcup_{i=2}^{\infty}\bigcup_{j=0}^{n-\lfloor \rho n\rfloor} \bigcup_{\substack{d_1,\ldots,d_j\in\Sigma \\ d_{j+\lfloor \rho n\rfloor+1},\ldots,d_n\in\Sigma}} I_n(d_1,\ldots,d_j,i,\ldots,i,d_{j+\lfloor \rho n\rfloor+1},\ldots,d_n). \end{aligned}$$

对于任意 $\varepsilon > 0$，存在正的 N_0，使得对于所有 $n \ge N_0$，我们有

$$\frac{\lfloor \rho n\rfloor}{n-\lfloor \rho n\rfloor} > \frac{\rho}{1-\rho} - \varepsilon. \tag{3.1}$$

记 $s = s(\frac{\rho}{1-\rho}) + \varepsilon$，则 $E(\alpha, 1)$ 的 s 维豪斯多夫测度可表示如下。令 $\mathcal{H}^s$ 表示 s维豪斯多夫测度。

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{H}^s(E(\alpha,1)) \\
&\le \liminf_{N\to\infty} \sum_{n=N}^{\infty} \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-\lfloor \rho n\rfloor} \sum_{\substack{d_1,\ldots,d_j\in\Sigma \\ d_{j+\lfloor \rho n\rfloor+1},\ldots,d_n\in\Sigma}} |I_n(d_1,\ldots,d_j,i,\ldots,i,d_{j+\lfloor \rho n\rfloor+1},\ldots,d_n)|^s \\
&\le \liminf_{N\to\infty} \sum_{n=N}^{\infty} \sum_{i=2}^{\infty} n \left(\frac{1}{i(i-1)}\right)^{s\lfloor \rho n\rfloor} \left[\sum_{t=2}^{\infty}\left(\frac{1}{t(t-1)}\right)^{s}\right]^{n-\lfloor \rho n\rfloor} \\
&\le \liminf_{N\to\infty} \sum_{n=N}^{\infty} \sum_{i=2}^{\infty} Cn\left(\frac{1}{2}\right)^{n\varepsilon} \left(\frac{1}{i(i-1)}\right)^{s(\frac{\rho}{1-\rho})\lfloor \rho n\rfloor} \left[\sum_{t=2}^{\infty}\left(\frac{1}{t(t-1)}\right)^{s(\frac{\rho}{1-\rho})}\right]^{n-\lfloor \rho n\rfloor} \\
&\le \liminf_{N\to\infty} \sum_{n=N}^{\infty} Cn\left(\frac{1}{2}\right)^{n\varepsilon} \left(\frac{1}{2}\right)^{s(\frac{\rho}{1-\rho})\lfloor \rho n\rfloor} \left[\sum_{t=2}^{\infty}\left(\frac{1}{t(t-1)}\right)^{s(\frac{\rho}{1-\rho})}\right]^{n-\lfloor \rho n\rfloor} \\
&\le \liminf_{N\to\infty} \sum_{n=N}^{\infty} Cn\left(\frac{1}{2}\right)^{\varepsilon n + s(\frac{\rho}{1-\rho})(\lfloor \rho n\rfloor - \frac{\rho}{1-\rho}(n-\lfloor \rho n\rfloor))} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\rho}{1-\rho}s(\frac{\rho}{1-\rho})} \sum_{t=2}^{\infty}\left(\frac{1}{t(t-1)}\right)^{s(\frac{\rho}{1-\rho})}\right]^{n-\lfloor \rho n\rfloor} \\
&\le \liminf_{N\to\infty} \sum_{n=N}^{\infty} Cn\left(\frac{1}{2}\right)^{\varepsilon(n - s(\frac{\rho}{1-\rho})(n-\lfloor \rho n\rfloor))} < +\infty,
\end{aligned}
$$

其中第三个不等式成立是由于引理 2.8，倒数第二个不等式则来自（3.1）和（1.4）。由于 ε 是任意的，我们有 维数$_{\mathrm{H}}\, E$（α，1）$\le s\left(\frac{\rho}{1-\rho}\right)$。令 $\rho \to \beta = 1$,—我们得到

$$\dim_{\mathrm{H}} E(\alpha, 1) = 0.$$

3.3. **情形 3：** $0 < \beta < 1$

这是最为复杂的情形。我们根据 α 的取值对讨论进行细化。

3.3.1. **情形 3.1：** $\alpha = 0$

关于 维数$_{\mathrm{H}}\, E$（0，β）的上界估计可以用与第 3.2 小节大致相同的方法建立。因此，在这种情形下

$$\dim_{\mathrm{H}} E(0, \beta) \le s\left(\frac{\beta}{1-\beta}\right).$$

3.3.2. **情形 3.2：** $0 < \alpha \le \beta < 1$

写出

$$P = \{x \in (0,1] : \text{the Lüroth expansion of } x \text{ is periodic}\}.$$

集合 P 可以表示为

$$P = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{d_1=2}^{\infty} \cdots \bigcup_{d_j=2}^{\infty} \bigcup_{(d_{j+1},\ldots,d_{j+k})\in\Sigma^k} \{[d_1,\ldots,d_j,\overline{d_{j+1},\ldots,d_{j+k}}]\}$$

因此它是可数的。

固定 $x \in E(\alpha,\ \beta) \cap ((0,\ 1]\backslash P)$。我们定义两个正整数序列 $\{n'_k\}_{k\geq 1}$ 和 $\{m'_k\}_{k\geq 1}$ 如下。

$$\begin{aligned} n'_0 &= 0, \qquad m'_0 = 0, \\ n'_k &= \min\{n \geq n'_{k-1} + m'_{k-1} : d_{n+1}(x) = d_{n+2}(x)\}, \\ m'_k &= \max\{j \geq 2 : d_{n'_k+1}(x) = \ldots = d_{n'_k+j}(x)\}. \end{aligned}$$

由于 $\limsup_{n} \frac{\ell_n(x)}{n} = \beta > 0$，存在无穷多个 n 使得 $\ell_n(x) > \beta n$，这意味着存在从某个位置开始、长度至少为 2 的连续段。因此，序列 $\{n'_k\}$ 和 $\{m'_k\}$ 定义良好且为无限序列。此外，$\beta > 0$ 意味着 $\lim_{k\to\infty} m'_k = +\infty$，于是我们可以如下提取$\{m'_k\}$ 的一个严格递增子序列。令

$$j_1 = 1, \qquad j_{k+1} = \min\{j > j_k : m'_j > m'_{j_k}\},$$

并定义 $m_k = m'_{j_k}, n_k = n'_{j_k}$。根据构造，$\{m_k\}$ 严格递增且趋于无穷，且

$$2 \leq m_k \leq n_{k+1} - n_k. \tag{3.2}$$

假设对于某个 k，$n_k + m_k \leq n < n_{k+1} + m_{k+1}$ 成立。那么前n 个数字中的最大连续段长度为:

$$\ell_n(x) = \begin{cases} m_k, & \text{if } n_k + m_k \leq n \leq n_{k+1} + m_k, \\ n - n_{k+1}, & \text{if } n_{k+1} + m_k < n < n_{k+1} + m_{k+1}. \end{cases}$$

由此可推得

$$\alpha = \liminf_{n\to\infty} \frac{\ell_n(x)}{n} = \liminf_{k\to\infty} \frac{m_k}{n_{k+1} + m_k}, \tag{3.3}$$

$$\beta = \limsup_{n\to\infty} \frac{\ell_n(x)}{n} = \limsup_{k\to\infty} \frac{m_k}{n_k + m_k}. \tag{3.4}$$

由（3.4）我们还可以得到

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\ell_{n_k+2m_k}(x)}{n_k + 2m_k} = \limsup_{k\to\infty} \frac{m_k}{n_k + 2m_k} = \frac{\beta}{1+\beta}, \tag{3.5}$$

因为沿着一个子序列有 $m_k/(n_k + m_k) \to \beta$，这意味着 $m_k/n_k \to \beta/(1-\beta)$。

由（3.2）、（3.3）和（3.5），可得

$$\alpha \leq \frac{m_k}{n_{k+1} + m_k} \leq \frac{m_k}{n_k + 2m_k} \leq \frac{\beta}{1+\beta}.$$

因此，对于任意 $x \in E(\alpha,\ \beta) \cap ((0,\ 1]\backslash P)$，必有 $\alpha \leq \frac{\beta}{1+\beta}$。

为得到紧上界，我们将 α 与 $\dfrac{\beta}{1+\beta}$ 进行比较。

情形 3.2 (1)： $0 < \dfrac{\beta}{1+\beta} < \alpha \leq \beta < 1$。如果 $\alpha > \dfrac{\beta}{1+\beta}$，那么 $E(\alpha,\ \beta) \subset P$。因此，在这种情形下，$E(\alpha,\ \beta)$ 至多可数，且

$$\dim_{\mathrm{H}} E(\alpha, \beta) = 0.$$

情形 3.2 (2)： $0 < \alpha \leq \frac{\beta}{1+\beta} < \beta < 1$。由（3.3）和（3.4）可得

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{n_{k+1}}{m_k} = \frac{1-\alpha}{\alpha}, \tag{3.6}$$

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{m_{k+1}}{n_{k+1}} = \limsup_{k\to\infty} \frac{m_k}{n_k} = \frac{\beta}{1-\beta}, \tag{3.7}$$

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{m_{k+1}}{m_k} = \limsup_{k\to\infty} \frac{m_{k+1}}{n_{k+1}} \cdot \frac{n_{k+1}}{m_k} \leq \frac{\beta(1-\alpha)}{\alpha(1-\beta)}. \tag{3.8}$$

现在，由（3.6）、（3.7）和（3.8），可以估计

$$\begin{aligned}
\limsup_{k\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{k} m_j}{n_k + m_k} &\geq \liminf_{k\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{k-1} m_j}{n_k + m_k} + \limsup_{k\to\infty} \frac{m_k}{n_k + m_k} \\
&\geq \liminf_{k\to\infty} \frac{m_k}{n_{k+1} + m_{k+1} - (n_k + m_k)} + \limsup_{k\to\infty} \frac{m_k}{n_k + m_k} \\
&\geq \frac{\beta^2(1-\alpha)}{\beta - \alpha}.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

同时，我们可以推 deduce，序列 $\{n_k + m_k\}_{k\geq 1}$ 至少呈指数增长，即存在一个常数 $C_1 > 0$，使得

$$\log(n_k + m_k) \geq kC_1,$$

对所有充分大的 k均成立。

记 $\eta = \frac{\beta^2}{(1-\alpha)\beta - \alpha}$。由（3.9），可得

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{k} m_j}{n_k + m_k - \sum_{j=1}^{k} m_j} \geq \frac{\eta}{1-\eta}.$$

因此，

- 如果 $0 < \alpha < \frac{\beta}{1+\beta} < \beta < 1$，那么对于任意 $\varepsilon > 0$，存在无穷多个 k 使得

$$\sum_{j=1}^{k} m_j \geq \left(\frac{\eta}{1-\eta} - \varepsilon\right)\left(n_k + m_k - \sum_{j=1}^{k} m_j\right). \tag{3.10}$$

- 若 $0 < \alpha = \frac{\beta}{1+\beta} < \beta < 1$，则对于任意足够大的 $M > 0$，都存在无穷多个 k，使得

$$\sum_{j=1}^{k} m_j \geq M\left(n_k + m_k - \sum_{j=1}^{k} m_j\right). \tag{3.11}$$

回顾一下，$\{n_k\}_{k\geq 1}$ 和 $\{m_k\}_{k\geq 1}$ 的构造取决于 $x \in E(\alpha, \beta)$。

当 $0 < \alpha < \frac{\beta}{1+\beta} < \beta < 1$时，我们定义

$$\mathcal{A} = \{(\{n_k\}, \{m_k\}) : \text{the relations (3.2)-(3.4) hold}\},$$

它由所有可由 $E(\alpha,\ \beta)$ 中的点产生的序列对组成。对于 $(\{n_k\},\ \{m_k\})\ \in\mathcal{A}$以及一个满足 $i_k\in\Sigma$的序列 $\{i_k\}_{k\geq1}$，令

$$\mathcal{W}_k=\{x\in(0,1]:d_{n_k+1}(x)=\cdots=d_{n_k+m_k}(x)\text{ for all }k\},$$

$$\mathcal{C}_k=\left\{((n_j,m_j)_{j=1}^{k-1},n_k):\ \begin{array}{l}2\leq m_j<n_{j+1}-n_j\text{ for }1\leq j<k,\ m_k\geq2,\\ \text{and condition (3.10) holds}\end{array}\right\},$$

$$\mathcal{O}_k(\{i_j\}_{j=1}^k)=\{(\tau_1,\ldots,\tau_{n_k+m_k})\in\Sigma^{n_k+m_k}:\tau_{n_j+1}=\cdots=\tau_{n_j+m_j}=i_j\text{ for }1\leq j\leq k\}.$$

于是我们有覆盖

$$E(\alpha,\beta)\subset\bigcup_{(\{n_k\},\{m_k\})\in\mathcal{A}}\mathcal{W}_k\subset\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{k=m}^{\infty}\Gamma_k,\tag{3.12}$$

其中

$$\Gamma_k=\bigcup_{n_k+m_k\geq e^{kC_1}}\ \bigcup_{((n_j,m_j)_{j=1}^{k-1},n_k)\in\mathcal{C}_k}\ \bigcup_{\substack{i_1,\ldots,i_k\in\Sigma\\(d_1,\ldots,d_{n_k+m_k})\in\mathcal{O}_k(\{i_j\}_{j=1}^k)}}I_{n_k+m_k}(d_1,\ldots,d_{n_k+m_k}).$$

固定 $\varepsilon>0$，并令 $\tilde{s}=s\Big(\frac{\eta}{1-\eta}-\varepsilon\Big)$。对充分大的 k，我们有

$$k^{\frac{2}{C_1}\log k}\leq2^{k\varepsilon}.\tag{3.13}$$

现在，我们来估计 Γ_k 的 $(\tilde{s}+2\varepsilon)$ 维豪斯多夫容度：

$$v_k(\tilde{s}+2\varepsilon):=\tag{3.14}$$
$$\sum_{n_k+m_k\geq e^{kC_1}}^{\infty}\ \sum_{((n_j,m_j)_{j=1}^{k-1},n_k)\in\mathcal{C}_k}\ \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_k\in\Sigma\\(d_1,\ldots,d_{n_k+m_k})\in\mathcal{O}_k(\{i_j\}_{j=1}^k)}}|I_{n_k+m_k}(d_1,\ldots,d_{n_k+m_k})|^{\tilde{s}+2\varepsilon},$$

对所有充分大的 k。

最内层求和可如下给出上界：

$$\sum_{\substack{i_1,\ldots,i_k\in\Sigma\\(d_1,\ldots,d_{n_k+m_k})\in\mathcal{O}_k(\{i_j\}_{j=1}^k)}}|I_{n_k+m_k}(d_1,\ldots,d_{n_k+m_k})|^{\tilde{s}+2\varepsilon}$$

$$\leq\sum_{i_1,\ldots,i_k\in\Sigma}\ \sum_{(d_1,\ldots,d_{n_k+m_k})\in\mathcal{O}_k(\{i_j\}_{j=1}^k)}\left(\frac{1}{d_1(d_1-1)\cdots d_{n_k+m_k}(d_{n_k+m_k}-1)}\right)^{\tilde{s}+2\varepsilon}$$

$$\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{2(n_k+m_k)\varepsilon}\sum_{i_1,\ldots,i_k\in\Sigma}\ \sum_{(d_1,\ldots,d_{n_k+m_k})\in\mathcal{O}_k(\{i_j\}_{j=1}^k)}\left(\frac{1}{d_1(d_1-1)\cdots d_{n_k+m_k}(d_{n_k+m_k}-1)}\right)^{\tilde{s}}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{2(n_k+m_k)\varepsilon}\left[\sum_{t=2}^{\infty}\left(\frac{1}{t(t-1)}\right)^{\tilde{s}}\right]^{n_k+m_k-\sum_{j=1}^k m_j}\prod_{j=1}^{k}\left[\sum_{i=2}^{\infty}\left(\frac{1}{i(i-1)}\right)^{m_j\tilde{s}}\right]$$

$$
\begin{aligned}
&\le \left(\frac{1}{2}\right)^{2(n_k+m_k)\varepsilon} C^k \left(\frac{1}{2}\right)^{\tilde{s}\sum_{j=1}^{k} m_j} \left[\sum_{t=2}^{\infty}\left(\frac{1}{t(t-1)}\right)^{\tilde{s}}\right]^{n_k+m_k-\sum_{j=1}^{k} m_j} \\
&\le \left(\frac{1}{2}\right)^{2(n_k+m_k)\varepsilon} C^k \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{(\frac{\eta}{1-\eta}-\varepsilon)\tilde{s}} \sum_{t=2}^{\infty}\left(\frac{1}{t(t-1)}\right)^{\tilde{s}}\right]^{n_k+m_k-\sum_{j=1}^{k} m_j} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{2(n_k+m_k)\varepsilon} C^k, \qquad (3.15)
\end{aligned}
$$

其中倒数第二个不等式和最后一个不等式分别来自引理2.8和（3.10）。接下来，我们给出如下对象的基数的上界：$\mathcal{C}_k$。对于每个 k，整数对 $(n_j,\ m_j)_{j=1}^{k-1}$ 与 n_k 中满足 $\mathcal{C}_k$ 中条件的个数至多为 $(n_k+m_k)^{2k}$，因为至多有 $2k$ 个整数，且每个整数均以n_k+m_k为界。利用（3.13），我们有，对于充分大的 k

$$
(n_k+m_k)^{2k} \le (n_k+m_k)^{\frac{2}{C_1}\log(n_k+m_k)} \le 2^{(n_k+m_k)\varepsilon}. \qquad (3.16)
$$

现在结合（3.12）、（3.14）、（3.15）和（3.16）。$E(\alpha,\ \beta)$ 的 $(\tilde{s}+2\varepsilon)$ 维豪斯多夫测度满足

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}^{\tilde{s}+2\varepsilon}(E(\alpha,\beta)) &\le \liminf_{m\to\infty} \sum_{k=m}^{\infty} \sum_{n_k+m_k\ge e^{C_1 k}} (n_k+m_k)^{2k} C^k \left(\frac{1}{2}\right)^{2(n_k+m_k)\varepsilon} \\
&\le \liminf_{m\to\infty} \sum_{k=m}^{\infty} \sum_{n_k+m_k\ge e^{C_1 k}} C^k \left(\frac{1}{2}\right)^{(n_k+m_k)\varepsilon} \\
&\le \frac{C^k}{1-(\frac{1}{2})^{\varepsilon}} \liminf_{m\to\infty} \sum_{k=m}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\varepsilon e^{C_1 k}} < +\infty.
\end{aligned}
$$

因此，对于 $0<\alpha<\frac{\beta}{1+\beta}<\beta<1$，我们有

$$
\dim_{\mathrm{H}} E(\alpha,\beta) \le \tilde{s}+2\varepsilon = s\left(\frac{\eta}{1-\eta}-\varepsilon\right)+2\varepsilon.
$$

由于 $\varepsilon>0$ 是任意的，且 $s(u)$是连续的，令 $\varepsilon\to 0$ 可得

$$
\dim_{\mathrm{H}} E(\alpha,\beta) \le s\left(\frac{\eta}{1-\eta}\right) = s\left(\frac{\beta^2(1-\alpha)}{(1-\beta)[\beta-\alpha(1+\beta)]}\right).
$$

对于 $0<\alpha=\frac{\beta}{1+\beta}<\beta<1$，我们保持 $\mathcal{A}$、$\mathcal{W}_k$、$\mathcal{O}_k$（$\{i_j\}_{j=1}^{k}$）的定义不变，并仅修改 $\mathcal{C}_k$，即将（3.10）替换为（3.11）。令 $\tilde{s}=s$（M）。当 $M\to\infty$时，我们有 s（M）$\to 0$。令$\varepsilon\to 0$ 和 $M\to\infty$，可得

$$
\dim_{\mathrm{H}} E(\alpha,\beta) \le s(M)+2\varepsilon \to 0.
$$

4. 定理1.2的证明：下界

回顾一下，当 $0<\frac{\beta}{1+\beta}\le\alpha\le\beta<1$ 时，$\dim_{\mathrm{H}} E(\alpha,\beta)=0$。因此，只需证明 $0\le\alpha<\frac{\beta}{1+\beta}<\beta<1$ 情形的下界。

4.1. 构造 $E(\alpha,\beta)$ 的子集

按如下方式选取两个整数序列 $\{n_k\}_{k\geq 1}$ 和 $\{m_k\}_{k\geq 1}$。

• 若 $\alpha>0$，则令

$$n_k=\left\lfloor\left(\frac{\beta(1-\alpha)}{\alpha(1-\beta)}\right)^k\right\rfloor+4k,\qquad m_k=\left\lfloor\frac{\beta}{1-\beta}\left(\frac{\beta(1-\alpha)}{\alpha(1-\beta)}\right)^k\right\rfloor+2;$$

• 若 $\alpha=0$，则令

$$n_k=\left\lfloor\frac{2^{k!}}{(1-\beta)^k}\right\rfloor+4k,\qquad m_k=\left\lfloor\frac{\beta}{1-\beta}\frac{2^{k!}}{(1-\beta)^k}\right\rfloor+2.$$

在这两种情况下，均可验证 m_k 是递增的，并满足条件

$$2\leq m_k<n_{k+1}-n_k\quad\text{for all } k\geq 1,\qquad \lim_{k\to\infty}m_k=\infty. \tag{4.1}$$

对于任意 $k\geq 1$，令

$$p_k=\max\left\{p\in\mathbb{N}:p\leq\frac{n_{k+1}-n_k}{m_k}<p+1\right\}.$$

定义

$$n_1'=n_1+1\quad\text{and}\quad n_k'=n_k+\sum_{i=1}^{k-1}(p_i+1).$$

由（4.1），可得

$$\lim_{k\to\infty}\frac{n_k'}{n_k}=1+\lim_{k\to\infty}\frac{p_k+1}{n_{k+1}-n_k}=1. \tag{4.2}$$

设 $M\geq 3$为整数，并令

$$G(M)=\left\{x\in(0,1]:d_n(x)\begin{cases}=2 & \text{if } n_k'+1\leq n\leq n_k'+m_k \text{ for all } k\geq 1;\\ =2M & \text{if } n=n_k',\ n_k'+pm_k+1 \text{ for all } 1\leq p\leq p_k,\ k\geq 1;\\ \in[2,M] & \text{otherwise.}\end{cases}\right\} \tag{4.3}$$

命题 4.1。 $G(M)\subset E(\alpha,\beta)$。

证明。 固定 $x\in G(M)$。假设 $n_k'+m_k\leq n<n_{k+1}'+m_{k+1}$。那么可得

$$\ell_n(x)=\begin{cases}m_k, & \text{if } n_k'+m_k\leq n\leq n_{k+1}'+m_k,\\ n-n_{k+1}', & \text{if } n_{k+1}'+m_k<n<n_{k+1}'+m_{k+1}.\end{cases}$$

因此，

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{\ell_n(x)}{n}=\liminf_{k\to\infty}\frac{m_k}{n_{k+1}'+m_k}=\liminf_{k\to\infty}\frac{m_k}{n_{k+1}+m_k}=\alpha,$$

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\ell_n(x)}{n}=\limsup_{k\to\infty}\frac{m_k}{n_k'+m_k}=\limsup_{k\to\infty}\frac{m_k}{n_k+m_k}=\beta,$$

其中我们使用 (4.2)。因此 $x\in E(\alpha,\beta)$。 □

令 $\mathcal{J}$为删除位置的集合 $\{n'_k, n'_k + pm_k + 1 : \ k \geq 1, 1 \leq p \leq p_k\}$。通过删除 $\mathcal{J}$中的数字，定义 f: $G(M) \to f(G(M))$。也就是说

$$f(G(M)) = \left\{ x \in (0,1] : d_n(x) \begin{cases} = 2 & \text{if } n_k + 1 \leq n \leq n_k + m_k \text{ for all } k \geq 1; \\ \in [2, M] & \text{if } 1 \leq n \leq n_1 \text{ and } n_k + m_k + 1 \leq n \leq n_{k+1} \text{ for all } k \geq 1. \end{cases} \right\} \tag{4.4}$$

写出 $t(n) = \#\{j \leq n : \ j \in \mathcal{J}\}$。我们有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t(n)}{n} = 0. \tag{4.5}$$

事实上，设 $n'_k \leq n < n'_{k+1}$ 对某个 $k \geq 1$成立。那么

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} \frac{t(n)}{n} &\leq \limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{k-1}(p_i+1) + \frac{n-n'_k}{m_k} + 1}{n} \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{k-1}(p_i+1)}{n'_k} + \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{m_k} + \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n'_k} \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} \frac{p_k+1}{n'_{k+1} - n'_k} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{p_k+1}{n_{k+1} - n_k} = 0. \end{aligned}$$

命题 4.2。 对于任意 $\varepsilon > 0$，映射 f在 $G(M)$上是 $\frac{1}{1+\varepsilon}$-赫尔德连续的，也就是说，存在一个常数 $C_2 = C_2(M) > 0$，使得对于任意 $x, y \in G(M)$，

$$|f(x) - f(y)| \leq C_2 |x - y|^{\frac{1}{1+\varepsilon}}. \tag{4.6}$$

证明。 取 $x \neq y$，并令 n 为满足以下条件的最大整数：对所有 $1 \leq i \leq n$，都有 $d_i(x) = d_i(y) = d_i$。那么$d_{n+1}(x) \neq d_{n+1}(y)$，且二者均属于 $\{2, \ldots, M\}$。不失一般性，设 $d_{n+1}(x) < d_{n+1}(y)$。区间 $I_{n+2}(d_1, \ldots, d_n, d_{n+1}(x) \ 2M+1)$ 位于 x 和 y之间，因此

$$\begin{aligned} |x - y| &\geq |I_{n+2}(d_1, \ldots, d_n, d_{n+1}(x), 2M+1)| \geq |I_{n+2}(d_1, \ldots, d_n, M, 2M+1)| \\ &\geq \frac{1}{d_1(d_1-1)\cdots d_n(d_n-1)} \cdot \frac{1}{M(M-1)} \cdot \frac{1}{(2M+1)2M} \\ &\geq \frac{1}{(M-1)^4} |I_n(d_1, \ldots, d_n)|. \end{aligned}$$

设 $\overline{(d_1, \ldots, d_n)}$ 是从 $(d_1, \ldots, d_n)$ 中删除属于 $\mathcal{J}$ 的位置后得到的词。那么 $f(x)$ 和 $f(y)$ 都属于柱集 $I_{n-t(n)}(d_1, \ldots, d_n)$，因此

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |I_{n-t(n)}(\overline{d_1, \ldots, d_n})| = \frac{1}{\prod_{j \notin \mathcal{J}, j \leq n} d_j(d_j - 1)} \\ &= |I_n(d_1, \ldots, d_n)| \cdot \prod_{j \in \mathcal{J}, j \leq n} d_j(d_j - 1) \\ &\leq |I_n(d_1, \ldots, d_n)| (2M(2M-1))^{t(n)}. \end{aligned}$$

由（4.5），对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 N_2 使得对于 $n \geq N_2$,

$$t(n) \log(2M(2M-1)) \leq \varepsilon(n - t(n)) \log 2.$$

因此，

$$|I_{n-t(n)}(\overline{d_1,\ldots,d_n})| \le |I_n(d_1,\ldots,d_n)| \cdot (2M(2M-1))^{t(n)} \le |I_n(d_1,\ldots,d_n)| \cdot 2^{\varepsilon(n-t(n))}.$$

由于 $|I_n(d_1,\ldots,d_n)| \le 2^{-n}$ 且 $n - t(n) \ge (1-\delta)n$ 对充分大的 n 成立（其中 δ 很小），我们有 $2^{\varepsilon(n-t(n))} \le |I_n(d_1,\ldots,d_n)|^{-\varepsilon(1-\delta)}$。选择 δ 使得 $\varepsilon(1-\delta) < \varepsilon' < \varepsilon$，便得到

$$|f(x) - f(y)| \le |I_n(d_1,\ldots,d_n)|^{1-\varepsilon'} \le \left((M-1)^4|x-y|\right)^{1-\varepsilon'} \le C_2|x-y|^{1-\varepsilon'}.$$

由于 $\varepsilon' > 0$ 可以任意小，这就证明了对任意 $\varepsilon > 0$，$\frac{1}{1+\varepsilon}$-赫尔德连续性成立。 □

结合命题 4.1 和命题 4.2，利用引理 2.5，可得

$$\dim_{\mathrm{H}} E(\alpha,\beta) \ge \dim_{\mathrm{H}} G(M) \ge \frac{1}{1+\varepsilon} \dim_{\mathrm{H}} f(G(M)).$$

令 $\varepsilon \to 0$，得到

$$\dim_{\mathrm{H}} E(\alpha,\beta) \ge \dim_{\mathrm{H}} f(G(M)). \tag{4.7}$$

剩下需要证明 $f(G(M))$ 的豪斯多夫维数下界。

4.2. $f(G(M))$ 的符号描述

对于 $n \ge 1$ 集合

$$D_n = \{(d_1,\ldots,d_n) \in \Sigma^n : d_j = 2 \text{ for } j \in [n_k+1, n_k+m_k] \cap [1,n] \text{ and } k \ge 1,$$

$$2 \le d_j \le M \text{ otherwise}\},$$

$$D = \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n \ (D_0 = \emptyset).$$

对于 $(d_1, \ldots, d_n) \in D_n$，定义

$$J_n(d_1,\ldots,d_n) = \bigcup_{d_{n+1}:(d_1,\ldots,d_{n+1})\in D_{n+1}} I_{n+1}(d_1,\ldots,d_{n+1}) \tag{4.8}$$

一个 n 阶基本区间。则

$$f(G(M)) = \bigcap_{n\ge 1} \bigcup_{(d_1,\ldots,d_n)\in D_n} J_n(d_1,\ldots,d_n).$$

由引理2.2可知，长度满足：

- 若 $n_k + m_k \le n < n_{k+1}$，则

$$|J_n(d_1,\ldots,d_n)| = \frac{M-1}{M}|I_n(d_1,\ldots,d_n)|. \tag{4.9}$$

- 如果 $n_{k+1} \le n < n_{k+1} + m_{k+1}$，则

$$|J_n(d_1,\ldots,d_n)| = \frac{1}{2}|I_n(d_1,\ldots,d_n)|. \tag{4.10}$$

4.3. 测度支撑于 $f(G_{(\{\widetilde{n_k}\},\{m_k\})}(M))$

令 $n_0 = m_0 = 0$并定义

$$u_k = \frac{m_k}{n_k - (n_{k-1} + m_{k-1})} \quad \text{for all } k \geq 1. \tag{4.11}$$

利用 n_k, m_k 的渐近性质直接计算可得

$$\lim_{k\to\infty} u_k = \zeta := \frac{\beta^2(1-\alpha)}{(1-\beta)[\beta - \alpha(1+\beta)]}. \tag{4.12}$$

由引理 2.7，可知 $s_M(u)$ 关于 u 连续。因此，对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 K_0，使得对所有 $k \geq K_0$,

$$|s_M(u_k) - s_M(\zeta)| < \frac{\varepsilon \log 2}{\log M(M-1)} =: \tilde{\varepsilon}. \tag{4.13}$$

我们定义集合函数 μ： $\{J(d)\colon\ d \in D\} \to \mathbb{R}^+$ 如下。

• 对于任意 $(d_1, \ldots, d_{n_1+m_1}) \in D_{n_1+m_1}$，定义

$$\mu(J_{n_1+m_1}(d_1, \ldots, d_{n_1+m_1})) = \left(\frac{1}{d_1(d_1-1)\cdots d_{n_1+m_1}(d_{n_1+m_1}-1)}\right)^{s_M(u_1)}.$$

• 对于任意满足 $n < n_1 + m_1$ 的 $(d_1, \ldots, d_n) \in D_n$，令

$$\mu(J_n(d_1, \ldots, d_n)) = \sum_{d_{n+1}, \ldots, d_{n_1+m_1}} \mu(J_{n_1+m_1}(d_1, \ldots, d_{n_1+m_1})).$$

• 一旦针对某个 $k \geq 1$ 定义了 $\mu(J_{n_k+m_k}(d_1, \ldots, d_{n_k+m_k}))$，那么对于任意的 $(d_1, \ldots, d_{n_{k+1}+m_{k+1}}) \in D_{n_{k+1}+m_{k+1}}$，令

$$\begin{aligned}&\mu(J_{n_{k+1}+m_{k+1}}(d_1, \ldots, d_{n_{k+1}+m_{k+1}}))\\ &= \mu(J_{n_k+m_k}(d_1, \ldots, d_{n_k+m_k}))\left(\frac{1}{d_{n_k+m_k+1}\cdots d_{n_{k+1}+m_{k+1}}(d_{n_{k+1}+m_{k+1}}-1)}\right)^{s_M(u_{k+1})}.\end{aligned} \tag{4.14}$$

• 对于任意满足 $n_k + m_k < n < n_{k+1} + m_{k+1}$ 的 $(d_1, \ldots, d_n) \in D_n$，定义

$$\mu(J_n(d_1, \ldots, d_n)) = \sum_{d_{n+1}, \ldots, d_{n_{k+1}+m_{k+1}}} \mu(J_{n_{k+1}+m_{k+1}}(d_1, \ldots, d_{n_{k+1}+m_{k+1}})). \tag{4.15}$$

由于 $s_M(u_k)$ 满足

$$\sum_{t=2}^{M}\left(\frac{1}{2^{u_k}t(t-1)}\right)^{s_M(u_k)} = 1,$$

该集合函数满足柯尔莫哥洛夫一致性条件。因此，它可以唯一地扩展为一个支撑在 $f(G(M))$ 上的概率测度，仍记为 μ。

根据构造，对于任意 $k \geq 1$ 和 $(d_1, \ldots, d_{n_k+m_k}) \in D_{n_k+m_k}$,

$$\begin{aligned}&\mu(J_{n_k+m_k}(d_1, \ldots, d_{n_k+m_k}))\\ &= \prod_{j=1}^{k}\left(\frac{1}{d_{n_{j-1}+m_{j-1}+1}(d_{n_{j-1}+m_{j-1}+1}-1)\cdots d_{n_j+m_j}(d_{n_j+m_j}-1)}\right)^{s_M(u_j)}.\end{aligned} \tag{4.16}$$

命题 4.3。 设 $n > n_{K_0} + m_{K_0}$，其中 K_0 满足 (4.13)。对于任意 $\varepsilon > 0$，存在一个常数$C_3 = C_3(M)$使得对于每个 $(d_1, \dots, d_n) \in D_n$，

$$\mu(J_n(d_1, \dots, d_n)) \le C_4 |J_n(d_1, \dots, d_n)|^{s_M(\zeta)-\varepsilon}. \tag{4.17}$$

证明。 我们区分三种情形。采用记号 $\Sigma_M = \{2, \dots, M\}$。**情形 1：** $n = n_k + m_k$。 利用 (4.13) 和 (4.16),

$$\begin{aligned}
&\mu(J_{n_k+m_k}(d_1, \dots, d_{n_k+m_k})) \\
&\le \prod_{j=K_0}^{k} \left(\frac{1}{d_{n_{j-1}+m_{j-1}+1}(d_{n_{j-1}+m_{j-1}+1} - 1) \cdots d_{n_j+m_j}(d_{n_j+m_j} - 1)} \right)^{s_M(\zeta)-\varepsilon} \\
&= \prod_{j=1}^{K_0-1} \left(d_{n_{j-1}+m_{j-1}+1}(d_{n_{j-1}+m_{j-1}+1} - 1) \cdots d_{n_j+m_j}(d_{n_j+m_j} - 1) \right)^{s_M(\zeta)-\varepsilon} \\
&\quad \cdot \prod_{j=1}^{k} \left(\frac{1}{d_{n_{j-1}+m_{j-1}+1}(d_{n_{j-1}+m_{j-1}+1} - 1) \cdots d_{n_j+m_j}(d_{n_j+m_j} - 1)} \right)^{s_M(\zeta)-\varepsilon} \\
&\le M^{2(n_{K_0}+m_{K_0})} |I_{n_k+m_k}(d_1, \dots, d_{n_k+m_k})|^{s_M(\zeta)-\varepsilon} \\
&\le M^{2(n_{K_0}+m_{K_0}+1)} |J_{n_k+m_k}(d_1, \dots, d_{n_k+m_k})|^{s_M(\zeta)-\varepsilon}.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

其中最后一个不等式由 (4.9) 得出。
情形 2： $n_k + m_k < n < n_{k+1}$。 回顾 (4.14)、(4.15) 和 (4.18)，可得

$$\begin{aligned}
&\mu(J_n(d_1, \dots, d_n)) \\
&= \mu(J_{n_k+m_k}(d_1, \dots, d_{n_k+m_k})) \left(\frac{1}{d_{n_k+m_k+1}(d_{n_k+m_k+1} - 1) \cdots d_n(d_n - 1)} \right)^{s_M(u_{k+1})} \\
&\quad \cdot \sum_{\substack{d_{n+1}, \dots, d_{n_{k+1}} \in \Sigma_M \\ d_{n_{k+1}+1} = \cdots = d_{n_{k+1}+m_{k+1}} = 2}} \left(\frac{1}{d_{n+1}(d_{n+1} - 1) \cdots d_{n_{k+1}+m_{k+1}}(d_{n_{k+1}+m_{k+1}} - 1)} \right)^{s_M(u_{k+1})} \\
&\le M^{2(n_{K_0}+m_{K_0})} |I_{n_k+m_k}(d_1, \dots, d_{n_k+m_k})|^{s_M(\zeta)-\varepsilon} \left(\frac{1}{d_{n_k+m_k+1}(d_{n_k+m_k+1} - 1) \cdots d_n(d_n - 1)} \right)^{s_M(\zeta)-\varepsilon} \\
&\quad \cdot \sum_{\substack{d_{n+1}, \dots, d_{n_{k+1}} \in \Sigma_M \\ d_{n_{k+1}+1} = \cdots = d_{n_{k+1}+m_{k+1}} = 2}} \left(\frac{1}{d_{n+1}(d_{n+1} - 1) \cdots d_{n_{k+1}+m_{k+1}}(d_{n_{k+1}+m_{k+1}} - 1)} \right)^{s_M(u_{k+1})} \\
&\le M^{2(n_{K_0}+m_{K_0})} |I_n(d_1, \dots\dots, d_n)|^{s_M(\zeta)-\varepsilon} \\
&\quad \cdot \sum_{\substack{d_{n+1}, \dots, d_{n_{k+1}} \in \Sigma_M \\ d_{n_{k+1}+1} = \cdots = d_{n_{k+1}+m_{k+1}} = 2}} \left(\frac{1}{d_{n+1}(d_{n+1} - 1) \cdots d_{n_{k+1}+m_{k+1}}(d_{n_{k+1}+m_{k+1}} - 1)} \right)^{s_M(u_{k+1})}.
\end{aligned}$$

注意到

$$1 = \sum_{\sigma_1, \dots, \sigma_{n-(n_k+m_k)} \in \Sigma_M} \left(\frac{1}{\sigma_1(\sigma_1 - 1) \dots \sigma_{n-(n_k+m_k)}(\sigma_{n-(n_k+m_k)} - 1)} \right)^{s_M(u_{k+1})}$$

$$\cdot \sum_{\substack{d_{n+1},\ldots,d_{n_{k+1}}\in\Sigma_M \\ d_{n_{k+1}+1}=\cdots=d_{n_{k+1}+m_{k+1}}=2}} \left(\frac{1}{d_{n+1}(d_{n+1}-1)\cdots d_{n_{k+1}+m_{k+1}}(d_{n_{k+1}+m_{k+1}}-1)}\right)^{s_M(u_{k+1})}.$$

由（4.13）与 S_M（ζ）的定义，我们有

$$\sum_{\sigma_1,\ldots,\sigma_{n-(n_k+m_k)}\in\Sigma_M} \left(\frac{1}{\sigma_1(\sigma_1-1)\ldots\sigma_{n-(n_k+m_k)}(\sigma_{n-(n_k+m_k)}-1)}\right)^{s_M(u_{k+1})}$$

$$\geq \sum_{\substack{\sigma_{(n-(n_k+m_k))\frac{1}{1+\zeta}+1}=\ldots=\sigma_{n-(n_k+m_k)}=2 \\ \sigma_1,\ldots,\sigma_{(n-(n_k+m_k))\frac{1}{1+\zeta}}\in\Sigma_M}} \left(\frac{1}{\sigma_1(\sigma_1-1)\ldots\sigma_{n-(n_k+m_k)}(\sigma_{(n-(n_k+m_k))\frac{1}{1+\zeta}}-1)2\cdots 2}\right)^{s_M(\zeta)+\tilde{\varepsilon}}$$

$$\geq \left(\frac{1}{M(M-1)}\right)^{(n-(n_k+m_k))\tilde{\varepsilon}} \geq \left(\frac{1}{M(M-1)}\right)^{n\tilde{\varepsilon}}.$$

于是我们得到

$$(M(M-1))^{n\tilde{\varepsilon}} \geq \sum_{\substack{d_{n+1},\ldots,d_{n_{k+1}}\in\Sigma_M \\ d_{n_{k+1}+1}=\cdots=d_{n_{k+1}+m_{k+1}}=2}} \left(\frac{1}{d_{n+1}(d_{n+1}-1)\cdots d_{n_{k+1}+m_{k+1}}(d_{n_{k+1}+m_{k+1}}-1)}\right)^{s_M(u_{k+1})}.$$

由（4.13）的定义，我们有

$$\begin{aligned}\mu(J_n(d_1,\ldots,d_n)) &\leq M^{2(n_{K_0}+m_{K_0})}(M(M-1))^{n\tilde{\varepsilon}}|I_n(d_1,\ldots,d_n)|^{s_M(\zeta)-\varepsilon} \\ &\leq M^{2(n_{K_0}+m_{K_0})}|I_n(d_1,\ldots,d_n)|^{s_M(\zeta)-2\varepsilon} \\ &\leq M^{2(n_{K_0}+m_{K_0}+1)}|J_n(d_1,\ldots,d_n)|^{s_M(\zeta)-2\varepsilon}.\end{aligned}$$

情形 3： 若 $n_{k+1}\leq n<n_{k+1}+m_{k+1}$。给定 $d_{n+1}=\cdots=d_{n_{k+1}+m_{k+1}}=2$，我们有

$$\begin{aligned}\mu(J_n(d_1,\ldots,d_n)) &= \mu(J_{n_{k+1}+m_{k+1}}(d_1,\ldots,d_{n_{k+1}+m_{k+1}})) \\ &\leq M^{2(n_{K_0}+m_{K_0}+1)}|J_{n_{k+1}+m_{k+1}}(d_1,\ldots,d_{n_{k+1}+m_{k+1}})|^{s_M(\zeta)-\varepsilon} \\ &\leq M^{2(n_{K_0}+m_{K_0}+1)}|J_n(d_1,\ldots,d_n)|^{s_M(\zeta)-\varepsilon}.\end{aligned}$$

取 $C_3=M^{2(n_{K_0}+m_{K_0}+1)}$。证明完毕。

□

4.4. 基本区间之间的间隙

对于（d_1，……，d_n）$\in D_n$ 令 g_n（d_1，……，d_n）为从 J_n（d_1，……，d_n）到最近的不同n阶基本区间的距离。

命题 4.4。存在一个常数 $C_4=C_4(M)>0$，使得对于每个 $(d_1,\ldots,d_n)\in D_n$，

$$g_n(d_1,\ldots,d_n)\geq C_4|J_n(d_1,\ldots,d_n)|. \tag{4.19}$$

证明。 在本小节中，我们重点估计同阶不相交基本区间之间的间隙，如（4.8）中所定义。对于每个 $(d_1,\dots,d_n) \in D_n$，我们将 $J_n := J_n(d_1,\dots,d_n)$ 与其右侧（分别为左侧）最近的同阶基本区间之间的距离记为$g^r(d_1,\dots,d_n)$ $(g^\ell(d_1,\dots,d_n)$，分别）。我们将间隙定义为

$$g(d_1,\dots,d_n) := \min\{g^r(d_1,\dots,d_n), g^\ell(d_1,\dots,d_n)\}.$$

设 $J_n^r := J_n(d_1^r,\dots,d_n^r)$ 与 $J_n^\ell := J_n(d_1^\ell,\dots,d_n^\ell)$ 为位于 $J_n(d_1,\dots,d_n)$ 左右两侧的相邻基本区间（若存在）。

情形 1： 若 $n_k + m_k \le n < n_{k+1}$。在此情形下，我们有

$$\begin{aligned}
J_n &= \bigcup_{2\le d\le M} I_{n+1}(d_1,\dots,d_n,d),\\
J_n^\ell &= J_n(d_1,\dots,d_{n-1},d_n+1) = \bigcup_{2\le d\le M} I_{n+1}(d_1,\dots,d_n+1,d),\\
J_n^r &= J_n(d_1,\dots,d_{n-1},d_n-1) = \bigcup_{2\le d\le M} I_{n+1}(d_1,\dots,d_n-1,d).
\end{aligned}$$

利用（4.9）及引理 2.2，我们有

$$\begin{aligned}
g^\ell(d_1,\dots,d_n) &\ge \sum_{d>M} |I_{n+1}(d_1,\dots,d_n,d)|\\
&= \sum_{d>M} \frac{1}{d_1(d_1-1)\cdots d_n(d_n-1)d(d-1)}\\
&= \frac{1}{M}|I_n(d_1,\dots,d_n)| = \frac{1}{M-1}|J_n,(d_1,\dots,d_n)|,
\end{aligned}$$

and

$$g^r(d_1,\dots,d_n) \ge \sum_{d>M} |I_{n+1}(d_1,\dots,d_n-1,d)| \ge \frac{1}{M-1}|J_n,(d_1,\dots,d_n)|.$$

因此，我们得到

$$g_n(d_1,\dots,d_n) \ge \frac{1}{M-1}|J_n(d_1,\dots,d_n)|. \tag{4.20}$$

情形 2： 若 $n_{k+1} \le n < n_{k+1} + m_{k+1}$。注意到

$$J_n = J_n(d_1,\dots,d_{n_{k+1}},\underbrace{2,\dots,2}_{n-n_{k+1}}), \qquad J_n^\ell = J_n(d_1^\ell,\dots,d_{n_{k+1}}^\ell,\underbrace{2,\dots,2}_{n-n_{k+1}}).$$

我们得到 $J_{n_{k+1}}^\ell$是左邻接基本区间 $J_{n_{k+1}}$，且 J_n与 J_n^ℓ之间的距离大于 $J_{n_{k+1}}^\ell$ 与 $J_{n_{k+1}}$之间的距离。于是我们得到

$$\begin{aligned}
g_n^\ell(d_1,\dots,d_{n_k+m_k},2,\dots,2) &\ge g_{n_k+m_k}^\ell(d_1,\dots,d_{n_k+m_k})\\
&\ge \frac{1}{M-1}|J_{n_k+m_k}(d_1,\dots,d_{n_k+m_k})|\\
&\ge \frac{1}{M-1}|J_n(d_1,\dots,d_{n_k+m_k},2,\dots,2)|.
\end{aligned}$$

用同样的方法，我们得到

$$g_n^r(d_1,\dots,d_{n_k+m_k},2,\dots,2)\geq\frac{1}{M-1}|J_n(d_1,\dots,d_{n_k+m_k},2,\dots,2)|.$$

因此可得

$$g_n(d_1,\dots,d_n)\geq\frac{1}{M-1}|J_n(d_1,\dots,d_n)|. \tag{4.21}$$

取 $C_4=\frac{1}{M-1}$ 证明完成。 □

4.5. 下界的完成

命题 4.5. 对任意 $\varepsilon>0$，存在 $C=C(M,\varepsilon)$ 使得对每个 $x\in f(G(M))$ 以及充分小的 $r>0$,

$$\mu(B(x,r))\leq\tilde{C}\,r^{s_M(\zeta)-\varepsilon}. \tag{4.22}$$

证明。令 $r_0=\min_{1\leq j\leq n_{K_0}+m_{K_0}}\min_{(d_1,\dots,d_j)\in D_j} g(d_1,\dots,d_j)>0$。取 $x\in f(G(M))$ 和 $0<r<r_0$。存在唯一的序列 $d_1,d_2,\dots$ 满足对所有 $k\geq1$，均有 $x\in J_k(d_1,\dots,d_k)$。选取 n 使得

$$g_{n+1}(d_1,\dots,d_{n+1})\leq r<g_n(d_1,\dots,d_n).$$

根据 4.4 命题，球 $B(x,r)$ 至多与一个 n 阶柱集相交，即 $J_n(d_1,\dots,d_n)$。由命题4.3，可推得

$$\mu(B(x,r))\leq\mu(J_n(d_1,\dots,d_n))\leq C_4|J_n(d_1,\dots,d_n)|^{s_M(\zeta)-\varepsilon}.$$

由（4.9）和（4.10），可知

- 当 $n_k+m_k\leq n<n_{k+1}-1$ 且 $n_{k+1}\leq n<n_{k+1}+m_{k+1}-1$时，有

$$\frac{|J_n(d_1,\dots,d_n)|}{|J_{n+1}(d_1,\dots,d_{n+1})|}=\frac{|I_n(d_1,\dots,d_n)|}{|I_{n+1}(d_1,\dots,d_{n+1})|}=d_{n+1}(d_{n+1}-1),$$

- 当 $n=n_{k+1}-1$时，有

$$\frac{|J_n(d_1,\dots,d_n)|}{|J_{n+1}(d_1,\dots,d_{n+1})|}=\frac{M}{2(M-1)}d_{n+1}(d_{n+1}-1),$$

- 当 $n=n_{k+1}+m_{k+1}-1$时，有

$$\frac{|J_n(d_1,\dots,d_n)|}{|J_{n+1}(d_1,\dots,d_{n+1})|}=\frac{2(M-1)}{M}d_{n+1}(d_{n+1}-1).$$

由于 $d_{n+1}\leq M$，因此有

$$\frac{|J_n(d_1,\dots,d_n)|}{|J_{n+1}(d_1,\dots,d_{n+1})|}\leq2(M-1)^2$$

对于任意满足 $k\geq K_0$ 的 $n_k+m_k\leq n<n_{k+1}+m_{k+1}$。

因此，

$$\begin{aligned}\mu(B(x,r)) &\le C_3|J_n(d_1,\dots,d_n)|^{s_M(\zeta)-\varepsilon}\\ &\le C_3 2(M-1)^2|J_{n+1}(d_1,\dots,d_{n+1})|^{s_M(\zeta)-\varepsilon}\\ &\le 2(M-1)^2C_3C_4^{-(s_M(\zeta)-\varepsilon)}g_{n+1}(d_1,\dots,d_{n+1})^{s_M(\zeta)-\varepsilon}\\ &\le 2(M-1)^2C_3C_4^{-(s_M(\zeta)-\varepsilon)}r^{s_M(\zeta)-\varepsilon}.\end{aligned}$$

□

应用质量分布原理（例如参见 [4]）于命题 4.5，可得

$$\dim_{\mathrm{H}} f(G(M)) \ge s_M(\zeta)-\varepsilon.$$

令 $\varepsilon\to 0$，得到 $\dim_{\mathrm{H}} f(G(M)) \ge s_M(\zeta)$。

最后，由（4.7），

$$\dim_{\mathrm{H}} E(\alpha,\beta) \ge s_M(\zeta).$$

显然 $s_M(u) \le s(u)$，且 $\lim_{M\to\infty} s_M(u) = s(u)$。令 $M\to\infty$，得到

$$\dim_{\mathrm{H}} E(\alpha,\beta) \ge s(\zeta) = s\left(\frac{\beta^2(1-\alpha)}{(1-\beta)[\beta-\alpha(1+\beta)]}\right).$$

至此，下界的证明完成。结合第 3节得到的上界，定理 1.2得证。

参考文献

[1] A. Bakhtawar 和 J. Feng. 连分数中部分商的加权乘积的增长率。Chaos Solitons Fractals **172** (2023), 113591, 7 页。[2] K. Dajani, C. Kraaikamp. 数的遍历理论。Carus 数学专著 29，美国数学协会，华盛顿，2002。[3] P. Erdös, A. Rényi. 关于一种新的大数定律。J. Anal. Muth. **22** (1970), 103–l。[4] K. Falconer. 分形几何：数学基础与应用。Wiley & Sons, 奇切斯特，1990。[5] J. Galambos. 实数的无穷级数表示。数学讲义 502，施普林格，柏林，1976。[6] H. Hu, X. Tong 和 Y. Yu. 关于 β 展开中 1 的连续零数字。J. Number Theory **166**(2016), 219–234。[7] L. Huang 和 Y. Chen. 关于幂-α衰减类高斯展开中的最大游程长度函数。Bull. Malays. Math. Sci. Soc. **49** (2026), no. 1, Paper No. 49。[8] J. Li 和 M. Wu. 关于 Erdös-Rényi 极限定理中的例外集。J. Math. Anal. Appl.**436** (2016), no. 1, 355–365。

[9] J. Li 和 M. Wu. 关于 Erd˝os-Rényi 极限定理中例外集的再探讨。Monatsh. Math.**182**(2017), no. 4, 865–875。[10] J. H. Ma, S. Wen 和 Z. Y. Wen. 埃戈罗夫定理与最大游程长度。Monatsh. Math.**151**(2007), no. 4, 287–292。[11] T. Song 和 Q.-L. Zhou. 关于连分数中的最长块函数。Bull. Aust. Math. Soc.**102** (2020), no. 2, 196–206。[12] Y. Sun 和 J. Xu. 关于吕罗斯展开中的最大游程长度函数。Czechoslovak Math. J.**68**(**143**)(2018), no. 1, 277–291。[13] Y. Sun 和 J. Xu. 关于 Erdös-Rényi 极限定理中例外集的一点注记。Monatsh. Math.**184**(2017), no. 2, 291–296。[14] X. Tong, Y. Yu 和 Y. F. Zhao. 关于 β 展开中连续零数字的最大长度。Int. J. Number Theory**12**(2016), no. 3, 625–633。[15] B. Tan 和 Q.-L. Zhou. 连分数中的一致丢番图逼近与连续段长度函数。Ergodic Theory Dynam. Systems**45** (2025), no. 4, 1246–1280。[16] B.W.Wang, J. Wu. 关于连分数中的最大游程长度函数。Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp. **34**(2011), 247–268。[17] R.-B. Zou. 二进制展开中最大游程长度的豪斯多夫维数。Czechoslovak Math. J.**61**(**136**)(2011), no. 4, 881–888。[18] Q.-L. Zhou. 吕罗斯展开中由最长块函数产生的例外集的维数。J. Math. Anal. Appl. **510** (2022), no. 2, Paper No. 126011, 15 页；MR4372790