arXiv:2603.03894v1 [math.CO] 4 Mar 2026

# 关于宇宙学多胞体、其典范形式及其对偶

Anna Birkemeyer * Torben Donzelmann † MiekeFink ‡ Martina Juhnke §
2026年3月5日

**摘要**

我们以两种不同方式，借助平移宇宙学多胞体的对偶，计算任意图的宇宙学多胞体的典范形式。在此过程中，我们给出宇宙学多胞体之对偶的显式坐标描述。此外，我们利用底图的极大管族与近极大管族，构造了对偶宇宙学多胞体的两种三角剖分。尽管第一种三角剖分的存在性已由 Arkani-Hamed、Benincasa 与 Postnikov 提出，第二种则完全是新的，并且特别地给出了宇宙学多胞体典范形式的一个新表达式。

## 1 引言

宇宙学多胞体是粒子物理学中备受关注的组合对象。它由 Arkani-Hamed、Benincasa 与 Postnikov [2] 在研究宇宙波函数时首次定义。出现在该波函数中的被积函数对应于费曼图，而在本文语境中，费曼图就是图。对每一个这样的图 $G$，他们关联一个多胞体 $\mathcal{C}_G$，即宇宙学多胞体，其典范形式 恰好与相应的被积函数一致。这一微分形式是正几何理论中的基本对象，已知有多种方法可计算它。因此，将被积函数替换为典范形式，便可将正几何的工具应用于波函数的研究。计算多胞体典范形式的一种常见方法是通过对多胞体本身进行三角剖分，这一方法也已被用于宇宙学多胞体，见 [9] 以及 [3]。我们还请读者参阅 Frost 与 Lotter 最近的预印本，其中研究了宇宙波函数的一种推广[6]。

本文采用另一种思路，通过移位多胞体的对偶的体积来研究。更具体地说，以下陈述是我们的出发点（[8, 定理 5.3], 另见 [1, 第 7.4 节。1] 以及 [13,定理 2.5]）：

**定理 1.1**。 *[8]* 设 $P$ 是 $\mathbb{R}^d \subseteq \mathbb{P}^d$中的一个 $d$维多胞体。那么 $P$ 的典范形式为

$$\Omega(P)(x) = \mathrm{vol}\big((P-x)^\circ\big)\,\mathrm{d}(x),$$

其中，$(P-x)^\circ$ 表示移位多胞体 $P-x$的对偶。

我们将利用这一结果，通过其对偶多胞体的体积来研究宇宙学多胞体的典范形式。计算中出现的各项将自然对应于与图 $G$ 相关联的组合结构。一个技术难点在于，图 $G=(V,\ E)$ 的宇宙学多胞体自然位于维数为 $|E|+|V|$的实向量空间中，但其余维为一。因此，为了定义其极对偶，必须将它视为某个适当余维一子空间中的多胞体。这需要谨慎处理，以确保构造在几何上有效——从而使定理 1.1 适用——同时仍能在其坐标中体现图的组合结构。

*德国波恩大学。¨ anna.birkemeyer@gmx.de
†德国奥斯纳布吕克大学。¨¨ torben.donzelmann@uos.de
‡德国奥斯纳布吕克大学。¨¨ mieke.fink@uos.de§德国奥斯纳布吕克大学。¨¨ martina.juhnke@uos.de

我们给出了对偶多胞体的这种描述，使这一结构显式呈现，并证明我们的定义确实给出了宇宙学多胞体的极对偶。

由于极对偶多胞体的顶点与原多胞体的面相对应，因此了解多胞体 $\mathcal{C}_G$ 的面描述对我们至关重要。事实上， [2], 已证明，面自然对应于底层图的连通子图。

更具体地说，对于 $G=(V,E)$ 的任意连通子图 $t=(V(t)\ E(t))$（不一定是诱导子图），向量

$$h_t=\sum_{v\in V(t)}\mathbf{x}_v+\sum_{e\in E\setminus E(t)}|e\cap V(t)|\cdot\mathbf{y}_e\ \in\ \mathbb{P}^{|E|+|V|-1},$$

是 $\mathcal{C}_G$ 的一个面法向量。这里，我们用 $\mathbf{x}_v$ 表示 $v\in V$ 的标准基向量，用 $\mathbf{y}_e$ 表示 $e\in E$ 的标准基向量。

计算多胞体体积的一种自然方法是确定其三角剖分。在 [2], 中，作者在没有给出证明的情况下提出，宇宙学多胞体的对偶可以根据图的管族进行三角剖分；按照我们的术语，管族是由连通子图构成、并按包含关系全序排列的集合。更准确地说，他们提出了以下断言：

**定理 1.2**。设 $G$ 是一个具有极大管族 $T_1,\dots,T_s$ 的图，并令

$$\sigma_i=\operatorname{conv}\left(\frac{h_t}{|h_t|_1}\mid t\in T_i\right).$$

那么 $\{\sigma_1,\dots,\sigma_s\}$ 是 $\mathcal{C}_G^\circ$ 的一个三角剖分。

我们给出了这一结果的数学证明。此外，将定理 1.2 中的三角剖分限制到$\mathcal{C}_G^\circ$ 上，并以任意内点为锥顶进行锥化，可得到另一个由某些近极大管族构成的三角剖分。

两种三角剖分　都使我们能够计算宇宙学多胞体的典范形式，因为其　　e
组合类型　　多胞体的对偶的三角剖分在平移下保持不变。

我们想指出，尽管 Arkani-Hamed、Benincasa 和 Postnikov 的开创性论文 [2] 引发了大量关于宇宙学多胞体本身的研究（参见 [10]关于其面结构的结果，以及[9, 4, 3] 对其 Ehrhart 理论性质的研究），但迄今为止还没有人研究过它的对偶。

本文结构如下。下一节将介绍宇宙学多胞体，并回顾其几何方面的已知结果。我们还将在本文的框架下定义图的管族，因为这一概念在描述后文构造的三角剖分时起着核心作用。随后，我们将说明如何利用 $P^\circ$的一个三角剖分，计算定理 1.1 中出现的平移对偶体积。

在第 3 节中，我们给出对偶宇宙学多胞体$\mathcal{C}_G^\circ$ 的一个便于使用的定义，并证明定理 1.2。最后，在第 4 节中，我们利用第 3 节的结果，计算定理 4.1 中宇宙学多胞体的典范形式。我们证明，边界上的诱导三角剖分会导出宇宙学多胞体的对偶的另一种三角剖分，从而得到$\mathcal{C}_G$的典范形式的另一种表示。

在本文发表前不久，我们获悉定理 1.2 已由他人独立证明，且采用了不同的方法，见 [5]。

# 2 预备知识

本节将介绍图的管集、宇宙学多胞体，以及多胞体对偶的典范形式和体积所需的背景知识。

## 2.1 管集

本小节将定义管集的概念。这将有助于构造定理 1.2 中多胞体 $\mathcal{C}_G^\circ$ 的三角剖分。

给定一个图 $G=(V,E)$，我们将 $G$ 的非空连通（不一定是诱导）子图称为管，并用 $\mathcal{Z}(G)$ 表示 $G$ 的管集。对于一个管 $t\in\mathcal{Z}(G)$，我们分别用 $V(t)$ 和 $E(t)$ 表示它的顶点集和边集。若一个管 $t$ 由一个孤立顶点构成，即对于某个 $v\in V$， $t\ (t)=\{v\}$ 且 $E(t)=\emptyset$，则称其为单元素集。以下定义对我们尤为重要。

**定义 2.1.** 设 $G=(V,E)$ 是一个图。集合 $T\subseteq\mathcal{Z}(G)$ 称为 $G$ 的管集，若对所有 $t_1,t_2\in T$，以下条件之一成立

(1) $t_1$ 与 $t_2$ 不相交，即 $V(t_1)\cap V(t_2)=\emptyset$，或者

(2) $t_1$ 与 $t_2$ 彼此嵌套，即 $E(t_1)\subseteq E(t_2)$ 或 $E(t_2)\subseteq E(t_1)$。

如果一个管集 $T$ 在包含关系下是极大的，则称其为极大。

不难看出，$G$ 的每个极大管族的基数都是 $|E|+|V|$。此外，由于管是连通的，条件 (2) 意味着，对于所有满足条件 (2) 的 $t_1$，$t_2\in T$，我们还有 $V(t_1)\subseteq V(t_2)$，反之亦然。我们也用 $t_1\subseteq t_2$ 表示条件 (2)。如果上述两个条件都不成立，我们就说两根管相交。我们用 $\tau(G)$ 表示 $G$的极大管族数量。

**注 2.2**（管集定义的差异）。文献中存在一种不同于我们所采用定义的管集概念，参见例如 [12]。由于这一概念与图结合子相关，我们将这类管族称为*GA*-管族。在给出精确定义之前，我们先回顾一下：若存在集合 $V'\subseteq V$，使得 $H$ of $G=(V,E)$ 的子图 $H$ 是诱导 子图，则称其为诱导 子图。由此，$G=(V,E)$ 的 *GA*-管族 是由 $G$ 的连通诱导子图构成的集合 $T$，它按照定义 2.1 的含义构成一个管族，并且对所有满足 $V(t_1)\cap V(t_2)=\emptyset$ 的 $t_1,t_2\in T$，都有

(3) $E\cap\{v_1v_2\mid v_1\in V(t_1),v_2\in V(t_2)\}=\emptyset.$

后一条件意味着，不相交的管必须彼此不相邻。

给定一个图 $G=(V,E)$，其线图 是顶点集为 $E$ 的图；当 $L(G)$ 中的两个顶点所对应的边在 $G$ 中相接时，这两个顶点相邻。管族与 GA-管族之间的关系如下。

**引理 2.3**。设 $G$ 是一个图，$L(G)$ 是其线图。那么，$G$ 中包含每个单元素集的管族与 $L(G)$ 的 *GA*-管族之间存在一个双射。

证明。为简化记号，我们用 I($L(G)$) 表示 $L(G)$ 的顶点诱导连通子图集，并用 Z($G$) 表示 $G$ 中非单元素集的管集。由于每个管 $t\in$Z($G$) 都由其边集 $E(t)$ 确定，而 I($L(G)$) 中的每个管都由其顶点集 $V(s)$ 确定，因此，将 $t$ 映射到 $L(t)$ 的映射 $\phi:$ Z($G$) $\to$ I($L(G)$) 显然是一个双射。令 $\Phi$ 为其在 $G$ 的管族上的自然扩展，定义为：对于 $T\in$ Z($G$)，$\Phi(T)=\{\phi(t)\mid t\in T\}$。由于 $\phi$ 是双射，可知 $\Phi$ 是单射，特别地，它在其像上是双射。

因此，为了证明该断言，我们需要证明 $\Phi$ 的像等于 $L(G)$ 的 GA-管族集合；也就是说，我们需要证明：若 $T\in\mathcal{Z}(G)$，则 $\Phi(T)$ 是 $L(G)$ 的 GA-管集。

设 $T\in$Z($G$)，并设 $t_1,t_2\in T$。若 $E(t_1)\subset E(t_2)$，则根据 $\phi$ 的定义，$V(\phi(t_1))\subseteq V(\phi(t_2))$；又由于 $\phi(t_1)$ 和 $\phi(t_2)$ 是诱导子图，因此它们也彼此嵌套。若 $t_1,t_2\in T$ 不相交，则 $E(t_1)\cap E(t_2)=\emptyset$。这意味着 $\phi(t_1)$ $\phi(t_2)$ 不相交。若 $\phi(t_1)$ 与 $\phi(t_2)$ 相邻，则存在一条边 $f=v_1v_2\in L(G)$，使得 $v_1\in\phi(t_1)$ 且 $v_2\in\phi(t_2)$。然而，这意味着 $V(t_1)\cap V(t_2)\neq\emptyset$，这与假设矛盾，因此 $\phi(t_1)$ 与 $\phi(t_2)$ 不相邻。断言得证。

□

现在我们将陈述管族的一些性质，这些性质在后文中会用到。

**引理 2.4.** 设 $G=(V,E)$ 是一个图，$T\subseteq Z(G)$ 是一个极大管族，并且 $t\in T$ .

*(1)* 若 $t\neq G$，则存在唯一的后继，即一个满足 $t\subset\hat{}t$ 的最小超管束 $\hat{}t\in T$。

*(2)* 若 $t$ 不是单元素集，则它有一个或两个极大前驱，即满足 $s_1$、$s_2\in T$ 的极大子管束$s_1$、$s_2\subset t$。在第一种情况下，$V(t)=V(s_1)$，且 $t$由 $s_1$ 添加一条边 $e$得到。在第二种情况下，$t$ 是 $s_1$、$s_2$ 与一条连接 $s_1$ 和 $s_2$的边 $e$ 的并集。

*(3)* 如果 $t$ 不是单元素集，则存在唯一的边 $e$，使得对于所有 $\tau\in T$，$e\in\tau$ 当且仅当 $t\subseteq\tau$。我们称 $t$ 引入 $e$。

证明。为证明 (1)，只需注意到 $t$ 的超管 $\hat{}\, t_1$，$\hat{}\, t_2$ 要么彼此包含，从而其中一个不是极小的；要么在 $t$ 处相交，这与 $T$ 是一个管集这一事实矛盾。

我们现在证明 (2)。设 $s_1, s_2, \dots, s_\ell$ 为 $t$ 的极大前驱。用反证法假设 $\ell \geq 3$。由极大性，$s_1, \dots, s_\ell$ 必须两两不交。由于 $t$ 是连通的，必存在 $2 \leq j < \ell$ 以及一条边 $f$，它与 $s_1$ 中的一个顶点和 $s_j$ 中的一个顶点关联。管 $s'$ 是 $s_1$ 与 $s_j$ 连同边 $f$ 的并，它是 $t$ 的一个前驱，并且由于 $\ell \geq 3$ 而不同于 $t$。这与 $s_1$ 和 $s_2$ 的极大性矛盾，从而 $t$ 有一个或两个极大前驱。若它有一个极大前驱 $s_1$，则由该前驱的极大性可知，$t$ 是由 $s_1$ 添加一条边（在同一顶点集上）得到的。若 $t$ 有两个极大前驱 $s_1$ 和 $s_2$，则由于它们必须不交，可知 $t$ 是 $s_1$ 与 $s_2$ 连同一条与 $s_1$ 中一个顶点和 $s_2$ 中一个顶点关联的边的并。

直接观察可知，命题（2）中的边 $e$ 恰好包含在那些满足 $t \subseteq \tau$ 的管 $\tau \in T$ 中。

□

## 2.2 宇宙学多胞体

给定一个图 $G = (V, E)$，我们将 $\mathbb{R}^{|V|+|E|}$ 中的标准基向量记为 $\mathbf{x}_v$、$\mathbf{y}_e$，分别对应于 $v \in V$ 和 $e \in E$。[2], 中的 宇宙学多胞体 $\mathcal{C}_G$ 定义如下：

**定义 2.5**（宇宙学多胞体 [2]）。设 $G = (V, E)$ 是一个没有孤立顶点的图。对于每条边 $e = \{v, w\} \in E$，考虑 $\mathbb{R}^{|V|+|E|}$ 中的以下三个点：

$$\mathbf{p}_e \coloneqq \mathbf{x}_v + \mathbf{x}_w - \mathbf{y}_e, \qquad \mathbf{p}_{e,v} \coloneqq \mathbf{x}_v - \mathbf{x}_w + \mathbf{y}_e, \qquad \mathbf{p}_{e,w} \coloneqq -\mathbf{x}_v + \mathbf{x}_w + \mathbf{y}_e.$$

$G$ 的宇宙学多胞体 $\mathcal{C}_G$ 定义为

$$\mathcal{C}_G \coloneqq \operatorname{conv}\left(\mathbf{p}_e, \mathbf{p}_{e,v}, \mathbf{p}_{e,w} \mid e = \{v, w\} \in E\right) \subseteq \mathbb{R}^{|V|+|E|}.$$

容易看出，集合 $\{\mathbf{p}_e,\ \mathbf{p}_{e,\,v},\ \mathbf{p}_{e,\,w} \mid e = \{v,\ w\} \in E\}$ 是 $\mathcal{C}_G$ 的顶点集合，我们将用 $V(\mathcal{C}_G)$ 表示这个集合。

此外，根据定义，$\mathcal{C}_G$ 包含于仿射超平面

$$H = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^{|V|+|E|} \;\middle|\; \sum_{v \in V} x_v + \sum_{e \in E} y_e = 1 \right\},$$

且其维数为 $|V| + |E| - 1$。我们现在回顾 $\mathcal{C}_G$ 的面描述，该描述在 [2, 第 3 节。1] 中给出（另见 [10,定理 2.1]）。

对于任意管 $t \in \mathcal{Z}(G)$，定义向量

$$h_t = \sum_{v \in V(t)} \mathbf{x}_v + \sum_{e \in E \setminus E(t)} |e \cap V(t)|\, \mathbf{y}_e \ \in\ \mathbb{R}^{|V|+|E|}. \tag{1}$$

$\mathcal{C}_G$ 的不可约面描述由下式给出

$$\mathcal{C}_G = \{(x, y) \in H \mid \langle (x, y), h_t \rangle \geq 0 \text{ for all } t \in \mathcal{Z}(G)\}.$$

特别　　地，向量集合 $\{h_t \mid t \in \mathcal{Z}(G)\}$ 是 $\mathcal{C}_G$ 的面的一组法向量　　.

在 [10], K¨uhne 与 Monin 的工作中，他们证明了 $\mathcal{C}_G$ 的面的如下刻画，这对我们下一节将很重要。

**定理 2.6.** *[10, 定理 3.1]* 设 $G = (V, E)$ 为一个图。子集 $X \subseteq V(\mathcal{C}_G)$ 定义 $\mathcal{C}_G$ 的一个面，当且仅当 $X$ 满足以下两个条件：

*(1)* 如果对于一个顶点 $v \in V$，集合 $X$ 对某条边 $e = \{v, w\} \in E$同时包含$\mathbf{p}_e$ 和$\mathbf{p}_{e,\,v}$ 那么对于所有边 $e' = \{v, w'\} \in E$，$X$都包含$\mathbf{p}_{e'}$ 和$\mathbf{p}_{e',\,v}$。

*(2)* 如果 $X$ 包含一个子集

$$\{\mathbf{p}_{e_1,v_1}, \mathbf{p}_{e_2,v_2}, \ldots, \mathbf{p}_{e_k,v_k}\}$$

对应于一个圈

$$e_1 = \{v_1, v_2\},\ e_2 = \{v_2, v_3\},\ \ldots,\ e_k = \{v_k, v_1\}$$

在 $G$ 中，那么 $X$ 也包含该子集

$$\{\mathbf{p}_{e_1,v_2}, \mathbf{p}_{e_2,v_3}, \ldots, \mathbf{p}_{e_k,v_1}\}.$$

## 2.3 对偶多胞体的典范形式与体积

本节将回顾如何将多胞体的典范形式表示为体积。关于典范形式与极对偶体积的所有陈述，已在 [1] 中作了概述。典范形式是正几何中的一个概念，是与某些半代数集合 $X$ 相关联的微分形式，并沿着 $X$ 的边界递归定义。在引入一些额外的记号后，我们将更明确地给出该定义。

下文中，设 $P \subseteq \mathbb{R}^s$ 是顶点集为 $V$（$P$）的 $d$ 维多胞体。首先回顾一下， $P$ 的极对偶定义为

$$P^\circ \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^s \mid \langle x, y\rangle \geq -1 \text{ for all } y \in P\}.$$

如果原点 **0** 包含在 $P$ 的内部，那么 $P^\circ$ 本身也是一个多胞体。此外，众所周知，在这种情况下， $P$ 的顶点与 $P^\circ$ 的面相对应，反之亦然。关于极对偶以及更广泛的多胞形理论的更多背景知识，请参阅 [15] 。

令 $\Delta$ 为仅使用 $P$的顶点对 $P$ 进行的任意三角剖分。回到 Warren， $P$的伴随式是函数

$$\operatorname{adj}(P)(x) = \sum_{\sigma \in \Delta} \operatorname{vol}(\sigma) \prod_{v \in V(P)\setminus\sigma} \ell_v,$$

其中 $x = (x_1, \ldots\ldots, x_s)$；对于顶点 $v \in V(P)$，形式 $\ell_v$ 是（相差一个倍数的意义下）唯一的仿射线性形式，它在 $P$的对偶多胞体 $P^\circ$ 的相应刻面上为零。已有结果表明，伴随式与 $P$的三角剖分 $\Delta$ 无关。

多胞体是所谓正几何 [11]的特殊情形。它们的典范形式与伴随式的关系如下：对于任意 $d$维射影多胞形 $P \subseteq \mathbb{R}^d \subseteq \mathbb{P}^d$，其典范形式$\Omega(P)(x)$是如下正则微分形式

$$\Omega(P)(x) = \frac{\operatorname{adj}(P^\circ)(x)}{\prod_{F \in \mathcal{F}} \ell_F(x)}\, \mathrm{d}(x), \tag{2}$$

其中，分母中的乘积遍历 $P$ 的面集合$\mathcal{F}$，而形式 $\ell_F$ 是（相差一个倍数的意义下）在 $P$的面 $F$ 上为零的唯一齐次线性形式。 $P$ 的典范形式在 $P$的刻面超平面上有极点，且这些极点都是单极点。关于这一主题的入门介绍，请参阅 [11]。

我们希望用 $P$ 的极对偶来表示 (2) 分母中的形式 $\ell_F$。下文假设原点 **0** 位于 $P$ 的内部。此外，设 $s_1, \ldots, s_k$ 为法扇 $\mathcal{N}(P)$ 的射线生成元，其中 $P$ 满足

$$P = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \langle x, s_i\rangle \geq -1 \text{ for all } 1 \leq i \leq k\}.$$

向量 $s_i$ 恰好是 $P$ 的极对偶 $P^\circ$ 的顶点，因此，(2) 的分母可以改写为

$$\prod_{F \in \mathcal{F}} \ell_F(x) = \prod_{v \in V(P^\circ)} \ell_v(x),$$

其中，右侧的乘积遍历 $P^\circ$ 的顶点集合 $V(P^\circ)$。根据 [8] 中的定理 5.3，典范形式可通过极对偶的体积计算如下

$$\operatorname{vol}(P - x)^\circ\, \mathrm{d}(x) = \Omega(P)(x)$$

（另见 [1, 第 7.4 节。1] 和 [13, 定理 2。5]）。这表明，左侧的有理形式起初仅定义在多胞体的内部，却能唯一延拓为 $\mathbb{P}^d$ 上的有理形式。注意，两个赋值 $P \mapsto \mathrm{vol}(P-x)^\circ\,\mathrm{d}(x)$ 和 $P \mapsto \Omega(P)(x)$ 都是赋值型赋值（[1],[8]），因此，只要我们证明单形 $\sigma$ 的情形，这两个形式对任意多胞体 $P$ 都相等。我们将在下一个引理中证明这一点，该引理适用于我们的情形。

注意，根据伴随的定义，我们有

$$\Omega(\sigma)(x) = \frac{\mathrm{adj}(\sigma^\circ)(x)}{\prod_{F\in\mathcal{F}} \ell_F(x)}\,\mathrm{d}(x) = \frac{\mathrm{vol}(\sigma^\circ)}{\prod_{v\in V(\sigma^\circ)} \ell_v(x)}.$$

在下文中，我们总是假设 $x$ 位于 $P$ 的内部 $\mathrm{int}(P)$ 中，从而确保所考虑的函数都有定义。下一个命题给出了平移单形的极对偶的体积公式。

**Le引理 2.7.** 设 $\sigma$ 是 $\mathbb{R}^d \subseteq \mathbb{P}^d$ 中的一个 $d$-单形，且 $\mathbf{0} \in \mathrm{int}(\sigma)$。对于任意 $p \in \mathrm{int}(\sigma)$，我们有 $ve$

$$\mathrm{vol}(\sigma - p)^\circ = \frac{\mathrm{vol}(\sigma^\circ)}{\prod_{i=1}^{d+1} \ell_{v_i}(p)}. \tag{3}$$

$wh$其中 $v_1, \ldots, v_{d+1}$ 是 $\sigma$ 的极对偶单形的顶点，并且 $\ell_{v_i}(p) = 1 + \langle v_i, p\rangle$。

例如，[7] 曾提出过这一结论，而 [8]已在更一般的情形下证明了它。注意，形式 $\ell_{v_i}$ 在 $\sigma$ 的相应面上为零，因为对偶单形的顶点 $v_i$ 恰好是满足以下条件的向量：对于该面上的所有 $x$，都有$\langle v_i, x\rangle = -1$。

证明。我们将证明，$(\sigma - p)^\circ$ 的顶点是 $\sigma^\circ$ 的顶点按因子$\ell_{v_i}(p)$缩放后的结果。之后，我们将证明这些特殊的缩放因子 $\ell_{v_i}(p)$可以通过体积分解，也就是说

$$\mathrm{vol}\left(\Lambda_p(\sigma^\circ)\right) = \left(\prod_{i=1}^{d+1} \ell_{v_i}(p)\right) \mathrm{vol}(\sigma^\circ),$$

其中，$\Lambda_p$ 是作用于单形的算子，它按指定因子缩放顶点。注意，对于任意选取的缩放因子，这一结论并不成立。

平移后的单形 $\sigma - p$ 的法扇为$\mathcal{N}(\sigma)$。若 $p$ 位于 $\sigma$的内部，则平移后的单形 is

$$\sigma - p = \left\{x \in \mathbb{R}^d \mid \langle x, (\ell_{v_i}(p))^{-1}\, v_i\rangle \geq -1 \text{ for all } 1 \leq i \leq d+1\right\}\Big\} \tag{4}$$

因此，单形$(\sigma - p)^\circ$ 的顶点为$(\ell_{v_i}(p))^{-1} v_i$（对于 $1 \leq i \leq d+1$），记号沿用上文。$d$维单形 $\sigma$ 的体积等于矩阵 $M \in \mathrm{Mat}_{d+1}(\mathbb{R})$的行列式

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ v_1 & v_2 & \ldots & v_{d+1} \end{pmatrix}.$$

类似地，我们有

$$\mathrm{vol}(\sigma - p)^\circ = \frac{\det M'}{\prod_{i=1}^{d+1} \ell_{v_i}(p)}$$

其中 $M'$ 表示矩阵

$$\begin{pmatrix} \ell_{v_1}(p) & \ell_{v_2}(p) & \ldots & \ell_{v_{d+1}}(p) \\ v_1 & v_2 & \ldots & v_{d+1} \end{pmatrix}$$

根据行列式的多重线性性。再次利用多重线性性以及 $\ell_{v_i}(p)$ 的定义，我们得到

$$\det(M') = \det(M) + \det(M'')$$

其中

$$M'' = \begin{pmatrix} \langle p, v_1\rangle & \langle p, v_2\rangle & \ldots & \langle p, v_{d+1}\rangle \\ v_1 & v_2 & \ldots & v_{d+1} \end{pmatrix}$$

由于 $M''$ 的第一行是最后一行的线性组合，因此 $\det(M'') = 0$，这证明了该断言。

□

## 3 对偶宇宙学多胞体的构造

图 $G=(V,E)$ 的宇宙学多胞体位于仿射空间

$$H=\{(x,y)\in\mathbb{R}^{|V|+|E|}\mid x_1+\cdots+x_{|V|}+y_1+\cdots+y_{|E|}=1\}.$$

因此，经典意义下的对偶多胞体并未定义。为规避这一问题，我们将 $\mathcal{C}_G$ 视为仿射超平面 $H$中的满维多面体。为了描述对偶多胞体的顶点，我们采用 Arkani-Hamed、Benicasa 和 Postnikov 给出的宇宙学多胞体的面描述（见第 2.2 节）。

与 $h_t$ 正交的线性超平面（见（1））包含 $\mathcal{C}_G$. 的一个面。考虑锥

$$\mathrm{Cone}(\mathcal{C}_G):=\{\lambda x\mid\lambda\geq 0,x\in\mathcal{C}_G\}.$$

我们将证明，$\mathrm{Cone}(\mathcal{C}_G)^\circ\cap H$ 是宇宙学多胞体的对偶，其中，如果赋予仿射超平面 $H$ 适当的向量空间结构，$\mathrm{Cone}(\mathcal{C}_G)^\circ$ 是 $\mathrm{Cone}(\mathcal{C}_G)$ 的对偶锥。

我们用下面的引理证明这一构造的合理性。在本文中，对于尖点的满维锥 $C\subseteq\mathbb{R}^{d+1}$，我们采用如下约定：其对偶锥为

$$C^\circ:=\left\{x\in\mathbb{R}^{d+1}\mid\langle x,y\rangle\geq 0\text{ for all }y\in C\right\}.$$

**引理 3.1**。设 $C_1$ 和 $C_2$ 是 $\mathbb{R}^{d+1}$ 中彼此对偶的满维尖锥。设 $P_1=C_1\cap H$ 和 $P_2=C_2\cap H$ 是将这两个锥分别与不经过原点的超平面 $H$ 相交所得的多胞体。那么，经由 $\pi$ 正交投影到平行于 $H$ 的线性子空间后，多胞体 $\pi(P_1)$ 和 $\pi(P_2)$ 彼此对偶。

证明。我们首先选取一组坐标 $x_1,\ldots,x_{d+1}$，使得在这些坐标下，对于任意 $x\in H$，都有 $x_1=1$。我们将仿射空间 $\{x\in\mathbb{R}^{d+1}\mid x_1=1\}=H$ 通过投影到线性子空间 $\{x\in\mathbb{R}^{d+1}\mid x_1=0\}$ 视为一个向量空间。令 $x\in H$。于是

$$x\in C_1\iff\langle x,y\rangle\geq 0\text{ for all }y\in C_2\iff\langle\pi(x),\pi(y)\rangle\geq -1$$

其中，最后一个等价关系由 $x_1y_1=1$ 得出。这表明 $P_1$ 和 $P_2$ 彼此对偶。 □

我们将向量 $x$ 的坐标和记为 $|x|_1$。现在我们可以给出$\mathcal{C}_G$的极对偶多面体的顶点描述。

**定理 3.2.** 设 $G=(V,E)$ 是一个图，其管集为 $\mathcal{Z}(G)$。考虑 $H=\{(x,y)\in\mathbb{R}^{|V|+|E|}\mid x_1+\cdots+x_{|V|}+y_1+\cdots+y_{|E|}=1\}$，将其视为配备标量积的向量空间，该标量积由到相应线性子空间的正交投影所诱导。于是

$$\mathrm{conv}\left(\frac{h_t}{|h_t|_1}\mid t\in\mathcal{Z}(\mathcal{G})\right)\tag{5}$$

与 $\mathcal{C}_G$ 互为对偶，且是一个 $H$中的满维多面体。此外，每个 $z_t:=\frac{h_t}{|h_t|_1}$ 都是该多面体的一个顶点 $e.$

我们将前述结论中的$\mathcal{C}_G$ 的对偶多胞体记为$\mathcal{C}_G^\circ$。在给出证明之前，我们通过一个例子来说明这一结论。

**例3.3.** 考虑具有 4 个顶点的星图 $K_{1,3}$。它有 11 个连通子图，$\mathcal{C}^\circ_{K_{1,3}}$ 的顶点列表列在右侧。这里假设坐标的顺序为 $(v_0,\ v_1,\ v_2,\ v_3,\ e_1,\ e_2,\ e_3)$。

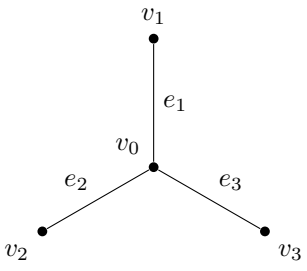



图1：星图$K_{1,\,3}$

- $\frac{1}{2}(0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0)$
- $\frac{1}{2}(0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0)$
- $\frac{1}{2}(0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1)$
- $\frac{1}{4}(1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1)$
- $\frac{1}{4}(1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1)$
- $\frac{1}{4}(1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1)$
- $\frac{1}{4}(1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0)$
- $\frac{1}{4}(1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1)$
- $\frac{1}{4}(1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0)$
- $\frac{1}{4}(1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0)$
- $\frac{1}{4}(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0)$

证明 定理 *3.2* 的我们令 $C_T$ 为由射线 $h_t$ 生成的锥，其中 $t \in \mathcal{Z}(G)$。我们首先证明

$$C_T = (\mathrm{Cone}(\mathcal{C}_G))^\circ$$

注意

$$\mathrm{Cone}(\mathcal{C}_G) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{|E|+|V|} \mid \langle (x,y), h_t \rangle \geq 0 \text{ for all } t \in \mathcal{Z}(G)\}$$

根据$\mathcal{C}_G$ 的面描述（见第 2.2 节）。

显然，对于任意管 $t$ 以及任意 $x \in \mathsf{C}_G$，$\lambda h_t, x \geq 0$。因此，对于任意 $y \in C_T$ 以及任意 $\lambda \geq 0$ 和 $C_T \subseteq$，有 $y, \lambda x \geq 0$，由此可得 (Cone ($\mathsf{C}_G$))$^\circ$。另一方面，令 $x \in (C_T)^\circ$。那么，对于任意$t \in \mathsf{Z}(G)$ 和 $\lambda \geq 0$，$x, \lambda h_t \geq 0$。因此， $x \in \mathsf{Cone}(\mathsf{C}_G)$。对偶化 $(C_T)^\circ \subseteq \mathsf{Cone}(\mathsf{C}_G)$ 会反转包含关系，因此

$$(\mathrm{Cone}\,\mathcal{C}_G)^\circ \subseteq (C_T)^{\circ\circ} = C_T$$

这里我们用到了所讨论的是凸闭锥这一事实。

现在，我们对 $H$ 应用引理 3.1，得出

$$\mathcal{C}_G^\circ = (\mathrm{Cone}(\mathcal{C}_G) \cap H)^\circ = C_T \cap H = \mathrm{conv}\left(\frac{h_t}{|h_t|_1} \mid t \in \mathcal{Z}(G)\right).$$

□

定理 3.2 使我们能够将 $\mathcal{C}_G^\circ$ 的任意不含额外顶点的三角剖分视为管集的一个集合，其中每个集合的大小为 $|E|+|V|$。此类集合系统的一个自然选择是极大管族的集合。在开创性论文 [2], 中，作者已通过若干例子表明，相应的集合是 $\mathcal{C}_G^\circ$的一个三角剖分。我们将在完全一般的情形下证明这一陈述。该证明将用到如下简单引理:

**引理 3.4.** 设 $P \subseteq \mathbb{R}^d$ 是一个 $d$ 维多胞体，并设 $\Delta$ 是以 $P$ 的顶点为顶点的纯的 $d$ 维单纯复形。对于单形 $\sigma \in \Delta$，令 $\|\sigma\| =$ 凸包$(v \mid v \in \sigma)$ 为其几何实现，并令$\|\Delta\| = \bigcup_{\sigma\in\Delta} \|\sigma\|$ 为 $\Delta$ 的几何实现。假设对任意一对单形 $\sigma$、$\tau \in \Delta$，我们有 $\dim \sigma = \dim \|\sigma\|$ 且 $\|\sigma\| \cap \|\tau\| = \|\sigma \cap \tau\|$。如果对任意 $(d-1)$ 维面 $\sigma \in \Delta$，要么

*(1)* 对于 $P$ 的某个面 $F$， $\|\sigma\| \subseteq F$，或者

*(2)* $\sigma$ 恰好包含于 $\Delta$ 的两个面中，

那么 $\|\Delta\|$ 是 $P$的三角剖分。

我们想指出，对几何实现的维数和交集所作的条件，恰好表明 $\|\Delta\|$ 是一个维数为 $d$的几何单纯复形。特别是，任何 $P$的三角剖分的子复形都显然满足这些条件。

证明。 我们将对 $d$ 进行归纳，证明 $\|\Delta\|$ 是一个包含 $P$边界的凸集。对于 $d=1$，该命题显然成立。假设对于任意多胞体以及具有所需性质且维数至多为 $d$的任意 $\Delta$，该命题均成立。令 $\dim P = d+1$，并令 $\Delta$ 如引理所述。对于 $P$ 的任意面 $F$，令$\Delta_F \coloneqq \{\sigma \in \Delta \mid \|\sigma\| \subseteq F\}$为 $\Delta$在 $F$的顶点上的限制。我们证明以下断言。

断言：对于 $P$的任意面 $F$， $\Delta_F$ 是 $F$ 的一个三角剖分。

为此，我们证明 $\Delta_F$ 满足归纳假设。为此，只需验证条件 (1) 和 (2)，因为其他性质都直接由 $\Delta$继承。令 $\sigma \in \Delta_F$ 为一个 $(d-1)$ 维的面，并假设对于 $F$的任意面 $G$， $\|\sigma\| \not\subseteq G$成立。由于 $\Delta$是纯的，存在一个面 $\tau(1) \in \Delta$，使得 $\sigma \subseteq \tau^{(1)}$。特别地， $\tau^{(1)}$有两个包含 $\sigma$的 $(d)$ 维面 $\tau(1)\,1$ 和 $\tau(1)\,2$。由于 $\dim \|\tau(1)\| = d+1$，根据假设， $\|\tau(1)_1\|$和 $\|\tau(2)_2\|$中至少有一个位于 $P$的内部。设其为 $\|\tau_1^{(1)}\|$。(2) 蕴含存在唯一的 $d$-单形 $\tau^{(2)}$，使得 $\tau(1) \neq \tau(2)$ 且 $\tau(1)_1 \subseteq \tau(2)$。此外， $\tau(2)$ 有一个不同于 $\tau_1^{(1)}$且包含 $\sigma$的唯一 $(d)$ 维面 $\tau_2^{(2)}$。如果 $\|\tau(2)_2\|$已经包含在 $P$的边界中，那么它必定已经包含在 $F$中，否则 $\|\sigma\|$将包含在 $F$的一个面中。如果$\|\tau_2^{(2)}\|$包含在 $P$的内部，那么我们可以重复之前的论证。由于 $\|\sigma\|$包含在 $P$的边界中，这一过程必定会终止；经过有限步后，我们找到一个 $(d)$ 维面 $\tau$，使得 $\|\tau\| \subseteq F$且 $\sigma \subseteq \tau$。如有必要，对 $\tau(2)\,1$ 应用同样的论证可知， $\sigma$满足 (2)。由该断言可知， $\|\Delta\|$ 包含 $P$的边界。

剩下要证明的是 $\|\Delta\|$ 是凸的。反设存在一点 $p \in P \setminus \|\Delta\|$。由于 $P$ 是凸的，且 $\|\Delta\|$ 包含 $P$ 的边界，因此存在点 $q_1$、 $q_2 \in \|\Delta\|$ 和 $0<\lambda<1$，使得 $p = \lambda q_1 + (1-\lambda) q_2$。考虑连接 $q_1$ 和 $q_2$ 的线段 $L$。令 $q_1'$ 和 $q_2'$ 分别为 $\|\Delta\| \cap L$ 中位于 $q_1$ 与 $p$ 之间、以及 $q_2$ 与 $p$ 之间的最近点。适当调整 $q_1'$ 和 $q_2'$ 后，我们可以假设存在 $\Delta$ 中的两个 $(d-1)$-单形 $\rho_1$ 和 $\rho_2$，使得对于 $1 \le i \le 2$， $q_i'$ 位于 $\|\rho_i\|$的相对内部。由于根据构造， $\|\rho_i\|$ 不在 $P$ 的边界上，因此它必定满足条件 (2)。于是存在两个包含 $\rho_i$ 的 $d$-单形。这就产生了矛盾，因为这样一来， $q_i'$ 就不是 $L$ 上距离 $q$ 最近的点。由此可得 $p \in \|\Delta\|$，证明完毕。 □

我们终于可以给出定理 1.2 的证明。

定理 *1.2* 的证明。令 $T_1, \dots, T_{\tau(G)}$为 $G$的极大管族。对于 $1 \le i \le \tau(G)$，令

$$\sigma_i = \operatorname{conv}\left(z_t \mid t \in T_i\right),$$

其中，对于管~~$t$~~， $z_t = \frac{h_t}{|h_t|_1}$。我们需要证明 $\{\sigma_1, \dots, \sigma_{\tau(G)}\}$ 是 $\mathcal{C}_G^\circ$的一个三角剖分。为此，我们将应用引理 3.4。首先证明 $\sigma_i \cap \sigma_j$ 是 $\sigma_i$ 和 $\sigma_j$ 的一个面（如果 $i \neq j$）。

为此，我们构造一个超平面 $H_{i,j}$，使其将 $\sigma_i$ 与 $\sigma_j$分隔开，也就是说，使 $\sigma_i$ 和 $\sigma_j$ 位于 $H_{i,j}$ 的不同侧，且它们的交集包含于 $H_{i,j}$中。对于每个管 $s \in T_i \setminus T_j$，由 $T_j$的极大性可知，存在一个管 $r \in T_j \setminus T_i$与 $s$相交。特别地，存在边 $e = v_1v_2 \in E(s) \setminus E(r)$ 和 $f = v_3v_4 \in E(r) \setminus E(s)$，满足 $v_2, v_3 \in s \cap r$。我们断言，线性泛函

$$a_{sr}(x,y) \coloneqq x_{v_1} + x_{v_2} - y_e - x_{v_3} - x_{v_4} + y_f$$

在 $\sigma_i$ 的顶点上取非负值，在 $z_s$ 上取严格正值；在 $\sigma_j$ 的顶点上取非正值，在 $z_r$ 上取严格负值。令 $t \in \mathcal{Z}(G)$。根据 (5) 中 $\mathcal{C}_G^\circ$ 的构造，显然，若 $e \notin t$，则 $(z_t)_e = (z_t)_{v_1} + (z_t)_{v_2}$。此外，若 $e \in t$，则有 $(z_t)_{v_1} = (z_t)_{v_2} = \frac{1}{|h_t|_1}$ 和 $(z_t)_e = 0$。若 $f \in t$，则可得到相应的结论。综合以上可得

$$a_{sr}(z_t) = \begin{cases} \frac{2}{|h_t|_1} + \frac{-2}{|h_t|_1} = 0, & \text{if} \quad e \in t \text{ and } f \in t \\ \frac{2}{|h_t|_1} + 0 = \frac{2}{|h_t|_1} > 0, & \text{if} \quad e \in t \text{ and } f \notin t \\ 0 + \frac{-2}{|h_t|_1} = \frac{-2}{|h_t|_1} < 0, & \text{if} \quad e \notin t \text{ and } f \in t \\ 0 + 0 = 0, & \text{if} \quad e \notin t, \text{ and } f \notin t \end{cases}.$$

由于 $T_i$ 中没有管包含 $f$，且 $T_j$ 中没有管包含 $e$，因此上面的断言成立。现在可以定义用于 $\sigma_i$ 和 $\sigma_j$ 的分离超平面 $H_{i,\,j}$。令

$$H_{i,j} \coloneqq \{(x,y) \in \mathbb{R}^{|V|+|E|} \mid \sum_{\substack{s \in T_i, r \in T_j \\ s \text{ intersects } r}} a_{sr}(x,y) = 0\}.$$

前面的论证　　据此直接推出，$\sigma_i$ 和 $\sigma_j$ 位于 $H_{i,j}$ 两侧，

$$H_{i,j} \cap (\sigma_i \cup \sigma_j) = \sigma_i \cap \sigma_j = \operatorname{conv}(z_t \ : \ t \in T_i \cap T_j).$$

因此，$H_{i,\,j}$ 是一个分离超平面，而 $\sigma_i \cap \sigma_j$ 是 $\sigma_i$ 和 $\sigma_j$ 的一个面，正如所要求的那样。

设 $\Delta_G$ 为一个单纯复形，其面由单形 $\sigma_t$ 的顶点集构成。为了应用引理 3.4，我们需要验证，每个维数为 $|V|+|E|-2$ 的面（在本证明的其余部分中称为脊）都满足该引理中的条件 (1) 或 (2)。

设 $R \subseteq \sigma_i$ 为脊，它是从 $\sigma_i$ 中移除对应于管 $t$ 的顶点 $v_t$ 而得到的。我们将区分三种情况。

情况 1：$t$ 是一个单元素集。根据引理 2.4 (1)，$T_i$ 中存在唯一的包含 $t$ 的最小管，其边为 $e = \{v,\ w\}$，其中 $w \in V$。此外，我们知道，任何包含 $v$ 的管 $s \in T_i \setminus t\}$ 也必定包含 $e$。向量 $\mathbf{p}_{ew} = \mathbf{x}_v - \mathbf{x}_w + \mathbf{y}_e$ 是 $F$ 的一个面的法向量，因为它是 $\mathcal{C}_G^\circ$ 的一个顶点 $\mathcal{C}_G$。此外，不位于该面上的唯一管是那些包含 $v$ 但不包含 $e$ 的管，因为在其他所有情况下，$w$ 的负贡献都会抵消来自 $v$ 或 $e$ 的正贡献。这表明 $\|R\|$ 包含在面 $F$ 中，因而满足引理 3.4 的条件 (1)。

情形 2：$t = G$。根据引理 2.4 (3)，存在一条边 $e$，它由 $t$ 在 $T_i$ 中引入。特别地，$t$ 是 $T_i$ 中唯一包含 $e = vw$ 的管。考虑面 $F$ 上的 $\mathcal{C}_G^\circ$，其面法向量为 $\mathbf{p}_e = \mathbf{x}_v + \mathbf{x}_w - \mathbf{y}_f$。容易看出，不在 $F$ 上的唯一顶点对应于包含 $e$ 的管。与情形 1 一样，可得 $\|R\| \subseteq F$。

情形 3：$t \neq G$ 且 $t$ 不是单元素集。我们将证明存在唯一的 $j \neq i$ 使得 $R \subseteq \sigma_j$。根据引理 2.4，我们知道 $t$ 有唯一的后继 $\hat{}t$、一个或两个前驱 $s_1$（也可能有 $s_2$），且 $t$ 引入唯一一条边 $e$。类似地，$\hat{}t$ 引入唯一一条边 $f$，并有第二个（可能为空的）前驱 $s$。不失一般性，我们可以假设 $f$ 与 $s_1$ 中的一个顶点关联。令 $t'$ 为 $s_1$、$s$ 和边 $f$ 的并所得到的管。管 $t'$ 是相容管，因为它包含于 $\hat{}t$，包含 $s_1$、$s$ 及其所有子管束，并且 $t'$ 与 $s_2$ 及其所有子管束不相交。因此，$t'$ 也给出一个面 $\sigma_j$，其中包含一个对应于 $t'$ 的顶点 $w$。于是 $T_j = (T_i \cup \{t'\}) \setminus \{t\}$ 是一个管集，使得 $\sigma_j$ 包含 $R$。根据构造，该管集是唯一的。

最后，由引理 3.4 可知，$\{\sigma_1, \ldots, \sigma_{\tau(G)}\}$ 确实是 $\mathcal{C}_G^\circ$ 的一个三角剖分。 □

**注 3.5**（$\mathcal{C}^\circ$ 的面）。在前面的证明中，我们用到了这样一个事实：由于 $\mathcal{C}_G^\circ$ 与 $\mathcal{C}_G$ 互为对偶，$\mathcal{C}_G^\circ$ 的面法向量由 $\mathcal{C}_G$ 的顶点给出。由于 $\mathcal{C}_G$ 对 $G$ 的每条边都有 3 个顶点，这尤其意味着 $\mathcal{C}_G^\circ$ 对每条边 $e = \{v, w\} \in G$ 都有 3 个面。具体而言，

(1) $F_{ew} = \{(x,y) \in \mathcal{C}_G \mid -x_v + x_w + y_e = 0\}$，它包含 $\mathcal{C}_G^\circ$ 的所有顶点，但不包括对应于包含 $w$ 而不包含 $e$ 的管的顶点；(2) $F_{ev} = \{(x,y) \in \mathcal{C}_G \mid x_v - x_w + y_e = 0\}$，它包含 $\mathcal{C}_G^\circ$ 的所有顶点，但不包括对应于包含 $v$ 而不包含 $e$ 的管的顶点；(3) $F_e = \{(x,y) \in \mathcal{C}_G \mid x_v + x_w - y_e = 0\}$，它包含 $\mathcal{C}_G^\circ$ 中对应于不包含 $e$ 的管的所有顶点。

更一般地，我们知道，若反转序关系，则 $\mathcal{C}_G$ 的面格同构于 $\mathcal{C}_G^\circ$ 的面格。由此还可得到 $\mathcal{C}_G$ 中包含某个面 $F$ 的面与 $\mathcal{C}_G^\circ$ 中包含于其极对偶 $F^\circ$ 的面之间的双射。

我们回顾一下，$d$ 维多胞体 $P$ 在顶点 $v$ 处的顶点图 是通过用一个超平面与 $P$ 相交得到的 $(d-1)$ 维多胞体，该超平面将 $v$ 与 $P$ 的所有其他顶点分隔开。这个多胞体的组合类型与所选超平面无关。更准确地说，顶点图的 $k$ 面对应于包含 $v$ 的 $P$ 的 $(k+1)$ 面，并且这种对应关系扩展为顶点图的面格与 $P$ 面格中相应区间之间的保序双射。

**定理 3.6**。 设 $G=(V,E)$ 是一个图，且令 $e=\{v,w\}\notin E$。令 $G'=(V,E')=(V\cup e, E\cup\{e\})$。那么，$\mathcal{C}^\circ_G$ 与 $\mathcal{C}^\circ_{G'}$的面 $F_e$ 组合等价。等价地，$\mathcal{C}_G$ 与 $\mathcal{C}_{G'}$中$\mathbf{p}_e$ 的顶点图组合等价。

我们想强调，在上述陈述中添加到 $G$ 的边 $e$ 可能有一个顶点（甚至两个顶点）不属于 $V$。

证明。 利用 $\mathcal{C}_G$ 与 $\mathcal{C}^\circ_G$ 的面格之间众所周知的对偶性（见注 3.5），以及对顶点图各面的解释，只需证明 $\mathcal{C}_G$ 的面与包含顶点 $\mathbf{p}_e$ 的$\mathcal{C}_{G'}$ 的面之间存在保序双射。

由于向 $G$ 添加孤立顶点时 $\mathcal{C}_G$ 不变，我们可以假设 $v,w\in V$。设 $F$ 是 $\mathcal{C}_G$ 的一个面。现在我们将定义 $\mathcal{C}_{G'}$ 的一个包含 $e$ 的面。为此，我们考虑不同的情形。

情形 1：如果对于任意边 $f=vx\in E$，都有 $\{\mathbf{p}_f,\mathbf{p}_{f,v}\}\not\subseteq F$，且对于任意 $g=wy\in E$，都有 $\{\mathbf{p}_g,\mathbf{p}_{g,w}\}\not\subseteq F$，则令 $F'=\mathrm{conv}(F\cup\{\mathbf{p}_e\})$。

情形 2：若存在 $f=vx\in E$ 使得 $\{\mathbf{p}_f,\mathbf{p}_{f,v}\}\subseteq F$，且对任意 $g=wy\in E$有 $\{\mathbf{p}_g,\mathbf{p}_{g,w}\}\not\subseteq F$，则我们令 $F'=$凸包$(F\cup\{\mathbf{p}_e,\mathbf{p}_{e,v}\})$。注意，在此情形下，由定理 2.6 (1) 可知，对所有 $h=vz\in E$有 $\{\mathbf{p}_h,\mathbf{p}_{h,v}\}\subseteq F$。

情形 3：若对任意边 $f=vx\in E$有 $\{\mathbf{p}_f,\mathbf{p}_{f,v}\}\not\subseteq F$，且存在 $g=ey\in E$使得 $\{\mathbf{p}_g,\mathbf{p}_{g,w}\}\subseteq F$，则我们令 $F'=$凸包$(F\cup\{\mathbf{p}_e,\mathbf{p}_{e,w}\})$。注意，在此情形下，由定理 2.6 (1) 可知，对所有 $k=wz\in E$有 $\{\mathbf{p}_k,\mathbf{p}_{k,v}\}\subseteq F$。

情形 4：如果存在 $f=vx\in E$ 使得 $\{\mathbf{p}_f,\mathbf{p}_{f,v}\}\subseteq F$，并且存在 $g=ey\in E$ 使得 $\{\mathbf{p}_g,\mathbf{p}_{g,w}\}\subseteq F$，那么我们令 $F'=$凸包$(F\cup\{\mathbf{p}_e,\mathbf{p}_{e,v},\mathbf{p}_{e,w}\})$。同样，由定理 2.6 (1) 可知，在这种情形下，对于所有 $h=vz\in E$，都有 $\{\mathbf{p}_h,\mathbf{p}_{h,v}\}\subseteq F$；对于所有 $k=wz\in E$，都有 $\{\mathbf{p}_k,\mathbf{p}_{k,v}\}\subseteq F$。

要证明在所有四种情形下，$F'$ 都是$\mathcal{C}_{G'}$ 的一个面，我们需要验证定理 2.6 中的条件 (1) 和 (2)。只要没有涉及 $v,w$ 和 $e$，这一点显然成立。根据 $F'$ 的定义，顶点 $v$ 或 $w$ 附近的条件 (1) 也显然成立

对于条件 (2)，设 $C=e_1=vu_1,\dots,e_{k-1}=u_kw,e=vw$ 是 $G'$ 中一个包含 $e$ 的圈，并假设 $\mathbf{p}_{e_1,v},\dots,\mathbf{p}_{e_{k+1},u_k},\mathbf{p}_{e,w}\in F'$。那么，根据构造，$F'$ 也包含 $\mathbf{p}_e$，因此由定理 2.6 (1) 可知，它也包含 $\mathbf{p}^{e_{k+1}}$ 和 $\mathbf{p}_{e_{k+1},w}$。由于 $F'$ 包含 $\mathbf{p}^{e_{k+1}}$ 和 $\mathbf{p}_{e_{k+1},u_k}$，它也包含 $\mathbf{p}_{e_k}$ 和 $\mathbf{p}_{e_k,u_{k-1}}$；由此归纳可得，它必定还包含 $\mathbf{p}_{e_i,u_{i-1}}$（对于 $1\le i\le k$），最后还包含 $\mathbf{p}_{e,v}$。这就证明了定理 2.6 (2) 也满足。

我们需要计算 $F'$ 的维数。由于我们总有 $F\subseteq\{(x,y)\in\mathbb{R}^{|V|+|E|}\mid y_e=1\}$，但 $\mathbf{p}_e\notin\{(x,y)\in\mathbb{R}^{|V|+|E|}\mid y_e=1\}$，因此可得 $\dim F+1\le\dim F'\le\dim F+2$。在第一种情形中，我们只添加一个顶点，因此显然 $\dim F'=\dim F+1$。在第二种情形中，$F'$ 包含顶点 $\mathbf{p}_e$ 和 $\mathbf{p}_{e,v}$，并且还需要包含 $\mathbf{p}_f,\mathbf{p}_{f,v}$，其中 $f=vx\in E$。由于我们有仿射依赖 $\mathbf{p}_{e,v}=\mathbf{p}_{f,v}+\mathbf{p}_f-\mathbf{p}_e$，可知 $\dim(F')=\dim(F)+1$。同样的论证也适用于 $w$，由此可得，在情形 3 和 4 中，$\dim(F')=\dim(F)+1$。

根据定义，显然，从 $\mathcal{C}_G$ 的面集到包含 $\mathbf{p}_e$ 的 $\mathcal{C}_{G'}$ 的面集的映射是保序的，而且可逆。要证明逆映射定义良好，只需注意定理 2.6 中的两个条件在取子图时均保持成立。断言得证。

□

归纳应用定理 3.6 可得以下推论。

**推论 3.7.** 设 $G$ 是一个图，$H\subseteq G$ 是其子图。那么存在一个面 $C^\circ_G$，它与 $C^\circ_H$ 组合等价。

**注 3.8**（与图结合子的联系）。 从定理 1.2 的证明中还可以得出：当且仅当两个单形的管族恰好相差两个管时，它们才在$\mathcal{C}^\circ_G$ 的三角剖分中共享一个面；也就是说，可以通过移除一个管并将其替换为另一个（兼容的）管，从一个管族构造出另一个管族。另一方面，$G$的图结合子是一个简单多面体，其顶点对应于 $G$的极大 GA 管道族；当且仅当两个顶点对应的 GA-管族恰好相差两个管时，这两个顶点之间才有一条边。这意味着，$G$ 的图结合子的 1-骨架是定理 1.2 中$\mathcal{C}^\circ_G$ 三角剖分的面-棱图的一个子图。

# 4 计算典范形式

本节的目标是运用前几节的结果，计算宇宙学多胞体的典范形式。我们将给出两种不同的表示：第一种表示至少在宇宙学界广为人知，而第二种表示则是我们此前未曾见过的。

给定一个图 $G=(V,\ E)$，我们用 $\mathcal{T}(G)$ 表示其极大管族的集合。此外，对于一个管 $t\in\mathcal{Z}(G)$ 和 $x\in\mathbb{P}^{|E|+|V|-1}$，我们设 $x_t\coloneqq\langle x,\ h_t\rangle$。

采用这些记号，我们可以给出典范形式的第一个表示；该表示也已在 [2] 中通过不同的方法计算得到：

**定理 4.1**。 设 $G=(V,E)$ 是一个图。宇宙学多胞体 $\mathcal{C}_G$ 的典范形式在相差一个标量的意义下由下式给出

$$\Omega(\mathcal{C}_G)(x)=\sum_{T\in\mathcal{T}(G)}\frac{\operatorname{vol}(\sigma_T)}{\prod_{t\in T}x_t}\,\mathrm{d}(x),\tag{6}$$

其中 $\sigma_T=$凸包$(z_t\mid t\in T)$ 是一个单形，其顶点与 $T$ 中的管相对应。

证明。 根据定理 1.1，$\mathcal{C}_G$ 的典范形式为

$$\Omega(\mathcal{C}_G)(x)=\operatorname{vol}(\mathcal{C}_G-x)^\circ\,\mathrm{d}(x).$$

我们对其进行三角剖分，$\mathcal{C}_G^\circ$ 采用定理 1.2 给出的三角剖分，并利用赋值性将其写为

$$\Omega(\mathcal{C}_G)(x)=\sum_{T\in\mathcal{T}}\operatorname{vol}(\sigma_T(x))\,\mathrm{d}(x),$$

其中，单形 $\sigma_T(x)$ 正是平移宇宙学多胞体的极对偶上的诱导三角剖分中的单形。由引理 2.7 可知，

$$\operatorname{vol}(\sigma_T(x))=\frac{\operatorname{vol}(\sigma_T)}{\prod_{t\in T}\ell_t(x)},$$

其中，$\ell_t(x)$ 是上述引理中对应于管$t$的对偶顶点 $v$ 的形式 $\ell_v(x)$。将这些结果相加，得到

$$\Omega(\mathcal{C}_G)(x)=\sum_{T\in\mathcal{T}}\frac{\operatorname{vol}(\sigma_T)}{\prod_{t\in T}\ell_t(x)}\,\mathrm{d}(x).$$

这恰好是断言中的表达式 (6)，不过提升到了射影情形。形式 $x_t$ 是在对应于管 $t$ 的面上消失的射影线性形式，而形式 $\ell_t(x)$ 是在对应面上消失的仿射线性形式。在实情形和射影情形中，这样的形式都是唯一的，因此断言得证。

□

**注 4.2** （包括伴随）。定理 4.1 也可以利用伴随来证明。我们先前看到，

$$\Omega(\mathcal{C}_G)(x)=\frac{\operatorname{adj}(\mathcal{C}_G^\circ)(x)}{\prod_{F\in\mathcal{F}}\ell_F(x)}\,\mathrm{d}(x),\tag{7}$$

其中，乘积遍历$\mathcal{F}$ 的各个面$\mathcal{C}_G$ ，而形式 $\ell_F$ 是相应的线性形式，它们在这些面的仿射包上消失。根据伴随的定义（见第2.3节）以及定理 1.2 中$\mathcal{C}_G^\circ$ 的三角剖分，我们得出

$$\operatorname{adj}(\mathcal{C}_G^\circ)=\sum_{T\in\mathcal{T}(G)}\operatorname{vol}(\sigma_T)\prod_{t\in\mathcal{Z}(G)\setminus T}\ell_t(x).\tag{8}$$

将 (7) 与 (8) 结合起来，同样可以得到所需的公式。

## 4.1 通过边界复形计算典范形式

现在我们将给出计算宇宙学多胞体典范形式的第二种方法。其思路是对定理 1.2 中的三角剖分稍作修改，并借助这一新的三角剖分来计算平移宇宙学多胞体的极对偶的体积。更确切地说，我们将允许这一新三角剖分中的单形使用一个额外的顶点，而该顶点并非 $\mathcal{C}^\circ$ 的顶点。

这一 想法可表述为下面这个众所周知的引理，其证明显然。 e.

**引理 4.3.** 设 $P \subseteq \mathbb{R}^d$ 是一个多胞体，且 $p$ 是其内部或 $P$中的一个点。若 $\mathcal{S}$ 是 $P$边界的一个三角剖分，则

$$\mathcal{S} * p \coloneqq (\operatorname{conv}(\sigma \cup \{p\}) \mid \sigma \in \mathcal{S})$$

它是 $P$的一个三角剖分。

我们首先描述将定理 1.2 中 $\mathcal{C}_G^\circ$ 的三角剖分限制到$\mathcal{C}_G^\circ$的边界时，$\mathcal{C}_G^\circ$ 边界所诱导的三角剖分。我们称图 $G = (V, E)$ 的一个管族 $T$ 为近极大，若 $|T| = |V| + |E| - 1$。此外，若一个近极大管族是通过从某个极大管族中移除一个单元素集或图 $G$得到的，则称其为唯一可补全的。注意，根据定义，唯一可补全的近极大管族恰好是包含于唯一一个极大管族中的近极大管族。

**引理 4.4.** 设 $G = (V, E)$ 为一个图。令 $\widetilde{T}(G)$ 为 $G$的唯一可补全的近极大管族集合。那么

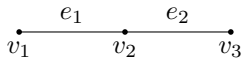
$$\{\sigma_T \mid T \in \widetilde{T}(G)\},$$

其中 $\sigma_T \coloneqq$ 凸包$(z_t \mid t \in T)$ 是 $\mathcal{C}_G^\circ$边界的一个三角剖分。

证明。 令$\mathcal{S}(G)$为定理 1.2 中的$\mathcal{C}_G^\circ$ 的三角剖分。根据定义，$\mathcal{S}(G)$中的每个单形都包含$\mathcal{C}_G^\circ$ 的顶点，这些顶点分别对应于 $G$ 中的单元素集以及图 $G$ 本身。$\mathcal{S}(G)$中单形的脊对应于近极大管族。此外，根据本引理之前的讨论，位于$\mathcal{C}_G^\circ$ 边界上的脊对应于 $G$的唯一可补全的近极大管族。断言得证。

□

**例 4.5.** 设 $G$ 为长度为二的路径。




该图有两个极大管族：选取各单元素集和整个图，并额外选取边 $e_1$ 或边 $e_2$。令 $\sigma_1$ 和 $\sigma_2$ 为三角剖分中对应的极大单形$\mathcal{C}_G^\circ$。 $\sigma_1$ 的 5 个面由以下三维单形给出

(1) $\operatorname{conv}(\{z_{v_1}, z_{v_2}, z_{v_3}, z_G\})$

(2) $\operatorname{conv}(\{z_{v_1}, z_{v_2}, z_{v_3}, z_{e_1}\})$

(3) $\operatorname{conv}(\{z_{v_1}, z_{v_2}, z_{e_1}, z_G\})$

(4) $\operatorname{conv}(\{z_{v_1}, z_{e_1}, z_{v_3}, z_G\})$

(5) $\operatorname{conv}(\{z_{e_1}, z_{v_2}, z_{v_3}, z_G\})$

第一个单形位于与 $\sigma_2$ 的交集内。其他单形位于 $\mathcal{C}_G^\circ$ 的边界上。对于另一个单形 $\sigma_2$ ，我们再次得到相同的单形集合，但将 $z_{e_1}$ 替换为 $z_{e_2}$。因此，$\mathcal{C}_G^\circ$ 的边界由八个单形进行三角剖分。以 $\mathcal{C}_G^\circ$ 的一个内点为顶点作锥（见引理 4.3），即可得到由八个单形组成的 $\mathcal{C}_G^\circ$ 的三角剖分。

利用引理 4.4 计算图 $G$ 的宇宙学多胞体 $\mathcal{C}_G$ 的典范形式，我们得到 $\Omega(\mathcal{C}_G)$ 的以下表达式：

**定理 4.6.** 设 $G = (V, E)$ 是一个图。那么，

$$\Omega(\mathcal{C}_G)(x) = \sum_{T \in \widetilde{\mathcal{T}}(G)} \frac{\operatorname{vol} \sigma_T}{\prod_{t \in T} x_t} \, \mathrm{d}(x),$$

其中 $\sigma_T = \text{凸包}(\{\frac{1}{|V|+|E|} \cdot \mathbf{1}\} \cup \{z_t \mid t \in T\})$ 对于 $T \in \widetilde{\mathcal{T}}(G)$。

证明。令 $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^{|V|+|E|}$ 为全 1 向量。注意，$\frac{1}{|V|+|E|} \cdot \mathbf{1}$ 是 $\mathcal{C}_G^\circ$ 的一个内点。结合引理 4.4 和引理 4.3，可知对偶宇宙学多胞体 $\mathcal{C}_G^\circ$ 可由单形集合 $\{\sigma_T \mid T \in \widetilde{\mathcal{T}}(G)\}$ 进行三角剖分，而该三角剖分诱导出平移宇宙学多胞体的对偶的三角剖分。我们再次使用定理 1.2 来计算 $\mathcal{C}_G$ 的典范形式。为此，需要计算单形 $\sigma_T$ 的体积。为此，我们考察它们在正交投影到与 $H = \{(x, y) \in \mathbf{R}^{|V|+|E|} \mid x_1 + x_2 + \cdots + x_{|V|} + y_1 + \cdots + y_{|E|} = 1\}$ 平行的线性子空间后的像。注意，$\sigma_T$ 的像正是平移 $\sigma_T - \frac{1}{|V|+|E|} \cdot \mathbf{1}$。将诱导三角剖分中相应的单形记为 $\sigma_T(x)$，并应用引理 2.7，可得

$$\operatorname{vol}(\sigma_T(x)) = \frac{\operatorname{vol}(\sigma_T)}{\prod_{t \in T} \ell_t(x)},$$

其中我们利用了原点 $\mathbf{0}$ 是 $\sigma_T - \frac{1}{|V|+|E|} \cdot \mathbf{1}$ 的一个顶点，且 $\ell_0(x) = 1$。对 $\widetilde{\mathcal{T}}(G)$ 中所有管族求和，得到

$$\Omega(\mathcal{C}_G)(x) = \sum_{T \in \widetilde{\mathcal{T}}(G)} \frac{\operatorname{vol} \sigma_T}{\prod_{t \in T} \ell_t(x)} \, \mathrm{d}(x)$$

该断言可由与定理 1.1 的证明相同的论证得到。 □

**注 4.7**。与定理 4.1 中的表达式相比，定理 4.6 中典范形式表示的优点是，作为加项出现的有理形式的次数低一阶；缺点是加项有 $|V| + 1$ 个。从物理角度来看哪种方式更可取，我们尚不清楚。

**致谢**

我们感谢 Hadleigh Frost 和 Felix Lotter 就第 4 节的结果进行了有益的讨论。

本研究得到德国研究基金会（DFG）通过 SPP 2458 组合协同 以及项目编号 547295909 的资助。

# 参考文献

[1]Nima Arkani-Hamed、Yuntao Bai 和 Thomas Lam。《正几何与典范形式》。*https://arxiv.org/abs/2601.17619*，2017年。[2] Nima Arkani-Hamed、Paolo Benincasa 和 Alexander Postnikov。《宇宙学多胞体与宇宙波函数》。*https://arxiv.org/abs/1709.02813*，2017年。[3] Aenne Benjes、Kamillo Ferry 和 Benjamin Schr¨oter。《宇宙学多胞体的良好三角剖分》，2025年。[4] Justus Bruckamp、Lina Goltermann、Martina Juhnke、Erik Landin 和 Liam Solus。《宇宙学多胞体的 Ehrhart 理论》，2025年。[5] Tyler Dunaisky。《平直空间波函数的表示》。*https://arxiv.org/abs/2601.17619*，2026年。[6] Hadleigh Frost 和 Felix Lotter。《宇宙扇》。*https://arxiv.org/pdf/2602.21194*，2026年。

[7] Christian Gaetz。《由伴随式得到的多胞体典范形式》，2025年。[8] Yibo Gao、Thomas Lam 和 Lei Xue。《对偶混合体积》，2024 年。[9] Martina Juhnke 、 Liam Solus 和 Lorenzo Venturello。《宇宙学多胞体的三角剖分》。代数组合，8(4):1141–1168，2025年。[10] Lukas K¨uhne 和 Leonid Monin。《宇宙学多胞体的面》。*Ann. Inst. Henri Poincar´e D*，12(3):445–461，2025年。[11] Thomas Lam。《正几何导论》，2022年。[12] Thibault Manneville 和 Vincent Pilaud。实现图嵌套复形的相容扇。载于第*28*届形式幂级数与代数组合国际会议（*FPSAC 2016*），第 BC 卷，见离散数学、理论计算机科学会议录，第 827–838 页。离散数学、理论计算机科学协会，南锡， [2016] ©2016年。[13] Simon Telen。《环面振幅与泛伴随式》。伦敦数学会杂志（第二辑），113(2):论文编号 e70468，2026年。[14] Joe Warren。《凸多胞体的重心坐标》。计算数学进展，6(1):97–108，1996年。[15] G¨unter M. Ziegler。多胞体讲义，数学研究生教材第 152 卷。Springer 出版社，纽约，1995年。