arXiv:2603.03908v1 [math.CA] 4 Mar 2026

Wiener 代数中有理函数的 Nikolskii 型不等式的渐近锐性

BENJAMIN AUXEMERY、ALEXANDER BORICHEV 和 RACHID ZAROUF

摘要。我们证明了 A. Baranov 和 R. Zarouf 为 Wiener 代数中绝对收敛傅里叶级数的有理函数 f 所证明的 Nikolskii 型不等式具有渐近锐性。这些函数至多有 n 个极点，且所有极点均位于伸缩圆盘 $\frac{1}{\lambda}\mathbb{D}$ 之外，其中 $\mathbb{D}$ 表示开单位圆盘，$\lambda \in [0,1)$ 为固定值。更确切地说，该不等式表明，这类函数的 Wiener 范数可由其 H^2 范数——即其在圆盘 Hardy 空间中的范数——乘以一个阶为 $\sqrt{\frac{n}{1-\lambda}}$ 的因子来控制。本文构造了显式的测试函数，说明一般情况下这一界无法改进：对每个固定的 $\lambda \in [0,1)$，当 $n \to \infty$ 时，该不等式在相差一个普适常数的意义下是渐近锐的。

1. 引言

设 $\mathcal{P}_n$ 为次数小于或等于 $n \geq 1$ 的复多项式空间，并设 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ 为复平面中的单位圆盘。给定 $\lambda \in [0, 1)$，我们定义

$$\mathcal{R}_{n,\lambda} = \Big\{ \frac{p}{q} \ : \ p, q \in \mathcal{P}_n, \ q \text{ zero free in } \frac{1}{\lambda}\mathbb{D} \Big\},$$

双次数至多为 (n, n)、且所有极点均位于 $\frac{1}{\lambda}\mathbb{D}$. 之外的全部有理函数的集合。特别地，对于 $\lambda = 0$，我们得到 $\mathcal{R}_{n,\ 0} = \mathcal{P}_n$。

A. Baranov 与 R. Zarouf 在 [1] 中证明了经典 Beurling–Sobolev 空间中的一个 S. M. Nikolskii 型不等式

$$\ell^p_A = \Big\{ f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) : f(z) = \sum_{k\geq 0} \hat{f}(k) z^k, \ \|f\|^p_{\ell^p_A} = \sum_{k\geq 0} |\hat{f}(k)|^p < \infty \Big\},$$

对于属于 $\mathcal{R}_{n,\lambda}$ 的函数，在不等式左侧取 $p = 1$、右侧取 $p = 2$ 的情况下。更准确地说，他们证明了以下嵌入

2020 数学学科分类。 30A10, 42A16, 30H10, 30H50, 30J10。关键词与短语。 Wiener 代数、Hardy 空间、有理函数、傅里叶系数、Blaschke 因子的幂、驻相法。第二作者得到 ANR-24-CE40-5470 的资助。

Wiener 代数 $\ell^1_A = W$ 到 Hardy 空间 $\ell^2_A = H^2$ 的嵌入在 $\mathcal{R}_{n,\lambda}$ 上是可逆的，并且相应的嵌入常数为 $\lesssim \sqrt{\frac{n}{1-\lambda}}$。

定理 1。 [1, 定理 2] 设 $n \geq 1$、 $\lambda \in [0,1)$，且设 $f \in \mathcal{R}_{n,\ \lambda}$。则对于某个绝对常数 K，有

$$\|f\|_{\ell^1_A} \leq K\sqrt{\frac{n}{1-\lambda}}\|f\|_{\ell^2_A}.$$

该不等式对类 $\mathcal{R}_{n,\ \lambda}$ 中双次数至多为 (n,n) 且极点位于伸缩圆盘 $\frac{1}{\lambda}\mathbb{D}$ 外的有理函数，给出了以 H^2-范数控制 ℓ^1_A-范数的定量估计。尽管该常数的最佳性尚未确立（这正是本文的目的），但它已经在 [1], 中发挥了核心作用；在该文中，作者利用它为某些受 Beurling–Sobolev范数约束的 Nevanlinna–Pick型插值量推导最佳估计，参见 [1, 定理 1]。具体而言，作者利用这一嵌入，根据与相应 Nevanlinna–Pick型问题相关的输入/输出数据，控制有理插值函数的 H^∞-范数。

定理 1 中的上界反映了当 n 增大且极点趋近单位圆时控制 ℓ^1_A-范数的难度；其用途也不仅限于插值，还可能影响有理逼近问题以及相关解析函数空间中的范数估计。

下面我们在以下意义下证明嵌入常数 $\sqrt{\frac{n}{1-\lambda}}$ 的最佳性。设 $b_\lambda(z) = (z-\lambda)/(1-\overline{\lambda}z)$。给定 $n \geq 1$ 和 $\lambda \in [1/2, 1)$，我们考虑由下式定义的测试函数 $f_{n,\lambda} \in \mathcal{R}_{n,\ \lambda}$

$$f_{n,\lambda}(z) = \frac{1}{1-\lambda z} b_\lambda^{n-1}(z).$$

给定 $n \geq 1$ 和 $\lambda \in [0, 1/2]$，令

$$D_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} z^k \in \mathcal{R}_{n,0} \subset \mathcal{R}_{n,\lambda}$$

为阶数为 n的（稍作修改的）标准狄利克雷核。

定理 2. 存在一个绝对正常数 K，使得若 $\lambda \in [1/2, 1)$，则

$$\|f_{n,\lambda}\|_{\ell^1_A} \geq K\sqrt{\frac{n}{1-\lambda}}\|f_{n,\lambda}\|_{\ell^2_A}, \qquad n \geq n(\lambda).$$

如果 $n \geq 1$ 且 $\lambda \in [0, 1/2]$，那么

$$\|D_n\|_{\ell^1_A} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{n}{1-\lambda}}\|D_n\|_{\ell^2_A}.$$

接下来我们提出两点说明。

注 1. 定理 *2* 的第一部分证明颇为精细，表明定理 *1* 中嵌入系数 $\sqrt{\frac{n}{1-\lambda}}$ 在 $n\to\infty$ 时（相差一个数值因子）的渐近锐性，对任意固定的 $\lambda\in[1/2,1)$ 均成立。定理 *2* 的第二部分（即 $\lambda\in[0,1/2]$ 的情形）显然成立，因为 $\|D_n\|_{\ell^1_A}=\sqrt{n}\|D_n\|_{\ell^2_A}$，并表明定理 *1* 中的不等式在此情形下也具有最佳性。

注 2. 这一渐近下界与 [11], 中确立的一项结果性质相同：该结果证明了，对于极点位置预先给定的有理函数，*Hardy* 空间 H^2 中 *Bernstein* 型不等式的最佳增长率。在这两种情形下，目标都是确定当 $n\to\infty$ 时的渐近行为，以及对极点约束参数（记作 λ）的正确依赖关系。在 [11], 中，最佳常数的行为如 $1/(1-\lambda)$，而在本文的情形下则为 $1/\sqrt{1-\lambda}$，这反映了所涉及范数的差异：希尔伯特空间 H^2 中微分算子的范数，与嵌入 $H^2\hookrightarrow W$ 到 *Wiener* 代数的嵌入系数。本文所研究的情形显然更具挑战性，因为 *Wiener* 范数 $\|f\|_{\ell^1_A}$ 定义为泰勒系数模之和，缺少 H^2 的希尔伯特空间结构。特别是，模型空间 $K_B=H^2\ominus BH^2$ [9, p. 157], 中 *Malmquist–Walsh* 基的正交性曾在 [11], 中发挥核心作用，但在此处并不具备；其中 B 是一个有限 *Blaschke* 乘积，用以编码极点的位置和重数。尽管如此，值得指出的是，本文使用的测试函数 $f_{n,\lambda}=\frac{1}{1-\lambda z}b_\lambda^{n-1}$ 恰好是与 *Blaschke* 乘积 $B(z)=b_\lambda^n(z)$ 对应的 *Malmquist–Walsh* 基中的第 n 个向量，这凸显了两个问题在结构上的相似性。

固定 $\lambda\in[1/2,1)$ 并令

$$\alpha=\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\in(0,1/3].$$

给定 k 和 n，令 $t=k/n$。接下来，令

$$f_n(z)=\frac{1}{1-\lambda z}b_\lambda^n(z),$$
$$\Phi(z)=\log\left(z^{-t}b_\lambda(z)\right),$$

其中 log 表示复对数的主值支。为了陈述下一个定理——该定理是应用驻相法 [6], 以及该方法的一致版本 [3, 4, 5], 而得到的——我们需要引入一个辅助函数

$$h(s)=h_t(s)=-i\Phi(e^{is})=\arg\left(\left(z^tb_\lambda(z)\right)_{|z=e^{is}}\right)\qquad s\in[0,\pi].$$

Then

$$h''(s) = -\frac{2\lambda(1-\lambda^2)\sin s}{(1+\lambda^2-2\lambda\cos s)^2}. \tag{1.1}$$

由于对 $z \in \partial\mathbb{D}$有 $|z^t b_\lambda(z)| = 1$ ，我们得到

$$\widehat{f_n}(k) = \frac{1}{\pi}\Re\Big\{\int_0^\pi \frac{1}{1-\lambda e^{is}} e^{inh(s)}\,\mathrm{d}s\Big\}.$$

给定 $t \in (\alpha, \alpha^{-1})$，令

$$q(t) = \frac{1+\lambda^2}{2\lambda} - \frac{1-\lambda^2}{2\lambda t}, \tag{1.2}$$

使得 $|q(t)| < 1$，并通过关系定义 $\varphi(t)$、 $0 < \varphi(t) < \pi$

$$\cos(\varphi(t)) = q(t). \tag{1.3}$$

接下来，通过关系定义 $\psi(t)$、 $-\pi/2 < \psi(t) < 0$

$$1 - \lambda e^{i\varphi(t)} = |1-\lambda e^{i\varphi(t)}| e^{i\psi(t)}. \tag{1.4}$$

最后，我们考虑函数

$$F(t) = h_t(\varphi(t)) = -i\log(e^{-it\varphi(t)} e^{i\varphi(t)-2i\psi(t)}) = \varphi(t) - t\varphi(t) - 2\psi(t). \tag{1.5}$$

我们需要以下结果，其证明相当技术性，是对 [2, 定理 2 (2)] 的证明所作的自然修改，旨在计算当 $t = k/n$ 固定且 n 变大时， $b_\lambda^n(k)$ 的^渐近展开。

定理 3。 设 $\alpha < \beta < 1$。若 $k \in [\beta n, \beta^{-1} n]$，则

$$\widehat{f_n}(k) = \sqrt{\frac{2}{n(1-\lambda^2)\pi}} \frac{\cos\left(nF(t) - \psi(t) - \pi/4\right) + o(1)}{[(\alpha^{-1}-t)(t-\alpha)]^{1/4}}, \qquad n \to \infty,$$

其中 $t = k/n$, F 由(1.5)定义， ψ 由(1.4)定义。余项$o(1)$ 关于 $t \in [\beta, \beta^{-1}]$是一致的。

论文概要。本文结构如下。在第 2 节中，我们证明定理 2，该定理确立了定理 1 中 Nikolskii 型不等式的渐近锐性。证明基于对测试函数 f_n 的 ℓ^1_A-范数进行显式分析，并利用其傅里叶系数的渐近展开。代入定理 3 的渐近公式后，我们在精心选取的频率区间 k 上对主导项求和，该区间对应于 $t = k/n \in [\alpha, \alpha^{-1}]$ 的一个子区间。所得级数是一个高度振荡的“伪黎曼和”，其中余弦项体现了相位的振荡。为了控制这些振荡，我们借助 Weyl 等分布判别准则；该准则保证相位模 2π 的行为如同一个等分布序列，并使我们能够

估计各项的平均贡献。由此得到所需的下界，表明 Nikolskii 型不等式具有渐近锐性。

第 3 节专门证明定理 3，该定理给出傅里叶系数 $f_n(k)$ 在 $n \to \infty$ 时的精确渐近$\widehat{\ }$展开。证明依赖于将驻相方法$\widehat{\ }$应用于 $f_n(k)$ 的围道积分表示。当$t = k/n$ 保持在 (α, α^{-1}) 的紧子集中时，我们应用 Fedoryuk [8] 的经典驻相位定理。

2. 定理 2 的证明

定理 2 的证明。 为简化记号，我们将 $n-1$ 替换为 n，并考虑测试函数

$$f_n(z) = \frac{1}{1-\lambda z} b_\lambda^n(z).$$

我们将从下方估计 f_n 在 ℓ^1_A 中的范数。

步骤 1. *应用定理 3，并对 k 的一个适当范围求和。*

直接计算可得

$$\int_\alpha^{\alpha^{-1}} \frac{\mathrm{d}t}{[(\alpha^{-1}-t)(t-\alpha)]^{1/4}} = (2\Gamma(3/4))^2 \sqrt{\frac{\lambda}{\pi(1-\lambda^2)}},$$

我们可以选取 $\beta \in (\alpha, 1)$，使得

$$\int_\beta^{\beta^{-1}} \frac{\mathrm{d}t}{[(\alpha^{-1}-t)(t-\alpha)]^{1/4}} = \frac{L}{\sqrt{1-\lambda}},$$

其中 $L = (\Gamma(3/4))^2$。

我们将 I_n 定义为以下整数集合

$$I_n = \mathbb{Z} \cap [\beta n, \beta^{-1} n],$$

并注意到，显然，

$$\|f\|_{\ell^1_A} \geq \sum_{k \in I_n} |\widehat{f}(k)|.$$

直接应用定理 3 可得

$$\sum_{k \in I_n} |\widehat{f}(k)| \geq \sqrt{\frac{2}{n(1-\lambda^2)\pi}} \sum_{k \in I_n} \frac{|\cos(nF(k/n) - \psi(k/n) - \pi/4)| + o(1)}{[(\alpha^{-1} - k/n)(k/n - \alpha)]^{1/4}}. \tag{2.1}$$

我们设

$$M = \sum_{k \in I_n} \frac{1}{[(\alpha^{-1} - k/n)(k/n - \alpha)]^{1/4}}. \tag{2.2}$$

与相应的积分比较可得

$$M = n\int_{\beta}^{\beta^{-1}} \frac{\mathrm{d}t}{[(\alpha^{-1}-t)(t-\alpha)]^{1/4}} + \mathcal{O}(1), \qquad n\to\infty.$$

因此,

$$M = \Big(\frac{L}{\sqrt{1-\lambda}} + o(1)\Big)n, \qquad n\to\infty. \tag{2.3}$$

从现在起，我们的目标是渐近估计

$$X = \sum_{k\in I_n} \frac{|\cos\left(nF(k/n)-\psi(k/n)-\pi/4\right)|}{[(\alpha^{-1}-k/n)(k/n-\alpha)]^{1/4}}$$

当 n 变大时。我们设

$$s_{n,k} = \Big\{\frac{1}{2\pi}\big(nF(k/n)-\psi(k/n)-\pi/4\big)\Big\} \in [0,1),$$

其中 $\{a\}$ 表示 a 的小数部分，因此

$$X = \sum_{k\in I_n} \frac{|\cos(2\pi s_{n,k})|}{[(\alpha^{-1}-k/n)(k/n-\alpha)]^{1/4}}. \tag{2.4}$$

步骤 2. 的均匀分布$s_{n,\ k}$。

给定 $j\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$，我们设

$$A_{n,j,m} = \sum_{l\in I_n,\, l\le m} \exp(2\pi i j s_{n,l}) = \sum_{l\in I_n,\, l\le m} \exp(2\pi i j \phi(l/n)),$$

其中

$$\phi = nF-\psi-\pi/4.$$

我们将证明，对固定的 j，且关于 $m\in I_n$一致地,

$$A_{n,j,m} = \mathcal{O}(n^{1/2}), \qquad n\to\infty.$$

为估计$A_{n,\ j,\ m}$ 我们使用范德科普特引理 [12, 第5章，引理4.6]: 若$\theta''(x)\ \ge\mu>0$ 或 $\theta''(x)\ \le-\mu<0$ 在 $[a,b]$上，则

$$\Big|\sum_{a<k\le b}\exp(2\pi i\theta(k))\Big| \le \big(|\theta'(b)-\theta'(a)|+2\big)\Big(\frac{4}{\sqrt{\mu}}+C\Big), \tag{2.5}$$

其中 C 为一个绝对常数。我们将此引理应用于函数 $\theta(x)\ \ =j\phi(x/n)$以及数 $a=\beta n$、$b=m\le\beta^{-1}n$。

我们有

$$\theta'(x) = \frac{j}{n}\phi'(\frac{x}{n}) = jF'(x/n) - \frac{j}{n}\psi'(x/n)$$

and

$$\theta''(x) = \frac{j}{n^2}\phi''(x/n) = \frac{j}{n}F''(x/n) - \frac{j}{n^2}\psi''(x/n).$$

我们令 $t = x/n$。当 $a \le x \le b$ 时，我们有 $t \in (\beta, \beta^{-1})$。回顾一下 t

$$q(t) = \frac{1+\lambda^2}{2\lambda} - \frac{1-\lambda^2}{2\lambda t},$$
$$\varphi(t) = \arccos q(t),$$
$$1 - \lambda e^{i\varphi(t)} = |1 - \lambda e^{i\varphi(t)}|e^{i\psi(t)}, \qquad -\pi/2 < \psi(t) < 0, \tag{2.6}$$
$$F(t) = \varphi(t) - t\varphi(t) - 2\psi(t).$$

我们定义

$$r(t) = \sqrt{(t-\alpha)(\alpha^{-1}-t)}.$$

Then

$$r(t) = \frac{2\lambda t}{1-\lambda^2}\sqrt{1-q^2(t)},$$

and

$$q'(t) = \frac{1-\lambda^2}{2\lambda t^2},$$
$$r'(t) = \frac{1}{r(t)}\Big(\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2} - t\Big). \tag{2.7}$$

根据 φ 的定义，我们有

$$\varphi'(t) = -\frac{q'(t)}{\sqrt{1-q^2(t)}} = -\frac{1-\lambda^2}{2\lambda t^2\sqrt{1-q^2(t)}} = -\frac{1}{tr(t)}.$$

此外，

$$|1 - \lambda e^{i\varphi(t)}| = \sqrt{\frac{1-\lambda^2}{t}},$$
$$1 - \lambda e^{i\varphi(t)} = (1-\lambda^2)\frac{t+1}{2t} - i\lambda\sqrt{1-q^2(t)}.$$

根据 ψ的定义，我们有

$$\tan\psi(t) = -\frac{2t\lambda\sqrt{1-q^2(t)}}{(t+1)(1-\lambda^2)} = -\frac{r(t)}{t+1}.$$

因此，

$$\psi'(t)=\frac{1}{1+r^2(t)/(t+1)^2}\cdot\frac{r(t)-r'(t)(t+1)}{(t+1)^2}=\frac{r(t)-r'(t)(t+1)}{r^2(t)+(t+1)^2}$$
$$=\frac{r^2(t)-(t+1)(\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}-t)}{r(t)(r^2(t)+(t+1)^2)}=\frac{-1-t^2+2\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}t-t\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}-\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}+t^2+t}{r(t)(2\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}t+2t)}$$
$$=\frac{\frac{2}{1-\lambda^2}t-\frac{2}{1-\lambda^2}}{4r(t)t/(1-\lambda^2)}=\frac{t-1}{2r(t)t},$$

and

$$\psi''(t)=\frac{r(t)+tr'(t)-t^2r'(t)}{2t^2r^2(t)}.$$

接下来，我们有

$$F'(t)=\varphi'(t)-\varphi(t)-t\varphi'(t)-2\psi'(t)=-\varphi(t),$$

and

$$F''(t)=\frac{1}{tr(t)}.$$

由于 $t\in[\beta,\beta^{-1}]$，我们有

$$r(t)\asymp 1. \tag{2.8}$$

此处及下文中，由于 $\beta=\beta(\lambda)$ 依赖于 λ，(2.8) 中的隐常数（以及后续使用它的 $\lesssim$ / $\mathcal{O}(\cdot)$ 界）可以依赖于 λ，但对于固定的 λ，它们关于 $t\in[\beta,\beta^{-1}]$ 是一致的。

由 (2.7)，我们有

$$|r'(t)|\lesssim\frac{1}{r(t)}.$$

因此，

$$\Big|\frac{1}{j}\theta'(x)\Big|=\Big|F'(t)-\frac{1}{n}\psi'(t)\Big|=\Big|\varphi(t)+\frac{t-1}{2ntr(t)}\Big|=\mathcal{O}(1),$$

and

$$\frac{n}{j}\theta''(x)=F''(t)-\frac{1}{n}\psi''(t)=\frac{1}{tr(t)}\Big[1-\frac{r(t)+tr'(t)-t^2r'(t)}{2ntr(t)}\Big].$$

由于

$$\frac{|r(t)+tr'(t)-t^2r'(t)|}{2ntr(t)}=\mathcal{O}_\lambda(n^{-1}),\qquad n\to\infty,$$

当 n 足够大时，我们得到

$$\frac{n}{j}\theta''(x)\geq c(\lambda)>0,\qquad x\in[a,b],\ j\neq 0.$$

现在应用范德科普特不等式可得，对于固定的 λ、$j \neq 0$，且关于 $m \in I_n$ 一致地，有

$$A_{n,j,m} = \mathcal{O}(n^{1/2}), \qquad n \to \infty. \tag{2.9}$$

步骤 3. 三角多项式逼近与阿贝尔变换。

这里的论证与证明 [7, 引理 3] 中的论证类似。设 $g(x) = |\cos(2\pi x)|$。我们要证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X}{M} = \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}, \tag{2.10}$$

其中，M 由 (2.2) 定义，X 由 (2.4) 给出。注意到，g 在实数轴上连续且为 1-周期函数。固定 $\varepsilon > 0$。根据魏尔斯特拉斯逼近定理，存在一个三角多项式 p，

$$p(x) = \sum_{|j|\le N} c_j \exp(2\pi i j x)$$

使得 $\|g - p\|_{L^\infty[0,1]} \le \varepsilon$。因此，

$$\Big|X - \sum_{k\in I_n} \frac{p(s_{n,k})}{[(\alpha^{-1} - k/n)(k/n - \alpha)]^{1/4}}\Big| \le \varepsilon \sum_{k\in I_n} \frac{1}{[(\alpha^{-1} - k/n)(k/n - \alpha)]^{1/4}} = \varepsilon M,$$

and

$$\Big|\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x - c_0\Big| \le \varepsilon.$$

接下来,

$$\sum_{k\in I_n} \frac{p(s_{n,k})}{[(\alpha^{-1} - k/n)(k/n - \alpha)]^{1/4}} = \sum_{k\in I_n} \frac{p(s_{n,k})}{\sqrt{r(k/n)}} = \sum_{|j|\le N} c_j \sum_{k\in I_n} \frac{\exp(2\pi i j s_{n,k})}{\sqrt{r(k/n)}},$$

and

$$c_0 \sum_{k\in I_n} \frac{1}{\sqrt{r(k/n)}} = c_0 M.$$

因此，为了得到 (2.10)，还需验证对于每个固定的 $j \neq 0$，我们有

$$\sum_{k\in I_n} \frac{\exp(2\pi i j s_{n,k})}{\sqrt{r(k/n)}} = o(M), \qquad n \to \infty,$$

或者，等价地，

$$Y = \sum_{k\in I_n} \frac{A_{n,j,k} - A_{n,j,k-1}}{\sqrt{r(k/n)}} = o(M), \qquad n \to \infty. \tag{2.11}$$

根据阿贝尔求和公式，我们有

$$Y = \frac{A_{n,j,\beta^{-1}n}}{\sqrt{r([\beta^{-1}n]/n)}} - \sum_{k\in I_n} A_{n,j,k-1}\Big(\frac{1}{\sqrt{r(k/n)}} - \frac{1}{\sqrt{r((k-1)/n)}}\Big).$$

由 (2.9)，我们得到

$$|Y| \lesssim n^{1/2}\Big(\frac{1}{\sqrt{r(\beta^{-1})}} + \sum_{k\in I_n}\Big|\frac{1}{\sqrt{r(k/n)}} - \frac{1}{\sqrt{r((k-1)/n)}}\Big|\Big).$$

现在利用 (2.8) 以及函数 $\sqrt{r}$ 在两个区间上单调这一事实，这两个区间的并集为 $(\alpha n, \alpha^{-1}n)$。因此，

$$\frac{1}{\sqrt{r(\beta^{-1})}} + \sum_{k\in I_n}\Big|\frac{1}{\sqrt{r(k/n)}} - \frac{1}{\sqrt{r((k-1)/n)}}\Big| = \mathcal{O}(1), \qquad n\to\infty.$$

结合 (2.3)，得到 (2.11)，进而得到 (2.10)。

步骤 4. 结论。

由关系式 (2.1)、(2.3) 和 (2.10)，可得

$$\sum_{k\in I_n} |\widehat{f}(k)| \geq \frac{(L+o(1))\sqrt{n}}{\sqrt{1-\lambda}}, \qquad n\to\infty.$$

因此，

$$\|f\|_{\ell^1_A} \geq \kappa\frac{\sqrt{n}}{1-\lambda}, \qquad n\geq n(\lambda),$$

其中 $\kappa>0$ 为绝对常数。由于 $\|f\|_{\ell^2_A} \asymp \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}}$，证明至此完成。 □

3. Proof of Theorem 3

我们首先回顾 f_n 的傅里叶/泰勒系数的定义：

$$\widehat{f_n}(k) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathbb{T}} \frac{b^n_\lambda(z)}{1-\lambda z}\, z^{-k}\,\frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{1}{1-\lambda z}\, e^{n\Phi(z)}\,\frac{\mathrm{d}z}{z}.$$

为分析其在 $n\to+\infty$时的渐近行为，我们将该围道积分表示为经过共轭变换后在 $(0,\pi)$ 上的振荡积分的实部。在这一情形下，我们应用驻相位定理，即 Fedoryuk 的结果 [8, 定理 1.6，第107], 页，以我们的记号表述如下。在进行详细分析之前，有必要回顾相位函数的驻点结构

$$\Phi(z) = \Phi_t(z) = \log\left(z^{-t}b_\lambda(z)\right), \qquad t = k/n,$$

该相位函数控制着上述积分的振荡行为。关于驻点的以下描述最初见于 [10, 引理 11] ，后来在 [2, 引理 5]中得到进一步完善。为完整起见，我们在此重述。

引理 3.1。 [10, 引理 11] [2, 引理 5] 设 $t = k/n \in (\alpha, \alpha^{-1})$，设 Φ 如上定义，并设 φ 由 (1.3) 定义。那么 Φ 有两个不同的一阶驻点$z_\pm = e^{\pm i\varphi(t)}$ ，且

$$\Phi''(z_\pm) = \frac{(1-\lambda^2)(z_\pm - z_\mp)\lambda}{(z_\pm - \lambda)^2(1-\lambda z_\pm)^2}.$$

现在我们来分析傅里叶/泰勒系数。我们回顾 M. V. Fedoryuk 提出的经典驻相位定理 [8, 定理 1.6，第 107] 页。为方便读者，我们在此用当前记号重述该定理。

定理 4。 [8, 定理 1.6，第107] 设 $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$，并设 t 表示一个属于区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^k$的辅助实参数。假设函数

$$G:\ I \times \Omega \to \mathbb{C}, \qquad \tilde{h}:\ I \times \Omega \to \mathbb{R},$$

满足以下假设：

(i) G 在 $I \times \Omega$ 上是 C^∞ 光滑的，并且与其关于第一个变量的所有导数一起，在端点 a, b处均为零。

(ii) 对于每个固定的 $t \in \Omega$，相位函数 $h_t(s) = h(s,t)$ 为实值函数，并且具有唯一的非退化驻点 $s_0 = s_0(t) \in (a, b)$，满足

$$\tilde{h}_t'(s_0(t)) = 0, \qquad |\tilde{h}_t''(s_0(t))| \geq \delta_0 > 0, \qquad t \in \Omega.$$

那么，振荡积分

$$J(n,t) = \int_a^b G(s,t)\, e^{in\tilde{h}_t(s)}\, ds,$$

当 $n \to +\infty$ 时，具有渐近展开：

$$J(n,t) = \sqrt{\frac{2\pi}{n\,|\tilde{h}_t''(s_0(t))|}}\,\Big(G(s_0(t),t) + O(n^{-1})\Big)\exp\Big\{\, in\tilde{h}_t(s_0(t)) + \frac{i\pi}{4}\operatorname{sgn}\big(\tilde{h}_t''(s_0(t))\big)\Big\},$$

其中 余项 $O(n^{-1})$ 在 Ω 的每个紧子集上关于 t 一致。

回到 f_n 的傅里叶/泰勒系数，我们注意到后者为实数（因为 $\lambda \in (0, 1)$）。因此，我们有

$$\widehat{f_n}(k) = \frac{1}{\pi}\Re\Big\{\int_0^\pi \frac{1}{1-\lambda e^{is}} e^{inh_t(s)}\,\mathrm{d}s\Big\} = \frac{1}{\pi}\Re\Big\{\int_0^\pi \frac{1}{1-\lambda e^{-is}} e^{in\tilde{h_t}(s)}\,\mathrm{d}s\Big\},$$

其中 $t = k/n$,

$$h(s) = h_t(s) = -i\Phi_t(e^{is}), \qquad \tilde{h}(s) = \tilde{h}_t(s) := -h_t(s).$$

由 (1.2) 和 (1.3) 可得

$$\left|e^{i\varphi(t)}-1\right| \geq (1-\lambda)\sqrt{\frac{\beta-\alpha}{\alpha\lambda}}, \qquad \left|e^{i\varphi(t)}+1\right| \geq (1+\lambda)\sqrt{\frac{\beta-\alpha}{\beta\lambda}}.$$

因此，给定 $\beta \in (\alpha, 1)$，我们可以固定 $\gamma = \gamma(\alpha,\beta) > 0$，使得若 $t \in [\beta, \beta^{-1}]$，则 $\tilde{h}_t$ 在 $(0,\pi)$ 上唯一的临界点 $\varphi(t)$ 满足不等式 $\gamma \leq \varphi(t) \leq \pi - \gamma$。为应用 Fedoryuk 的结果，我们引入一个光滑函数 $\nu\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}$，使得 $\nu = 1$ 在 $[\gamma/2, \pi-\gamma/2]$ 上，$\nu = 0$ 在 $[0,\gamma/4] \cup [\pi-\gamma/4, \pi]$ 上，并且 $0 \leq \nu \leq 1$。令

$$g(s) = \frac{1}{1-\lambda e^{-is}},$$

我们有

$$\int_0^\pi g(s)e^{in\tilde{h}(s)}\mathrm{d}s = \int_0^\pi (1-\nu(s))g(s)e^{in\tilde{h}(s)}\mathrm{d}s + \int_0^\pi \nu(s)g(s)e^{in\tilde{h}(s)}\mathrm{d}s$$
$$= \int_0^{\gamma/2} (1-\nu(s))g(s)e^{in\tilde{h}(s)}\mathrm{d}s + \int_{\pi-\gamma/2}^{\pi} (1-\nu(s))g(s)e^{in\tilde{h}(s)}\mathrm{d}s + \int_{\gamma/4}^{\pi-\gamma/4} \nu(s)g(s)e^{in\tilde{h}(s)}\mathrm{d}s.$$

~分部积分，并注意到 h' 在 $[0,\gamma/2]$ 上不为零，可得

$$\begin{aligned}\int_0^{\gamma/2} (1-\nu(s))g(s)e^{in\tilde{h}(s)}\mathrm{d}s &= \frac{1}{in}\int_0^{\gamma/2} \frac{(1-\nu(s))g(s)}{\tilde{h}'(s)}(e^{in\tilde{h}(s)})'\mathrm{d}s \\ &= \frac{(1-\nu(\gamma/2))g(\gamma/2)e^{in\tilde{h}(\gamma/2)}}{in\tilde{h}'(\gamma/2)} - \frac{(1-\nu(0))g(0)e^{in\tilde{h}(0)}}{in\tilde{h}'(0)} \\ &\quad -\frac{1}{in}\int_0^{\gamma/2}\Big(\frac{(1-\nu(s))g(s)}{\tilde{h}'(s)}\Big)' e^{in\tilde{h}(s)}\mathrm{d}s \\ &= -\frac{1}{in}\int_0^{\gamma/2}\Big(\frac{(1-\nu(s))g(s)}{\tilde{h}'(s)}\Big)' e^{in\tilde{h}(s)}\mathrm{d}s - \frac{e^{in\tilde{h}(0)}}{in(1-\lambda)\tilde{h}'(0)},\end{aligned}$$

因为 $\nu(\gamma/2) = 1$ 且 $g(0) = \frac{1}{1-\lambda}$。由 (1.1),

$$\min_{\varphi\in[0,\gamma/2]} |\tilde{h}'| = |\tilde{h}'(\gamma/2)| = -\tilde{h}'(\gamma/2),$$

并由中值定理，存在 $\theta \in (\gamma/2, \varphi(t))$ 使得

$$\begin{aligned} -\tilde{h}'(\gamma/2) &= \tilde{h}'(\varphi(t)) - \tilde{h}'(\gamma/2) \\ &= (\varphi(t) - \gamma/2)\tilde{h}''(\theta) \geq \frac{\gamma}{2}\frac{2\lambda(1-\lambda^2)\sin\theta}{(1+\lambda^2-2\lambda\cos\theta)^2} \\ &\geq \frac{\gamma\lambda(1+\lambda)}{1-\lambda}\min_{t\in[\gamma/2,\pi-\gamma]}\sin\theta > 0. \end{aligned}$$

因此，

$$\int_0^{\gamma/2}(1-\nu(s))g(s)e^{in\tilde{h}(s)}\mathrm{d}s = \mathcal{O}(n^{-1})$$

对 $t = \frac{k}{n} \in [\beta, \beta^{-1}]$ 一致成立。类似的论证可得

$$\int_{\pi-\gamma/2}^{\pi}(1-\nu(s))g(s)e^{in\tilde{h}(s)}\mathrm{d}s = \mathcal{O}(n^{-1})$$

对 $t \in [\beta, \beta^{-1}]$ 一致成立。因此，

$$\widehat{f}_n(k) = \frac{1}{\pi}\Re\int_{\gamma/4}^{\pi-\gamma/4}\nu(s)g(s)e^{in\tilde{h}(s)}\mathrm{d}s + \mathcal{O}(n^{-1}). \tag{3.1}$$

剩下的工作是将 Fedoryuk 的结果应用于

$$J(n,t) = \int_{\gamma/4}^{\pi-\gamma/4}\nu(s)g(s)e^{in\tilde{h}(s)}\mathrm{d}s.$$

令

$$I = [a,b] = [\gamma/4, \pi-\gamma/4], \quad \Omega = [\beta, \beta^{-1}],$$

and

$$G(s,t) = \frac{\nu(s)}{1-\lambda e^{-is}}.$$

如上所述，对于 $t \in [\beta, \beta^{-1}]$ 函数 $\tilde{h}_t$ 在 $(0,\pi)$ 上的唯一临界点 $\varphi(t)$，满足不等式

$$\tilde{h}_t''(\varphi(t)) \geq C(\beta,\lambda) > 0,$$

这使我们能够应用 Fedoryuk 的渐近公式。我们有 $\nu(\varphi(t)) = 1$因为 $\varphi(t) \in [\gamma, \pi-\gamma]$。由 (1.1)，

$$\tilde{h}_t''(\varphi(t)) = tr(t),$$

并且得到

$$J(n,t) = \sqrt{2\pi}|\tilde{h}_t''(\varphi(t))|^{-1/2} e^{i\frac{\pi}{4}} e^{in\tilde{h}_t(\varphi(t))} \nu(\varphi(t)) g(\varphi(t)) n^{-1/2} + \mathcal{O}\left(n^{-3/2}\right)$$
$$= e^{in\tilde{h}_t(\varphi(t))+i\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1-\lambda e^{-i\varphi(t)}} \frac{1}{t^{1/2}(t-\alpha)^{1/4}(\alpha^{-1}-t)^{1/4}} \Big(\frac{2\pi}{n}\Big)^{1/2} + \mathcal{O}(n^{-3/2}),$$

其中 $\mathcal{O}$ 项关于 $t \in [\beta, \beta^{-1}]$ 一致。

由 (2.6)，可得

$$1-\lambda e^{-i\varphi(t)} = \big((1-\lambda\cos(\varphi(t)))^2 + \lambda^2(1-\cos(\varphi(t)))^2\big)^{1/2} e^{-i\psi(t)}$$
$$= \big(1+\lambda^2-2\lambda q(t)\big)^{1/2} e^{-i\psi(t)} = \sqrt{\frac{1-\lambda^2}{t}} e^{-i\psi(t)}.$$

因此，

$$J(n,t) = e^{in\tilde{h}_t(\varphi(t))+i\frac{\pi}{4}+i\psi(t)} \frac{1}{(t-\alpha)^{1/4}(\alpha^{-1}-t)^{1/4}} \Big(\frac{2\pi}{n(1-\lambda^2)}\Big)^{1/2} + \mathcal{O}(n^{-3/2}),\ n\to\infty,$$

其中 $\mathcal{O}$ 项关于 $t \in [\beta, \beta^{-1}]$ 一致。回到 (3.1)，我们得出

$$\widehat{f}_n(k) = \sqrt{\frac{2}{n(1-\lambda^2)\pi}} \frac{\cos\big(n\tilde{h}_t(\varphi(t)) + \frac{\pi}{4} + \psi(t)\big)}{[(\alpha^{-1}-t)(t-\alpha)]^{1/4}} + \mathcal{O}\left(n^{-1}\right)$$
$$= \sqrt{\frac{2}{n(1-\lambda^2)\pi}} \frac{\cos(nF(t) - \frac{\pi}{4} - \psi(t))}{[(\alpha^{-1}-t)(t-\alpha)]^{1/4}} + \mathcal{O}\left(n^{-1}\right),$$

其中 $\mathcal{O}$ 项关于 $t \in [\beta, \beta^{-1}]$ 一致。

参考文献

[1] Baranov A., Zarouf R.，H^∞ 受 *Beurling–Sobolev*范数约束的插值，摩洛哥纯粹与应用分析杂志（MJPAA）**9（2）**（2023）157–167。[2] Borichev A., Fouchet K., Zarouf R., *Blaschke*因子的幂的傅里叶系数与强环形函数，《构造逼近》**60**（2024）33–86。[3] Bleistein N., Handelsman R.A., 积分的渐近展开，Holt、Rinehart 和 Winston，1975。[4] Borovikov V.A., 一致驻相法，电气工程研究所，伦敦，1994。[5] Chester C., Friedman B., Ursell F., 最速下降法的推广，《剑桥哲学学会数学学报》**53**（1957）599–611。[6] Erdélyi E., 傅里叶积分的渐近表示与驻相法，《工业与应用数学学会杂志》**3**（1955）17–27。[7] Girard D., 单位圆盘自同构的范数行为，《太平洋数学杂志》**47**（1973）443–456。[8] Fedoryuk M. V.,《鞍点法》，Nauka，莫斯科，1977；俄文。[9] Nikolski N.,《移位算子论著》，Springer-Verlag，柏林，1986。

[10] Szehr O., Zarouf R., 关于 *Schäffer*猜想的显式反例，《纯粹与应用数学杂志》**146**（2021）1–30。[11] Zarouf R., *Wiener* 代数中有理函数的 *Bernstein* 型不等式的渐近锐性 H^2，《圣彼得堡数学杂志》**23** （2012）309–319。[12] Zygmund A.《三角级数》，第1卷，剑桥大学出版社，第二版，1956年。艾克斯-马赛大学、法国国家科学研究中心、马赛数学研究所，法国马赛。电子邮箱：benjamin.auxemery@gmail.com 艾克斯-马赛大学、法国国家科学研究中心、马赛数学研究所，法国马赛。电子邮箱：alexander.borichev@math.cnrs.fr 艾克斯-马赛大学、土伦大学、法国国家科学研究中心、理论物理中心，法国马赛；艾克斯-马赛大学 ADEF实验室，法国马赛。电子邮箱：rachid.zarouf@univ-amu.fr, rzarouf@gmail.com