关于分段单调 Krasnosel´skii-Pokrovskii 滞回无逆前馈控制的柯西问题与稳定性

Jana Kopfov´a[a], Michael Ruderman[b]

[a] *Mathematical Institute of the Silesian University, Czech Republic*
[b] *Department of Engineering Sciences of the University of Agder, Norway*

arXiv:2603.03891v1 [math.DS] 4 Mar 2026

摘要

我们研究由 Krasnosel´skii-Pokrovskii 率无关滞回算子描述的含滞回非齐次一阶微分方程。证明了解的存在性与唯一性，以及在有界输入作用下解的有界性。我们还考察了该方程的全局稳定性，并进一步研究了周期解及其稳定性。所分析的微分方程构成所谓的无逆前馈控制，该控制旨在减轻受驱动系统中任意率无关滞回效应的影响。以实验识别出的磁形状记忆合金（MSMA）执行器的非光滑、非严格单调滞回特性为案例进行研究。相关分析通过一系列定理展开，并辅以数值例子说明。

关键词：滞回模型、稳定性分析、前馈控制、游隙算子、滞回补偿

1. 引言

滞回现象广泛存在于各种物理系统中，包括铁磁材料、压电执行器以及多稳态功能材料，例如磁形状记忆合金（MSMA）。在许多此类应用中，滞回会严重限制控制策略所能达到的精度，因此，对其进行补偿是高性能系统设计中不可或缺的一环。

在各种滞回现象的解析描述中，克拉斯诺谢尔斯基-波克罗夫斯基（KP）算子 [3] 是一类应用广泛且经过实验验证的模型，适用于表现出分段单调、率无关滞回回线的系统。

本研究受到 [7], 中提出的无逆前馈控制框架的启发，如图1所示。该方法不显式计算滞回映射的逆

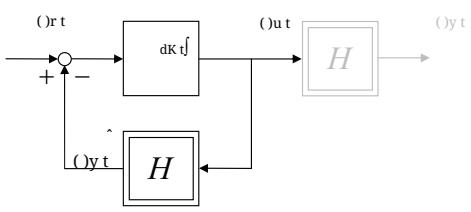


图1：无逆前馈滞回控制。

映射，而是利用模型反馈回路隐式生成补偿信号 u。其底层动力系统由以下微分方程描述

$$\frac{1}{K}\frac{du(t)}{dt} + H(u(t)) = r(t), \qquad t \geq 0, \tag{1}$$

初始条件 $u(0) = u_0$, $H(u)(0) = w_0$、设计参数 $K > 0$ 以及连续输入 $r(t)$。当增益 K足够大时，解 $u(t)$可近似实现滞回算子的逆 H^{-1}的作用，因此可作为滞回部分的前馈补偿信号，见图1右侧灰色阴影部分。该方案的性能体现在跟踪误差范数 $|r(t) - \hat{y}(t)|$上，其中 $\hat{y}(t) = H(u(t))$。

尽管过去二十年间，针对磁形状记忆合金（MSMA）已提出并研究了各种控制方案，例如 [8],[6], ，对较大的输入滞回进行预补偿仍是主要控制问题之一。图2展示了在准静态激励条件下测得的典型MSMA执行器输入输出响应示例 [9], [8], ，并将其与所辨识的滞回模型进行了比较；该模型假设由三个基本算子组成，且每个算子均为KP型。请注意，此处的准静态条件是指施加到执行器上的激励电流呈低线性斜率形式，即具有足够低的 $|du/dt|$ 值。在此类条件下，可将执行器的输入滞回响应视为不受其他执行器动力学影响，例如惯性、阻尼或刚度元件所引起的动力学。随后，我们假设滞回映射 $y = H(u)$与速率无关，而图1所示的前馈补偿方案是主要研究目标，具体见式（1）。

Email addresses: jana.kopfova@math.slu.cz (Jana Kopfov´a), michael.ruderman@uia.no (MichaelRuderman)

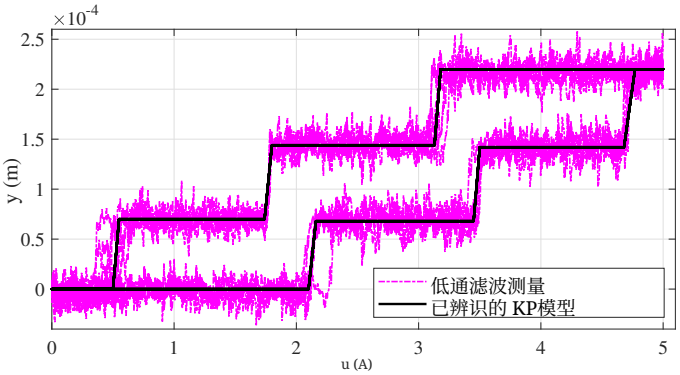


图 2：在准静态运行条件下测得的 MSMA执行器响应（及其低通滤波结果），与包含三个算子元件的已辨识 KP 型滞回模型的对比。

本文所研究的核心问题是分析式（1）的适定性，尤其是解的存在性与唯一性、周期解的存在性及其长期行为，即稳态解和周期解的稳定性。滞回非线性及其非严格单调性也是增加分析难度的特征。

接下来，我们将 [7, 9] 的无逆滞回补偿框架加以扩展，通过对一大类滞回映射进行严格分析来实现这一点。具体而言：

- 我们引入广义游动算子类，其中包括经典 KP 型滞回算子这一特例。
- 在物理上合理的假设下，我们证明了含滞回的非线性微分方程 (1) 的解存在且唯一。
- 我们推导出解的先验界，并证明了相应动力系统的稳定性性质。
- 我们研究了周期激励 $r(t)$ 下方程 (1) 的周期解的存在性，并给出了保证其稳定性的充分条件。
- 数值仿真展示了理论结果，并进一步证明了无逆前馈补偿对 KP 型滞回的有效性。

这些结果为滞回补偿奠定了数学基础，并为涉及复杂多稳态材料和执行器的控制应用提供了实用工具。

过去几十年来，滞回数学理论得到了广泛发展，其研究始于Krasnosel'skii和Pokrovskii的经典专著[3]，并延续至今，涵盖Brokate和Sprekels [1] 等人提出的现代分析框架以及Visintin [10]的研究。这些工作确立了率无关算子的基本性质，包括游动算子和停止算子、Preisach型叠加模型，以及单调性、Lipschitz连续性或参数化耗散势等结构假设。现有文献中也有相当一部分聚焦于滞回算子的可逆性或严格单调性，因为这些条件能够确保含滞回项的微分方程适定，并使得构造逆算子成为可能，而逆算子是基于补偿的控制策略的核心，参见 [5]。然而，实际应用中出现的KP型滞回算子通常具有平坦区间和不可逆分支，因此不满足这些经典假设。KP算子的非严格单调性带来了分析上的挑战，而现有关于含滞回项的微分方程的结果尚未充分解决这些问题。本研究沿着这一方向，通过在直接受到物理应用启发的假设下，确立方程(1)解的严格存在性、唯一性、有界性和稳定性性质，为相关研究作出贡献。然而，本研究中的滞回模型采用了更一般的假设，这些假设也适用于物理应用。我们还给出了保证周期解存在性和稳定性的条件，从而探讨了当前数学文献中尚未得到充分研究的方面。数值例子再次验证了一系列定理所表述的理论结果。

2. 问题陈述

我们考虑由微分方程 (1) 描述的带滞回动力系统类，其初始条件为 $u(0) = u_0$，独立变量（时间）为 $t \in [0, \infty)$。其中，$H(\cdot)$ 表示广义 play 算子，下一节将对其进行详细描述。应用中出现的 KP型滞回算子构成了这类算子的一个特例。假设右端项 $r(t)$ 是 Lipschitz连续的。常数 $K > 0$ 是设计参数。

3. 广义 play 算子

设 γ_l、γ_r : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$，其中 $\gamma_r \le \gamma_l$ 为连续非减函数。现在，给定 $w_0 \in \mathbb{R}$，我们按如下方式构造滞回算子 $H(\cdot, w_0)$。设 u 是 $\mathbb{R}^+$ 上任意连续的分段线性函数，使得对于 $i = 1$、2、.....，u 在 $[t_{i-1}, t_i]$ 上是线性的。然后我们定义 w : $= H(u, w_0)$: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$，其定义如下：

$$w(t) := \begin{cases} \min\{\gamma_l(u(0)), \max\{\gamma_r(u(0)), w_0\}\} & \text{if } t = 0, \\ \min\{\gamma_l(u(t)), \max\{\gamma_r(u(t)), w(t_{i-1})\}\} & \text{if } t \in I, \end{cases} \tag{2}$$

where $I = (t_{i-1}, t_i], i = 1, 2, \ldots$.

W还假设 γ_r u 0)h $\le$ u_0 ($\le$) $\gamma_l(u(0))$，即$w(0) = w_0$.

如 [10, 第 III 节2], 所证明，对于定义在 $\mathbb{R}^+$上的任意连续分段线性函数 u_1、 u_2 ，采用记号$\epsilon_k := H(u_k, w_{0k})$, $k = 1$、2，可得以下不等式:

$$\max_{[t_1,t_2]} |\epsilon_1 - \epsilon_2| \leq \max\left\{|\epsilon_1(t_1) - \epsilon_2(t_1)|, m_M\left(\max_{[t_1,t_2]} |u_1 - u_2|\right)\right\} \quad \forall [t_1, t_2] \subset [0, T], T \in \mathbb{R}^+, \tag{3}$$

其中，对于任意连续函数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 以及任意常数 $M > 0$， $|f|_M(h)$表示其局部连续模:

$$|f|_M(h) := \sup\{|f(y_1) - f(y_2)| : y_1, y_2 \in [-M, M], |y_1 - y_2| \leq h\} \quad \forall h > 0, \tag{4}$$

$$m_M(h) := \max\{|\gamma_l|_M(h), |\gamma_r|_M(h)\} \quad \forall h, M > 0, \tag{5}$$

and

$$M := \max\{|u_k(t)| : t \in [0, T], k = 1, 2\}. \tag{6}$$

因此， $H(\cdot, w_0)$存在唯一的连续延拓，仍记为 $H(\cdot, w_0)$, 它是一个算子

$$H : C(\mathbb{R}^+) \times \mathbb{R} \to C(\mathbb{R}^+). \tag{7}$$

这个算子称为广义游动。

不等式 (3) 对这个延拓后的算子也成立，因此该算子在有界集上一致连续。若 γ_l、 γ_r 是 Lipschitz连续的, 则 H 也为 Lipschitz连续。

4. 主要结果

我们证明了当 $H(u(t))$ 为广义 play 算子时, Cauchy 问题的唯一性定理。本节中我们始终假设假设 4.1 成立:

假设 4.1. $H(u, w_0)(t)$ 是一个广义 play 算子，其滞回边界曲线 γ_l 和 γ_r 单调不减且 Lipschitz连续， $r(t)$ 是 Lipschitz连续的。

注：由此假设可知，在本文余下部分，我们可以假设所考虑的滞回算子 $H(u(t))$ 是 Lipschitz连续的。

定理 4.2. 假设假设 4.1 成立。那么，对于任意 $K > 0$, 满足初始条件 $u(0) = u_0$, $H(u)(0) = w_0$ 的柯西问题 (1) 的解存在且唯一。

证明。该证明是对常微分方程理论中众所周知的结果的标准应用，更多细节参见 [2] 。滞回算子 $H(u(t))$ 的 Lipschitz连续性是推出该结果的关键性质。 □

关于常微分方程 (1) 长期行为的有趣问题，我们将分几步来回答。我们首先证明解的有界性。

定理 4.3. 假设假设 4.1 成立。此外，假设滞后项 $H(u)$ 以及函数 $r(t)$ 均非负且有界，即存在常数 $H > 0$ 和 R_∞ , 使得对于任意 $t \geq 0$, $0 \leq H(u(t)) \leq H$, 并且 $0 < r(t) \leq R_\infty < H$.
那么，对于任意 $t \geq 0.$, 满足初始条件 $u(0) = u_0$, $H(u)(0) = w_0$ 的柯西问题 (1) 的解 $u(t)$ 有界。这对任意 $K > 0$ 均成立。

证明。证明思路非常直观，源于广义 play 算子的定义。反设该解向上无界，则存在最右端点 t_1 , 使得$H(u(t_1)) = R_\infty$. 。于是对所有 $t > t_1$, 都有 $H(u(t)) > R_\infty$, 这意味着 $\frac{du}{dt}(t) < 0$, 矛盾。

下方有界性的证明采用相同的论证。 □

注：假设 $H(u(t))$ 和 $r(t)$ 均非负，取决于具体应用；在所研究的情形中（参见图 2），这反映了磁形状记忆合金致动器仅受单极激励及其相应的伸长。不过，这一假设也可以类似地推广到上界。

现在假设 $r(t)$ 为常数。那么我们可以证明常微分方程 (1) 的渐近稳定性:

定理 4.4. 假设假设 4.1 成立，且对于 $t \geq 0$, $r(t) = R$, 其中 $0 < R < H$，那么，带有初始条件$u(0) = u_0$, $H(u)(0) = w_0$的柯西问题 (1) 的解 $u(t)$ 是稳定的。定义 u_1 为满足 $\gamma_l(u) = R$ 的 u 的最大值，并定义 u_2 为满足 $\gamma_r(u) = R.$ 的 u的最小值。那么，根据初始条件，解从集合 $\{u_1, u_2\}$.收敛到 u_*

证明。沿用前一个证明的思路，显然，一旦对于某个 t , $H(u(t)) > R$, 解就会递减；类似地，若对于某个 t, $H(u(t)) < R$, 解就会递增。在这两种情况下，解都会保持其单调性，直到 $H(u(t)) = r$。结论得证。 □

现在假设 $r(t)$ 不是常数，而是当 $t \to \infty$ 时收敛于极限值 R_∞.

定理 4.5. 假设假设 4.1 成立，且 $\lim_{t\to\infty} r(t) = R_\infty$，其中 $0 < R_\infty < H$. 则初始条件为$u(0) = u_0$, $H(u)(0) = w_0$的柯西问题 (1) 的解 $u(t)$ 是稳定的。定义 u_1 为满足 $\gamma_l(u) = R_\infty$ 的最大点，并定义 u_2 为满足 $\gamma_r(u) = R_\infty$. 的最小点。则方程 (1) 的解 $u(t)$ 的 $\omega-$极限集为集合 $\{u_1, u_2\}$.

证明。证明思路与前一个证明非常相似，不同之处在于我们需要使用一些 $\epsilon-\delta$ 工具来处理条件 $\lim_{t\to\infty} r(t) = R_\infty$. 。具体而言，任取 $\epsilon > 0$，并假设存在 $t_1 > 0$，使得对所有 $t > t_1$

$$u(t) > u_2 + \epsilon.$$

设 $\delta = \gamma_r(u(t_1)) - \gamma_r(u_2)$。注意，由此可得$\delta \le H$.

那么，假设 $\lim_{t\to\infty} r(t) = R_\infty$，则存在某个 $t_* > 0$，使得对所有$t > t_*$，$r(t) < R_\infty + \delta$

现在取 $t \ge \max\{t_*, t_1\}$. 。由方程可知，在任何这样的 t 上，解 $u(t)$ 必定递减。

情形 $u(t) < u(t_1)$ 可用类似方法处理。因此，对任意 $\epsilon > 0$, ω–极限集都不可能位于区间 $(u_1-\epsilon, u_2+\epsilon)$ 之外。这证明了该定理。 □

此外，我们还可以证明

定理 4.6. 假设假设 4.1 成立，且$r(t)$ 是 T-周期且有界的。那么，柯西问题 (1) 在初始条件 $u(0) = u_0$,$H(u)(0) = w_0$ 下的解 $u(t)$ 是 T-周期且稳定的。

证明。我们利用庞加莱映射证明周期解的存在性:

按标准方式定义庞加莱映射 $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，则 P 的不动点 u_* 对应于方程 (1) 的一个 T-周期解。

设 $u_1(t)$ 和 $u_2(t)$ 是方程 (1) 的两个解，它们具有相同的 $r(t)$，但初始条件 $u_1(0)$ 和 $u_2(0)$ 不同。定义

$$w(t) := u_1(t) - u_2(t).$$

Then

$$\frac{dw}{dt} = -\big(H(u_1(t)) - H(u_2(t))\big).$$

将最后一个方程乘以 $w(t)$，得到

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(w^2(t)) = -\big(H(u_1(t)) - H(u_2(t))\big)\, w(t) \le 0$$

由 H 的单调性可知。因此,

$$|w(t)| \text{ is nonincreasing in } t.$$

特别地,

$$|P(u_1(0)) - P(u_2(0))| \le |u_1(0) - u_2(0)|.$$

解的有界性（可如前所示证明，见定理 2.2）保证 P 将 $\mathbb{R}$ 的一个紧凸子集映射到其自身。根据布劳威尔不动点定理，P 至少有一个不动点，因此 (1) 至少有一个 T-周期解 $u_p(t)$。

H 的Lipschitz连续性意味着不动点是唯一的。

设 $u(t)$为任意解，且 $u_p(t)$为初值为 $u(0) = u_0$的唯一周期解。通过重复

如上所述的论证，可以证明差$v(t) := u(t) - u_p(t)$满足

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(v^2(t)) \le 0,$$

因此，$|v(t)|$ 随时间单调不增。这意味着稳定性。 □

定理 4.7。 $e = r - H(u)$的误差界。

假设假设 4.1成立。此外，假设滞后项 $H(u)$以及函数 $r(t)$均非负且有上界，即存在常数 $H > 0$ 和 R_∞，使得对于任意 $t \ge 0$, $0 \le H(u(t)) \le H$，并且 $0 < r(t) \le R_\infty < H$。
那么我们有

$$|e(t)| \le R_\infty + H, \qquad \forall t \ge 0.$$

证明。根据广义 play 算子的定义，对于每个 $t \ge 0$，输出满足

$$H(u)(t) \in [\gamma_\ell(u(t)),\, \gamma_r(u(t))].$$

因此

$$e(t) = -H(u)(t) + r(t) \in r(t) - [\gamma_\ell(u(t)), \gamma_r(u(t))],$$

i.e.

$$|e(t)| \le \max\big\{|r(t) - \gamma_\ell(u(t))|,\, |r(t) - \gamma_r(u(t))|\big\}.$$

因此，利用假设中的界，我们得到所需的估计。需要指出的是，该估计与增益 K 和轨迹 $u(t)$均无关。 □

注：上述误差界是保守的。根据增益参数的取值K以及输入轨迹的利普希茨常数，误差界在一定程度上还可以更低（参见下文的数值例子）。

5. 数值算例

我们考虑问题 (1)，并进行若干数值算例，以说明上述分析结果。所实现的模型 (1) 采用标准的前向欧拉数值求解器，固定时间步长设为10^{-6} 秒。KP型滞回 $H(u)$ 是根据实验数据辨识得到的，见图1；其输入—输出实现由三个饱和的基本 Prandtl-Ishlinskii play 型算子并联构成，基础知识可参见例如 [4] 。请注意，下文为简便起见，r 和$H(u)$的数值均未进行 $\times 10^{-4}$ 缩放，参见图1。设置了两个增益因子值 $K = \{10, 50\}$，以便更好地区分由此产生的收敛行为。我们将控制误差

$$e(t) = r(t) - H\big(u(t)\big)$$

视为感兴趣的收敛因子。回顾一下，$|e(t)|$范数是前馈滞回控制的主要性能指标，参见第1节。

首先，在时间 $t = 0.1$ 秒施加恒定输入值 $r(t) = R = 2$。控制误差及其幅值的对数分别显示在图3 (a) 和 (b) 中。收敛情况显然符合定理3.4，而指数收敛速率取决于增益因子 K。

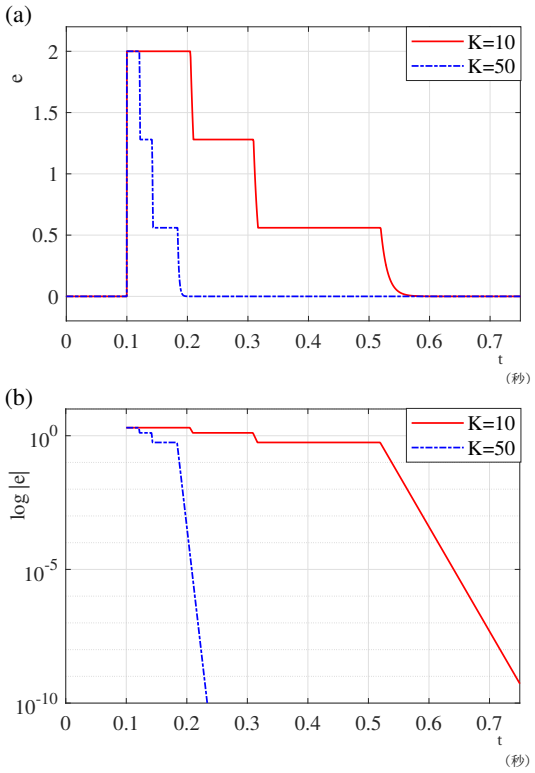


图3：在时间 $t = 0.1$ 秒施加恒定（阶跃）输入值 $r(t) = R = 2$ 时的控制误差 (a) 及其对数收敛情况 (b)。

接下来，使用一个光滑输入函数

$$r(t) = \frac{a_1 t^n}{h^n + t^n} + \frac{a_2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \sin(\omega t),$$

该函数满足 $\lim_{t\to\infty} r(t) = R_\infty = a_1$，参见定理3.5中的 r-条件。参数值设为 $n = 4$, $h = 0.2$, $a_1 = 2$, $a_2 = 0.1$, $\sigma = 0.1$, $\mu = 0.3$,$\omega = 100$，由此得到图4 (a) 所示的 $r(t)$ 轨迹。图 4 (b) 展示了对应的控制误差；显然，该误差趋于零，且结果适用于两个增益因子 K，符合定理3.5。

最后，我们采用满足$0 < r(t) < H$的周期输入函数，参见定理 3.6。所假设的函数

$$r(t) = A_0 + A\sin(\omega t + \phi)$$

对所有 $t > 0$ 都是光滑的，而其动态速率及利普希茨常数可通过角频率 ω 直接控制。参数 $A_0 = 1.1$、$A = 1$ 和

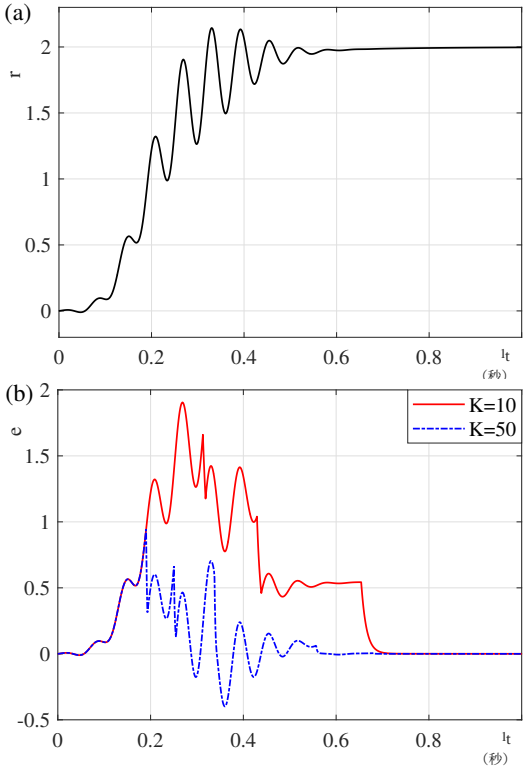


图4：当 $\lim_{t\to\infty} r(t) = 2$ 时的输入轨迹（a）和控制误差（b）。

假设 $\phi = -\pi/2$ 是相对于参数化滞回 $H(u)$ 给出的，参见图1。对于两个增益因子 $K = \{10, 50\}$，均评估稳态绝对控制误差 $\max|e|_{t\to\infty}$。此外，采用角频率集合 $\omega = (2\pi)^{-1} \times \{0.01, 0.1, 1, 10\}$ 弧度/秒进行不同的仿真，从而覆盖对数尺度上的三个数量级，见图5(a)。请注意，为方便起见，输入频率以赫兹单位按对数方式绘出。图5(b)还展示了角频率为 $\omega = (2\pi)^{-1}$ 弧度/秒时控制误差随时间的变化示例。我们注意到，图5(a)中的数值结果在定性上与先前基于 [7]，中给出的线性传递函数所做的近似分析一致，参见图 [7, 7]。

6. 结论

我们研究了由 Krasnosel´skii-Pokrovskii 率无关滞回算子描述的含滞回非齐次一阶微分方程。具体而言，我们考察了有界输入下解的有界性，以及描述所谓无逆前馈滞回控制的该方程的全局稳定性 [7]。这一问题源于对磁形状记忆合金（MSMA）执行器滞回特性的实验辨识，其中滞回映射的非光滑性和非严格单调性是本文重点关注的问题。

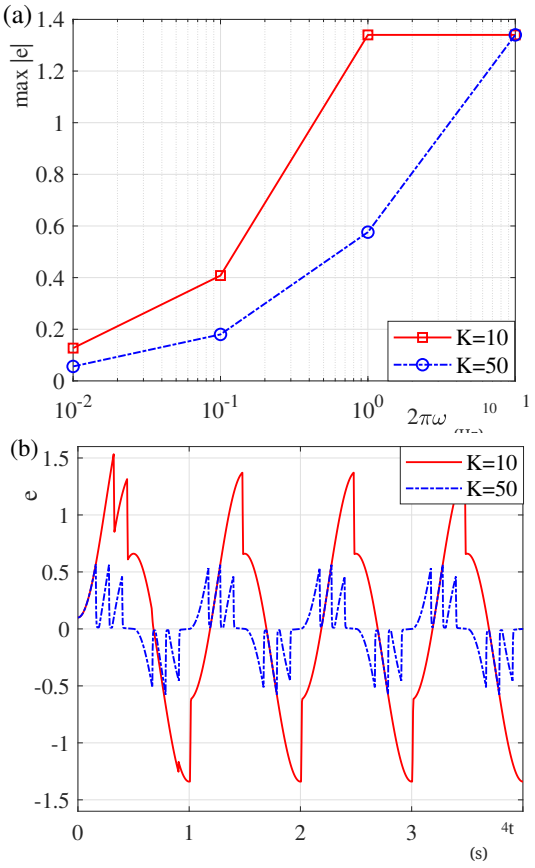


图5：最大稳态绝对控制误差随频率 $2\pi\omega$ 的变化（a），以及 $2\pi\omega = 1$ Hz时的控制误差（b）。

本文通过一系列定理分析了含滞回动力系统解的存在性、唯一性和有界性，并考察了解的稳定性，以及周期输入下解的存在性、唯一性和稳定性。最后，我们给出了若干与上述分析相符的示例性数值算例。对于周期输入的误差界，若能得到较不保守的估计，并进一步研究该误差界对增益参数以及输入轨迹的利普希茨常数的依赖关系，将是未来值得探讨的课题，尤其是在控制应用方面。

参考文献

[1] Brokate, M., Sprekels, J., 1996。《滞回与相变》。施普林格。[2] Kopfov´a, J., 1999. 带滞回的柯西问题的唯一性定理。美国数学会会刊 127, 3527 3532–。[3] Krasnosel'skii, M., Pokrovskii, A., 1989。《滞回系统》。施普林格。[4] Krejci, P., 1996. 双曲方程中的滞回、凸性与耗散。东京：Gakkotosho。[5] Mayergoyz, I., 1991。《滞回的数学模型》。施普林格。[6] Minorowicz, B., Leonetti, G., Stefanski, F., Binetti, G., Naso, D., 2016. 基于磁形状记忆合金的微定位执行器的设计、建模与控制。《智能材料与结构》25, 075005。

[7] Ruderman, M., 2023. 使用Preisach模型的无逆运算前馈滞回控制，载于：欧洲IEEE控制会议，页码 1–6。[8] Ruderman, M., Bertram, T., 2014. 使用基于观测器的逆迟滞方法控制磁形状记忆执行器。IEEE控制系统技术汇刊 22, 1181 1189–。[9] Ruderman, M., Giostra, G., Sette, M., 2025. 具有大型非光滑输入迟滞的基于MSM的执行器的无逆运算前馈与反馈控制。IFAC-PapersOnLine: ALCOS2025。[10] Visintin, A., 1994。《滞回的微分模型》。