arXiv:2603.03910v1 [math.AP] 4 Mar 2026

从最大熵排斥过程到酉戴森布朗运动与自由酉流体动力学

Yoann Offret

勃艮第数学研究所（IMB）—法国国家科学研究中心UMR 5584，欧洲
勃艮第大学，21000第戎，法国

摘要。我们研究具有 L个格点与 N 个不可区分粒子的离散环上的最大熵简单对称排斥过程 （MESSEP）。其特征函数是在 L次单位根处取值的舒尔多项式，从而给出显式的谱分解。分析依赖于这一特征结构，以及舒尔多项式与对称群不可约特征标之间的联系，后者构成标度极限的核心代数工具。

在低密度情形中，当 N 固定且 L 趋于无穷时，重标度后的动力学收敛到酉戴森布朗运动 （UDBM）。静电排斥随之作为熵力出现，从而给出UDBM的一种典范微观推导。

在流体动力学情形下，当 N 等价于 αL 且 $\alpha \in (0,\ 1)$时，经验测度收敛到一个满足非线性非局部输运方程的密度。其矩生成函数满足一个复值伯格斯型方程。当 α 趋于 0 时，该方程与支配自由酉布朗运动(FUBM)谱分布的方程一致，从而架起了离散熵排斥动力学与自由酉流体动力学之间的桥梁。

总的来说，MESSEP 提供了一个统一的规范离散框架，通过非线性流体动力学极限连接酉 Dyson 运动与自由酉布朗运动，而舒尔多项式和特征标理论构成其核心代数结构。

关键词。 最大熵排斥过程；流体力学极限；戴森布朗运动；非局部守恒律；复值伯格斯型方程；鞅；舒尔多项式；特征标。
数学主题分类（2020）。主要分类：60K35；次要分类：60J10；60F17；35L65；35Q49；05E05；82C22；60B20。

目录

1 引言 3 1.1 主要结果与思路概述 .3 1.2 相关结果与展望 .7 **2 模型与预备结果** 12 2.1 环上的 MESSEP .12 2.1.1 图结构 .12 2.1.2 最大熵随机游走 .12 2.1.3 扩展动力学 .13 2.1.4 非碰撞随机游走 .14 2.2 完整谱代数分解与谱原估计 .1 42.2.1 图谱 .14 2.2.2 MESSEP 谱 .15 2.2.3 舒尔多项式特征函数.16

3 低密度极限：主要结果 17
3.1 标度极限 .17 3.2 完整谱分解 .18 3.2.1 正交归一希尔伯特特征基 .18 3.2.2 谱分解、光滑化性质与压缩性 .19 3.2.3 舒尔多项式特征函数.20

4 流体力学极限：主要结果 21
4.1 预备知识.21 4.2 密度和矩的流体力学偏微分方程 .22 4.3 证明概要和关键引理 .24 4.3.1 舒尔基与幂和基：Frobenius公式.24 4.3.2 复矩及其期望 .24 4.3.3 关键特征标和技术引理 .25 4.3.4 第 n 个随机矩的方差 .27 4.3.5 双钩 Schur 分解 .27

第2节结果的证明 30 **第3节结果的证明** 33

6.1 酉 Dyson 布朗运动（UDBM）.33 6.2 定理 3.1 和 3.2 的证明.35 6.2.1 紧性结果.35 6.2.2 谱分解.39 6.2.3 极限点的唯一性.43

7 第4节结果的证明 44 7.1 特征引理 4.2 和 4.3 的证明 .44 7.2 技术引理 4.1、4.5 和 4.4 的证明 .48 7.3 定理 4.1 和 4.2 的证明.51 7.3.1 偏微分方程的确定 .51 7.3.2 解的特征表示 .54 7.3.3 正则性与渐近性质 .57 7.4 具有饱和效应的单模周期密度剖面 .60 7.5 定理 4.3 的证明 .62 7.5.1 临界点 .62 7.5.2 边界 ∂V_t .64 7.5.3 正则性与饱和性质 .67

1 引言

最大熵原理选择能够编码所施加约束、且不包含其他信息的概率分布。它源于统计物理，阐释了平衡态的涌现，并将微观构型与宏观规律联系起来。熵量化了与宏观可观测量相容的状态的组合复杂度。

在概率论中，它为在结构约束下对随机性进行建模提供了一条规范规则。在各个学科中，熵最大化不仅是一种变分原理，也是构建复杂系统自然模型的指导准则。

本文源于第6节 [Dud12], ，其中非正式地讨论了 最大熵随机游走（MERW）可能的多体扩展。在此处相关的情形中——对称不可约图 $G = (V,\ E)$ ——MERW 是 $(X_n)_{n\geqslant 0}$上的唯一马尔可夫链 V，它与边结构 E 相容，并使渐近熵率最大

$$h = \lim_{n\to\infty} \frac{H(X_0, \cdots, X_n)}{n} = -\sum_{x\in V} \mu(x) \sum_{y\in V} P(x,y) \ln(P(x,y)),$$

其中， $H(Y)$ 表示离散随机变量 Y的香农熵， P是该马尔可夫链的转移核， μ 是其不变概率测度。事实证明， P 具有一种 Doob$h$-变换结构，该结构由邻接矩阵 A （属于G）的 Perron–Frobenius特征元构造而成；这些特征元也决定了熵率 h 和不变概率测度 μ。记ρ 为 A 的谱半径，记 ψ 为相应的正特征向量：

$$P(x,y) = A(x,y)\frac{\psi(y)}{\rho\,\psi(x)}, \quad \mu(x) = \psi^2(x) \quad \text{and} \quad h = \ln(\rho). \tag{1.1}$$

正函数 ψ 是 $A\psi = \rho\psi$ 的解，可视为离散薛定谔方程 $H\psi = -\Delta\psi + V\psi$ 的基态，其中 $V(x) = -\deg(x)$，且 Δ 是图拉普拉斯算子。

我们还参考 [BDLW10] ，以便从量子力学和统计物理的角度更全面地阐述最大熵随机游走。

1.1 主要结果与思想概述

我们考虑 N个环上的不可区分粒子 $\mathbb{T}_L = \{0,\ \ldots\ldots,\ L-1\}$，等同于 $\mathbb{Z}_L = \mathbb{Z}/L\mathbb{Z}$或 $\mathbb{U}_L \subset \mathbb{C}$，即 L 次单位根。粒子每次跳向最近的空位，一次一个。由此在构型空间上定义了一个无向图 $\mathcal{C}_{L,\ N}$，它要么等同于 $\mathbb{T}_L$ 中大小为 N 的子集，要么等同于严格递增的 N 元组，位于 $\mathbb{T}_L$（见图 1）。

我们研究相应的最大熵随机游走 $(\Xi(n))_{n\geqslant 0}$，称为最大熵简单对称排斥过程（MESSEP），位于圆上（定义 2.1）。

1. 第2节介绍 MESSEP 核 P 以及该过程的标记版本（定义 2.2），它们用于建立第 3 节和第 4 节的标度极限。MESSEP 等同于在圆上条件化为永不碰撞的相互独立的简单对称随机游走（命题 2.1）。我们描述图 $\mathcal{C}_{L,N}$ 和 MESSEP 核 P的谱，证明 P 存在一个由舒尔多项式 s_λ 构成的 $\mathbb{L}^2(\mu)$-特征基，这些多项式在 N-元组的 L次单位根处取值；并描述分拆 λ 与构型 $\xi \in \mathcal{C}_{L,N}$ 之间的对应关系（命题 3.2，注 2.6）。我们在低密度极限（N 固定，$L \to \infty$）和流体力学极限（$N \sim \alpha L$, $\alpha \in (0,1)$）下得到谱隙估计（命题 2.3）。证明推迟至第 5 节。

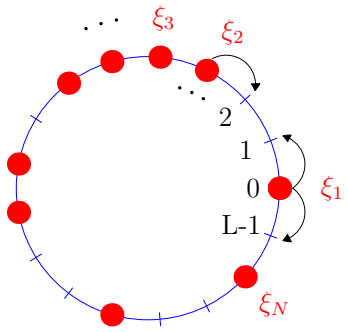

图1：构型$\xi \in \mathcal{C}_{L,\ N}$其中 $\xi_1 < \cdots < \xi_N$位于环 $\mathbb{T}_L$上，与 $\mathbb{U}_L$等同。粒子位置按逆时针排列。箭头表示可能的粒子跃迁。

2. 第3节陈述了我们关于低密度情形的主要结果（定理3.1）：MESSEP 收敛到 西戴森布朗运动（UDBM）的泛函标度极限。为方便起见，我们在下文给出一个简化版本。

定理1.1. 设 $(\Xi(t))_{t\geqslant 0}$ 为*MESSEP*的连续时间线性插值。在标准假设下，如下泛函收敛成立：

$$\left(\left\{e^{2i\pi\,\Xi_1(L^2t)/L},\cdots,e^{2i\pi\,\Xi_N(L^2t)/L}\right\}\right)_{t\geqslant 0} \xRightarrow[L\to\infty]{} \left(\left\{e^{i\boldsymbol{X}_1(t)},\cdots,e^{i\boldsymbol{X}_N(t)}\right\}\right)_{t\geqslant 0}, \tag{1.2}$$

其中 $(\boldsymbol{X}(t))_{t\geqslant 0}$ 是该随机微分方程组的解

$$\forall\, 1\leqslant i\leqslant N,\quad d\boldsymbol{X}_i(t)=\frac{2\pi}{\sqrt{N}}\,dB_i(t)+\frac{2\pi^2}{N}\sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant N\\ j\neq i}}\cot\left(\frac{\boldsymbol{X}_i(t)-\boldsymbol{X}_j(t)}{2}\right)dt. \tag{1.3}$$

事实上，这一收敛在MESSEP的适当提升（见第2节）到UDBM的层面上成立，而（1.2）由投影得到。此外，MESSEP的正交归一舒尔特征结构给出马尔可夫半群$(\boldsymbol{P}_t)_{t\geqslant 0}$（与 $(\boldsymbol{\Xi}(t))_{t\geqslant 0}$相关联）的希尔伯特–舒尔展开，其中 $(\boldsymbol{\Xi}(t))_{t\geqslant 0}$ 是（1.3）中所定义的UDBM到圆上的投影，模去粒子的置换（见命题3.1 与定理3.2）。我们还参见命题3.2，其中特征函数的舒尔表示与命题2.4中的离散情形略有不同。因此，该半群在 $\mathbb{L}^2(\boldsymbol{\mu})$ 上是无穷光滑化的，并在 $\mathbb{L}^2(\boldsymbol{\mu})$ 中指数快速收敛到其不变测度 $\boldsymbol{\mu}$（见推论3.1）。证明及完整框架推迟至第6节。

通过经典的鞅论证，并结合舒尔多项式构成对称多项式之基这一事实，我们建立了 MESSEP 及其扩展动力学的紧性。将粒子视为单位圆上多项式的根，并利用舒尔特征函数表示初等对称多项式，我们借助儒歇定理控制涨落。随后，根据 UDBM 半群的 $\mathbb{L}^2$-谱分解（该分解继承自 MESSEP 的谱分解），通过其边缘分布确定极限。因此，对于相互作用扩散过程通常需要解析处理的论证，在这里凭借舒尔特征结构便可清晰地得出。

3. 第 4 节陈述了本文的主要结果（定理 4.1），讨论缩放连续时间 MESSEP 的经验测度的渐近行为，

$$\upsilon_{L,N}(t,dx)=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\delta_{2\pi\,\Xi_k(L^2t)/L}(dx). \tag{1.4}$$

关于密度的非线性非局部守恒律。下面我们给出一个精简表述，分为两个陈述，并附上主要相关结果的简明版本。

定理1.2。 假设 $N\sim\alpha L$，其中 $\alpha\in(0、1)$，且$\upsilon_{L,\,N}(0、dx)$依概率收敛（见定义*4.1*）到 $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$上的一个密度 f_0。则对所有 $t\geqslant 0、\ \upsilon_{L,\,N}(t、dx)$在同一意义下收敛到一个密度 $f(t、x)$，该密度在后文所指定的弱意义下求解

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{1}{\alpha\sin(\pi\alpha)}\frac{\partial\left(\sin\!\left(2\pi^2\alpha\,f\right)\sinh\!\left(2\pi^2\alpha\,\mathcal{H}f\right)\right)}{\partial x}=0, \tag{1.5}$$

其中 $\mathcal{H}$ 表示圆上的空间希尔伯特变换。

我们为偏微分方程（偏微分方程）（1.5）建立正则性理论。我们参阅定理4.2以及下文的讨论。其主要特征如下：

- 奇点起源于初始剖面的极值（饱和）区域 f_0，即在f_0 消失（宏观空洞）或达到其最大值 $1/(2\pi\alpha)$（粒子拥塞，见注记4.1）之处，并且只能经由 $f(t$的极值区域传播，$x)$。
- 存在 $t^*>0$ 使得 $f(t,\ x)$ 在 $t>t^*$内远离其极值，从而在 $(t^*,\ \infty)\times\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$上得到一个解析强解。
- 对于任意初始密度剖面，解都会以指数速度收敛到常值平衡分布 $1/(2\pi)$。

值得注意的是，即使初始剖面是整解析的，也可能出现导数不连续（参见第 7.4 节）。证明依赖矩方法以及 MESSEP 核的舒尔特征结构。为了计算 $\mathfrak{m}_n(t)$，即 n 阶复矩（1.4）的渐近期望，我们使用弗罗贝尼乌斯特征标公式（4.41），该公式将幂和 p_π、舒尔多项式 s_λ 和不可约特征标 χ^λ_π 联系起来。对于 p_n，钩分拆 $(n-k,\ 1^k)$（见图 8）及其对应的特征函数$s_{\{n|k\}}$ 起着核心作用。论证依赖于对钩形分拆对应的 MESSEP 特征值进行精确的泰勒展开（引理 4.1）以及新的特征标恒等式（引理 4.2），从而得到组合公式（4.56）。

为证明依概率收敛，我们证明第 n阶矩的方差渐近趋于零。在 L次单位根处求值得到 $|p_n|^2=p_np_{L-n}$，其在舒尔特征基中的分解包含无穷多项。为克服这一困难，关键步骤是将其改写为乘积 $s_{\{n_1|k_1\}}s_{\{n_2|k_2\}}$，从而可以复用引理 4.2中的特征标恒等式。主要的额外输入是引理 4.3 中的舒尔分解，以及双钩分拆 $\{n|k、l\}$ 的特征值的泰勒展开（见引理 4.5 与图 9）。核心参考文献为 [Ste87、Koi89]。由此得到所需分解，并表明方差渐近趋于零。

矩生成函数的广义 *Burgers* 方程。矩生成函数 $g(t,\ z)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathfrak{m}_n(t)z^n$ 满足一个广义无粘 Burgers 方程，即（1.5）的弱傅里叶对应物。我们用 $\mathbb{D}$ 表示开单位圆盘，用 $g_0(z)$ 表示 $f_0(x)$的生成函数。

定理 1.3。生成函数 $g(t,z)$ 是 $[0,\infty)\times\mathbb{D}$ 上的唯一解，满足

$$\frac{\partial g(t,z)}{\partial t}+2\pi^2 z\frac{\sin(\pi\alpha(1+2g(t,z)))}{\sin(\pi\alpha)}\frac{\partial g(t,z)}{\partial z}=0. \tag{1.6}$$

形式上，偏微分方程（1.5）可由（1.6）通过如下写法得到

$$1+2g(t,e^{ix})=2\pi(f(t,x)+i\,\mathcal{H}f(t,x)). \tag{1.7}$$

这一表示通过特征线法恢复了密度 $f(t,\ x)$，阐明了其正则性，并提供了几何解释（见第 7.3节）。

基本思路如下。与（1.6）相关的特征流 Φ_t，

$$\Phi_t(w)=w\exp\left(2\pi^2 t\frac{\sin(\pi\alpha(1+2g_0(w)))}{\sin(\pi\alpha)}\right),$$

定义了一个双全纯映射，将开集 $V_t\subset\mathbb{D}$ 映到 $\mathbb{D}$，且 $(V_t)_{t\geqslant 0}$ 递减。记$w(t,\ \cdot)$为其逆映射，则由（1.7）及恒等式 $g(t,\ z)=g_0(w(t,\ z))$形式上可得

$$f(t,x)=\frac{1+\operatorname{Re}g_0(w(t,e^{ix}))}{2\pi}, \tag{1.8}$$

若满足 $w(t,\ \cdot)$ 可连续延拓至 ∂V_t。

这种扩展可由 ∂V_t 的正则性推出，这依赖于复分析中的经典结果，例如 Carathéodory–Torhorst 定理；这些结果要求 ∂V_t 是局部连通的、若尔当曲线，或足够光滑。在我们的设定中，$\partial V_t\cap\mathbb{D}$始终是解析的，这意味着 $f(t,\ x)$在相应的定义域上是解析的。此外，对于任意 $w_0=e^{ix_0}\in\partial V_t\cap\partial\mathbb{D}$，有 $f_0(x_0)=0$或 $f_0(x_0)=1/(2\pi\alpha)$当 f_0连续时。令 $x_t=\arg(\Phi_t(w_0))$，函数 $f(t,\ x_t)$取得相同的极值。$f(t,\ x)$在 x_t处的正则性因此由 ∂V_t在 w_0处的正则性决定。有关这些原理的示意，请参见图2 。

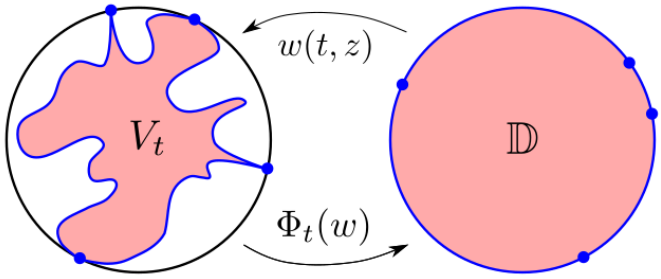

图 2：V_t 与 $\mathbb{D}$ 在共形映射 Φ_t 和 $w(t,\ \cdot)$下的对应关系。这里，由于 ∂V_t是若尔当曲线，边界点之间存在双射。因此，$f(t,\ x)$在单位圆上连续。密度有四个极值点，其中两个是奇异的，两个是光滑的。

最大填充阶跃初始剖面的情形。最后，我们分析最大填充初始构型

$$f_0(x) = \frac{1}{2\pi\alpha}\,\mathbb{1}_{[-\pi\alpha,\pi\alpha]}(x). \tag{1.9}$$

由此得到的演化呈现出显著的正则性、饱和现象和支撑性质，详见定理 4.3 ，并在图 3 中通过 $\alpha < 1/2$加以说明。由于狄拉克测度被排除，这个初始剖面起到了狄拉克质量 δ_0的作用。这个构型也暗示了它与下文将讨论的 Plancherel 型增长过程之间的联系。

在图 3中，时刻 t_* 标志着宏观拥塞的消失，而 t^* 则标志着宏观空洞的消失。对于 $\alpha > 1/2,$ ，二者的先后顺序相反；而对于 $\alpha = 1/2$ ，这两个时刻重合。在所有情形下， t^* 都是密度变为解析函数的最早时刻。奇点要么是平方根型，要么是三次型；后一种情形恰好出现在空洞或饱和区域消失的临界时刻。利用驻相法可得到精确的矩估计，而相关开集 $(V_t)_{t\geqslant 0}$ 的几何结构在第 7.5 节中有明确描述（见图 13）。

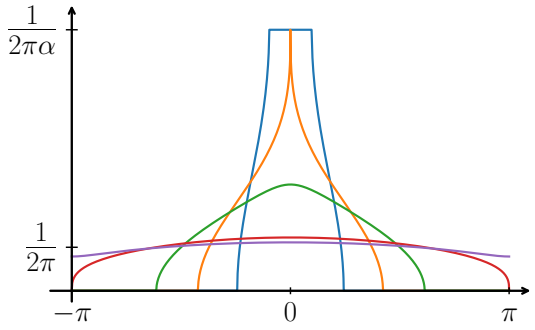

图 3： 从阶跃初始剖面 $f(t,\ x)$ 在 1.9 所示的初始条件下，且 $\alpha < 1/2$,时刻为 $t_1 < t_* < t_2 < t^* < t_3$。密度逐渐变得规则，并收敛至均匀平衡态 $1/(2\pi),$ ，而饱和平台和支撑集则不断演化。

1.2 相关结果与展望

本节暂且搁置我们的结果，通过与文献中的相关工作进行比较，将其置于更广阔的背景中加以考察。

1. 与本工作同时独立开展的研究，采用一种不同但互补的代数方法，得到了与第2节和第3 节结果密切相关的结论 [GLT23] ，这与本文所采用的概率方法和解析方法形成对比。 [GLT23] 所研究的图与 $\mathcal{C}_{L,N}$ 密切相关，但只允许正向（逆时针）跳跃。在我们的框架下，这一模型自然对应于所谓的最大熵全不对称简单排斥过程 (METASEP)。

他们利用了其图具有正乘法性这一性质，因此可以将 METASEP 核的迭代解释为交换代数中的乘积。该代数可等同于格拉斯曼流形的量子上同调，并可构造为由在N元 L次单位根处取值的舒尔函数生成。这个框架得出了广义 Berry–Esseen 估计和固定时刻边缘分布的局部极限定理。

由于 METASEP 和 MESSEP 具有相同的特征函数， [GLT23] im- 的结果意味着，经过适当中心化的固定时刻边缘分布依分布收敛到 UDBM 的相应边缘分布。我们的方法还得出了重缩放后的 METASEP 函数收敛到同一极限的结论。尽管 [GLT23]似乎可以推广到对称情形（见其例 2.5），但尚不清楚对称图$\mathcal{C}_{L,N}$是否具有正乘法性；若有，则是相对于哪个交换代数和哪组基。特别是，经典 Pieri 规则已无法直接刻画对称邻接结构。

此外，我们的工作还解决了 [GLT23第 14] 页提出的一个关于流体力学极限的问题。该论文猜想边缘分布会收敛到 FUBM，但偏微分方程（1.5）表明事实并非如此：离散化会在极限中引入额外的非线性项。不过（见下文第 **3.** 点），在参数 $\alpha \to 0$的情形下，可以恢复 FUBM 的谱分布。因此，分析 METASEP 的流体力学极限是顺理成章的。对于圆上的通常对称简单排斥过程（SSEP）以及全/弱非对称简单排斥过程（TASEP/WASEP），它们的流体力学极限有所不同：对称情形下是热扩散，非对称情形下则是 Burgers 型方程（见下文第**4.** 段）。因此，目前尚不清楚，经过适当的中心化后，METASEP 的极限密度是否满足与 MESSEP 情形相同的偏微分方程。

最后，我们指出，霍普夫代数马尔可夫链与最大熵随机游走之间的联系近期已在 [MS25] 中建立。进一步研究这一方法与 [GLT23] 的方法之间可能存在的相似之处，将会很有意思。

2. UDBM（1.3）由 Dyson [Dys62], 提出，源于对库仑气体和随机矩阵理论的研究（例如参见 [Ser19, For10]）。经过确定性时间缩放后，它描述了酉布朗运动 $(U_t)_{t\geqslant 0}$ 的特征值演化。

后者是在酉群 $U(N)$ 上的扩散过程，满足随机微分方程 $dU_t = i\,U_t \circ dH_t$，其中随机微分方程取 Stratonovich 意义；$(H_t)_{t\geqslant 0}$ 是一个各项相互独立的厄米布朗运动：对角线上是实布朗运动，对角线上方是复布朗运动。

其无穷小生成元（相差一个乘法因子）是作用在$U(N)$上的 Laplace–Beltrami 算子。 $U(N)$ 的不可约特征标，也就是在单位圆上取值的舒尔多项式，是其特征函数；其径向部分与 UDBM 的生成元一致（参见[BP14，第2节第4小节。3]）。特别地，UDBM 具有相同的对称特征函数，其特征值由（3.27）给出。

UDBM 也可以视为 Calogero–Sutherland 哈密顿量经 Doob h-变换得到的过程

$$\mathcal{H}_{\mathrm{Suth}} = -\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\partial_{x_i}^2 + \sum_{i<j}\frac{1}{4\sin^2\left(\frac{x_i-x_j}{2}\right)}, \tag{1.10}$$

通过以范德蒙特特征函数 Ψ 进行基态变换，该特征函数定义于（3.25）。经 Ψ共轭（相差一个加法常数），即可得到 UDBM 的生成元。众所周知（参见 [例如98]）， $\mathcal{H}_{\mathrm{Suth}}$ 的对称特征函数是单位圆上的舒尔多项式。结合下文（1.1）的讨论，哈密顿量（1.10）因此可解释为与 $\mathcal{C}_{L,\ N}$相关的离散情形的连续类比。

UDBM 是 N 在圆上永不相撞的条件下的布朗运动[HW96, LW16] 所描述的规律。这与命题 2.1 中对 MESSEP 的解释一致。等价地，它描述了通过库仑排斥相互作用的布朗粒子（见 [CL01]）。在我们的

设定中，这种排斥在离散 MESSEP 的标度极限中表现为熵力，其形式比 [Wan10] 中的描述更加明确。

我们方法的新颖之处在于，UDBM 源自一个简单且规范的离散模型，从而为这一扩散提供了新的微观推导。这与 [BP14第4节1], [Bor11], [GS15第 3]节中在更抽象框架下构建的早期马尔可夫近似形成了对照。自然会引出一个问题：这些构造是否具有最大熵解释。

一个自然的拓展方向是研究 $\mathbb{Z}$中的排斥动力学，涵盖对称情形和完全非对称情形。在无限图上，最大熵随机游走的定义和研究更为微妙（参见 [DO24]和 [DO25]）。在扩散标度下，我们或可望得到厄米布朗运动特征值的经典戴森布朗运动。

另一个自然的方向是引入约束势，例如二次约束势，以建立该模型与高斯酉系综之间的联系。从我们的视角来看，可以通过在最大路径熵原理中加入能量约束，以规范的方式纳入这种约束。

3. 尽管偏微分方程（1.5）并未描述 FUBM 谱分布的演化，但在 $\alpha \to 0$的情形下，它存在一种形式上的联系，从而得到

$$\partial_t f + 4\pi^3 \, \partial_x (f \, \mathcal{H} f) = 0. \tag{1.11}$$

偏微分方程（1.11）是一个形式为 $\partial_t f + \partial_x (f v) = 0$的非局部连续性方程，其速度场与 $\mathcal{H} f$成正比。在实数轴上，只需将$\mathcal{H}$ 替换为标准的希尔伯特变换，即可得到相应的方程。

在这两种几何情形下，此类偏微分方程都可解释为对数相互作用势的二阶 Wasserstein 梯度流：在实数轴上为 $\log |x-y|$，在圆上为 $\log |\sin((x-y)/2)|$。例如，参见 [AGS08，第 11] 章，以及 [CFP12,FVG16] 。等熵欧拉系统与最优传输之间的联系见 [GW09,Aba06,Gui04,BBMP14,BKM10]。从随机矩阵的角度看，诸如（1.11）这样的方程是戴森型系统的大-N 流体力学极限：关于近期进展（包括圆形情形），参见 [DKM24, AK16, GLBM23, BDLL22, BLL24, BP25] 。我们简要回顾这两种情形下相应的复伯格斯方程，以阐明其与我们工作的联系。

在实数轴上。 ρ_t 是从 0 出发的厄米布朗运动 $(H_t)_{t \geqslant 0}$ 的经验特征值分布在大-N 极限下的极限，也就是自由加性布朗运动的分布。其 Stieltjes 变换 $G(t, \ z)$ 满足无黏复伯格斯方程

$$\partial_t G(t,z) + G(t,z) \, \partial_z G(t,z) = 0, \tag{1.12}$$

从而得到半圆定律

$$\rho(t,x) = \frac{1}{2\pi t} \sqrt{4t - x^2}. \tag{1.13}$$

相同的 Burgers 结构支配着矩阵积分的渐近行为，例如 HCIZ 积分（参见 [Mat94，Men17]），并且与组合学和表示论的发展密切相关（参见 [Col03，GM05，GGPN14，Nov20]）。

在单位圆上。令 ν_t 为从 I_n出发的酉布朗运动 $(U_t)_{t \geqslant 0}$ 的经验特征值分布的大-N 极限，即自由酉布朗运动的谱测度。于是有 $\nu_0 = \delta_1$，或者等价地， δ_0 在 $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$上。其 Herglotz 变换 $H(t, \ z)$ （参见

注 7.3）可通过其非切向边界值确定密度。Biane 的自由概率论论证 [Bia97a、Bia97b] 表明 H 满足 Burgers 型方程

$$\partial_t H(t,z) + \frac{z}{2} H(t,z)\,\partial_z H(t,z) = 0,$$

（1.12）的乘法类比。密度的支撑位于一段圆弧上，其张角随时间增大，最终覆盖整个圆。边界值 $H(t,\ e^{ix})$ 是下列具有正实部的唯一解

$$\frac{H(t,e^{ix})-1}{H(t,e^{ix})+1}\, e^{\frac{t}{2}H(t,e^{ix})} = e^{ix}, \tag{1.14}$$

且 $\nu(t,\ x) =$ 实部 $H(t,\ e^{ix})$。另见 [Ham18，定理 2。3] 以及 [DH12]。

因此，无论是在加法（实轴）还是乘法（单位圆）情形下，大N 谱演化都由满足无黏复 Burgers 方程的解析变换（斯蒂尔切斯变换或赫格洛茨变换）的边界值所支配。我们的方法遵循相同思路：非线性输运方程（1.5）是 Burgers 型方程（1.6）在实变量上的类比，而该方程由解析变换 $g(t,\ z)$满足；此外，它还像（1.14）那样，通过边界特征线对动力学作出隐式描述。这种表述让人联想到单位圆盘中共形映射的 Loewner–Kufarev 理论。在这里，解析映射 $w(t,\ z)$ 发挥着类似的作用，并支配定义域 V_t （见注 7.4）。

特别地，图 3 中的最大填充构型与（1.11）中的 Dirac 初始条件相呼应：移动支撑出现，其边由（1.6）的特征线决定，并且边界处形成平方根型奇点，正如半圆定律（1.13）及其圆形对应物所示。

请注意，极限流体动力学取决于取极限的顺序。先令格点数趋于无穷，再令粒子数趋于无穷，得到（1.11）；而联合取极限则得到（1.5），其中密度参数 α 仍然存在，并产生额外的非线性项。令 $\alpha \to 0$ 在（1.5）中取值，从形式上看便可连接这两种机制（经典 Dyson 气体与自由酉流体动力学），同时保留真正新颖的非线性效应（见图 4）。

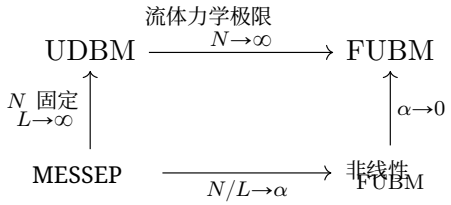

图 4： MESSEP、UDBM 与 FUBM 之间的联系

自然会有人想知道，在实数轴上是否也存在类似的桥梁。借鉴 Biane 思路的自由概率解释或许也会有所助益。

4. 我们需要将我们的极限偏微分方程（1.5）与简单对称排斥过程（SSEP）的极限偏微分方程进行比较，其中所有允许的跳跃都是等可能的。我们参考经典专著 [KL99] 以及较新的进展 [BDL$^+$20、FS16、FGcN13]。大多数文献关注连续时间版本，其中每个粒子都配备一个独立的指数时钟，当时钟响起时，若允许，它会尝试均匀地跳向其相邻位点之一。

设 $(\eta_t)_{t\geqslant 0}$ 表示状态空间为 $\{0$ 的连续时间马尔可夫过程，$1\}^{\mathbb{T}_L}$，其中 $\eta_t(x)=1$当且仅当位点 x 在时刻 t被占据，并设 $\pi_{L,\,N}(t,\ dx)$ 为经验测度。在定理 1.2 的假设下，众所周知，$\pi_{L,\,N}(L^2t,\ dx)$ 收敛到密度 $\rho_c(t,\ x)$，该密度求解圆上的热方程。然而，为了与 MESSEP 进行完整比较，我们需要启发式地推导离散时间SSEP的相应偏微分方程。

为此，注　　意到，时刻 t 的有效跳跃瞬时速率与

$$R(\eta_t)=\sum_{x\in\mathbb{T}_L}\mathbb{1}_{\{\eta_t(x)\neq\eta_t(x+1)\}}.$$

此外，在局部平衡条件下，有

$$\mathbb{P}(\eta_{L^2t}(x)\neq\eta_{L^2t}(x+1))\simeq 2\,\rho_c\left(t,\frac{2\pi x}{L}\right)\left(1-\rho_c\left(t,\frac{2\pi x}{L}\right)\right).$$

因此，若 A_t 表示截至时刻 t的有效跳跃总数，则可写为

$$\mathbb{E}[A_{L^2t}]\simeq 2L^2\int_0^t\sum_{x\in\mathbb{T}_L}\rho_c\left(s,\frac{2\pi x}{L}\right)\left(1-\rho_c\left(s,\frac{2\pi x}{L}\right)\right)ds\simeq\frac{L^3}{\pi}\int_0^t\int_0^{2\pi}\rho_c(s,x)(1-\rho_c(s,x))\,dx\,ds.$$

考虑与有效跳跃相关联的嵌入离散时间马尔可夫链 $(\xi_n)_{n\geqslant 0}$，经时间变换可知，$(\xi_{L^3t})_{t\geqslant 0}$ 的密度分布收敛到 $\rho_d(t,\ x)$ 其满足

$$\partial_t\rho_d(t,x)=\frac{\sigma_\alpha}{\int_0^{2\pi}\rho_d(t,x)(1-\rho_d(t,x))\,dx}\partial_{xx}\rho_d(t,x),$$

其中常数 $\sigma_\alpha>0$ 取决于 α。因此，在离散时间SSEP中，收敛到平衡的速度（阶为 L^3）比在 MESSEP 中（阶为 L^2）更慢。此外，因子 $\rho(1-\rho)$在 TASEP 情形中起非线性通量的作用，其极限偏微分方程为输运型。

5. 最后，饱和区域与宏观空隙之间界面处的 MESSEP 动力学可通过 Plancherel增长过程来描述（例如参见 [Ker96]），这与其在 [DO25]. 中的最大熵解释一致。

更具体地说，假设只有有限多个 N 初始时紧密排列的粒子发生位移，且位移量与 N相比可以忽略。令 n^+（分别为 n^-）表示沿单位圆正向（分别为反向）移动的粒子数。它们的位置记为 x_1、……、x_{n^+}（右侧）和 y_1、……、y_{n^-}（左侧），按相对于饱和区域由远及近排列（见图5）。移动边界的端点记为 ℓ^+ 和 ℓ^-。

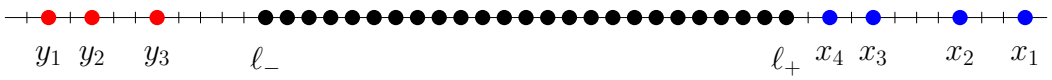

图 5：饱和区域与宏观空隙之间的界面。

结合 Perron–Frobenius特征函数的显式乘积形式（2.12）与流体力学极限下的特征值渐近行为（5.8可得，k号粒子向右跳跃 $+1$ 的概率渐近为

$$\lim_{L,N\to\infty}\mathbb{P}\big(x_k\to x_k+1\big)=\frac{1}{2}\frac{\prod_{i\neq k}|x_k+1-x_i|}{\prod_{i\neq k}|x_k-x_i|}\frac{1}{|x_k-\ell_+|}.\tag{1.15}$$

根据对称性，向左跳跃 -1大小时也有类似公式； ℓ^+ 和 ℓ^- 处的边界情形也以类似方式处理。相反，向右跳跃 -1 大小和向左跳跃 $+1$ 大小的概率渐近为零。

事实证明，除去因子 $1/2$, 之外，转移概率（1.15）与 TASEP–Plancherel 增长过程的转移概率相吻合。这表明，Young 图的经典 Plancherel 极限形状（见 [RS15，第 699] 页）与图 3中的极限密度分布有关联。

2 模型与预备结果

本节介绍环上的 MESSEP 及其变体，概述其基本性质，并给出完整的谱分解。大部分证明见第 5 节。

2.1 环上的 MESSEP

2.1.1 图结构

令 N, L 为满足 $1 \leqslant N \leqslant L-1$ 的整数，并令 $\mathbb{T}_L := \{0, \ldots\ldots, L-1\}$。我们将 $\mathbb{T}_L$ 视为一个离散环，将其等同于 $\mathbb{Z}_L \equiv \mathbb{Z}/L\mathbb{Z}$；或者在方便时，将其等同于 $\mathbb{U}_L$ （L 次单位根的集合）。参数 N 表示环上不可区分粒子的数量，并遵循排斥规则（每个位置至多有一个粒子）。

我们为 $\mathbb{T}_L$ 赋予离散环的自然图结构，其边为 $\{k、\ k \pm 1\}$（其中 $k \in \mathbb{T}_L$，且 $-1 \equiv L-1$ 和 $L \equiv 0$），并将该图与其顶点集等同。构型是基数为 N的子集 $\xi = \{\xi_1、\ldots\ldots、\xi_N\} \subset \mathbb{T}_L$，以按序排列的粒子位置表示。记所有构型组成的集合为 $\mathcal{C}_{L,\ N}$，我们将

$$\mathcal{C}_{L,N} = \mathcal{P}_N(\mathbb{T}_L) \simeq \left\{\xi \in \mathbb{T}_L^N : \xi_1 < \cdots < \xi_N\right\}. \tag{2.1}$$

每个粒子都可以跳到最近的空位，每一步只有一个粒子移动。这在 $\mathcal{C}_{L,\ N}$上定义了一个无向图结构：当且仅当存在$1 \leqslant k \leqslant N$ 和 $\epsilon \in \{\pm 1\}$ 使得 ξ 与 η 相连

$$(\eta_1, \cdots, \eta_N) = (\xi_1, \cdots, \xi_{k-1}, \xi_k + \epsilon, \xi_{k+1}, \cdots, \xi_N) \quad (\text{abbreviated as } \eta \sim \xi). \tag{2.2}$$

为体现周期性，我们令

$$(-1, \xi_2, \cdots, \xi_N) \equiv (\xi_2, \cdots, \xi_N, L-1) \quad \text{and} \quad (\xi_1, \cdots, \xi_{N-1}, L) \equiv (0, \xi_1, \cdots, \xi_{N-1}). \tag{2.3}$$

图 1 给出了示意图。图 $\mathcal{C}_{L,\ N}$ 是连通的。令 A 为其对称邻接矩阵， ρ 为其谱半径， ψ 为相应的正特征函数（定义到正的乘法常数为止）。

2.1.2 最大熵随机游走

定义 2.1. 环上的最大熵简单对称排斥过程（*MESSEP*）是 $\mathcal{C}_{L,N}$ 上唯一的最大熵随机游走。记作 $(\Xi(n))_{n\geqslant 0}$。

其马尔可夫核 P 和可逆不变测度 μ 对所有 $\xi,\eta\in\mathcal{C}_{L,N}$ 均由下式给出：

$$P(\xi,\eta)=A(\xi,\eta)\frac{\psi(\eta)}{\rho\,\psi(\xi)}\quad\text{and}\quad\mu(\xi)=\frac{\psi(\xi)^2}{Z},\tag{2.4}$$

其中， Z 为归一化常数。

通过逐分量应用映射 $x\mapsto e^{2i\pi x/L}$ ，该过程也可等价地视为取值于 $\mathcal{C}^{\#}_{L,N}=\mathcal{P}_N(\mathbb{U}_L)\subset\mathcal{P}_N(\mathbb{U})$，其中 $\mathbb{U}$ 为单位圆。因此，定义在 $\mathcal{C}_{L,N}$ 上的函数、测度、核及相关对象，均与定义在 $\mathcal{C}^{\#}_{L,N}$ 上的相应对象相对应。

2.1.3 扩展动力学

$(\Xi(n))_{n\geqslant0}$ 的动力学可以通过提升来保留关于各个粒子的路径信息。记 $\dot{x}$ 为 $x\in\mathbb{Z}$ 模 L 的等价类，我们定义

$$\mathcal{W}_{\mathbb{Z},L,N}:=\left\{x\in\mathbb{Z}^N:x_1<\cdots<x_N<x_1+L\right\}\quad\text{and}$$
$$\mathcal{W}_{L,N}:=\left\{\theta\in\mathbb{Z}_L^N:\exists\,x\in\mathcal{W}_{\mathbb{Z},L,N},\,\theta_1=\dot{x}_1,\cdots,\theta_N=\dot{x}_N\right\}.\tag{2.5}$$

与前文相同，我们将 $\mathcal{W}_{L,N}$ 与

$$\mathcal{W}^{\#}_{L,N}=\left\{\theta\in\mathbb{U}_L^N:\exists\,x\in\mathcal{W}_{\mathbb{Z},L,N},\,\theta_1=e^{2i\pi x_1/L},\cdots,\theta_N=e^{2i\pi x_N/L}\right\}.\tag{2.6}$$

所有这些状态空间都具有类似于 $\mathcal{C}_{L,N}$ 的图结构：在允许的情况下，可以对某个坐标加上 ±1（或在 $\pm2\pi/L$ 嵌入中旋转 $\mathbb{U}$）。邻接关系仍记为 $\sim$，并按（2.2）中的方式书写。请注意，在此设定下，不再需要边界识别（2.3）。

此外，存在一个典范满射 $p_1:\mathcal{W}_{\mathbb{Z},\,L,\,N}\twoheadrightarrow\mathcal{W}_{L,\,N}$，它由从 $\mathbb{Z}$ 到 $\mathbb{Z}_L$ 的投影诱导。类似地，令 p_2 为典范投影 $\mathbb{Z}_L\twoheadrightarrow\mathbb{T}_L$，同样逐分量扩展。令 $G=\langle\tau\rangle$ 为由 $\tau=(1\ 2\cdots N)$ 生成的 $\mathfrak{S}_N$ 的循环子群，并以 $\sigma\cdot\theta$ 表示 $\sigma\in\mathfrak{S}_N$ 在 θ 上的自然作用。那么，对于所有 $\theta\in\mathcal{W}_{L,\,N}$，存在唯一的 $\sigma\in G$ 使得 $p_2(\sigma\cdot\theta)\in\mathcal{C}_{L,\,N}$。这定义了一个典范满射 $\mathcal{W}_{L,\,N}\twoheadrightarrow\mathcal{C}_{L,\,N}$，仍记作 p_2。

总而言之，有

$$\mathcal{W}_{\mathbb{Z},L,N}\overset{p_1}{\twoheadrightarrow}\mathcal{W}_{L,N}\simeq\mathcal{W}^{\#}_{L,N}\overset{p_2}{\twoheadrightarrow}\mathcal{C}_{L,N}\simeq\mathcal{C}^{\#}_{L,N},\tag{2.7}$$

这对应于 图上粒子的不同信息层级：

– $\mathcal{W}_{L,\,N}\simeq\mathcal{W}^{\#}_{L\,,\,N}$ 记录任意时刻每个粒子在环上的位置。与 $\mathcal{C}_{L,\,N}\simeq\mathcal{C}^{\#}_{L\,,\,N}$ 不同，粒子不再是不可区分的，而是带有标记。– $\mathcal{W}_{\mathbb{Z},\,L,\,N}$ 还额外记录每个粒子的 $+1$ 和 -1 移动次数之差。特别地，可以恢复绕数（见注释 6.3）。

注 2.1. 给定一条路径 $(\xi(n))_{n\geqslant0}$，属于 $\mathcal{C}_{L,N}$，$k\in\{1,\cdots,N\}$，$z\in\mathbb{Z}_L$，且满足 $p_2(z)=\xi_k(0)$，则存在这条路径在 $\mathcal{W}_{L,N}$ 中的唯一提升，记为 $(\theta(n))_{n\geqslant0}$，使得 $\theta_k(0)=z$。类似地，给定一条路径 $(\theta(n))_{n\geqslant0}$，属于 $\mathcal{W}_{L,N}$，$k\in\{1,\cdots,N\}$，$y\in\mathbb{Z}$，且满足 $p_1(y)=\theta_k(0)$，则存在这条路径在 $\mathcal{W}_{\mathbb{Z},L,N}$ 中的唯一提升，记为 $(x(n))_{n\geqslant0}$，使得 $x_k(0)=y$。

根据注 2.1，通过在时刻零给一个粒子（例如第 k 个粒子）加上标记，$\mathcal{C}_{L,N}$ 上的任意随机过程都可以唯一提升到 $\mathcal{W}_{L,N}$ 和 $\mathcal{W}_{\mathbb{Z},L,N}$ 上。如果原过程是马尔可夫的，那么它的这些提升也都是马尔可夫的。这引出了下面的定义。

定义 2.2. 我们将 *MESSEP* $(\Xi(n))_{n\geqslant 0}$ 在 $\mathcal{C}_{L,N}$上的随机游走对应过程记为 $(\Theta(n))_{n\geqslant 0}$ 和 $(X(n))_{n\geqslant 0}$，分别定义在 $\mathcal{W}_{L,N}$以及 $\mathcal{W}_{\mathbb{Z},L,N}$ 上。所有这些过程都称为 *MESSEP*。

$(\Theta(n))_{n\geqslant 0}$ 和 $(X(n))_{n\geqslant 0}$ 的转移核与不变测度可直接由 $(\Xi(n))_{n\geqslant 0}$的转移核与不变测度得到。特别地，当 $\theta\sim\phi$ 属于 $\mathcal{W}_{L,N}$ 且 $x\sim y$ 属于 $\mathcal{W}_{\mathbb{Z},L,N}$时，

$$\mathbb{P}(X(n+1)=y\mid X(n)=x)=\frac{\psi_1(y)}{\rho\,\psi_1(x)},\quad \mathbb{P}(\Theta(n+1)=\theta\mid\Theta(n)=\phi)=\frac{\psi_2(\theta)}{\rho\,\psi_2(\phi)},$$

其中 ψ_1 和 ψ_2 是 ψ 相应的提升，可定义为

- $\psi_2(\theta)=\psi(\tau^l\cdot\eta)$，其中 η是 $\mathbb{T}_L$中的 N元组，满足 $\theta_k=\dot{\eta}_k$, $1\leqslant k\leqslant N$，而 l是 $\{1,\cdots,N-1\}$中的唯一整数，满足 $(\eta_1,\cdots,\eta_{\tau^l(N)})\in\mathcal{C}_{L,N}$。
- $\psi_1(x)=\psi_2(\theta)$，其中$\theta_k=\dot{x}_k$、 $1\leqslant k\leqslant N$。

更一般地，任意函数 φ 定义在$\mathcal{C}_{L上的N}$，都可以通过投影（$\mathcal{W}_{L、N}$ 和$\mathcal{W}_{\mathbb{Z}、L、N}$ 2.7）提升到；测度和核也同样如此。为方便起见，只要不会引起混淆，我们通常使用相同的符号。同样，我们将定义在整数元组上的 L周期函数、定义在 $\mathbb{Z}_L^N$上的函数，以及定义在 $\mathbb{U}_L^N$上的函数视为等同，例如写作

$$\psi(\eta_1,\cdots,\eta_N)\equiv\psi(\dot{\eta}_1,\cdots,\dot{\eta}_N)\equiv\psi\left(e^{2i\pi\eta_1/L},\cdots,e^{2i\pi\eta_N/L}\right). \tag{2.8}$$

注 2.2。在 $(\Theta(n))_{n\geqslant 0}$ 和 $(X(n))_{n\geqslant 0}$ 上，$\mathcal{W}_{L、N}$ 和$\mathcal{W}_{\mathbb{Z}、L、N}$分别存在唯一的最大熵随机游走。前一种情形显而易见。对于$\mathcal{W}_{\mathbb{Z}、L、N}$（它是无限的），唯一性源于该图是 R-常返的这一事实。我们将 *[VJ67]* 与 *[DO24]* 的结果一并参阅。

2.1.4 无碰撞随机游走

下一个结果表明，环上的最大熵随机游走与以非碰撞为条件的简单随机游走一致。我们赋予 $\mathbb{Z}_L^N$ 其最近邻凯莱图结构。

命题 2.1. 设 $(Y(n))_{n\geqslant 0}$ 是 $\mathbb{Z}_L^N$ 上的简单随机游走，且 $y\in\mathbb{Z}_L^N$ 的坐标两两不同。设 $\sigma\in\mathfrak{S}_N$ 满足 $\sigma\cdot y\in\mathcal{W}_{L,\ N}$，并令

$$T:=\inf\left\{n\geqslant 0:\exists\,1\leqslant i\neq j\leqslant N,\ Y_i(n)=Y_j(n)\right\}.$$

Then

$$\lim_{m\to\infty}\mathbb{P}_{\sigma\cdot y}(\sigma\cdot Y\in d\omega\mid T>m)=\mathbb{P}_{\sigma\cdot y}(\Theta\in d\omega).$$

2.2 完整谱分解与谱隙估计

2.2.1 图谱

记 $\Sigma_{L,N}$ 为 $\mathcal{C}_{L,N}$ 的谱，并记 $\mathcal{F}_{L,N}$ 为 $\ell^2(\mathcal{C}_{L,N})$ 中关于通常内积的一组正交归一特征函数。下文将明确描述这两者。令

$$\boldsymbol{\gamma}=\begin{cases}0, & \text{if } N \text{ is odd},\\ \frac{1}{2}, & \text{if } N \text{ is even},\end{cases} \tag{2.9}$$

并且，对于 $\xi \in \mathcal{C}_{L,N}$ 以及任意实数 N 元组 η，定义

$$\psi_\xi(\eta) = \frac{1}{L^{N/2}} \det\left(e^{\frac{2i\pi(\xi_k+\gamma)\eta_j}{L}}\right)_{1\leqslant k,j\leqslant N} \quad \text{and} \quad \rho_\xi = 2\sum_{i=1}^{N} \cos\left(\frac{2\pi(\xi_i+\gamma)}{L}\right). \tag{2.10}$$

我们将下文定义的构型 $c \in \mathcal{C}_{L,\ N}$ 称为紧致构型:

$$(c_i)_{1\leqslant i\leqslant N} = \begin{cases} (0,1,\cdots,p,L-p,\cdots,L-1), & \text{if } N=2p+1, \\ (0,1,\cdots,p-1,L-p,\cdots,L-1), & \text{if } N=2p, \end{cases} \tag{2.11}$$

注 2.3。 构型 $\boldsymbol{c}=(-p,\ \cdots,\ -p+N-1)$ 是 c 在 $\mathcal{W}_{L,\ N}$ 中的一个提升。若 N 为偶数， $\boldsymbol{c}$ 便不关于零对称，这与平移后的构型 $\boldsymbol{c}+\boldsymbol{\gamma}=(\boldsymbol{c}_i+\boldsymbol{\gamma})_{1\leqslant i\leqslant N}$ 相反。我们将 $c+\boldsymbol{\gamma}=(c_i+\boldsymbol{\gamma})_{1\leqslant i\leqslant N}$ 称为对称紧致构型（见图 7）。

命题 2.2。 *Perron–Frobenius* 特征函数 ψ 等于 ψ_c （相差一个模为 *1* 的常数因子），其特征值为 $\rho=\rho_c$。更确切地说，有

$$\psi(\eta) = \frac{2^{\frac{N(N-1)}{2}}}{L^{N/2}} \prod_{1\leqslant i<j\leqslant N} \sin\left(\frac{(\eta_j-\eta_i)\pi}{L}\right) \quad \textit{and} \quad \rho = \frac{2\sin\left(\frac{N\pi}{L}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{L}\right)}. \tag{2.12}$$

此外，映射 $\xi \longmapsto (\eta \in \mathcal{C}_{L,\ N} \mapsto \psi_\xi(\eta))$ 是从 $\mathcal{C}_{L,\ N}$ 到 $\mathcal{F}_{L,\ N}$ 的双射，且对任意 $\xi \in \mathcal{C}_{L,\ N}$，与 ψ_ξ 相关联的特征值为 ρ_ξ。特别地，有 $\Sigma_{L,\ N}=\{\rho_\xi:\ \xi \in \mathcal{C}_{L,\ N}\}$。

注 2.4。 可以验证，*MESSEP* 的不变概率分布是一个行列式点过程，其在 $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ 上的再生核为

$$K(x,y) = \frac{1}{L}\frac{\sin\left(\frac{\pi N(y-x)}{L}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(y-x)}{L}\right)}.$$

这是离散狄利克雷核。在 $L, N \to \infty$ 且 $N/L \to \alpha,$ 的情形下，它收敛到经典正弦核，从而得到正弦过程。

2.2.2 MESSEP谱

令 P^* 为 $\ell^2(\mathcal{C}_{L,\ N})$的伴随，其中 P，并令 m 为定义在 $\mathcal{C}_L$ 上的计数测度，N。于是，由命题 2.2可轻易推出

$$\mathcal{S}_{L,N} := \left\{\frac{\psi_\xi}{\psi_c} : \xi \in \mathcal{C}_{L,N}\right\} \quad \text{and} \quad \mathcal{S}^*_{L,N} := \left\{\overline{\psi_\xi}\,\psi_c : \xi \in \mathcal{C}_{L,N}\right\}, \tag{2.13}$$

分别构成 P和 P^* 在$\ell^2(\mathcal{C}_{L、\ N}、\ \psi^2\,dm)$ 以及$\ell^2(\mathcal{C}_{L、\ N}、\ \psi^{-2}\,dm)$上的正交归一特征基。因此，MESSEP谱为

$$\Sigma^{\mathrm{ME}}_{L,N} := \left\{\frac{\rho_\xi}{\rho_c} : \xi \in \mathcal{C}_{L,N}\right\}. \tag{2.14}$$

因此，对于 $\mathcal{C}_{L,N}$, $\eta \in \mathcal{C}_{L,N}$ 和 $n \geqslant 0$上的任意函数 f，可以写成

$$P^n f(\eta) = \sum_{\xi\in\mathcal{C}_{L,N}} \left(\frac{\rho_\xi}{\rho_c}\right)^n \left(\sum_{\zeta\in\mathcal{C}_{L,N}} f(\zeta)\psi_c(\zeta)\overline{\psi_\xi(\zeta)}\right)\frac{\psi_\xi(\eta)}{\psi_c(\eta)}. \tag{2.15}$$

命题 2.3. 设 $\lambda_{L,N}$ 是 P的模最大的第二个特征值。那么，谱隙 $1-\lambda_{L,N}$ 满足以下渐近行为（当 $L \longrightarrow \infty$时）：

1. 假设 $N/L \longrightarrow 0$ （低密度极限）。那么，存在一个正常数 C，它与 L 和 N 无关，使得

$$\left|1-\lambda_{L,N}-\frac{2\pi^2}{L^2}\right| \leqslant C\left(\frac{N}{L}\right)^2 \frac{1}{L^2}. \tag{2.16}$$

2. 假设 $N/L \longrightarrow \alpha$ （流体力学极限），且 α 属于紧集 $K \subset (0,\ 1)$。那么，存在一个正常数 C_K，它与 L、N、α 无关，使得

$$\left|1-\lambda_{L,N}-\frac{2\pi^2}{L^2}\right| \leqslant \frac{C_K}{L^3}. \tag{2.17}$$

2.2.3 舒尔多项式特征函数

特征函数$\mathcal{S}_{L,\ N}$ 与谱 $\Sigma^{\mathrm{ME}}_{L,\ N}$ 在（2.14）中给出的 MESSEP 的特征函数，恰好是 N 个变量的舒尔多项式，并限制在 $\mathbb{U}_L$ 上。我们简要回顾其主要性质，更多细节请参见 [Sta99，Ful97] 。

设 $\lambda = (\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_N)$ 是一个整数分拆，也就是说，它们是满足 $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_N \geqslant 0$ 的整数，并令

$$Q_{\lambda+\delta}(X_1,\cdots,X_N) = \det\begin{pmatrix} X_1^{\lambda_1+N-1} & X_2^{\lambda_1+N-1} & \cdots & X_N^{\lambda_1+N-1} \\ X_1^{\lambda_2+N-2} & X_2^{\lambda_2+N-2} & \cdots & X_N^{\lambda_2+N-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_1^{\lambda_N} & X_2^{\lambda_N} & \cdots & X_N^{\lambda_N} \end{pmatrix}, \tag{2.18}$$

其中 $\delta = (N-1,\ \cdots,\ 0)$。由于 $Q_{\lambda+\delta}(X_1,\ \cdots,\ X_N) = 0$只要 $X_i = X_j$对于某个 $i \neq j$成立，范德蒙德行列式 $Q_\delta(X_1,\ \cdots,\ X_N)$（对应于 $\lambda = 0$）就整除 $Q_{\lambda+\delta}$。

与 λ 相关联的 N 个变量的舒尔多项式定义为

$$s_\lambda(X_1,\cdots,X_N) = \frac{Q_{\lambda+\delta}(X_1,\cdots,X_N)}{Q_\delta(X_1,\cdots,X_N)}. \tag{2.19}$$

它有如下组合表达式：

$$s_\lambda(X_1,\cdots,X_N) = \sum_T X_1^{t_1}\cdots X_N^{t_N}, \tag{2.20}$$

其中，求和遍历所有形状为 λ 的半标准杨表，且 t_i 表示 i 在 T 中出现的次数（见图6）。

注 2.5。 舒尔多项式 s_λ 可视为一个关于无穷多个变量的多项式，使得 $s_\lambda(X_1、\ \cdots、\ X_N) = s_\lambda(X_1、\ \cdots、\ X_N、0、\ \cdots)$，并且 $s_\lambda(X_1、\ \cdots、\ X_N) = 0$，若 $\lambda_{N+1} \neq 0$。

舒尔多项式构成对称多项式空间的一个线性基。当限制于 $\mathbb{U}_L^N$ 时，它们典范地定义 $\mathcal{W}_{\mathbb{Z}、\ L、\ N}$、 $\mathcal{W}_{L、\ N} \simeq \mathcal{W}_{L、\ N}^{\#}$ 以及 $\mathcal{C}_{L、\ N}$ 上的函数（见注记 2.2 之前的讨论）。与（2.8）类似，对于任意 $k_1、\ \cdots、\ k_N \in \mathbb{Z}$，我们记

$$s_\lambda(k_1,\cdots,k_N) \equiv s_\lambda(\dot{k}_1,\cdots,\dot{k}_N) \equiv s_\lambda\left(e^{2\pi i k_1/L},\cdots,e^{2\pi i k_N/L}\right),$$

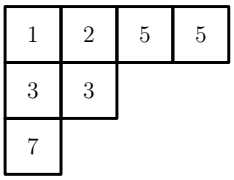

图 6：与单项式 $X_1X_2X_3^2X_5^2X_7$ 对应的形状为 $\lambda=(4,\ 2,\ 1)$ 的半标准杨表 T，即行弱递增、列严格递增。

命题 2.4. 舒尔多项式子集 $\{s_\lambda:\ L-N\geqslant\lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_N\geqslant 0\}$（$N$ 个变量），限制于集合 $\mathbb{U}_L$，即 L 次单位根的集合，构成一个 $\ell^2(\mathcal{C}_L^{\ N},\ \psi^2\,dm)$- 正交归一特征基，亦即（2.4）中给出的 *MESSEP* 核的特征基。

注 2.6。关于分拆 λ 与构型 ξ之间的一一对应，以及由此得到的 s_λ 与 ψ_ξ之间的对应关系，请参见第*2.4* 节第*5*节中的证明，尤其是注*5.2*）和图*7*。

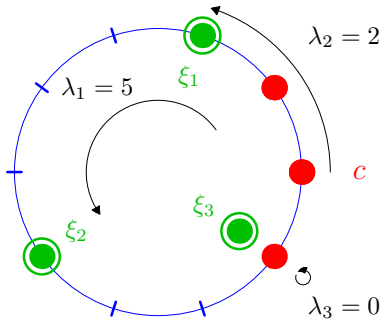

图 7：分拆 $\lambda=(5,\ 2,\ 0)$ 与构型 $\xi=(2,\ 6,\ 9)$ 之间的对应关系，其中 $N=3$ 和 $L=10$。

3 低密度极限：主要结果

本节讨论低密度情形。我们陈述 MESSEP 收敛到 UDBM 及其显式谱分解的结果，证明详见第6节。

3.1 标度极限

极限过程 $(\boldsymbol{X}(t))_{t\geqslant 0}$ 在下文定理1.1 与定理3.1 中，即 UDBM，于第6.1节被严格引入，连同其变体 $(\boldsymbol{\Theta}(t))_{t\geqslant 0}$ 与 $(\boldsymbol{\Xi}(t))_{t\geqslant 0}$。

定理 3.1. 设 $(X(n))_{n\geqslant 0}$ 是定义在 $\mathcal{W}_{\mathbb{Z},L,N}$ 上的 *MESSEP*。记 $(X(t))_{t\geqslant 0}$ 为该过程的连续线性插值，并假设 $X(0)=x$ 依赖于 L，且满足

$$\frac{2\pi x}{L}\xrightarrow[L\to\infty]{}\boldsymbol{x},\tag{3.21}$$

对于某些 $\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}_1、\cdots、\boldsymbol{x}_N)$，使得 $\boldsymbol{x}_1\leqslant\cdots\leqslant\boldsymbol{x}_N\leqslant\boldsymbol{x}_1+2\pi$。那么，在连续函数空间 $C(\mathbb{R}_+、\mathbb{R}^N)$ 中，以下分布收敛成立：

$$\left(\frac{2\pi X(L^2t)}{L}\right)_{t\geqslant0}\xRightarrow[L\to\infty](\boldsymbol{X}(t))_{t\geqslant0},\tag{3.22}$$

其中 $(\boldsymbol{X}(t))_{t\geqslant0}$ 是 *UDBM*，初始于 $\boldsymbol{x}$，满足随机微分方程 (6.11)和(6.12)，其取值属于

$$\overline{\boldsymbol{\mathcal{W}}}_{\mathbb{R},2\pi,N}:=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^N:\boldsymbol{x}_1\leqslant\cdots\leqslant\boldsymbol{x}_N\leqslant\boldsymbol{x}_1+2\pi\right\}.\tag{3.23}$$

定理 3.1 对 $(\Theta(n))_{n\geqslant0}$（分别对 $(\Xi(n))_{n\geqslant0}$），视为取值于 $\mathbb{U}\subset\mathbb{C}$、状态空间为 $\mathcal{W}_L^{\#}$ 的过程，N（分别对 $\mathcal{C}_L^{\#}$，N），以及它们的标度极限 $(\boldsymbol{\Theta}(t))_{t\geqslant0}$（分别对 $(\boldsymbol{\Xi}(t))_{t\geqslant0}$），均有类似的结论。参见定义 2.2和 6.1，以及推论 6.1。泛函极限为

$$\left(\Theta(L^2t)\right)_{t\geqslant0}\xRightarrow[L\to\infty](\boldsymbol{\Theta}(t))_{t\geqslant0}\quad\left(\text{resp.}\quad\left(\Xi(L^2t)\right)_{t\geqslant0}\xRightarrow[L\to\infty](\boldsymbol{\Xi}(t))_{t\geqslant0}\right).\tag{3.24}$$

注意，因缩放已包含在相应的状态空间中，因子 $1/L$ 没有出现在 (3.24) 中，这与 (3.22) 不同。离散状态空间见 (2.5) 和 (2.6)，连续类比见 (6.13) 和 (6.14)，即 $\boldsymbol{\mathcal{W}}_{2\pi、N}$ 和 $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{2\pi、N}$，以及它们的 #-对应版本。它们的紧化记为 $\boldsymbol{\mathcal{W}}_{2\pi、N}$ 和 $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{2\pi、N}$。与 (3.23) 一样，边界对应于粒子发生碰撞的构型。

虽然粒子在时刻 0可能重合，但对于 $t>0$，这种情况几乎必然不会发生（见命题 6.1 及定义 6.1 之后的讨论）。粗略地说，$(\boldsymbol{\Xi}(t))_{t\geqslant0}$ 描述的是不可区分粒子；对于 $t>0$，可以写成

$$\boldsymbol{\Xi}(t)=\{\boldsymbol{\Theta}_1(t),\cdots,\boldsymbol{\Theta}_N(t)\}=\left\{e^{i\boldsymbol{X}_1(t)},\cdots,e^{i\boldsymbol{X}_N(t)}\right\}.$$

3.2 完整谱分解

本节与第 2.2 节相对应。我们着重强调 MESSEP 与 UDBM（在不可区分情形下）的特征函数构造之间的对应关系，并使用一致的记号使这种类比更加清晰。

3.2.1 正交归一 Hilbert 特征基

设 $\mathfrak{W}_N\subset\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ 为 $\mathbb{Z}$ 中基数为 N 的子集所构成的集合，它们可视为严格递增的N元组，如（2.1）所示。对于任意 $m\in\mathfrak{W}_N$，定义对所有 $x\in\mathbb{R}^N$，

$$\Psi_m(x):=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\det\left(e^{i(m_k+\boldsymbol{\gamma})x_l}\right)_{1\leqslant k,l\leqslant N}.$$

注意，Ψ_m 是反对称的，并且在平移 $2\pi(1$ 下保持不变，$\cdots$，$1)$:

$$\forall\ell\in\mathbb{Z},\quad\Psi_m(x_1+\ell2\pi,\cdots,x_N+\ell2\pi)=e^{2i\ell\pi N\boldsymbol{\gamma}}\,\Psi_m(x)=\Psi_m(x),$$

并满足

$$\Psi_m(x_1,\cdots,x_N)=\Psi_m(x_2,\cdots,x_N,x_1+2\pi).$$

我们回顾一下， $\boldsymbol{\gamma}$ 定义于（2.9）。另请注意， Ψ_m 在$\boldsymbol{\mathcal{W}}_{\mathbb{R}\text{的边界}2\pi\text{上}N}$为零，即当$x_i = x_j$ 对某个 $i \neq j$ 或 $x_N = x_1 + 2\pi$成立时。

这些对称性使我们可以将 Ψ_m 视为定义在 $\boldsymbol{\mathcal{W}}_{2\pi,N}$ （定义见（6.13））以及 $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{2\pi,N}$（定义见（6.14））上的函数，以及它们的 $\mathbb{U}$-嵌入；它们在边界上仍然为零。特别地，

$$\Psi_m(\xi_1, \cdots, \xi_N) = \Psi_m(\overline{x}_1, \cdots, \overline{x}_N) \simeq \Psi_m(e^{ix_1}, \cdots, e^{ix_N}) = \Psi_m(x_1, \cdots, x_N),$$

对于 $\xi \in \overline{\boldsymbol{\mathcal{C}}}_{2\pi,N}$ 以及 $x \in \overline{\boldsymbol{\mathcal{W}}}_{\mathbb{R},2\pi,N}$ 使得 $\xi_k = x_k \simeq e^{ix_k}$ 对于 $1 \leqslant k \leqslant N$，其中 x 表示 x 在 $[0, 2\pi)$中模 2π 的代表元。

与（2.11）和注 2.3类似，定义

$$(\boldsymbol{c}_i)_{1\leqslant i\leqslant N} = \begin{cases} (-p, \cdots, 0, \cdots, p), & \text{if } N = 2p+1, \\ (-p, \cdots, 0, \cdots, p-1), & \text{if } N = 2p. \end{cases}$$

由于 $\boldsymbol{c} \in \mathfrak{W}_N$由 $\delta = (N-1, \cdots, 0)$ 经过置换和平移得到，可以验证，对于某个满足以下条件的 $\varepsilon \in \mathbb{U}$，有 $\Psi_{\boldsymbol{c}}(x) = \varepsilon\, \Psi(x)$

$$\Psi(x) := \frac{2^{\frac{N(N-1)}{2}}}{(2\pi)^{N/2}} \prod_{1\leqslant i<j\leqslant N} \sin\left(\frac{x_j - x_i}{2}\right). \tag{3.25}$$

最后，考虑

$$\boldsymbol{\mu}(dx) = \Psi^2(x)\, \mathbb{1}_{\boldsymbol{\mathcal{C}}_{2\pi,N}}(x)\, \lambda(dx),$$

其中 λ 是 N 维勒贝格测度。注意， $\boldsymbol{\mu}$ 与 Haar酉矩阵的特征角联合分布相同，即具有 $\beta = 2$ 的圆酉 β 系综（ CUE ）。

命题 3.1。 $\{\Psi_m : m \in \mathfrak{W}_N\}$构成 $\mathbb{L}^2(\boldsymbol{\mathcal{C}}_{2\pi,\,N}, \lambda)$的标准正交基。此外，

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}_{2\pi,N} := \left\{ \frac{\Psi_m}{\Psi_{\boldsymbol{c}}} : m \in \mathfrak{W}_N \right\}, \tag{3.26}$$

它是由定义在$\boldsymbol{\mathcal{C}}_{2\pi,\,N}$上的有界光滑函数组成的 $\mathbb{L}^2(\boldsymbol{\mathcal{C}}_{2\pi,\,N}, \boldsymbol{\mu})$的标准正交基。其线性张成在一致拓扑下稠密于 $C(\boldsymbol{\mathcal{C}}_{2\pi,\,N})^{-}$。

3.2.2 谱分解、光滑化性质和压缩性

令 $(\boldsymbol{P}_t)_{t\geqslant 0}$ 为 $(\boldsymbol{\Xi}(t))_{t\geqslant 0}$的马尔可夫半群。对于$\boldsymbol{\mathcal{C}}_{2\pi,\,N}$ 上的任意可测非负 f 以及 $\boldsymbol{\xi} \in \boldsymbol{\mathcal{C}}_{2\pi,\,N}$ 定义为

$$\boldsymbol{P}_t f(\boldsymbol{\xi}) = \mathbb{E}_{\boldsymbol{\xi}}[f(\boldsymbol{\Xi}(t))].$$

注 3.1。 等价地，给定 $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\mathcal{W}}_{\mathbb{R},\,2\pi,\,N}$ 使得对于 $1 \leqslant k \leqslant N$有 $\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{\xi}_k$ ，则对于定义在 $\mathbb{R}^N$上的每个对称且逐分量 2π周期函数 g ，有

$$\boldsymbol{P}_t g(\boldsymbol{\xi}) = \mathbb{E}_{\boldsymbol{x}}[g(\boldsymbol{X}(t))].$$

事实证明，族$\boldsymbol{\mathcal{S}}_{2\pi,N}$ 构成了 $(\boldsymbol{P}_t)_{t\geqslant 0}$的特征函数完备集，而 $\boldsymbol{\mu}$ 是相应的不变概率测度。更确切地说，对于任意 $m \in \mathfrak{W}_N$，令

$$E_m = \frac{2\pi^2}{N} \sum_{i=1}^{N} \left((m_i + \boldsymbol{\gamma})^2 - (\boldsymbol{c}_i + \boldsymbol{\gamma})^2 \right). \tag{3.27}$$

注意，$E_m \in \{2\pi^2 n/N : \ n \geqslant 0\}$, $E_m = 0$ 当且仅当 $m = \boldsymbol{c}$，并且

$$\inf_{m \neq \boldsymbol{c}} E_m = 2\pi^2. \tag{3.28}$$

那么，与（3.26）中的特征函数相对应的 UDBM 无穷小生成元的特征值恰好是 E_m。下一个结果综合并推广了这些结论，它是谱分解（2.15）的连续对应形式。

定理 3.2. 分布 $\boldsymbol{\mu}$ 是连续时间马尔可夫过程 $(\boldsymbol{\Xi}(t))_{t\geqslant 0}$的唯一不变概率测度。此外，$\boldsymbol{\mu}$ 是该过程的可逆测度，并且对所有$f \in \mathbb{L}^2(\boldsymbol{\mathcal{C}}_{2\pi,\ N}, \boldsymbol{\mu})$, $\boldsymbol{\xi} \in \boldsymbol{\mathcal{C}}_{2\pi,\ N}$和 $t \geqslant 0$，有

$$\boldsymbol{P}_t f(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{m \in \mathfrak{W}_N} e^{-E_m t} \left(\int_{\boldsymbol{\mathcal{C}}_{2\pi,N}} f\, \overline{\Psi_m} \Psi_{\boldsymbol{c}}\, d\lambda \right) \frac{\Psi_m(\boldsymbol{\xi})}{\Psi_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{\xi})}. \tag{3.29}$$

由上述定理和（3.28），可得:

推论 3.1. 半群 $(\boldsymbol{P}_t)_{t\geqslant 0}$ 将 $\mathbb{L}^2(\boldsymbol{\mathcal{C}}_{2\pi,\ N}, \boldsymbol{\mu})$ 连续地映射到 $\mathrm{C}^\infty(\boldsymbol{\mathcal{C}}_{2\pi,\ N})$，对任意$t > 0$均成立。此外，对所有 $f \in \mathbb{L}^2(\boldsymbol{\mathcal{C}}_{2\pi,\ N}, \boldsymbol{\mu})$ 和 $t \geqslant 0$，有

$$\|\boldsymbol{P}_t f - \boldsymbol{\mu} f\|_{\mathbb{L}^2(\boldsymbol{\mathcal{C}}_{2\pi,N},\boldsymbol{\mu})} \leqslant e^{-2\pi^2 t} \|f - \boldsymbol{\mu} f\|_{\mathbb{L}^2(\boldsymbol{\mathcal{C}}_{2\pi,N},\boldsymbol{\mu})}. \tag{3.30}$$

3.2.3 舒尔多项式特征函数

与命题 2.4 密切相关的结果也出现在这里：的特征函数是 $(\boldsymbol{P}_t)_{t\geqslant 0}$ 上的舒尔多项式 $\mathbb{U}^N$，并乘以一个涉及角度质心的指数因子，正如 Calogero–Sutherland 哈密顿量（1.10）中那样。

命题 3.2。有

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}_{2\pi,N} = \left\{ e^{i\delta \sum_{i=1}^N x_i} s_\lambda \left(e^{ix_1}, \cdots, e^{ix_N} \right) : \delta \in \mathbb{Z},\ \lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_N \geqslant 0 \right\}. \tag{3.31}$$

命题*3.2*的证明。与第2.4 节中命题5的证明一样，可以验证 $\boldsymbol{\mathcal{S}}_{2\pi,\ N}$ 中的每个元素都可以写成（3.31）右端的形式。反过来，给定一个分拆 λ和 $\delta \in \mathbb{Z}$，等式

$$\frac{\Psi_m(x)}{\Psi_{\boldsymbol{c}}(x)} = e^{i\delta \sum_{i=1}^N x_i}\, s_\lambda \left(e^{ix_1}, \cdots, e^{ix_N} \right), \tag{3.32}$$

成立，只需选择 $\ell \in \mathbb{Z}$ 使得 $p + \ell = \delta$（回想一下，$N = 2p$ 或 $N = 2p + 1$），并令 $m_i = \lambda_{N+1-i} + i - 1 + \ell$，其中 $1 \leqslant i \leqslant N$。注意到 $m_1 < \cdots < m_N$，因此 $m \in \mathfrak{W}_N$。 □

注 3.2. 该对 $(\lambda,\ \delta)$ 在归一化 $\lambda_N = 0$ 下被唯一确定。这样的 λ 称为与 $m \in \mathfrak{W}_N$ 相关联的最小分拆，类似于定义 *5.1*。若 λ 在 (3.31)中允许具有负部（即符号，亦称混合分拆或阶梯分拆），则可取 $\delta = 0$，且 λ再次被唯一确定。在此情形下，$s_\lambda(z_1,\ \cdots,\ z_N)$ 是有理对称函数，而非多项式对称函数。见下文第 *3* 点的证明(7.48)。

4 流体动力学极限：主要结果

本节给出 MESSEP 的流体力学极限。我们陈述密度及其矩生成函数的极限偏微分方程，概述证明策略，并强调该方法的主要结构要素。详细证明推迟至第 7 节。

4.1 预备知识

我们假设，对于某个 $\alpha \in (0,\ 1)$ 有 $N \sim \alpha L$，当 $L \to \infty$ 时成立。本节中，$L,\ N \to \infty$ 始终表示这一联合极限。我们研究经验（占据）测度的收敛

$$\upsilon_{L,N}(t, d\theta) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \delta_{e^{2i\pi X_k(L^2 t)/L}}(d\theta) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \delta_{\Theta_k(L^2 t)}(d\theta) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \delta_{\Xi_k(L^2 t)}(d\theta). \tag{4.33}$$

稍微滥用一下记号，我们将 $\upsilon_{L,\ N}(t,\ dx)$ 记作相应的 2π-周期概率测度，定义在 $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \simeq [0, 2\pi)$上。单位圆上的函数及其在 2π上的$\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ 上的周期对应函数，在方便时视为相同对象。在（4.33）中，$(\Theta(n))_{n\geqslant 0}$ 和 $(\Xi(n))_{n\geqslant 0}$ 是 MESSEP 随机游走的$\mathbb{U}$-嵌入版本。

定义4.1。 我们称 $\upsilon_{L,\ N}(t, dx)$ 依概率收敛到一个（可能是随机的）概率测度 $\upsilon(t, dx)$，如果对于每个定义在 $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z},$ 上的连续函数 φ，都有

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{L,N\to\infty} \mathbb{P}\left(\left| \int_0^{2\pi} \varphi(x)\, \upsilon_{L,N}(t, dx) - \int_0^{2\pi} \varphi(x)\, \upsilon(t, dx) \right| > \varepsilon \right) = 0. \tag{4.34}$$

作为初步观察，经验测度的任何极限点都必定绝对连续，正如下面的注所述。

注4.1。 由于落在区间 $(a, b) \subset [0, 2\pi)$ 内的粒子比例满足

$$\frac{\#\{1 \leqslant k \leqslant N :\ X_k(L^2 t) \in (a, b) \bmod 2\pi\}}{N} \leqslant \frac{(b-a)L}{2\pi N},$$

任何极限点 $\upsilon(t, dx)$ 必定存在一个随机密度 $f(t, x)$，满足

$$0 \leqslant f(t, x) \leqslant \frac{1}{2\pi\alpha}. \tag{4.35}$$

给定一个密度 $f(t,\ x)$ 如前所述，我们将其空间希尔伯特变换记为 $\mathcal{H}f(t,\ x)$，它可以用柯西主值定义，或等价地用傅里叶级数形式定义：

$$\mathcal{H}f(t, x) = \text{p. v. } \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cot\left(\frac{y-x}{2}\right) f(t, y)\, dy \quad \left(= -i \sum_{n\in\mathbb{Z}} \operatorname{sgn}(n)\, c_n(t) e^{inx} \right),$$

对于 $f(t,\ x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(t) e^{inx}$，其中 $\operatorname{sgn}(0) = 0$。最后，我们定义密度 $f(t,\ x)$的复矩 $(\mathfrak{m}_n(t))_{n\geqslant 1}$ 以及相应的矩生成函数：

$$\mathfrak{m}_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{inx} f(t, x)\, dx = \int_{\mathbb{U}} \theta^n f(t, \theta)\, d\theta \quad \text{and} \quad g(t, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}_n(t)\, z^n.$$

这里 $d\theta$ 表示单位圆上的勒贝格测度，并归一化为一个概率测度。我们记 $g_0(z) = g(0,\ z)$ 以及 $f_0(x) = f(0,\ x)$。级数 $g(t,\ z)$ 在开单位圆盘 $\mathbb{D}$ 中绝对收敛，当 $f(t,\ x)$ 满足（4.35）。

4.2 密度与矩的流体力学偏微分方程

我们现在陈述本文的主要结果，它描述了粒子密度以及矩母函数的宏观演化。

定理 4.1。 假设 $\upsilon_{L,\ N}(0, dx)$ 依概率收敛到一个（可能是随机的）密度分布 $f_0(x)$。则 $(\upsilon_{L,\ N}(t, dx))_{t\geqslant 0}$ 依概率收敛到一族（随机）密度$(f(t,x))_{t\geqslant 0}$，它们在弱意义下满足非线性非局部偏微分方程

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{\alpha \sin(\pi\alpha)} \frac{\partial\, \mathcal{J}_\alpha f}{\partial x} = 0, \quad with \quad \mathcal{J}_\alpha f = \sin\big(2\pi^2 \alpha\, f\big)\, \sinh\big(2\pi^2 \alpha\, \mathcal{H} f\big)\,. \tag{4.36}$$

等价地，相应的（随机）矩生成函数 $g(t,z)$ 是 $[0,\infty)\times\mathbb{D}$ 上的非线性输运方程的唯一解

$$\frac{\partial g(t,z)}{\partial t} + z\, \mathcal{V}_\alpha\left(g(t,z)\right) \frac{\partial g(t,z)}{\partial z} = 0, \quad with \quad \mathcal{V}_\alpha(z) = 2\pi^2\, \frac{\sin(\pi\alpha(1+2z))}{\sin(\pi\alpha)}. \tag{4.37}$$

如引言中所述，$f(t,\ x)$ 的正则性取决于初始剖面是否达到界限（4.35），这对应于宏观空洞或完全填充区域。在所有情形下，动力学都表现出有限时间正则化，随后向平衡态指数收敛。

定理 4.2。 偏微分方程 (4.36)具有以下性质：

1. 假设存在 $\eta > 0$，使得对所有 $x \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$,

$$\eta \leqslant f_0(x) \leqslant \frac{1}{2\pi\alpha} - \eta. \tag{4.38}$$

那么，解 $(t,\ x) \mapsto f(t,\ x)$ 在 $(0,\ \infty)\times\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ 上是解析的，并且在该定义域上以强意义满足 (4.36)。

2. 对于任意初始密度剖面 $f_0(x)$，以下结论成立：

(a) 存在 $t^* > 0$，使得 $(t,\ x) \mapsto f(t,\ x)$ 在 $(t^*,\ \infty)\times\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ 并且以强意义满足 (4.36)，在该定义域上。***(b)*** 解以指数速度趋近平衡态（即均匀平衡态），也就是说

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log\left(\left\| f(t,\cdot) - \frac{1}{2\pi} \right\|_\infty \right) < 0.$$

如第 7.3.1 节所示，解析初始数据 f_0 在局部时间内会导出方程 (4.36的解析解。然而，正如引言中已强调的那样，即使 f_0 是整函数，这种正则性也可能在有限时间内失效。参见第 7.4 节中的例子。

我们现在简要回顾——仍基于引言中给出的概述——将（4.36）与（4.37）联系起来的机制。如那里所解释的，密度通过恒等式（1.7）借助特征线法得以恢复（另见第7.3.2节）。更确切地说，引理7.5 给出了一族递减的开集 $V_t \subset \mathbb{D}$，其中 $V_0 = \mathbb{D}$ 且$\bigcap_{t\geqslant 0} V_t = \{0\}$，以及共形映射 $w(t,\ \cdot)$ 从 $\mathbb{D}$ 映到 V_t 并满足

$$\Phi_t(w(t,z)) = w(t,z)\, e^{tA_0(w(t,z))} = z, \quad \text{with} \quad A_0(w) = \mathcal{V}_\alpha\big(g_0(w)\big).$$

特征线法给出 $g(t,\ z) = g_0(w(t,\ z))$。根据（1.7），恢复 $f(t,\ x)$ 相当于将 $w(t,\ \cdot)$ 延拓至 ∂V_t，从而得到表示式（1.8）。因此，$f(t,\ x)$ 的正则性取决于 ∂V_t的正则性，正如引言中所述，并在图 2中所示。

注 4.2。 特征线法并非仅具概念意义：它还提供了一种有效的数值过程，可通过相关等值集的几何结构，根据初始生成函数计算 $f(t,\ x)$。图 3中的密度演化即是采用此方法得到的。

任意点 $w_0 = e^{ix_0} \in \partial V_t \cap \partial\mathbb{D}$ 对应于 $f_0(x_0)$ 的一个极值。在这些点处可能出现不规则性，而 $\partial V_t \cap \mathbb{D}$ 中的点对应于非极值，并产生光滑演化。详细分析见命题 7.4 、 7.6 和 7.7。

我们现在转向最大填充初始构型

$$f_0(x) = \frac{1}{2\pi\alpha}\,\mathbb{1}_{[-\pi\alpha,\pi\alpha]}(x), \tag{4.39}$$

它在这一约束设定中起着狄拉克质量的作用，并展现出尖锐的正则性与支撑性质。令 $w_\alpha = e^{i\pi\alpha}$，可计算

$$g_0(z) = \frac{1}{2i\pi\alpha}\log\left(\frac{1 - z\,\overline{w_\alpha}}{1 - z\,w_\alpha}\right) \quad \text{and} \quad A_0(w) = 2\pi^2\,\frac{(1-w)(1+w)}{(w - w_\alpha)(w - \overline{w_\alpha})}. \tag{4.40}$$

由对称性与粒子-空穴对偶（见注 7.7），我们可以假设 $\alpha \leqslant 1/2$。 $f(t、\ x)$ 的正则性如下所述。它们在图 3 中加以说明，而相应演化定义域 V_t 的几何结构支配这些性质，并绘于图13。下述结果的证明见第 7.5 节。

定理 *4.3*。设 f_0 由 *(4.39)* 给出，且 $w(t,\cdot)\ :\ \mathbb{D} \to V_t$ 为相应的共形映射。对每个 $t > 0$，映射 $w(t,\cdot)$ 可连续延拓至 $\partial\mathbb{D}$，其像是一条分段解析若尔当曲线 $\partial V_t \subset \mathbb{D}\backslash\{\omega_\alpha, \omega_\alpha\}$。由 *(1.8)* 定义的密度 $f(t,x)$ 在$(0,\infty)\times\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$上连续。此外， $f(t,x)$ 的时间演化可作如下描述。

存在显式的时刻 $0 < t_* \leqslant t^*$ *(*见恒等式 (7.84)*)*，其中 $t_* < t^*$ 若 $\alpha \neq 1/2$ ，而 $t_* = t^*$否则；此外还有光滑函数（见第*7.5.3*节）

$$\phi_1 : (0, t_*) \to (0, \pi\alpha), \qquad \phi_2 : (0, t^*) \to (\pi\alpha, \pi),$$

使得 ϕ_1 从 $\pi\alpha$ 递减至 0，而 ϕ_2 从 $\pi\alpha$ 递增至 π。随后，演化呈现出三个不同的阶段：

1. 对所有 $t \in (0, t_*]$，有

$$f(t,x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi\alpha}, & \text{if } x \in [-\phi_1(t), \phi_1(t)], \\ 0, & \text{if } x \notin (-\phi_2(t), \phi_2(t)), \end{cases} \quad \text{and} \quad 0 < f(t,x) < \frac{1}{2\pi\alpha} \text{ elsewhere,}$$

而 $f(t,x)$ 除了沿曲线 $(t, \pm\phi_1(t))$ 和 $(t, \pm\phi_2(t))$ 外都是解析的。

2. 对所有 $t \in (t_*, t^*]$，若 $x \notin (-\phi_2(t), \phi_2(t))$，则有 $f(t,x) = 0$；在其他地方则有 $0 < f(t, x) < 1/(2\pi\alpha)$，而 $f(t,x)$ 除了沿曲线 $(t, \pm\phi_2(t))$ 外都是解析的。

3. 对所有 $t \in (t^*, \infty)$，有 $0 < f(t,x) < 1/(2\pi\alpha)$，且 $f(t,x)$ 是解析的。

注记 4.3。 在 $x \mapsto f(t,x)$ 不可微的点，奇点呈平方根型或立方根型。证明的相应部分给出了更多细节。

4.3 证明思路与关键引理

证明依赖矩方法，与低密度情形一样，关键在于 MESSEP核的特征函数是限制在 $\mathbb{U}_L^N$ 上的舒尔多项式。根据标准的密度论证，依概率收敛（4.34）可归结为经验测度的所有复矩均收敛。这样我们便可以完全在矩的层面上进行研究，此时动力学的谱结构最为有效。

4.3.1 舒尔基与幂和基：Frobenius公式

一个关键要素是舒尔多项式与幂和对称多项式之间的关系。后者构成了由分拆索引的对称多项式的线性基 π:

$$p_\pi = \prod_{i\geqslant 1} p_{\pi_i} = \prod_{k\geqslant 1} p_k^{l_k}, \quad \text{with} \quad p_n(X) = X_1^n + \cdots + X_N^n,$$

其中， l_k 表示 π中 k 的重数。当 $n = \sum_i \pi_i = \sum_k l_k k$时，我们记作 $\pi \vdash n$ ，并令$\ell(\pi) = \sum_k l_k$。注意， p_n 可作为有理函数延拓至负整数。

$\mathfrak{S}_n$ 的不可约表示也由分拆 $\lambda \vdash n$索引。我们用 χ_π^λ 表示特征标在循环型为 π的置换上的取值。Frobenius特征标公式为

$$p_\pi = \sum_{\lambda\vdash n} \chi_\pi^\lambda s_\lambda \quad \text{and} \quad s_\lambda = \sum_{\pi\vdash n} \frac{\chi_\pi^\lambda}{z_\pi} p_\pi, \quad \text{with} \quad z_\pi = \prod_{k\geqslant 1} k^{l_k} l_k!. \tag{4.41}$$

Murnaghan–Nakayama 规则（参见 [Mac15，Sta99]）是计算特征标的重要工具。对于钩形分拆 $\{n|k\} := (n-k,\ 1^k) := (n-k,\ 1,\ \cdots,\ 1)$（参见图 8）以及 $\pi = (n)$，众所周知 $\chi_{(n)}^{\{n|k\}} = (-1)^k$。由此根据（4.41）可得

$$p_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k s_{\{n|k\}}. \tag{4.42}$$

4.3.2 复矩及其期望

对于所有 $n \in \mathbb{Z}$，我们将 $\mathcal{M}^{L,\ N}_{\ n}(t)$ 记为 $\upsilon_{L,\ N}(t,\ d\theta)$ 的随机 n 阶复矩，并将 $\mu^{L,\ N}_{\ n}(t)$记为给定 $\Theta(0) = \vartheta$ 时的条件期望。等价地， $\mu^{L,\ N}_{\ n}(t)$ 是平均占据测度 $\upsilon_{L,\ N}(t,\ d\theta) = \mathbb{E}_\vartheta[\upsilon_{L,\ N}(t,\ d\theta)]$的 n 阶矩。采用这些记号，[¯]

$$\mathcal{M}_n^{L,N}(t) = \frac{p_n(\Theta(L^2 t))}{N} = \int_{\mathbb{U}} \theta^n \upsilon_{L,N}(t, d\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{inx} \upsilon_{L,N}(t, dx),$$

and

$$\mu_n^{L,N}(t) = \mathbb{E}_\vartheta\left[\mathcal{M}_n^{L,N}(t)\right] = \int_{\mathbb{U}} \theta^n \overline{\upsilon}_{L,N}(t, d\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{inx} \overline{\upsilon}_{L,N}(t, dx).$$

我们假设，与 $\upsilon_{L,N}(0,\cdot)$ 相关联的初始经验测度 ϑ 按照（4.34）的意义依概率收敛到定义在 $f_0(\theta)d\theta$ 上的随机概率测度 $\mathbb{U}$。记 m_n 其（随机） n阶复矩，则有如下依概率收敛

$$\frac{p_n(\vartheta)}{N} = \frac{\vartheta_1^n + \cdots + \vartheta_N^n}{N} \xrightarrow[L,N\to\infty]{} m_n = \int_{\mathbb{U}} \theta^n f_0(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{inx} f_0(x) dx. \tag{4.43}$$

注意， $\mathcal{M}^{L,\ N}_{-n}(t)$ (分别是 $\mu^{L,\ N}_{-n}(t)$) $\mathcal{M}^{L,\ N}_{n}(t)$ (分别是 $\mu^{L,\ N}_{n}(t)$) 的复共轭。因此，只需考虑 $n \geqslant 0$。进一步地，利用（4.42），可得

$$\mu_n^{L,N}(t) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \boldsymbol{r}_{\{n|k\}}^{\lfloor L^2 t\rfloor}\, s_{\{n|k\}}(\vartheta) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{NL}\right), \quad \text{with} \quad \boldsymbol{r}_{\{n|k\}} = \frac{\rho_\xi}{\rho_c}. \tag{4.44}$$

回想一下， ρ_ξ/ρ_c 表示与构型 ξ 相对应的 MESSEP 特征值，该构型对应于钩形分拆 $\{n|k\}$。参见命题2.4、注2.6和图8。

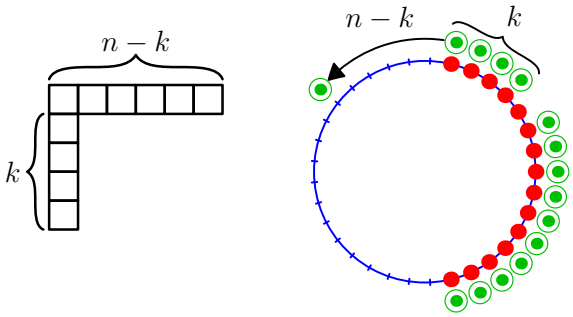

图 8：钩形分拆 $\{n|k\}$ 与构型 ξ （圈出的点）之间的对应关系。圆上的点表示对称紧致构型 $\boldsymbol{c}$。

4.3.3 关键特征标与技术引理

现在我们概述 $\mu^{L,\ N}_{n}(t)$ 在（4.44）中的极限的推导。我们先给出一个刻意设置的错误论证，它揭示了主要障碍，并阐明技术引理4.1 和代数引理4.2的重要作用。

一种初步的启发式思路，尽管最终会造成误导。第2.3 节中命题5证明中使用的标准估计（另见（4.49））使我们可以写成

$$\boldsymbol{r}_{\{n|k\}}^{\lfloor L^2 t\rfloor} = \left(1 - \frac{2\pi^2 n}{L^2} + o\left(\frac{1}{L^2}\right)\right)^{\lfloor L^2 t\rfloor} \xrightarrow[L,N\to\infty]{} e^{-2\pi^2 n t}. \tag{4.45}$$

不过，现在就得出结论还为时过早：

$$\lim_{L,N\to\infty} \mu_n^{L,N}(t) \overset{(4.44)}{=} \lim_{L,N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \boldsymbol{r}_{\{n|k\}}^{\lfloor L^2 t\rfloor}\, s_{\{n|k\}}(\vartheta) \tag{4.46}$$

$$\overset{(4.45)}{=} e^{-2\pi^2 n t} \lim_{L,N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\, s_{\{n|k\}}(\vartheta) \tag{4.47}$$

$$\overset{(4.42)}{=} e^{-2\pi^2 n t} \lim_{L,N\to\infty} \frac{p_n(\vartheta)}{N}$$

$$\overset{(4.43)}{=} e^{-2\pi^2 n t}\, m_n. \tag{4.48}$$

由于 $s_{\{n|k\}}(\vartheta)$ 取决于 L 和 N，且不一致有界，因此在这里不能援引（4.45）将（4.46）过渡到（4.47）。事实证明，结论（4.48）确实不正确。

注 4.4。 可以发现，矩公式（尽管它是错误的）(4.48) 会导出圆柱面 $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$上的经典拉普拉斯方程：

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + (2\pi^2)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0.$$

钩施尔特征值的渐近展开。 为了严格计算式（4.46）中的极限，我们需要改进近似式（4.45）。直接计算可得

$$\boldsymbol{r}_{\{n|k\}} = 1 - \frac{2\sin\left(\frac{\pi}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi N}{L} + \frac{\pi(n-2k-1)}{L}\right)}{\sin\left(\frac{\pi N}{L}\right)}. \tag{4.49}$$

引理 4.1。 设 $T \geqslant 0$ 和 $n, d \geqslant 1$ 为固定值。对于所有 $0 \leqslant t \leqslant T$和 $0 \leqslant k \leqslant n-1$，有

$$\boldsymbol{r}_{\{n|k\}}^{\lfloor L^2 t \rfloor} = \sum_{j=0}^{d-1} \frac{a_{n,j}^{L,N}(t)}{j!} \left(\frac{\pi(n-2k-1)}{L}\right)^j + \mathcal{O}\left(\frac{1}{L^d}\right), \tag{4.50}$$

当 $L, N \to \infty$ 时（仍假设 $N \sim \alpha L$），其中 $\mathcal{O}$ 项中的隐含常数仅依赖于 T, n和 d。此外，定义

$$h_t(x) = \exp\left(-2\pi^2 t \frac{\sin(\alpha\pi + x)}{\sin(\alpha\pi)}\right). \tag{4.51}$$

关于 $0 \leqslant t \leqslant T$一致地，有

$$\lim_{L,N\to\infty} a_{n,j}^{L,N}(t) = \left.\frac{\partial^j h_t^n(x)}{\partial x^j}\right|_{x=0}. \tag{4.52}$$

注 4.5。 注意，速度场 $\mathcal{V}_\alpha$ 在 (4.37) 中引入，(4.51)中也出现了它。

利用引理 4.1，我们按如下方式进行：利用 Frobenius 公式将式（4.46）右端改写为作用于 $s_{\{n|k\}}$的形式，然后对 4.50）使用展开式（ $d := \ell(\pi)$。为简洁清晰起见，我们省略对 ϑ的依赖。得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \boldsymbol{r}_{\{n|k\}}^{\lfloor L^2 t \rfloor} s_{\{n|k\}} &= \sum_{\pi\vdash n}\frac{1}{z_\pi}\left(\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \boldsymbol{r}_{\{n|k\}}^{\lfloor L^2 t \rfloor}\chi_\pi^{\{n|k\}}\right)\frac{p_\pi}{N} = \\ &\sum_{\pi\vdash n}\frac{1}{z_\pi}\left(\sum_{j=0}^{\ell(\pi)-1}\frac{a_{n,j}^{L,N}(t)\pi^j}{j!}\underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\chi_\pi^{\{n|k\}}(n-2k-1)^j\right)}_{=\mathfrak{X}_\pi^{(j)}}\right)\frac{p_\pi}{NL^j} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{L}\right).\end{aligned} \tag{4.53}$$

最后的 $\mathcal{O}$-项出现在（4.53）中，源自对以下内容的渐近估计： $p_\pi(\vartheta)$ 对于分拆 $\pi \vdash n$。事实上，由（4.43）可得 $p_\pi(\vartheta) \sim m_\pi N^{\ell(\pi)}$，又由于 $N \sim \alpha L$，因此得到

$$\frac{p_\pi(\vartheta)}{NL^{\ell(\pi)}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{L}\right). \tag{4.54}$$

因此，计算平均经验矩极限的关键步骤，是求出式（4.53）中钩特征标的交错加权和，记作 $\mathfrak{X}_\pi^{(j)}$。下一条引理给出了这一结果。据我们所知，所得恒等式是新的，其成立本质上依赖于钩结构和递归 Murnaghan–Nakayama 规则。

引理 4.2。 对于任意分拆 $\pi \vdash n$ 和整数 $0 \leqslant j \leqslant \ell(\pi)-1$，有

$$\mathfrak{X}_{\pi}^{(j)} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \chi_{\pi}^{\{n|k\}} (n-2k-1)^j = \begin{cases} 2^{\ell(\pi)-1}(\ell(\pi)-1)! \prod_{i=1}^{\ell(\pi)} \pi_i, & \text{if } j = \ell(\pi)-1, \\ 0, & \text{if } 0 \leqslant j \leqslant \ell(\pi)-2. \end{cases} \tag{4.55}$$

然后，将引理4.2 与式（4.53）和式（4.51结合起来，经过直接计算可得

$$\lim_{L,N\to\infty} \mu_n^{L,N}(t) = \underbrace{\sum_{\pi\vdash n} \frac{(2\pi\alpha)^{\ell(\pi)-1}}{\prod_i l_i!} \left.\frac{\partial^{\ell(\pi)-1} h_t^n(x)}{\partial x^{\ell(\pi)-1}}\right|_{x=0} m_\pi}_{=\mathfrak{m}_n(t)}. \tag{4.56}$$

注 4.6. 注意，求和式 （4.56）中对应于 $\pi = (n)$ 的项恰好贡献于式（4.48）的右端。

此时，要推导与矩 $\mathfrak{m}_n(t)$ 相关的偏微分方程（4.37）和4.36 ，需要运用 Faà di Bruno 公式、组合恒等式、生成函数和傅里叶分析进行繁复计算。详情请参见第 7节。

4.3.4 第 n阶随机矩的方差

要证明占据测度 $\upsilon_{L,N}(t,\cdot)$依概率收敛，只需证明其 n 阶矩的方差趋于零。该方差为

$$\mathbb{V}\left(\mathcal{M}_n^{L,N}(t)\right) = \mathbb{E}_\vartheta\left[\frac{(p_n p_{-n})(\Theta(L^2 t))}{N^2}\right] - \left|\mu_n^{L,N}(t)\right|^2,$$

其中 $p_{-n}(z_1,\cdots,z_N) := p_n(z_1^{-1},\cdots,z_N^{-1})$。因此，接下来只需证明

$$\lim_{L,N\to\infty} \mathbb{E}_\vartheta\left[\frac{(p_n p_{-n})(\Theta(\lfloor L^2 t\rfloor))}{N^2}\right] = |\mathfrak{m}_n(t)|^2 = \mathfrak{m}_n(t)\,\overline{\mathfrak{m}_n(t)}. \tag{4.57}$$

这里的困难在于， $p_n(z_1,\ldots,z_N)\,p_{-n}(z_1,\ldots,z_N)$ 不是对称多项式，而是对称 Laurent 多项式。这使我们无法直接使用对称多项式环中的舒尔基和幂和基。

注 4.7。 尽管 $p_n p_{-n} = p_n p_{L-n}$ 在 L次单位根的集合上成立，但利用这一恒等式回到多项式框架并不实际，因为次数 L 会发散。式 (4.57)中的乘积提示我们将 $p_n p_{-n}$ 分解为钩 *Schur* 函数及其共轭的乘积。

4.3.5 双钩 Schur 分解

虽然式（4.44）中的期望涉及钩分拆 $\{n|k\}$，但方差分析自然会引出双钩分拆（另见图9），其定义如下:

$$\{n|k,l\} = \left(L-n-(N-1-l),\, n-k+1,\, 2^k,\, 1^{N-2-l-k}\right).$$

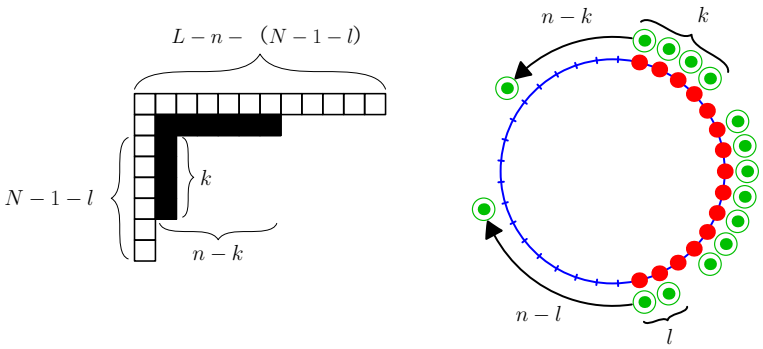

图9： 双钩分拆 $\{n|k、\ l\}$与其对应构型（圈出的点）

为得到方差渐近行为，我们使用引理4.3，将计算化简为钩施尔多项式的乘积。下面简要回顾斜施尔多项式的定义。设$\mu \subset \lambda$ 为分拆，即对所有 $\mu_i \leqslant \lambda_i$ 均有 i。斜图 $\lambda\backslash\mu$ 由 μ 中移除 λ的方格得到。相应的斜施尔多项式$s_{\lambda\backslash\mu}$ 写作

$$s_{\lambda\backslash\mu} = \sum_{\nu} c^{\lambda}_{\mu\nu}\, s_{\nu}, \tag{4.58}$$

其中 $c^{\lambda}_{\mu\nu}$ 是所谓的 Littlewood–Richardson 系数。从组合学角度看， $c^{\lambda}_{\mu\nu}$ 表示形状为 $\lambda\backslash\mu$ 、内容为 ν 且行读词为格词的半标准杨表的数量（另见图 11）。按照惯例，若 $s_{\lambda\backslash\mu} = 0$ ，则 $\mu \not\subset \lambda$。我们用 λ' 表示通过转置 λ的杨图得到的共轭分拆。注意， $\{n|k\}' = \{n|n-k-1\}$。

下一个引理给出将 $p_n p_{-n}$ 分解为钩施尔多项式所需的代数恒等式，从而使我们能够利用引理 4.2。

引理 4.3。 以下恒等式对所有 $z = (z_1、\ \cdots、\ z_N) \in \mathbb{U}_L^N$ 均成立：

1. 对所有 $n \geqslant 1$ 和 $0 \leqslant k \leqslant n-1$,

$$\overline{s_{\{n|k\}}(z)} = (-1)^{2\gamma}\, s_{\{L-n\,|\,N-k-1\}}(z). \tag{4.59}$$

2. 对所有 $n \geqslant 1$，有如下分解：

$$p_n(z)\, p_{-n}(z) = (-1)^{2\gamma} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^{k+l}\, s_{\{n|k,l\}}(z) + n. \tag{4.60}$$

3. 对所有 $n \geqslant 1$ 和 $0 \leqslant k、\ l \leqslant n-1$，有如下展开：

$$s_{\{n|k,l\}}(z) = (-1)^{N-1} \sum_{\tau} (-1)^{|\tau|}\, s_{\{n|k\}\backslash\tau}(z)\, \overline{s_{\{n|l\}\backslash\tau'}(z)}, \tag{4.61}$$

其中，求和遍历所有满足 $\tau \subset \{n|k\}$ 和 $\tau' \subset \{n|l\}$ 的分拆 τ。特别地， τ 要么为空，要么等于某个 $1 \leqslant m \leqslant n$ 的 $\{m|i\}$，且 $0 \leqslant i \leqslant m-1$。

4. 对所有 $1 \leqslant m \leqslant n$ 和 $0 \leqslant i \leqslant m-1$，均有

$$s_{\{n|k\}\setminus\{m|i\}}(z) = s_{\{n-m\,|\,k-i\}}(z) + s_{\{n-m\,|\,k-i-1\}}(z), \tag{4.62}$$

and

$$s_{\{n|l\}\setminus\{m|i\}'}(z) = s_{\{n-m\,|\,l-(m-i-1)\}}(z) + s_{\{n-m\,|\,l-(m-i-1)-1\}}(z), \tag{4.63}$$

*wi*对于所有 $r \geqslant 1$ 和 $j \in \mathbb{Z}$, $s_{\{r|j\}}(z) \equiv 0$，若 $j < 0$ 或 $j > r-1$，且 $s_{\{0|j\}}(z) \equiv \delta_{0\ \ j}$.

利用（4.60）和（4.57），只需证明

$$\lim_{L,N\to\infty} \frac{(-1)^{2\gamma}}{N^2} \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1} (-1)^{k+l}\, \boldsymbol{r}_{\{n|k,l\}}^{\lfloor L^2 t\rfloor}\, s_{\{n|k,l\}} = \mathfrak{m}_n(t)\,\overline{\mathfrak{m}_n(t)}, \tag{4.64}$$

其中 $\boldsymbol{r}_{\{n|k,\ l\}}$ 与（4.44）类似，表示与 $s_{\{n|k,\ l\}}$相关的 MESSEP 特征值。应用引理 4.3，特别是（4.61），并利用 $(-1)^{N-1+2\gamma} = 1$，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^{2\gamma}}{N^2} \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1} (-1)^{k+l}\, \boldsymbol{r}_{\{n|k,l\}}^{\lfloor L^2 t\rfloor}\, s_{\{n|k,l\}}(\vartheta) &= \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1} (-1)^{k+l}\, \boldsymbol{r}_{\{n|k,l\}}^{\lfloor L^2 t\rfloor}\, s_{\{n|k\}}(\vartheta)\,\overline{s_{\{n|l\}}(\vartheta)} \\ &\quad + \frac{1}{N^2} \sum_{m=1}^{n}\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1} (-1)^{m}(-1)^{k+l}\, \boldsymbol{r}_{\{n|k,l\}}^{\lfloor L^2 t\rfloor}\, s_{\{n|k\}\setminus\{m|i\}}(\vartheta)\,\overline{s_{\{n|l\}\setminus\{m|i\}'}(\vartheta)}.\end{aligned}$$

对于（$\tau = \varnothing$ 和 $\tau \neq \varnothing$ 在（4.61）中的情形，我们也分别讨论，并利用该等式下方的注释得到后一个方程。因此，（4.64）的证明归结为以下引理。

引理 4.4。以下极限成立：

$$\lim_{L,N\to\infty} \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1} (-1)^{k+l}\, \boldsymbol{r}_{\{n|k,l\}}^{\lfloor L^2 t\rfloor}\, s_{\{n|k\}}(\vartheta)\,\overline{s_{\{n|l\}}(\vartheta)} = \mathfrak{m}_n(t)\,\overline{\mathfrak{m}_n(t)}, \tag{4.65}$$

and

$$\lim_{L,N\to\infty} \frac{1}{N^2} \sum_{m=1}^{n}\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1} (-1)^{m+k+l}\, \boldsymbol{r}_{\{n|k,l\}}^{\lfloor L^2 t\rfloor}\, s_{\{n|k\}\setminus\{m|i\}}(\vartheta)\,\overline{s_{\{n|l\}\setminus\{m|i\}'}(\vartheta)} = 0. \tag{4.66}$$

为证明引理4.4，我们再次结合（4.2 ）以及（4.62）和（4.63）使用引理。我们先推广引理4.1。如（4.49）所示，直接计算可得

$$\boldsymbol{r}_{\{n|k,l\}} = 1 - \frac{2\sin\left(\frac{\pi}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{L}\right)\left(\sin\left(\frac{\pi N}{L} + \frac{\pi(n-2k-1)}{L}\right) + \sin\left(\frac{\pi N}{L} + \frac{\pi(n-2l-1)}{L}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\pi N}{L}\right)}. \tag{4.67}$$

引理 4.5。固定 $T \geqslant 0$ 以及 n、$d \geqslant 1$。对于所有 $0 \leqslant t \leqslant T$ 以及 $0 \leqslant k$、$l \leqslant n-1$，可以写成

$$\boldsymbol{r}_{\{n|k,l\}}^{\lfloor L^2 t\rfloor} = \sum_{j_1+j_2\leqslant d-1} \frac{a_{n,j_1,j_2}^{L,N}(t)}{j_1!j_2!} \left(\frac{\pi(n-2k-1)}{L}\right)^{j_1} \left(\frac{\pi(n-2l-1)}{L}\right)^{j_2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{L^d}\right),$$

形式，其中 $\mathcal{O}$ 项中的常数仅取决于 T、n、d。此外，

$$\lim_{L,N\to\infty} a_{n,j_1,j_2}^{L,N}(t) = \left.\frac{\partial^{j_1} h_t^n(x)}{\partial x^{j_1}}\right|_{x=0} \cdot \left.\frac{\partial^{j_2} h_t^n(x)}{\partial x^{j_2}}\right|_{x=0}, \tag{4.68}$$

其中 $h_t(x)$ 是定义于 (4.50)中的函数。

第 2 节结果的 5 个证明2

命题 2.1 的证明。注意，如果 $T > n$ 那么 $\sigma \cdot Y(k) \in \mathcal{W}_{L,\ N}$ 对每个 $0 \leqslant k \leqslant n$ 都成立，因此 $(\sigma \cdot Y(k))_{0 \leqslant k \leqslant n}$ 是 $\mathcal{W}_{L,\ N}$ 中的一条有限路径。概率 $\mathbb{P}_\theta(T > n)$ 仅取决于 $\theta \in \mathcal{W}_{L,\ N}$ 在 $\mathcal{C}_{L,\ N}$ 上的投影。我们对任意 $\xi \in \mathcal{C}_{L,\ N}$ 以及任意满足 $p_2(\theta) := \xi$ 的 θ，定义 $\mathbb{P}_\xi(T > n) := \mathbb{P}_\theta(T > n)$。

Then，根据马尔可夫性质，我们很容易得到，对于每个 $\xi \in \mathcal{C}_{L,\ N}$ 和 $n \geqslant 0$ ，

$$\mathbb{P}_\xi(T > n) = (2N)^{-n} A^n \mathbb{1}(\xi),$$

其中，A 是 $\mathcal{C}_L$ 的邻接矩阵，$_N$，而 $\mathbf{1}$ 是恒等于 1 的常值函数。注意到 A 具有 2-周期性，因此 $\mathcal{C}_{L,\ N}$ 可以写成 $W_1 \sqcup W_2$，其中 W_1 和 W_2 是 A^2 的互不相交的稳定状态空间。因此，由 A 的谱分解可得

$$\mathbb{P}_\xi(T > 2m) \underset{m \to \infty}{\sim} (2N)^{-2m} \rho^{2m} \left[\sum_{i \in \{1,2\}} \left(\frac{\sum_{\eta \in W_i} \psi(\eta)}{\sum_{\eta \in W_i} \psi^2(\eta)} \right) \mathbb{1}_{W_i}(\xi) \right] \psi(\xi).$$

将 $2m$ 替换为 $2m+1$ 时，也有类似的渐近结果。

我们得到，对于 $\mathcal{W}_{L,\ N}$ 中的任意路径 $(e(0),\ \cdots,\ e(n))$，其中 $e(0) = \sigma \cdot y$，且 $m \geqslant n$，

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}_{\sigma \cdot y}(\sigma \cdot Y(1) = e(1), \cdots, \sigma \cdot Y(n) = e(n) | T > m) \\ &\qquad = \frac{1}{(2N)^n} \frac{\mathbb{P}_{\sigma \cdot e(n)}(T > m - n)}{\mathbb{P}_{\sigma \cdot y}(T > m)} \underset{m \to \infty}{\sim} \frac{1}{\rho^n} \frac{\psi(\sigma \cdot e(n))}{\psi(\sigma \cdot y)}, \end{aligned}$$

这就完成了证明。 □

命题 2.2 的证明。 首先，我们将证明

$$\sum_{\eta \in \{0, \cdots, L-1\}^N} \psi_\xi(\eta) \overline{\psi_{\xi'}(\eta)} = N!\, \delta_{\xi = \xi'}. \tag{5.1}$$

为此，令 $\omega = e^{2i\pi/L}$ 并注意到 $\sum_{\eta=0}^{L-1} \omega^{\eta l} = L\, \delta_{l \in L\mathbb{Z}}$ 对所有 $l \in \mathbb{Z}$ 均成立。因此，(5.1) 的左端等于

$$\frac{1}{L^N} \sum_{\eta_1=0}^{L-1} \cdots \sum_{\eta_N=0}^{L-1} \sum_{\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_N} \epsilon(\sigma)\epsilon(\sigma') \omega^{\sum_{i=1}^N \eta_i \left(\xi_{\sigma(i)} - \xi'_{\sigma(i)} \right)} = \sum_{\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_N} \epsilon(\sigma)\epsilon(\sigma') \delta_{\sigma \cdot \xi = \sigma' \cdot \xi'}.$$

由于 ξ 和 ξ' 均严格有序，(5.1) 的右端等于 $N!\, \delta_{\xi = \xi'}$。由此可知，族 ψ_ξ $(\xi \in \mathcal{C}_{L,N})$ 在 $\ell^2(\mathcal{C}_{L,N})$ 中正交归一，因为

$$\sum_{\eta \in \{0, \cdots, L-1\}^N} \psi_\xi(\eta) \overline{\psi_{\xi'}(\eta)} = \sum_{\eta \in \mathcal{C}_{L,N}} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \psi_\xi(\sigma \cdot \eta) \overline{\psi_{\xi'}(\sigma \cdot \eta)} = N! \sum_{\eta \in \mathcal{C}_{L,N}} \psi_\xi(\eta) \overline{\psi_{\xi'}(\eta)}.$$

回想一下，当 $i \neq j$ 时，$\psi_\xi(\eta)$ 一旦 $\xi_i = \xi_j$ 就会消失。注意到 $\mathcal{C}_{L,\ N}$ 的基数为 $\binom{L}{N}$，我们便得到这个族还是 $\ell^2(\mathcal{C}_{L,\ N})$ 的一组基。

接下来只需证明它们是与相应特征值关联的特征函数。对于一般的 N 元组 $Z=(Z_1,\ \cdots,\ Z_N)$ 和 $Y=(Y_1,\ \cdots,\ Y_N)$，引入形式单项式 $Q_Z(Y):=Z_1^{Y_1}\cdots Z_N^{Y_N}$，并注意到

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant N\\ \epsilon\in\{\pm 1\}}} Q_Z(Y_1,\cdots,Y_i,Y_i+\epsilon,Y_{i+1},\cdots,Y_N)=\left(\sum_{i=1}^{N}\left(Z_i+\frac{1}{Z_i}\right)\right)Q_Z(Y). \tag{5.2}$$

将 $Q_Z(Y)$ 替换为 $Q_Z^s(Y)=\det(Z_i^{Y_j})_{1\leqslant i,\ j\leqslant N}$ 后，这个关系仍然成立。注意，只要至少有两个 Y_i 相等，$Q_Z^s(Y)=0$ 就成立。

这些特征函数必须延拓到离散的 L-周期 Weyl 室 $\mathcal{W}_{\mathbb{Z},\ L,\ N}$，因此它们必须满足

$$Q_Z^s(Y_1,\cdots,Y_N)=Q_Z^s(Y_2,\cdots,Y_N,Y_1+L).$$

代入后，这个关系仍然成立

$$Z_i\equiv e^{\frac{2i\pi(\xi_i+\boldsymbol{\gamma})}{L}}\quad\text{and}\quad Y_j\equiv\eta_j. \tag{5.3}$$

尽管这很直接，我们仍给出计算过程，因为这些计算说明了为什么需要加性参数 $\boldsymbol{\gamma}$。令 τ_L 定义在 N 元组上，定义如下：

$$\tau_L\cdot\eta=(\eta_2,\cdots,\eta_N,\eta_1+L)=\tau\cdot\eta+(0,\cdots,0,L), \tag{5.4}$$

其中 τ 是循环置换 $(1\,2\,\cdots\,N)$。由于对任意整数 k，l 和 $\boldsymbol{\gamma}\in\{0,\ 1/2\},$，都有 $\varepsilon(\tau)=(-1)^{N+1}$ 和 $\omega^{(k+\boldsymbol{\gamma})(l+L)}=(-1)^{2\boldsymbol{\gamma}}\omega^{(k+\boldsymbol{\gamma})l}$，我们得到

$$\det\left(e^{\frac{2i\pi(\xi_k+\boldsymbol{\gamma})\tau_L\cdot\eta_j}{L}}\right)_{1\leqslant k,j\leqslant N}=(-1)^{N+1}(-1)^{2\boldsymbol{\gamma}}\det\left(e^{\frac{2i\pi(\xi_k+\boldsymbol{\gamma})\eta_j}{L}}\right)_{1\leqslant k,j\leqslant N}.$$

Th这就是为什么当 N 为奇数时我们令 $\boldsymbol{\gamma}=0$，而当 N 为偶数时令 $\boldsymbol{\gamma}=1/2$。

此后，利用（5.2），可以验证 ψ_ξ 是一个特征值为ρ_ξ的特征函数。

注记 5.1. 当在 Z_i、 $i\in\{1$、 $\cdots$、 $N\}$ 中定义的根（5.3）不在共轭下保持不变时，等价地说，当与ρ_ξ 相关联的特征子空间不是一维时，特征函数 ψ_ξ 不一定是实数值的（即使相差一个乘法常数也不一定）。

最后，可以验证 $\rho=\rho_c$ 是谱半径，其值由（2.12）的右端给出。相应的正特征向量 ψ 与 ψ_c 仅相差一个乘法常数，即一个经典的范德蒙德行列式。下面给出显式计算。

令 $\delta=(N-1$、 $\cdots$、 $0)$，并令 p 满足 $N=2p+1$ 或 $N=2p$。注意， t

$$c=\tau_L^p\sigma\cdot(\delta-(p,\cdots,p))=\underbrace{\tau_L\circ\cdots\circ\tau_L}_{p\text{ times}}\cdot(\sigma\cdot(\delta-(p,\cdots,p))),$$

其中， σ 是将每个 i 映射到 $N-i+1$ 的置换。我们推导出

$$\psi_c(\eta)=\varepsilon(\tau)^p\varepsilon(\sigma)e^{\frac{2i\pi(\boldsymbol{\gamma}-p)\sum_{k=1}^{N}\eta_k}{L}}\frac{1}{L^{N/2}}\det\left(e^{\frac{2i\pi(N-k)\eta_j}{L}}\right)_{1\leqslant k,j\leqslant N}.$$

接着，对 ψ 进行显式计算即可完成证明。 □

命题的证明 2.3。 下文中，所有 $\mathcal{O}$项中的常数均关于 L, N, α一致。首先，注意到第二大特征值为

$$\lambda_{L,N} = \frac{\rho_{\tilde{c}}}{\rho_c}, \quad \text{with} \quad \tilde{c}_N = c_N + 1 \quad \text{and} \quad \forall i \in \{1, \cdots, N-1\}, \ \tilde{c}_i = c_i.$$

注意到 $c_N + \gamma = (N-1)/2$。此外，有

$$\cos\left(\frac{2\pi(x+1)}{L}\right) = \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) - \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\frac{2\pi}{L} - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{|x|+1}{L^4}\right). \tag{5.5}$$

ρ_c 与 $\rho_{\tilde{c}}$ （见（2.10））之间唯一的区别是最后一项，分别为$2\cos(2\pi x_N/L)$ 和 $2\cos(2\pi(x_N+1)/L),$，其中 $x_N = (N-1)/2$。由此可得

$$1 - \lambda_{L,N} = \frac{2}{\rho}\left[\sin\left(\frac{2\pi x_N}{L}\right)\frac{2\pi}{L} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi x_N}{L}\right)\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{x_N+1}{L^4}\right)\right]. \tag{5.6}$$

在下文中，我们用 $B = [\cdots]$ 表示（5.6）中的括号。

低密度极限。 首先假设 N/L 的极限为 0。于是，根据 cos 在 0 处的泰勒展开和标准计算可得

$$\rho = 2N\left(1 - \mathcal{O}\left(\frac{N^2}{L^2}\right)\right) \quad \text{and} \quad B = N\left(\frac{2\pi^2}{L^2} + \mathcal{O}\left(\frac{N^2}{L^4}\right)\right). \tag{5.7}$$

相乘后，我们得到所需的上界（2.16）。

*Hydr***odynamic** 极限。 最后，当 N/L 趋于 $\alpha \in (0, 1)$时，标准估计给出

$$\rho = 2L\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi N}{L}\right)}{\pi} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{L^2}\right)\right) \quad \text{and} \quad B = \sin\left(\frac{\pi N}{L}\right)\frac{2\pi}{L} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{L^2}\right). \tag{5.8}$$

且上界（2.17）很容易得到。 □

命题 2.4 的证明。 现在，我们将图 7 中展示的整数分拆与构型之间的对应关系精确化。对于 $\xi \in \mathcal{C}_{L,\ N}$，令 $F_\xi \subset \mathcal{W}_{\mathbb{Z},\ L,\ N}$ 表示其在投影 $p_2 \circ p_1$ 下的离散纤维：$\mathcal{W}_{\mathbb{Z},\ L,\ N} \to \mathcal{C}_{L,\ N}$ （见（2.7））。和之前一样，我们记作 $N = 2p+1$ 或 $N = 2p$，与（ c 2.11）中紧致构型的定义保持一致。

定义 5.1 （最小整数分拆）。 对于 $\xi \in \mathcal{C}_{L,\ N}$，令 $x = (x_1, \cdots, x_N) \in F_\xi$ 为 F_ξ 中使 $x_1 + p$ 非负且最小的唯一元素。那么，与构型 ξ 相关联的最小整数分拆 λ 定义为

$$\lambda = \begin{cases} (x_N - p, x_{N-1} - p + 1, \cdots, x_2 + p - 1, x_1 + p), & \text{if } N = 2p+1, \\ (x_N - p + 1, x_{N-1} - p + 1, \cdots, x_2 + p - 1, x_1 + p), & \text{if } N = 2p. \end{cases}$$

注 5.2。 此分拆描述了粒子相对于紧致构型的正向位移 c（其初始位置为 $-p+N-1$，……，$-p$ 模 L，见注 2.3）。所得构型 ξ 使最低粒子（初始位置为 $-p$）的位移最小。因此，最高粒子（初始位置为 $-p+N-1$）最多可移动 $L-N$，从而 $x_N - p \leqslant L - N$。

进一步地，令$x \in F_\xi \subset \mathcal{W}_{\mathbb{Z},\ L,\ N}$如定义 5.1所述。可以看出，存在唯一的整数 k 使得

$$p_1((x_N, \cdots, x_1)) = (\dot{\xi}_k, \cdots, \dot{\xi}_1, \dot{\xi}_N, \cdots, \dot{\xi}_{k+1}) = \tau^{-k}\sigma \cdot \dot{\xi}, \tag{5.9}$$

其中 σ 表示将 i 映射到 $N-i+1$ 的置换，对任意 $1 \leqslant i \leqslant N$ 和 τ 都是循环置换 $(1\,2\,\cdots\,N)$。令 $\delta = (N-1,\ \cdots,\ 0)$如（2.18）所示，并令 λ为对应于 ξ的最小整数分拆。注意 $(x_N+p,\ \cdots,\ x_1+p) = (\lambda_1+\delta_1,\ \cdots,\ \lambda_N+\delta_N)$。

由（5.9）可得

$$\det\left(e^{\frac{2i\pi(\xi_m+\gamma)\eta_j}{L}}\right)_{1\leqslant m,j\leqslant N} = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)^k e^{\frac{2i\pi(\gamma-p)\sum_{i=1}^N \eta_i}{L}} \det\left(e^{\frac{2i\pi(\lambda_m+\delta_m)\eta_j}{L}}\right)_{1\leqslant m,j\leqslant N}.$$

此外，当 $\xi = c$时，有 $k = p+1$ 或 $k = p$ 分别对应于 $N = 2p+1$ 或 $N = 2p$。因此，注意到 $\epsilon(\tau) = 1$ 若 N 为奇数，则利用（2.19）可写为

$$\frac{\psi_\xi(\eta)}{\psi_c(\eta)} = \varepsilon(\tau)^{p-k}\, s_\lambda\left(e^{2i\pi\eta_1/L}, \cdots, e^{2i\pi\eta_N/L}\right). \tag{5.10}$$

反过来，考虑一个整数分拆 $L-N \geqslant \lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_N \geqslant 0$。注意

$$\forall 1 \leqslant i < j \leqslant N, \quad L-1 \geqslant \lambda_i+\delta_i > \lambda_j+\delta_j \geqslant 0.$$

然后，通过令 $\xi_i = \lambda_i+\delta_i$对每个 $1 \leqslant i \leqslant N$，不难验证我们得到一个构型$\xi \in \mathcal{C}_{L,\ N}$ 使得（5.10）成立。至此证明结束。 □

6 第3节中结果的证明

我们首先 严格定义随机过程 $(\boldsymbol{X}(t))_{t\geqslant 0}$、 $(\boldsymbol{\Theta}(t))_{t\geqslant 0}$和 $(\boldsymbol{\Xi}(t))_{t\geqslant 0}$.

6.1 酉Dyson布朗运动（UDBM）

设 $(B(t))_{t\geqslant 0}$:= $(B_1(t),\ \cdots,\ B_N(t))_{t\geqslant 0}$为标准 N维布朗运动。我们考虑$\boldsymbol{\mathcal{W}}_{\mathbb{R},\ 2\pi,\ N}$ 中的相互作用粒子系统，其定义为

$$d\boldsymbol{X}_i(t) = \frac{2\pi}{\sqrt{N}}\, dB_i(t) + \frac{2\pi^2}{N} \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant N \\ j\neq i}} \cot\left(\frac{\boldsymbol{X}_i(t)-\boldsymbol{X}_j(t)}{2}\right) dt, \quad \boldsymbol{X}_i(0) = \boldsymbol{x}_i, \tag{6.11}$$

对于 $1 \leqslant i \leqslant N$，其中$\overline{\boldsymbol{\mathcal{W}}}_{\mathbb{R},\ 2\pi,\ N}$ 定义见（3.23）。等价地，

$$d\boldsymbol{X}(t) = \frac{2\pi}{\sqrt{N}}\, dB(t) + \frac{(2\pi)^2}{N} \frac{\nabla\Psi(\boldsymbol{X}_t)}{\Psi(\boldsymbol{X}_t)} dt, \quad \boldsymbol{X}(0) = \boldsymbol{x}, \tag{6.12}$$

其中 Ψ 定义见（3.25）。令

$$\boldsymbol{\mathcal{W}}_{\mathbb{R},2\pi,N} := \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N : \boldsymbol{x}_1 < \cdots < \boldsymbol{x}_N < \boldsymbol{x}_1 + 2\pi\right\},$$

因此$\boldsymbol{\mathcal{W}}_{\mathbb{R},\ 2\pi,\ N}$ 是一个开集，其闭包为$\overline{\boldsymbol{\mathcal{W}}}_{\mathbb{R},\ 2\pi,\ N}$定义见（3.23）。我们称$\boldsymbol{\mathcal{W}}_{\mathbb{R},\ 2\pi,\ N}$ 中的随机过程发生碰撞，如果它以概率 1 在某个时刻到达边界 $\partial\boldsymbol{\mathcal{W}}_{\mathbb{R},\ N}$。

以下结果可见于 [Cé95，CL97，CL01]。

命题 6.1。对于每个 $\boldsymbol{X}$ ，方程（6.12）$\boldsymbol{\mathcal{W}}_{\mathbb{R},2\pi\text{和}N}$都存在唯一的强解 $\boldsymbol{X}$ 。此外，

$$\forall T \geqslant 0, \quad \sum_{1\leqslant i<j\leqslant N} \mathbb{E}_{\boldsymbol{x}}\left[\int_0^T \frac{\mathrm{d}t}{|\boldsymbol{X}_j(t)-\boldsymbol{X}_i(t)|}\right] < \infty.$$

此外，当 $\boldsymbol{x} \notin \partial\boldsymbol{\mathcal{W}}_{\mathbb{R},N}$ 时，该过程是连续的、强马尔可夫的，且永不发生碰撞；否则会瞬时离开边界。

仿照第 2.1.3 节，我们引入两个连续过程 $(\boldsymbol{\Theta}(t))_{t\geqslant 0}$ 和 $(\boldsymbol{\Xi}(t))_{t\geqslant 0}$，它们分别是 $(\Theta(n))_{n\geqslant 0}$ 和 $(\Xi(n))_{n\geqslant 0}$的类似物。连续情形需要额外的拓扑处理。

为此，仿照式（2.5），令

$$\boldsymbol{\mathcal{W}}^{\#}_{2\pi,N} := \left\{\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{U}^N : \exists\, \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{\mathcal{W}}_{\mathbb{R},2\pi,N},\ \boldsymbol{\theta}_1 = e^{i\boldsymbol{x}_1},\cdots,\boldsymbol{\theta}_N = e^{i\boldsymbol{x}_N}\right\}$$
$$\text{and}\quad \boldsymbol{\mathcal{W}}_{2\pi,N} := \left\{\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{R}^N_{2\pi} : \exists\, \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{\mathcal{W}}_{\mathbb{R},2\pi,N},\ \boldsymbol{\theta}_1 = \overline{\boldsymbol{x}}_1,\cdots,\theta_N = \overline{\boldsymbol{x}}_N\right\}, \quad (6.13)$$

其中 $\overline{x}$ 表示 $x\in\mathbb{R}$ 对 2π 取模所得的等价类。此外，考虑

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}_{2\pi,N} := \left\{\boldsymbol{\xi}\in[0,2\pi)^N : 0\leqslant\boldsymbol{\xi}_1<\cdots<\boldsymbol{\xi}_N<2\pi\right\}$$
$$\text{and}\quad \boldsymbol{\mathcal{C}}^{\#}_{2\pi,N} = \left\{\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{U}^N : \exists\, \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{\mathcal{C}}_{2\pi,N},\ \boldsymbol{\theta}_1 = e^{i\boldsymbol{x}_1},\cdots,\boldsymbol{\theta}_N = e^{i\boldsymbol{x}_N}\right\}. \quad (6.14)$$

如式（2.7）所示，有典范投影

$$\boldsymbol{\mathcal{W}}_{\mathbb{R},2\pi,N} \overset{p_1}{\twoheadrightarrow} \boldsymbol{\mathcal{W}}_{2\pi,N} \simeq \boldsymbol{\mathcal{W}}^{\#}_{2\pi,N} \overset{p_2}{\twoheadrightarrow} \boldsymbol{\mathcal{C}}_{2\pi,N} \simeq \boldsymbol{\mathcal{C}}^{\#}_{2\pi,N},$$

继承自标准投影 $\mathbb{R}\twoheadrightarrow\mathbb{U}\simeq\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{U}\simeq\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\twoheadrightarrow[0,2\pi)$。

空间 $\boldsymbol{\mathcal{W}}_{2\pi,N}\simeq\boldsymbol{\mathcal{W}}^{\#}_{2\pi,N}$ 和 $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{2\pi,N}\simeq\boldsymbol{\mathcal{C}}^{\#}_{2\pi,N}$ 赋予由上述满射诱导的商拓扑，以及 $\boldsymbol{\mathcal{W}}_{\mathbb{R},2\pi,N}\subset\mathbb{R}^N$的标准拓扑。

这些拓扑都是可度量化的。事实上，对于 $\theta,\phi\in\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$，取代表元 $x,y\in\mathbb{R}$，使得 $\theta=x$ 且 $\phi=y$，令 $d(\theta,\phi)\coloneqq|e^{ix}-e^{iy}|$。将其视为 $\mathbb{U}$中的对象时，令 $d(\theta,\phi)=|\theta-\phi|$。$\boldsymbol{\mathcal{W}}_{2\pi,N}$ 或 $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{2\pi,N}$上的相容度量，以及它们的 #-版本上的相容度量，由下式给出

$$d_H(\xi,\eta) := \min_{\sigma\in\mathfrak{S}_N}\max_{1\leqslant i\leqslant N} d(\xi_{\sigma(i)},\eta_i),$$

对于相应空间中的 ξ,η ，其完备化以添加上划线的方式表示。注意，与 $\boldsymbol{\mathcal{W}}_{\mathbb{R},2\pi,N}$不同，空间 $\boldsymbol{\mathcal{W}}_{2\pi,N}$ 和 $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{2\pi,N}$ 是紧的。

此外，UDBM（6.12）存在到 $\boldsymbol{\mathcal{W}}_{2\pi,N}$ （分别地，$\boldsymbol{\mathcal{W}}^{\#}_{2\pi,N}$）以及 $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{2\pi,N}$（分别地，$\boldsymbol{\mathcal{C}}^{\#}_{2\pi,N}$）的连续投影，记为 $(\boldsymbol{\Theta}(t))_{t\geqslant 0}$ 和 $(\boldsymbol{\Xi}(t))_{t\geqslant 0}$。

定义 6.1. 分别在 $\boldsymbol{\mathcal{W}}_{\mathbb{R},2\pi,N}$、$\boldsymbol{\mathcal{W}}_{2\pi,N}$ 和 $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{2\pi,N}$ （或其 # 对应空间）中演化的过程 $(\boldsymbol{X}(t))_{t\geqslant 0}$、$(\boldsymbol{\Theta}(t))_{t\geqslant 0}$ 和 $(\boldsymbol{\Xi}(t))_{t\geqslant 0}$，称为 *UDBM*。

如命题 6.1所述，所有这些随机过程在初始位置不在边界上时永不相撞；否则，它们会瞬间离开边界。

推论 6.1. 定理 3.1 具有直接对应(3.24)，其中 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{\mathcal{W}}_{\mathbb{R},2\pi,N}$ 被替换为 $\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{\mathcal{W}}^{\#}_{2\pi,N}$ （相应地，$\boldsymbol{\xi}\in\boldsymbol{\mathcal{C}}^{\#}_{2\pi,N}$）。

与注记2.1类似，可以陈述如下注记。

注 6.1。 任何$\mathcal{C}_{2\pi,N}$ 中的连续路径 $(\xi(t))_{t\geqslant 0}$ ，只要从不发生碰撞且瞬时离开边界，就存在唯一的连续提升 $(\theta(t))_{t\geqslant 0}$ ，属于$\boldsymbol{\mathcal{W}}_{2\pi,N}$ ，其中 $\theta_k(0)=x$，只要$p_2(x)=\xi_k(0)$。任何$\boldsymbol{\mathcal{W}}_{2\pi,N}$ 中的连续路径 $(\theta(t))_{t\geqslant 0}$ ，若具有相同性质，也存在唯一的连续提升 $(x(t))_{t\geqslant 0}$ ，属于$\boldsymbol{\mathcal{W}}_{\mathbb{R},2\pi,N}$ ，其中 $x_k(0)=y$，只要 $p_1(y)=\theta_k(0)$。

以下结论可由注 6.1和命题6.1推出。

推论 6.2。 定义*6.1* 中的 *UDBM* 的所有表示都是连续强马尔可夫过程。此外， $(\boldsymbol{\Theta}(t))_{t\geqslant 0}$在 $\mathbb{U}^N$中满足与 $(\boldsymbol{X}(t))_{t\geqslant 0}$类似的随机微分方程。

6.2 定理3.1 和 3.2 的证明

我们同时证明这两个定理：首先证明这些过程的紧性，然后确定 $\boldsymbol{P}$ 的完整谱，最后识别任意极限点的分布。

6.2.1 紧性结果

我们首先证明 $(\Theta(L^2t))_{t\geqslant 0}$ 在 $\mathbb{C}^N$ 中的紧性，利用初等对称多项式可在 Schur 基下展开这一性质以及引理 6.1。根据连续映射定理，通过投影可得 $(\Xi(L^2t))_{t\geqslant 0}$ 的紧性。随后通过提升即可得到 $(2\pi X(L^2t)/L)_{t\geqslant 0}$ 的紧性，而这需要控制绕数（引理6.3）。

预备知识。 由于 $\mathbb{U}^N$ 是一个紧集，利用 $(\Theta(n))_{n\geqslant 0}$ 的马尔可夫性质以及紧性判据 [EK86，定理 8.6，第 137]页，可将证明归结为证明

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{L\geqslant 2}\sup_{\theta\in\boldsymbol{\mathcal{W}}^{\#}_{L,N}}\mathbb{E}_\theta\left[\sup_{0\leqslant t\leqslant\delta}\left\|\Theta(L^2t)-\theta\right\|_\infty\right]=0. \tag{6.15}$$

我们将 $\theta=(\theta_1,\cdots,\theta_N)=(e^{2i\pi x_1/L},\cdots,e^{2i\pi x_N/L})\in\boldsymbol{\mathcal{W}}^{\#}_{L,N}$视为一个酉多项式的根。因此，除一个置换外， $\sigma\in\mathfrak{S}_N$, θ 由下式刻画

$$e_k(\theta_1,\cdots,\theta_N)=e_k(e^{2i\pi x_1/L},\cdots,e^{2i\pi x_N/L}),\quad 1\leqslant k\leqslant N,$$

其中 e_k 表示第 k 个初等对称多项式。控制$e_k(z_1,\cdots,z_N)$与 $e_k(\theta_1,\cdots,\theta_N)$之间的差异，便能控制 z_i与 θ_i之间的距离，这与多项式根关于其系数的经典连续性相同。

我们采用 以下经典引理，其证明为完整起见放在文末 .

引理 6.1。 设 $K\subset\mathbb{C}^N$是紧的。对于 $\theta\in K$和 $\varepsilon>0$，令 $C_1(\theta,\varepsilon),\ldots,C_\ell(\theta,\varepsilon)$ 为 $B(\theta_k,\varepsilon)$的并集的连通分支，并令 i_k 表示包含 θ_k的分支的指标。那么，存在仅依赖于 K和 N的 λ，使得对所有 $z\in K^N$，

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N}|e_k(z)-e_k(\theta)|<\lambda\varepsilon^N\quad\Longrightarrow\quad\exists\sigma\in\mathfrak{S}_N,\,\forall\,1\leqslant k\leqslant N,\,z_{\sigma(k)}\in C_{i_k}(\theta,\varepsilon).$$

这种方法很有成效，因为我们有经典恒等式

$$e_k(\theta_1,\cdots,\theta_N)=s_{(1^k)}(\theta_1,\cdots,\theta_N),$$

其中 $(1^k)=(1,\ \cdots,\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0)$ 是一个含有 k 个一和 $N-k$ 个零的分拆。

注 6.2。 特征函数 $s_{(1^k)}$ 对应于 *MESSEP* 特征函数 ψ_ξ/ψ_c，，其中$\xi \in \mathcal{C}_{L,\ N}$ 由紧致构型 c 通过向其最顶端的 $+1$ 个粒子添加 k 得到（即在复平面上将它们旋转 $2\pi/L$）。对应关系见注 *2.6* 。

引理 6.2. 与 *MESSEP* 特征函数 e_k 相关的特征值 r_k 满足 ：

$$1 - r_k = \frac{k}{2}\left(1 - \frac{k-1}{N}\right)\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{L^4}\right), \tag{6.16}$$

当 $L \to \infty$ 时，其中最后一个 $\mathcal{O}$ 项中的常数仅取决于 N。

引理 *6.2* 的证明。下面引理的证明与第 5 节中的谱隙估计遵循相同思路。由（5.5）可得，对于任意 x，属于紧集 $J \subset \mathbb{R}$,

$$\cos\left(\frac{2\pi(x+1)}{L}\right) = \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) - \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{L^4}\right), \tag{6.17}$$

当 $L \to \infty$ 时，其中 $\mathcal{O}$ 项中的常数仅取决于 J。回忆一下，ρ_ξ 在（2.10）中定义，并且 $r_k = \rho_\xi/\rho_c = \rho_\xi/\rho$ 对某个 $\xi \in \boldsymbol{\mathcal{C}}_{L,\ N}$ 如备注 6.2 中所述。于是，我们得到

$$1 - r_k = \frac{1}{\rho}\left[2\sum_{i=N-k+1}^{N}\left(c_i + \boldsymbol{\gamma} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{L^4}\right)\right],$$

当 $L \to \infty$ 时，其中最后一个 $\mathcal{O}$ 项中的常数仅取决于 N。

利用（5.7）的左端，并注意到 $(c_i)_{1\leqslant i\leqslant N}$ 是公差为 1 的等差数列，满足 $c_N + \boldsymbol{\gamma} = (N-1)/2$, 我们可推出（6.16）。 □

此外，由离散时间伊藤公式可知，对所有 $n \geqslant 0$,

$$e_k\left(\Theta(n)\right) = e_k\left(\theta\right) + (r_k - 1)\sum_{i=0}^{n-1} e_k(\Theta(i)) + M_n^{(k)}, \tag{6.18}$$

其中 $(M_n^{(k)})_{n\geqslant 0}$ 是一个平方可积复值鞅，满足

$$M_{n+1}^{(k)} - M_n^{(k)} = e_k(\Theta(n+1)) - e_k(\Theta(n)) + (1 - r_k)\, e_k(\Theta(n)). \tag{6.19}$$

因此，为证明（6.15），利用引理 6.1 和（6.18），只需控制

$$\begin{aligned} e_k\left(\Theta(L^2 t)\right) - e_k(\theta) &= \underbrace{e_k\left(\Theta(L^2 t)\right) - e_k\left(\Theta(\lfloor L^2 t\rfloor)\right)}_{=:\Delta_{\lfloor L^2 t\rfloor}} + e_k\left(\Theta(\lfloor L^2 t\rfloor)\right) - e_k(\theta) \\ &= \Delta_{\lfloor L^2 t\rfloor} + (r_k - 1)\sum_{i=0}^{\lfloor L^2 t\rfloor - 1} e_k(\Theta(i)) + M_{\lfloor L^2 t\rfloor}^{(k)}. \end{aligned} \tag{6.20}$$

式(6.20)中前两项的上界。首先，引入

$$\alpha = \sup_{1\leqslant k\leqslant N}\ \sup_{\theta\in\mathbb{U}^N} |e_k(\theta)| \quad \text{and} \quad \beta = \sup_{1\leqslant k\leqslant N}\ \sup_{1\leqslant j\leqslant N}\ \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \left|\frac{\partial e_k(e^{2i\pi x_1/L}, \cdots, e^{2i\pi x_N/L})}{\partial x_j}\right|.$$

注意到

$$\forall k \in \{1, \cdots, N\}, \quad \frac{k}{2}\left(1 - \frac{k-1}{N}\right) \leqslant \frac{(N+1)^2}{8N}. \tag{6.21}$$

于是，i t由中值定理可得，对所有 $1 \leqslant k \leqslant N$、 $L \geqslant 2$ 和 $\delta \geqslant 0$ ，

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant \delta} |\Delta_{\lfloor L^2 t \rfloor}| = \sup_{0 \leqslant t \leqslant \delta} \left| e_k\left(\Theta(L^2 t)\right) - e_k\left(\Theta(\lfloor L^2 t \rfloor)\right)\right| \leqslant \frac{2\pi\beta}{L}. \tag{6.22}$$

此外，结合（6.21）和（6.16），我们得到

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant \delta} \left| (r_k - 1) \sum_{i=0}^{\lfloor L^2 t \rfloor - 1} e_k(\Theta(i)) \right| \leqslant C_1 \delta, \tag{6.23}$$

对某个仅依赖于 N， α， β的常数 C_1。

*Bound*在鞅项上，位于（6.20）。利用（6.22）、（6.21）和（6.19），我们得到 n

$$\mathbb{E}_\theta\left[|M_{n+1}^{(k)} - M_n^{(k)}|^2\right] \leqslant \frac{C_2}{L^2}. \tag{6.24}$$

对某个仅依赖于 N， α， β的常数 C_2。应用Doob最大不等式，我们推得，对所有 $1 \leqslant k \leqslant N$、 $L \geqslant 2$、 $\delta \geqslant 0$ 和 $\eta > 0$,

$$\mathbb{P}_\theta\left(\max_{0 \leqslant t \leqslant \delta} |M_{\lfloor L^2 t \rfloor}^{(k)}| \geqslant \eta\right) = \mathbb{P}_\theta\left(\max_{0 \leqslant n \leqslant \lfloor L^2 \delta \rfloor} |M_n^{(k)}| \geqslant \eta\right) \leqslant \frac{C_2 \delta}{\eta^2} \tag{6.25}$$

紧性判据 (6.15)。 假设 L 足够大，且 δ 足够小，从而

$$\frac{2\pi\beta}{L} + C_1\,\delta \leqslant 2\eta. \tag{6.26}$$

由（6.22）、（6.23）、（6.25）和（6.20）可得

$$\mathbb{P}_\theta\left(\max_{0 \leqslant t \leqslant \delta} \max_{1 \leqslant k \leqslant N} \left| e_k\left(\Theta(L^2 t)\right) - e_k(\theta)\right| \geqslant 3\eta\right) \leqslant \frac{C_2 \delta}{\eta^2}. \tag{6.27}$$

对于任意 $\varepsilon > 0$，引入

$$\Lambda = \left\{ \max_{0 \leqslant t \leqslant \delta} \max_{1 \leqslant k \leqslant N} \left| e_k\left(\Theta(L^2 t)\right) - e_k(\theta)\right| < \lambda \varepsilon^N \right\},$$

其中 λ_ε 由引理 6.1给出。在事件 Λ_ε上，该引理意味着对所有 $0 \leqslant t \leqslant \delta$，存在 $\sigma_t \in \mathfrak{S}_N$ 使得

$$\forall k \in \{1, \cdots, N\}, \quad \Theta_{\sigma_t(k)}(L^2 t) \in C_{i_k}(\theta, \varepsilon) \subset B(\theta_k, (2N-1)\varepsilon).$$

S由于 $t \mapsto \Theta(L^2 t)$ 连续，且在 θ 处等于 $t = 0$，我们必有 $\sigma_t = \mathrm{id}$ 对所有 $0 \leqslant t \leqslant \delta$均成立。最后，利用 6.27 式及 $3\eta = \lambda\varepsilon^N$，可写为

$$\mathbb{E}_\theta\left[\sup_{0 \leqslant t \leqslant \delta} \left\|\Theta(L^2 t) - \theta\right\|_\infty\right] \leqslant (2N-1)\varepsilon + 2\mathbb{P}(\Lambda_\varepsilon^c) \leqslant (2N-1)\varepsilon + \frac{2C_2\delta}{\eta^2}.$$

在后一个不等式中， η （因此 ε）可以任意小，我们只需取L 足够大，并取 δ 足够小（取值依赖于 η），使得（6.26）成立。由于这些常数关于 $\theta \in \boldsymbol{\mathcal{W}}_L^{\#}$ 一致，N，令 $L \to \infty$，再令 $\delta \to 0$，即可得到（6.15）。

紧性 $(2\pi X(L^2t)/L)_{t\geqslant 0}$。为了应用 [EK86，定理 8.6，第 137],我们需要证明

$$\lim_{\delta\to 0} \limsup_{L\geqslant 2} \sup_{x\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}_x \left[\sup_{0\leqslant t\leqslant \delta} \left\| \frac{2\pi X(L^2t)}{L} - \frac{2\pi x}{L} \right\|_\infty \right] = 0,$$

但由于$\boldsymbol{\mathcal{W}}_{\mathbb{R},\, 2\pi,\, N}$ 不是紧集，因此还需要证明对每个固定的 $t \geqslant 0$， $\left(2\pi X(L^2t)/L\right)_{L\geqslant 2}$ 的紧性。第一步可由上文已证明的 $\left(\Theta(L^2t)\right)_{t\geqslant 0}$ 的紧性，以及相关论证和不等式直接得到

$$\forall \kappa > 0, \quad \mathbb{P}_x \left(\sup_{0\leqslant t\leqslant \delta} \left\| \frac{2\pi X(L^2t)}{L} - \frac{2\pi x}{L} \right\|_\infty > \kappa \right) \leqslant \frac{1}{\beta\kappa} \mathbb{E}_\theta \left[\sup_{0\leqslant t\leqslant \delta} \|\Theta(L^2t) - \theta\|_\infty \right],$$

根据 $\mathbb{U}$上的测地距离与 $\mathbb{U} \subset \mathbb{C}$上的欧几里得距离等价，并结合马尔可夫不等式，对于某个 $\beta > 0$，有以下不等式成立。

其次，由于 $|X_N(L^2t) - X_1(L^2t)| \leqslant L - 1$， $(2\pi X(L^2t)/L)_{L\geqslant 2}$ 的紧性可归结为质心的紧性

$$\frac{2\pi S(L^2t)}{L} = \frac{2\pi}{L} \sum_{k=1}^{N} X_k(L^2t). \tag{6.28}$$

引理 6.3。 设 $s \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ 满足：对所有 $n \in \mathbb{N}$， $s_{n+1} - s_n \in \{\pm 1\}$。那么，对于任意 $L \geqslant 3$,

$$\frac{2\pi(s_n - s_0)}{L} = \frac{2\pi/L}{\sin(2\pi/L)} \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Im}\left(e^{\frac{2i\pi(s_{k+1}-s_k)}{L}} \right). \tag{6.29}$$

注 6.3。 式 (6.29) 左侧的整数部分正是序列的代数绕数 $(e^{2i\pi s_k/L})_{k\geqslant 0}$ 截至时间 n。

引理 *6.3* 的证明。 假设 $s_0 = 0$。令 δ^+ 和 δ^- 分别表示满足 $s_{k+1} - s_k = +1$ 和 $s_{k+1} - s_k = -1$ 的指标 $0 \leqslant k \leqslant n-1$ 的数量。那么 $\delta^+ + \delta^- = n$， $s_n = \delta^+ - \delta^-$ 并且

$$\operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2i\pi(s_{k+1}-s_k)}{L}} \right) = \operatorname{Im}\left(\delta^+ e^{2i\pi/L} + \delta^- e^{-2i\pi/L} \right) = s_n \sin\left(\frac{2\pi}{L}\right),$$

这就证明了该结论。 □

为继续论证，注意到

$$e^{\frac{2i\pi}{L}\sum_{k=1}^{N} x_k} = e_N\left(e^{2i\pi x_1/L}, \cdots, e^{2i\pi x_N/L} \right) \in \mathbb{U}. \tag{6.30}$$

我们随后由引理 6.3、等式（6.30）以及把（6.19）应用于 $k = N$ 和 $n = k$ 推出

$$\begin{aligned} \frac{2\pi(S(n) - S(0))}{L} \frac{2\pi/L}{\sin(2\pi/L)} \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Im}\left(e_N(\Theta(k+1)) \overline{e_N(\Theta(k))} \right), \\ = \frac{2\pi/L}{\sin(2\pi/L)} \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Im}\left(e^{-\frac{2i\pi S_k}{L}} (M_{k+1}^{(N)} - M_k^{(N)}) \right), \end{aligned} \tag{6.31}$$

其中，在最后一个等式中，我们利用MESSEP谱，因而 r_k为实数。注意，（6.31）中虚部内的求和项是中心化且互不相关的。

因此，应用（6.24），我们得到

$$\mathbb{V}\left(\frac{2\pi(S(\lfloor L^2 t\rfloor)-S(0))}{L}\right)\leqslant C_3 t,$$

对于某个常数 C_3，其与 L无关。这意味着（6.28）是紧的，因此 $\big(2\pi X(L^2t)/L\big)_{L\geqslant 2}$, 的每个边缘分布也是紧的，从而完成证明。 □

引理 *6.1* 的证明。取 $R>0$ 使得 $K\subset\{z\in\mathbb{C}:\ \ |z|\leqslant R\}$，并令 $\lambda^{-1}=1+R+\cdots+R^N$。引入

$$P(X)=\prod_{k=1}^{N}(X-\theta_k)=\sum_{k=0}^{N}(-1)^{N-k}e_{N-k}(\theta_1,\cdots,\theta_N)X^k$$

$$\text{and}\quad Q(X)=\prod_{k=1}^{N}(X-z_k)=\sum_{k=0}^{N}(-1)^{N-k}e_{N-k}(z_1,\cdots,z_N)X^k.$$

由于对所有 $z\in\bigsqcup_{i=1}^{\ell}\partial C_i(\theta,\ \varepsilon)$ 和 $1\leqslant k\leqslant N$，均有 $|z-\theta_k|\geqslant\varepsilon$，因此我们得到

$$\kappa=\min_{1\leqslant i\leqslant\ell}\ \min_{z\in\partial C_i(\theta,\varepsilon)}|P(z)|\geqslant\varepsilon^N.$$

假设对所有 $1\leqslant k\leqslant N$，$|e_k(z_1,\ \cdots,\ z_N)-e_k(\theta_1,\ \cdots,\ \theta_N)|\leqslant\delta$，且 $0<\delta<\lambda\varepsilon^N$。那么，对每个 $1\leqslant i\leqslant\ell$ 和 $z\in\partial C_i(\theta,\ \varepsilon)$,

$$|P(z)-Q(z)|\leqslant\delta/\lambda<\kappa\leqslant P(z).$$

应用儒歇定理可知，P 和 Q 在每个连通分支 $C_i(\theta,\ \varepsilon)$, $1\leqslant i\leqslant\ell$中具有相同数量的根（按重数计）。这就完成了证明。 □

6.2.2 谱分解

在证明$\boldsymbol{\mathcal{S}}_{2\pi,\ N}$构成 $(\boldsymbol{P}_t)_{t\geqslant 0}$在 $\mathbb{L}^2(\boldsymbol{\mathcal{C}}_{2\pi,\ N},\ \boldsymbol{\mu})$中的特征函数标准正交集之前，我们先证明命题3.1。

命题*3.1*的证明。与离散情形一样，容易验证，对所有 $m,\ m'\in\mathfrak{W}_N$,

$$\int_{(0,2\pi)^N}\Psi_m(\theta)\,\overline{\Psi_{m'}(\theta)}\,\lambda(d\theta)=N!\int_{\boldsymbol{\mathcal{C}}_{2\pi,N}}\Psi_m(\theta)\,\overline{\Psi_{m'}(\theta)}\,\lambda(d\theta)=N!\,\delta_{m=m'}.$$

我们推得出 $\{\Psi_m:\ m\in\mathfrak{W}_N\}$在希尔伯特空间 $\mathbb{L}^2(\boldsymbol{\mathcal{C}}_{2\pi\text{中构成一个标准正交集},\ N},\lambda$).

我们来证明它构成一个希尔伯特基。对任意 $m\in\mathbb{Z}^N$，定义

$$e_m(x)=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\prod_{i=1}^{N}e^{im_ix_i}.$$

三角系统 $\{e_m\colon\ m\in\mathbb{Z}^N\}$ 在 $\mathbb{L}^2((0,2\pi)^N,\lambda)$中构成一个完备正交归一系统，并配备其标准内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$。

特别地，对于任意反对称函数 $f\in\mathbb{L}^2((0,2\pi)^N,\lambda)$ 以及任意 $\sigma\in\mathfrak{S}_N$，有$\langle f,e_{\sigma\cdot m}\rangle=\varepsilon(\sigma)\langle f,e_m\rangle$，由此可得

$$f(x)=\sum_{m\in\mathbb{Z}^N}\langle f,e_m\rangle e_m(x)=\sum_{m\in\mathfrak{W}_N}\langle f,e_m\rangle\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N}\varepsilon(\sigma)e_{\sigma\cdot m}(x)=e^{i\gamma\sum_{i=1}^N x_i}\sum_{m\in\mathfrak{W}_N}\langle f,e_m\rangle\Psi_m(x).$$

由后一恒等式可知，集合 $\{\Psi_m\colon\ m\in\mathfrak{W}_N\}$ 在平方可积反对称函数空间中于 $(0,2\pi)^N$ 上稠密。由于任意平方可积函数在 $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{2\pi,N}$ 上自然提升为 $(0,2\pi)^N$ 上的反对称函数，命题 3.1 的第一部分随之成立。

此外，$\boldsymbol{\mathcal{S}}_{2\pi,N}$ 由 $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{2\pi,N}$ 上的光滑函数（多项式）组成。由于 $\Psi_{\mathbf{c}}$ 与 Ψ成正比，而后者在 $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{2\pi,N}$ 上有界且严格为正，易知 $\boldsymbol{\mathcal{S}}_{2\pi,N}$ 是 $\mathbb{L}^2(\boldsymbol{\mathcal{C}}_{2\pi,N},\boldsymbol{\mu})$中的标准正交集。关于 $\mathrm{span}(\boldsymbol{\mathcal{S}}_{2\pi,N})$ 在一致拓扑中的稠密性，我们应用 Stone–Weierstrass 定理。只需注意到该族是一个 C^*-代数。

为此，命题 3.2 结合舒尔多项式的标准性质（见（4.58））保证了在乘法下的稳定性。集合 $\mathrm{span}(\boldsymbol{\mathcal{S}}_{2\pi,N})$ 在复共轭运算下封闭，这一点可由以下引理得出。

引理 6.4。设 λ 为一个整数分拆，且 $\ell\geqslant\lambda_1$。那么，对 $1\leqslant i\leqslant N$，$\mu_i:=\ell-\lambda_{N-i+1}$ 定义了一个整数分拆，使得

$$\overline{s_\lambda(e^{ix_1},\cdots,e^{ix_N})}=e^{-i\ell\sum_{k=1}^N x_k}\,s_\mu(e^{ix_1},\cdots,e^{ix_N}).\tag{6.32}$$

引理 *6.4*的证明。注意到 $\delta=(N-1,\cdots,0)$ 可通过反转其坐标并将 $-\delta$加到每个分量上得到，因此，恒等式（6.32）可通过标准计算得出；这些计算与备注 5.1上下文中所用的计算类似。□

因此，通过标准的逼近论证，我们可以得出结论：$\boldsymbol{\mathcal{S}}_{2\pi,N}$ 是 $\mathbb{L}^2(\boldsymbol{\mathcal{C}}_{2\pi,N},\boldsymbol{\mu})$的希尔伯特正交归一基，从而完成证明。□

我们现在证明，$\boldsymbol{\mathcal{S}}_{2\pi,\ N}$ 恰好是 $(\boldsymbol{P}_t)_{t\geqslant0}$ 的正交归一特征函数集合。

特征函数与特征值。令 $\mathcal{L}$ 为 $(\boldsymbol{X}(t))_{t\geqslant0}$ 的无穷小生成元，$\mathcal{L}^*$ 为其伴随，定义在 $\mathbb{R}^N$ 上充分光滑的函数上如下：

$$\mathcal{L}f=\frac{(2\pi)^2}{N}\left(\frac{1}{2}\Delta f+\frac{\nabla\Psi}{\Psi}\cdot\nabla f\right)\quad\text{and}\quad\mathcal{L}^*g=\frac{(2\pi)^2}{N}\left(\frac{1}{2}\Delta g-\operatorname{div}\left(g\frac{\nabla\Psi}{\Psi}\right)\right),$$

令 $H^1(\mathsf{C}_{2\pi,N})$ 和 $H_0^1(\mathsf{C}_{2\pi,N})$ 为索伯列夫空间，它们是在 $\mathbb{L}^2(\mathsf{C}_{2\pi,N},\lambda)$ 中分别由算子 $f\mapsto\nabla f$ 作用于 $\mathsf{C}_{2\pi,N}$ 上的光滑函数以及 $\mathsf{C}_{2\pi,N}$ 上的紧支撑光滑函数所定义的闭包。对于任意 $f\in H^1(\mathsf{C}_{2\pi,N})$ 和 $g/\Psi\in H_0^1(\mathsf{C}_{2\pi,N})$，$(\mathcal{L}f)\,g$ 和 $f\,(\mathcal{L}^*g)$ 在 $\mathsf{C}_{2\pi,N}$ 上均可积，并且

$$\int_{\boldsymbol{\mathcal{C}}_{2\pi,N}}(\mathcal{L}f)\,\overline{g}\,d\lambda=\int_{\boldsymbol{\mathcal{C}}_{2\pi,N}}f\,\overline{\mathcal{L}^*g}\,d\lambda.\tag{6.33}$$

后一个恒等式首先对光滑函数成立，然后由密度性得到。

引理 6.5。 对于每个 $m \in \mathfrak{W}_N$，有

$$\mathcal{L}^*(\Psi_{\boldsymbol{c}}\Psi_m) = \frac{2\pi^2}{N}\left[\Psi_{\boldsymbol{c}}\Delta\Psi_m - \Psi_m\Delta\Psi_{\boldsymbol{c}}\right] = -E_m\Psi_{\boldsymbol{c}}\Psi_m, \tag{6.34}$$

and

$$\mathcal{L}f_m = -E_m f_m, \quad \textit{with} \quad f_m = \frac{\Psi_m}{\Psi_{\boldsymbol{c}}}. \tag{6.35}$$

引理的证明 *6.5*。 等式（6.34）可由直接计算得到。利用（6.33）以及 $\{\Psi_m\colon m \in \mathfrak{W}_N\}$ in $\mathbb{L}^2(\mathcal{C}_{2\pi,N},\lambda)$ 的正交性，我们得到

$$\int_{\mathcal{C}_{2\pi,N}} \mathcal{L}\left(\frac{\Psi_m}{\Psi_{\boldsymbol{c}}}\right)\overline{\frac{\Psi_{m'}}{\Psi_{\boldsymbol{c}}}}\,d\boldsymbol{\mu} = \int_{\mathcal{C}_{2\pi,N}} \frac{\Psi_m}{\Psi_{\boldsymbol{c}}}\,\overline{\mathcal{L}^*(\Psi_{m'}\Psi_{\boldsymbol{c}})}\,d\lambda = -E_m\delta_{m=m'}.$$

回顾一下，$\Psi_{\boldsymbol{c}}$ 与 Ψ 相差一个模为一的复常数。由于 $\mathcal{L}(\Psi_m/\Psi_{\boldsymbol{c}}) \in \mathbb{L}^2(\mathcal{C}_{2\pi,N},\boldsymbol{\mu})$和 $\mathcal{S}_{2\pi,N}$ 是 $\mathbb{L}^2(\mathcal{C}_{2\pi,N},\boldsymbol{\mu})$ 的标准正交基，由命题 3.1，我们得到（6.35）。 □

由命题 6.1，对于任意在 $\mathcal{W}^{\mathbb{R},2\pi,N}$ 上连续、在 $\mathcal{W}^{\mathbb{R},2\pi,N}$ 上二次可微，且其导数可连续延拓至边界的函数 f，我们可以写成

$$f(\boldsymbol{X}_t) = f(\boldsymbol{x}) + \int_0^t \mathcal{L}f(\boldsymbol{X}_s)\,ds + \frac{2\pi}{\sqrt{N}}\int_0^t \nabla f(\boldsymbol{X}_s)\,dB_s.$$

特别地，如果在后一个恒等式中取 $f = f_m$，再取期望，我们得到

$$\mathbb{E}_{\boldsymbol{x}}\left[f_m(\boldsymbol{X}(t))\right] = \boldsymbol{P}_t f_m(\boldsymbol{x}) = e^{-E_m t} f_m(\boldsymbol{x}). \tag{6.36}$$

可逆概率测度。 由（6.36）可知，对于所有 $m, m' \in \mathfrak{W}_N$ 和 $t \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}_{2\pi,N}} (\boldsymbol{P}_t f_m)\,\overline{f_{m'}}\,d\boldsymbol{\mu} &= e^{-E_m t}\int_{\mathcal{C}_{2\pi,N}} \Psi_m\,\overline{\Psi_{m'}}\,d\lambda \\ &= e^{-E_m t}\delta_{m=m'} \\ &= \int_{\mathcal{C}_{2\pi,N}} f_m\,\overline{\boldsymbol{P}_t f_{m'}}\,d\boldsymbol{\mu}.\end{aligned} \tag{6.37}$$

(6.37) 中的恒等式可扩展到 $\operatorname{span}(\{f_m\colon m \in \mathfrak{W}_N\})$，因此也可扩展到 $C(\mathcal{C}_{2\pi,\overline{N}})$，这是由密度性得出的（见命题 3.1）。特别地，对于 $\mathcal{C}_{2\pi,N}$ 上的所有连续函数 f，我们得到 $\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{P}_t f = \boldsymbol{\mu} f$。

应用詹森不等式，我们得到 $\boldsymbol{P}_t$ 将 $\mathbb{L}^2(\mathcal{C}_{2\pi,N},\boldsymbol{\mu})$ 映射到自身，并且算子 $f \mapsto \boldsymbol{P}_t f$ 在 $\mathbb{L}^2(\mathcal{C}_{2\pi,N},\boldsymbol{\mu})$ 上定义了一个压缩算子。由 $\operatorname{span}(\{f_m\colon m \in \mathfrak{W}_N\})$ 在 $\mathbb{L}^2(\mathcal{C}_{2\pi,N},\boldsymbol{\mu})$ 中的稠密性，我们推得 (6.37) 可扩展到 $\mathbb{L}^2(\mathcal{C}_{2\pi,N},\boldsymbol{\mu})$，这正是我们所要证明的可逆性。

为证明唯一性，设 $\boldsymbol{\nu}$ 是另一个不变概率测度。于是，根据（6.36），对所有 $m \neq \boldsymbol{c}$都有 $\boldsymbol{\nu}(f_m) = 0$，也就是说，对所有 $m \neq \boldsymbol{c}$都有 $\langle \mathbb{1},\ f_m\rangle_{\boldsymbol{\nu}} = 0$，其中 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_{\boldsymbol{\nu}}$是$\mathbb{L}^2(\mathcal{C}_{2\pi,\ N},\ \boldsymbol{\nu})$中的内积。由于 $\operatorname{span}(\{f_m\colon m \in \mathfrak{W}_N\})$ 在 $\mathbb{L}^2(\mathcal{C}_{2\pi,\ N},\ \boldsymbol{\nu})$中稠密，因此可得

$$\mathbb{L}^2(\mathcal{C}_{2\pi,N},\boldsymbol{\nu}) = \mathbb{C}\cdot\mathbb{1} \overset{\perp}{\oplus} \overline{\operatorname{span}(\{f_m : m \neq \boldsymbol{c}\})}^{(\boldsymbol{\nu})}.$$

因此，任意 $f \in C(\overline{\mathcal{C}_{2\pi,\,N}})$（故相对于 $\boldsymbol{\mu}$ 和 $\boldsymbol{\nu}$平方可积）都可写成 $f = \alpha\mathbb{1} + g$，其中 g 在 $\mathbb{L}^2(\mathcal{C}_{2\pi,\,N},\ \boldsymbol{\nu})$ 和 $\mathbb{L}^2(\mathcal{C}_{2\pi,\,N},\ \boldsymbol{\mu})$中均与 $\mathbb{C}\cdot\mathbb{1}$ 正交。因此$\alpha = \boldsymbol{\mu}(f) = \boldsymbol{\nu}(f)$，从而 $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\mu}$。

级数的收敛性 (3.29)。 我们证明点态恒等式（3.29）以及 $t > 0$上所有偏导数的一致收敛性。在此阶段，由于 $f \mapsto \boldsymbol{P}_t f$ 在该空间上连续，我们已经证明（3.29）在 $\mathbb{L}^2(\mathcal{C}_{2\pi,\,N},\ \boldsymbol{\mu})$ 中成立。

进一步地，可以看出

$$C_m = \sup_{x\in\overline{\mathcal{C}}_{2\pi,N}} |f_m(x)| = \sup_{x\in\overline{\mathcal{C}}_{2\pi,N}} \left|\frac{\Psi_m(x)}{\Psi_{\boldsymbol{c}}(x)}\right| = \sup_{\theta\in\mathbb{U}^N} |s_\lambda(\theta)|\,,$$

其中 λ 是满足 $\lambda_i - \lambda_j + j - i = m_{N-i+1} - m_{N-j+1}$的一个分拆。关于对应关系，请参阅命题 3.2和注 3.2 。

由于 s_λ 是一个具有非负系数的对称多项式，因此有

$$C_m = s_\lambda(1,\cdots,1) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant N} \frac{\lambda_i - \lambda_j + j - i}{j - i},$$

其中最后一个等式是经典的特化公式（2.20），给出了形状为 λ且其项取自 $\{1,\ \cdots,\ N\}$的半标准杨表的数量。

我们得到

$$C_m \leqslant (m_N - m_1)^{\frac{N(N-1)}{2}}.$$

此外，可以验证存在 $d > 0$，使得对于所有 $m \in \mathfrak{W}_N$ 和 $\ell \geqslant 0$，若 $E_m = \ell$，则 m_1^2 和 m_N^2 均有界于 $d(\ell+1)$，从而得到 $m_N - m_1 \leqslant 2\sqrt{d(\ell+1)}$，并且

$$\operatorname{card}\{m \in \mathfrak{W}_N : E_m = \ell\} \leqslant \left(2\sqrt{d(\ell+1)} + 1\right)^N \quad \text{and} \quad C_m \leqslant (2\sqrt{d(\ell+1)})^{\frac{N(N-1)}{2}}. \tag{6.38}$$

在（3.29）中将含有 $E_m = \ell$ 的项分组，其中 $\ell = 2\pi^2 n/N$ 且 $n \geqslant 0$，由（6.38）可知，该级数在 $\mathcal{C}_{2\pi,N}$ 上按上确界范数正规收敛。

关于偏导数，由表示式（3.32）和多元莱布尼茨法则可得，对于任意多重指标 $\alpha = (\alpha_1,\cdots,\alpha_N)$,

$$\partial^\alpha f_m(x) = \sum_{\beta\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\beta} (i\delta)^{|\alpha-\beta|} e^{i\delta\sum_{j=1}^N x_j}\, \partial^\beta s_\lambda(e^{ix_1},\cdots,e^{ix_N}).$$

由于组合舒尔恒等式（2.20）中的整数 t_j 有界于 $|\lambda| = \lambda_1 + \cdots + \lambda_N$，因此可得 $|\partial^\beta s_\lambda(e^{ix_1},\cdots,e^{ix_N})| \leqslant |\lambda|^{|\beta|} s_\lambda(1,\cdots,1)$，继而

$$C_m^\alpha := \sup_{x\in\overline{\mathcal{C}}_{2\pi,N}} |\partial^\alpha f_m(x)| \leqslant (|\delta| + |\lambda|)^{|\alpha|} s_\lambda(1,\cdots,1).$$

可以选取 λ，使得 $\lambda_N = 0$。那么必然有 $\delta = m_1 + p$，其中 $N = 2p$ 或 $N = 2p+1$，且每个 λ_j 都由 $m_N - m_1$界定。详见命题3.2 和备注3.2 。由此可推得 C_m^α 至多按 E_m多项式增长，论证过程与之前相同。

最后，级数（3.29）及其所有偏导数均正规收敛，由此完成定理 3.2 的证明。推论 3.1 的第一部分直接由这些收敛性质得出。界（3.30）是（3.29）的直接推论。

□

6.2.3 极限点的唯一性

为了确定 极限时，我们使用上一节建立的谱分解 .

给定 $m \in \mathfrak{W}_N$ 和 $L \geqslant m_N - m_1 + 1$，令 $j \in \mathbb{Z}$ 满足 $m_N + jL < L$ 且 $m_N + jL$ 取最大值，并设 $q = m + j(1, \cdots, 1)$。必然存在 d 使得 $-L < q_1 < \cdots < q_{d-1} < 0$ 且 $0 \leqslant q_d < \cdots < q_N < L$，从而

$$(\xi_1, \cdots \xi_N) = (q_d, \cdots, q_N, q_1 + L, \cdots, q_{d-1} + L) = \tau_L^{d-1} \cdot (q_1, \cdots, q_N) \in \mathcal{C}_{L,N},$$

其中算子 τ_L 定义见 (5.4)，而 τ 表示循环置换 $(1 \cdots N)$。类似地，可以验证 $c = \tau_L^p \cdot \boldsymbol{c}$，其中 $N = 2p$ 或 $N = 2p + 1$ （参见注 2.3）。

这对所有 $x \in \mathbb{Z}^N$ 均成立，

$$f_m\left(\frac{2\pi x}{L}\right) = \varepsilon(\tau)^{p+d-1} \frac{\psi_\xi(x)}{\psi_c(x)},$$

由于后者与（2.13）中给出的 MESSEP 特征函数一致，我们可以写成

$$\mathbb{E}_x\left[f_m\left(\frac{2\pi X(n)}{L}\right)\right] = \left(\frac{\rho_\xi}{\rho_c}\right)^n f_m\left(\frac{2\pi x}{L}\right).$$

我们将证明

$$\lim_{L\to\infty} \left(\frac{\rho_\xi}{\rho_c}\right)^{\lfloor L^2 t \rfloor} = e^{-E_m t}. \tag{6.39}$$

首先，根据周期性，

$$\rho_\xi = 2\sum_{i=1}^N \cos\left(\frac{2\pi(m_i + \boldsymbol{\gamma})}{L}\right) \quad \text{and} \quad \rho_c = 2\sum_{i=1}^N \cos\left(\frac{2\pi(\boldsymbol{c}_i + \boldsymbol{\gamma})}{L}\right).$$

此外，将（6.17）推广可得，对 x，h 在紧集上一致成立：

$$\cos\left(\frac{2\pi(x+h)}{L}\right) = \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) - \frac{1}{2}\left((x+h)^2 - x^2\right)\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{L^4}\right), \tag{6.40}$$

将（6.40）应用于 $x = \boldsymbol{c}_k + \boldsymbol{\gamma}$ 和 $h = m_k - \boldsymbol{c}_k$ 对所有 $1 \leqslant k \leqslant N$，并利用（5.7）中给出的 $\rho_c = \rho$ 的渐近展开，我们得到

$$\frac{\rho_\xi}{\rho_c} = 1 - \frac{2\sum_{i=1}^N \left(\cos\left(\frac{2\pi(\boldsymbol{c}_i+\boldsymbol{\gamma})}{L}\right) - \cos\left(\frac{2\pi(m_i+\boldsymbol{\gamma})}{L}\right)\right)}{\rho_c} = 1 - \frac{2\pi^2}{L^2} E_m + \mathcal{O}\left(\frac{1}{L^4}\right),$$

由此可得（6.39）。

假设（3.21），由上述估计可推出，对所有 $f \in \boldsymbol{\mathcal{S}}_{2\pi,\,N}$ 以及所有固定的 $t \geqslant 0$，

$$\lim_{L\to\infty} \mathbb{E}_x\left[f\left(\Xi(L^2 t)\right)\right] = \mathbb{E}_{\boldsymbol{x}}[f(\boldsymbol{\Xi}(t))]. \tag{6.41}$$

由于 $\operatorname{span}(\boldsymbol{\mathcal{S}}_{2\pi,\,N})$ 在 $C(\boldsymbol{\mathcal{C}}_{2\pi,\,N})$ 中稠密（见命题 3.1），因此可以将（6.41）延拓到 $C(\boldsymbol{\mathcal{C}}_{2\pi,\,N})$，从而证明每个一维边缘分布都收敛。

为了得到 $(\Xi(L^2t))_{t\geqslant 0}$ as $L\to\infty$ 的泛函收敛，还需证明每个有限维边缘分布都收敛到 $(\boldsymbol{\Xi}(t))_{t\geqslant 0}$ 的相应分布。

这由定理 2.5（见 [EK86，第 167] 页，式 (2.25) 与 (2.26)）得出，只要我们验证 $(\boldsymbol{P}_t)_{t\geqslant 0}$ 是 $C(\boldsymbol{\mathcal{C}}_{2\pi\text{上的 Feller 半群，}N})$。后者由定理 3.2 与推论 3.1得出。至此完成对 Ξ的泛函收敛的证明。

设 $(\boldsymbol{X}(t))_{t\geqslant 0}$ 为序列 $\left(2\pi X(L^2t)/L\right)_{t\geqslant 0}$, 的一个极限点，其存在性由第 6.2.1节中的紧性结果所保证。必然地， $(\boldsymbol{X}(t))_{t\geqslant 0}$ 的投影在分布上与 $(\boldsymbol{\Xi}(t))_{t\geqslant 0}$重合。换言之， $(\boldsymbol{X}(t))_{t\geqslant 0}$ 是 $(\boldsymbol{\Xi}(t))_{t\geqslant 0}$的一个提升，并且由注 6.1可知，$(\boldsymbol{X}(t))_{t\geqslant 0}$ 本身是 $\boldsymbol{\mathcal{W}}_{\mathbb{R},\,2\pi,\,N}$上的一个 UDBM，从而完成定理 3.1的证明。

□

第 7 节 第 4 节结果的证明4

现在　　给出定理4.1、4.2 和4.3的详细证明，具体思路如第4.3节所述　　.

7.1 特征引理4.2 和4.3的证明

引理*4.2*的证明。记$S_{n,\,j}(\pi)$ 为等式（4.55）左侧的和。由恒等式$\chi_{(n)}^{\{n|k\}}=(-1)^k$ 以及特征标的正交性可得

$$S_{n,0}(\pi)=\begin{cases} n, & \text{if } \pi=(n),\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases} \tag{7.42}$$

为建立任意4.55的公式 $j\geqslant 0$，我们采用归纳法，并依赖 Murnaghan–Nakayama 规则的递归形式，该规则可表述如下：

$$\chi_{\pi}^{\lambda}=\sum_{\mu\in \mathrm{BS}(\lambda,\pi_1)}(-1)^{\mathrm{ht}(\mu)}\,\chi_{\pi\setminus\pi_1}^{\lambda\setminus\mu}, \tag{7.43}$$

其中总和遍历形状为 λ 的杨图中大小为 π_1 的边条集合 $\mathrm{BS}(\lambda,\ \pi_1)$。边条 μ 是一种连通的斜形，其中不包含 2×2 方格；将其从 λ 中移除后，会得到另一个杨图。高度 $\mathrm{ht}(\mu)$ 是其跨越的行数减一。

在当前情形下，当 λ 为钩形 $\{n|k\}$时，至多有两个大小为 π_1 的边条可以被移除。因此，一般公式（7.43）简化为

$$\chi_{\pi}^{\{n|k\}}=(-1)^{\pi_1-1}\,\chi_{\pi\setminus\pi_1}^{\{n-\pi_1|k-\pi_1\}}+\chi_{\pi\setminus\pi_1}^{\{n-\pi_1|k\}}. \tag{7.44}$$

(7.44) 中的第一项在 $k<\pi_1<n$ 时消失，第二项在 $n-k-1<\pi_1<n$ 时消失。经过简单的变量替换，可得以下恒等式：

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\,\chi_{\pi\setminus\pi_1}^{\{n-\pi_1|k-\pi_1\}}\,(n-2k-1)^j=\sum_{k=0}^{n-\pi_1-1}(-1)^{k+\pi_1}\,\chi_{\pi\setminus\pi_1}^{\{n-\pi_1|k\}}\,((n-\pi_1-2k-1)-\pi_1)^j,$$

and

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\,\chi_{\pi\setminus\pi_1}^{\{n-\pi_1|k\}}\,(n-2k-1)^j=\sum_{k=0}^{n-\pi_1-1}(-1)^k\,\chi_{\pi\setminus\pi_1}^{\{n-\pi_1|k\}}\,((n-\pi_1-2k-1)+\pi_1)^j.$$

结合这两个恒等式、(7.44) 和 (7.43)，可得

$$S_{n,j}(\pi)=\sum_{k=0}^{n-\pi_1-1}(-1)^k\,\chi_{\pi\backslash\pi_1}^{\{n-\pi_1|k\}}\left[((n-\pi_1-2k-1)+\pi_1)^j-((n-\pi_1-2k-1)-\pi_1)^j\right].$$

展开幂之差可得

$$S_{n,j}(\pi)=\sum_{i_1=0}^{j-1}\binom{j}{i_1}\left(1-(-1)^{j-i_1}\right)\pi_1^{j-i_1}\,S_{n-\pi_1,i_1}(\pi\backslash\pi_1). \tag{7.45}$$

假设 $0\leqslant j\leqslant \ell(\pi)-2$。注意到（7.45）中的 $\ell(\pi\backslash\pi_1)=\ell(\pi)-1$ 和 $i_1\leqslant j-1$，迭代这一递推关系可将 $S_{n,j}(\pi)$ 表示为形如 $S_{m,0}(\sigma)$的项的线性组合，其中 $m\geqslant 2$ 且 $\ell(\sigma)\geqslant 2$。由（7.42），所有这些项均为零，因此 $S_{n,j}(\pi)=0$。

剩下要考虑情形 $j=\ell(\pi)-1$。此时，通过递归应用（7.45）产生的指标序列 $i_1>i_2>\cdots$中，唯一能得到非零终端项 $S_{m,0}(\sigma)$ 的序列是严格递减链 $j,\ j-1,\ \ldots\ldots,\ 1,\ 0$，其中 $\sigma=(m)$。由此可得

$$\binom{j}{j-1}2\pi_1\binom{j-1}{j-2}2\pi_2\cdots\binom{1}{0}2\pi_j\,S_{\pi_\ell,0}((\pi_\ell)).$$

这与（4.55）的右侧一致。证明至此完成。 □

引理 *4.3* 的证明。 我们依次证明这四个结论。

第 *1* 点。 恒等式（4.59）由构型 ξ 与分拆λ 之间的对应关系得出，该对应关系在命题 2.4 的证明中有描述。令 $\lambda=\{n|k\}$ 且 $\lambda=\{L-n|N-1-k\}$，并令$\boldsymbol{c}+\boldsymbol{\gamma}=(-(p-\boldsymbol{\gamma}),\ \ldots,\ \overline{\ }(p-\boldsymbol{\gamma}))$ 为对称紧致构型（见注 2.3）。

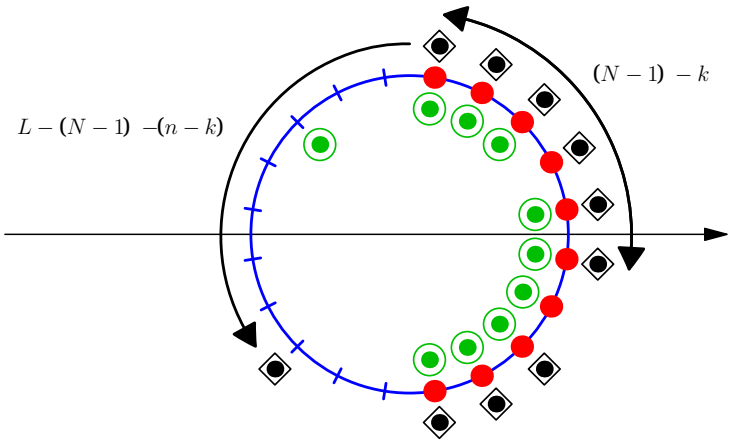

图 10： 圆圈围住的点对应于与钩形分拆 $\{n|k\}$ 相关联的构型（此处 $n=6$ 和 $k=3$），而方框围住的点对应于钩形分拆 $\{L-n|N-k-1\}$。它们可以通过复平面共轭互相推导得到。

在 $\mathbb{U}$-构型空间中，与 λ 和 λ 相关的构型彼此可通过共轭得到（至多相差一个用于调整顺序的置换，见图 10）。此外，有

$$\overline{s_{\{n|k\}}\left(e^{2i\pi x_1/L},\cdots,e^{2i\pi x_N/L}\right)} = \frac{\det\left(e^{\frac{2i\pi}{L}(-\lambda_j-\mathbf{c}_{N-j+1}-\boldsymbol{\gamma})\,x_l}\right)}{\det\left(e^{\frac{2i\pi}{L}(-\mathbf{c}_{N-j+1}-\boldsymbol{\gamma})x_l}\right)} \tag{7.46}$$
$$= \frac{\varepsilon(\overline{\sigma})\det\left(e^{\frac{2i\pi}{L}(\overline{\lambda}_j+\mathbf{c}_{N-j+1}+\boldsymbol{\gamma})x_l}\right)}{\varepsilon(\sigma)\det\left(e^{\frac{2i\pi}{L}(\mathbf{c}_{N-j+1}+\boldsymbol{\gamma})x_l}\right)},$$

其中 $\sigma(j)=N-j+1$ 对所有 $1\leqslant j\leqslant N$ 以及

$$\overline{\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & N-1 & N \\ 1 & N & N-1 & \cdots & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

等式（7.46）中的第一个等号由 $\boldsymbol{c}+\boldsymbol{\gamma}=\sigma\cdot\delta-(p-\boldsymbol{\gamma}$、……、$p-\boldsymbol{\gamma})$ 推出，其中 $\delta=(N-1$、……、$0)$，再结合通过范德蒙德行列式（2.19）对 $s_{\{n|k\}}$ 的定义。

对于第二个，注意 $\sigma\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{\gamma})=-(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{\gamma})$、$p-\boldsymbol{\gamma}-(N-1)=-(p-\boldsymbol{\gamma})$，以及

$$\overline{\sigma}\cdot\left(\overline{\lambda}+\sigma\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{\gamma})\right)=-\lambda-\sigma\cdot\boldsymbol{c}-\boldsymbol{\gamma}+(L,0,\ldots,0).$$

由于当 $N=2p+1$ 时 $\varepsilon(\sigma)=\varepsilon(\sigma)=(-1)^p$，而当$N=2p$时，$\varepsilon(\sigma)=(-1)^p$ 和 $\varepsilon(\sigma)=(-1)^{p-1}$，因此得到所需结果。

第 *2* 点。利用 Frobenius 公式（4.42）、Murnaghan– Nakayama 规则（7.43）的非递归形式，以及第一点（4.59），可以写出

$$\begin{aligned} p_n(z)\,p_{-n}(z) &= p_n(z)\sum_{l=0}^{n-1}(-1)^l\,\overline{s_{\{n|l\}}(z)} \\ &= (-1)^{2\boldsymbol{\gamma}}\sum_{l=0}^{n-1}(-1)^l\,p_n(z)\,s_{\overline{\lambda}_l}(z) \\ &= (-1)^{2\boldsymbol{\gamma}}\sum_{l=0}^{n-1}(-1)^l\sum_{\mu\in\mathrm{BS}_n(\overline{\lambda}_l)}(-1)^{\mathrm{ht}(\mu\backslash\overline{\lambda}_l)}s_\mu(z), \end{aligned} \tag{7.47}$$

其中，我们用 $\mathrm{BS}_n(\lambda)$ 表示满足以下条件的分拆集合：$\mu\backslash\lambda$ 是一个大小为 n 的边条，且 $\overline{\lambda}_l=\{L-n|N-1-l\}$。集合 $\mathrm{BS}_n(\lambda_l)$ 具有如下几何描述：

1. 它包含双钩分拆 $\{n|k,\ l\}$，该分拆通过将高度为 k 的边条 $\{n|k\}$ 连接到 λ_l的杨图的内角处得到。

2. 它还包含另外两个图形：

i. 将边条 (1^n) 沿着 λ_l 的腿附加，得到高度为 $n-1$ 的边条。ii. 另一种做法是将边条 (n) 沿着 λ_l 的臂附加，得到高度为 0 的边条。

在情形 2.i. 中，有 $\mu = \{L \,|\, N-1-l+n\}$。由于 $l < n$， μ 的行数超过了 N，因此相应的 N 个变量的舒尔多项式为零（见注 2.5）。

在情形 2.ii. 中，可得到 $\mu = \{L \,|\, N-1-l\}$。这个分拆对应于圆上的一种构型：所有最初位于紧致构型中的粒子，在经过某个置换后，都会返回该构型。因此，要计算 s_μ （它必然是等于 ± 1 的常数），只需确定这个置换的符号。

注意到 $\mu_1 + \delta_1 = \delta_{N-l}$, $\mu_2 + \delta_2 = \delta_1, \ldots, \mu_{N-l} + \delta_{N-l} = \delta_{N-l-1}$，以及 $\mu_{N-l+1} + \delta_{N-l+1} = \delta_{N-l+1}, \ldots, \mu_N + \delta_N = \delta_N$。因此，相应的置换是如下循环置换

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & N-l & N-l+1 & \cdots & N \\ N-l & 1 & \cdots & N-l-1 & N-l+1 & \cdots & N \end{pmatrix},$$

其符号等于 $(-1)^{N-1-l}$。

由（7.47）可推得

$$p_n(z)\, p_{-n}(z) = (-1)^{2\gamma} \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{l+k}\, s_{\{n|k,l\}}(z) + \underbrace{(-1)^{N-1+2\gamma}}_{=1}\, n. \tag{7.48}$$

第 *3* 点。我们主要依赖 Koike [Koi89] 和 Stembridge [Ste87] 关于有理舒尔函数的研究结果。为方便读者，我们简要回顾其中的要点。

首先，有理舒尔函数 s_λ 可按（2.19）中的方式定义，其中允许 $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_N$ 取非负整数（另见注 3.2）。这样的序列 λ 称为符号。在后两篇参考文献中，它也称为阶梯分拆或混合分拆。在这种情况下， $s_\lambda(z)$ 是关于不定元 z_1、……、z_N 的有理函数。关于 s_λ 的组合生成描述，类似于（2.20），见 [Ste87，定义 2。3]，不过，要表述这一描述并不那么直接。此外，Koike [Koi89] 还给出了 s_λ 的 Jacobi–Trudi 型公式，即一个用初等对称函数表示的行列式表达式（见相应论文中的定义 2.1）。

为了进一步推进，记 $\lambda = [\alpha, \beta]$ （或用 $[\alpha, \beta]_N$ 表示其长度）为符号

$$\lambda = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{\ell(\alpha)}, 0, \ldots, 0, -\beta_{\ell(\beta)}, \ldots, -\beta_1),$$

其中 α 和 β 是长度分别为 $\ell(\alpha)$ 和 $\ell(\beta)$ 的普通分拆。对于一个 N 元组 z 非零复数，令 $z^{-1} = (z_1^{-1}, \ldots, z_N^{-1})$ 如 [Koi89]，中命题 2.6 证明开头（第 74 页）所示，上文提到的 Jacobi–Trudi 型公式用于建立

$$s_{[\alpha,\beta]}(z) = \sum_\tau (-1)^{|\tau|}\, s_{\alpha\setminus\tau}(z)\, s_{\beta\setminus\tau'}(z^{-1}).$$

现在我们将其与双钩分拆 $\{n|k,l\}$ 及其对应的施ur函数联系起来。考虑由下式定义的长度为 N 的符号

$$\lambda = (n-k, 1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0, -1, \ldots, -1, -(n-l)),$$

其中 1 出现 k 次， -1 出现 l 次，而 0 出现 $N-2n$ 次。这个符号描述了圆上与双钩 $\{n|k,l\}$ 对应的构型。前 n 项表示前 n 个粒子沿三角方向相对于紧致构型的位移，而后 n 项表示最后 n 个粒子沿相反方向的位移，其余粒子保持不动。参见图 9。

特别地，我们得到 $s_{\{n|k,l\}}(z) = \pm s_\lambda(z)$。要确定符号，只需计算诱导置换的符号（另见上文第 2 点的证明）。容易验证，相关的循环置换为 $(1, N, N-1, \dots, 2)$，由此证明完毕。

要点 *4.* 证明直接应用 Littlewood–Richardson 规则（4.58）。这相当于确定可容许分拆 ν，并计算形状为 $\lambda\backslash\mu$、内容为 ν的斜半标准杨表的数量，其中 λ 和 μ 是钩分拆。

事实上，这样的可容许内容 ν至多有两个，且每个都对应唯一的斜半标准杨表。见图 11。

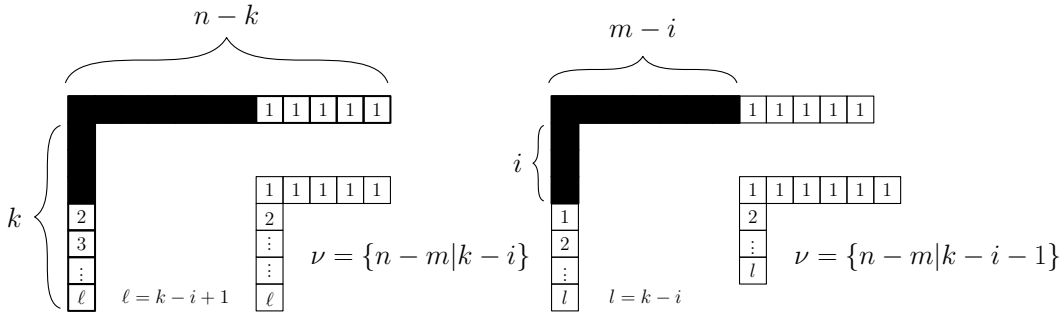

图 11： 形状为 $\lambda\backslash\mu$、内容为 ν的两个斜半标准杨表。这里 $\lambda = \{n|k\}$、$\mu = \{m|i\}$（黑色方格），而 ν或者是 $\{n-m|k-i\}$（左），或者是 $\{n-m|k-i-1\}$（右）。

□

7.2 技术引理 4.1、4.5 和 4.4的证明

引理 *4.1*的证明。 令

$$u^{(n)}_{L,N}(x) = L^2\,\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi N}{L}+x\right)}{\sin\left(\frac{\pi N}{L}\right)} \quad \text{and} \quad h^{(n)}_{t,L,N}(x) = \left(1-\frac{u^{(n)}_{L,N}(x)}{L^2}\right)^{\lfloor L^2 t\rfloor}.$$

注意，对每个 $j \geqslant 0$，以下收敛在 $\mathbb{R}$ 上一致成立 ：

$$\lim_{L,N\to\infty}\frac{\partial^j u^{(n)}_{L,N}(x)}{\partial x^j} = -2\pi^2 n\frac{\partial^j u_\alpha(x)}{\partial x^j}, \quad \text{with } u_\alpha(x) = \frac{\sin(\pi\alpha+x)}{\sin(\pi\alpha)}.$$

此外，容易验证

$$\left|\frac{\partial^j}{\partial z^j}\left(1+\frac{z}{L^2}\right)^{\lfloor L^2 t\rfloor} - t^j e^{tz}\right| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{L^2}\right),$$

对 $0 \leqslant t \leqslant T$、$0 \leqslant j \leqslant d$ 和 $z \in K \subset \mathbb{C}$，在一个紧集上一致成立。

因此，由 Faà di Bruno 公式可得

$$\lim_{L,N\to\infty}\frac{\partial^j h^{(n)}_{t,L,N}(x)}{\partial x^j} = \frac{\partial^j h^n_t(x)}{\partial x^j},$$

在 $\mathbb{R}$ 上一致，且对 $0 \leqslant t \leqslant T$ 和 $0 \leqslant j \leqslant d$一致。应用泰勒定理，我们很容易推出（4.50）和（4.52），其中

$$a_{n,j}^{L,N}(t) = \left. \frac{\partial^j h_{t,L,N}^{(n)}(x)}{\partial x^j} \right|_{x=0}.$$

□

引理 *4.5* 的证明。其论证与引理 4.1 的论证相平行。我们使用双 Schur 特征值公式（4.67），并应用多维泰勒定理于

$$h_{t,L,N}^{(n)}(x,y) = \left(1 - \frac{2\sin\left(\frac{\pi}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{L}\right)\left(\sin\left(\frac{\pi N}{L}+x\right)+\sin\left(\frac{\pi N}{L}+y\right)\right)}{\sin\left(\frac{\pi N}{L}\right)}\right)^{\lfloor L^2 t\rfloor}.$$

□

引理 *4.4* 的证明。我们将看到，（4.65）可由引理 4.5 连同引理 4.2 得出。与（4.53）类似，（4.65）的左端可改写为

$$\mathbf{V} = \frac{1}{N^2}\sum_{\pi,\mu\vdash n}\frac{1}{z_\pi z_\mu}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1}(-1)^{k+l}\, \boldsymbol{r}_{\{n|k,l\}}^{\lfloor L^2 t\rfloor}\, \chi_\pi^{\{n|k\}}\chi_\mu^{\{n|l\}} p_\pi \overline{p_\mu}.$$

由此可得

$$\begin{aligned}
\mathbf{V} &= \sum_{\pi,\mu\vdash n}\frac{1}{z_\pi z_\mu}\sum_{j_1+j_2\leqslant d_{\pi,\mu}}\frac{a_{n,j_1,j_2}^{L,N}(t)\pi^{j_1}\pi^{j_2}}{j_1!j_2!}\boxed{\mathfrak{X}_\pi^{(j_1)}\mathfrak{X}_\mu^{(j_2)}}\frac{p_\pi}{NL^{j_1}}\frac{\overline{p_\mu}}{NL^{j_2}}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{L}\right) \qquad (7.49)\\
&= \sum_{\pi,\mu\vdash n}\frac{1}{z_\pi z_\mu}\sum_{j_1+j_2\leqslant d_{\pi,\mu}}\frac{a_{n,j_1,j_2}^{L,N}(t)\pi^{j_1}\pi^{j_2}}{j_1!j_2!}\mathfrak{X}_\pi^{(j_1)}\mathfrak{X}_\mu^{(j_2)}\frac{p_\pi}{NL^{j_1}}\frac{\overline{p_\mu}}{NL^{j_2}}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{L}\right)\\
&= \sum_{\pi,\mu\vdash n}\frac{1}{z_\pi z_\mu}\frac{a_{n,\ell_\pi^-,\ell_\mu^-}^{L,N}(t)\pi^{\ell_\pi^-}\pi^{\ell_\mu^-}}{\ell_\pi^-!\ell_\mu^-!}\mathfrak{X}_\pi^{(\ell_\pi^-)}\mathfrak{X}_\mu^{(\ell_\mu^-)}\frac{p_\pi}{NL^{\ell_\pi^-}}\frac{\overline{p_\mu}}{NL^{\ell_\mu^-}}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{L}\right), \qquad (7.50)
\end{aligned}$$

其中 $\ell_\pi^- := \ell(\pi)-1$，$\ell_\mu^- := \ell(\mu)-1$，以及 $d_{\pi,\,\mu} := \ell_\pi^- + \ell_\mu^-$。上文中，我们使用（4.54），因此

$$p_\pi\overline{p_\mu} = \mathcal{O}(N^2 L^{d_{\pi,\mu}}),$$

连同当 $j_1 < \ell_\pi^-$ 或 $j_2 < \ell_\mu^-$ 时的 $\mathfrak{X}_\pi^{(j_1)}\mathfrak{X}_\mu^{(j_2)} = 0$。

我们参阅引理 4.2 以得到该乘积中每一项的表达式；这些表达式在（7.49）中加框，以便查阅并便于（4.66）的证明。（7.50）收敛到所需极限（4.65）便直接由（4.68）连同（4.56）得出。

为证明（4.66），我们使用斜钩 Schur 分解（4.62）和（4.63），得到

$$\begin{aligned}
s_{\{n|k\}\setminus\{m|i\}}\,\overline{s_{\{n|l\}\setminus\{m|i\}'}} &= \underbrace{s_{\{n-m|k-i\}}\overline{s_{\{n-m|l-(m-i-1)\}}}}_{[0,0]} + \underbrace{s_{\{n-m|k-i-\mathbf{1}\}}\overline{s_{\{n-m|l-(m-i-1)\}}}}_{[\mathbf{1},0]}\\
&+ \underbrace{s_{\{n-m|k-i\}}\overline{s_{\{n-m|l-(m-i-1)-\mathbf{1}\}}}}_{[0,\mathbf{1}]} + \underbrace{s_{\{n-m|k-i-\mathbf{1}\}}\overline{s_{\{n-m|l-(m-i-1)-\mathbf{1}\}}}}_{[\mathbf{1},\mathbf{1}]}. \qquad (7.51)
\end{aligned}$$

将这一分解代入（4.66），该求和可重写为

$$\mathbf{C} = \sum_{m=1}^{n} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{a,b\in\{0,1\}} \mathbf{C}_{[a,b]}^{\{m|i\}}, \tag{7.52}$$

其中下标 $[a,b]$ 以自然的方式对应于（7.51）中的各项。每一项还可以按照与（7.49）类似的方式进一步分解，即:

$$\mathbf{C}_{[a,b]}^{\{m|i\}} = \sum_{\pi,\mu\vdash n-m} \frac{1}{z_\pi z_\mu} \sum_{j_1+j_2\leqslant d_{\pi,\mu}} \frac{a_{n,j_1,j_2}^{L,N}(t)\pi^{j_1}\pi^{j_2}}{j_1!j_2!} \boxed{\mathcal{X}_{\pi,a}^{(j_1,i)}\widetilde{\mathcal{X}}_{\mu,b}^{(j_2,i)}} \frac{p_\pi}{NL^{j_1}} \frac{\overline{p_\mu}}{NL^{j_2}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{L}\right). \tag{7.53}$$

然而，由于存在平移，（7.53）中框出的项比（7.49）中的项更难处理。尽管如此，仍可利用引理 4.2 及其证明中发展的技巧确定它们的显式形式。

事实上，可以验证，对于 $a\in\{0,1\}$，有

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}_{\pi,a}^{(j_1,i)} &= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\chi_\pi^{\{n-m|k-i-a\}}(n-2k-1)^{j_1} \\
&= \sum_{k=i+a}^{n-m+i-1+a}(-1)^k\chi_\pi^{\{n-m|k-i-a\}}(n-2k-1)^{j_1} \\
&= (-1)^{i+a}\sum_{k=0}^{n-m-1}(-1)^k\chi_\pi^{\{n-m|k\}}\big((n-m-2k-1)+(m-2(i+a))\big)^{j_1} \\
&= (-1)^{i+a}\sum_{i_1=0}^{j_1}\binom{j_1}{i_1}(m-2(i+a))^{j_1-i_1}\,\mathfrak{X}_\pi^{(i_1)} \\
&= \begin{cases} 0, & \text{if } j_1<\ell_\pi^-, \\ (-1)^{i+a}\,\mathfrak{X}_\pi^{(\ell_\pi^-)}, & \text{if } j_1=\ell_\pi^-. \end{cases}
\end{aligned} \tag{7.54}$$

类似地，对于 $b\in\{0,1\}$，有

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{X}}_{\mu,b}^{(j_2,i)} &= \sum_{l=m-i-1+b}^{n-i-2+b}(-1)^l\chi_\mu^{\{n-m|l-(m-i-1)-b\}}(n-2l-1)^{j_2} \\
&= \begin{cases} 0, & \text{if } j_2<\ell_\mu^-, \\ (-1)^{m-i-1+b}\,\mathfrak{X}_\mu^{(\ell_\mu^-)}, & \text{if } j_2=\ell_\mu^-. \end{cases}
\end{aligned} \tag{7.55}$$

接下来，关键观察是 $\mathcal{X}^{(j_1,\pi}{}^{i)}{}_{,1} = -\mathcal{X}^{(j_1}{}_{,\pi\,0}{}^{i)}{}_{,}$以及 $\widetilde{\mathcal{X}}^{(j_2,\mu}{}^{i)}{}_{,1} = -\widetilde{\mathcal{X}}^{(j_2}{}_{,\mu\,0}{}^{i)}{}_{,}$，由此可得

$$\sum_{a,b\in\{0,1\}} \mathcal{X}_{\pi,a}^{(j_1,i)}\widetilde{\mathcal{X}}_{\mu,b}^{(j_2,i)} = 0.$$

我们推得 $\mathbf{C}$ 在（7.52）中，因此（4.66）中的相应求和项的阶为 $\mathcal{O}(1/L)$,由此完成了引理4.4的证明。

注记7.1。 为完整起见，我们注意到一个小的边界效应。当 $m = n$时， （7.54）和（7.55）中的求和上标会小于下标。这种情况可通过在（4.66）中单独处理，并注意到 $s_{\varnothing} \equiv 1$来处理，从而再次得到阶为 $\mathcal{O}(1/L)$的贡献。

□

7.3 定理的证明4.1 和 4.2

在此阶段，假设初始经验测度依概率收敛到一个密度为 $f_0(dx)$ 的随机概率测度，则 $\upsilon_{L,N}(t, dx)$ 的 n 阶复矩依概率收敛到

$$\mathfrak{m}_n(t) = \sum_{\pi \vdash n} \frac{(2\pi\alpha)^{\ell(\pi)-1}}{\prod_i l_i!} \left. \frac{\partial^{\ell(\pi)-1} h_t^n(z)}{\partial z^{\ell(\pi)-1}} \right|_{z=0} m_\pi. \tag{7.56}$$

回顾一下，

$$h_t^n(z) = e^{-2\pi^2 n t\, u_\alpha(z)}, \quad \text{with} \quad u_\alpha(z) = \frac{\sin(\pi\alpha + z)}{\sin(\pi\alpha)}.$$

接下来需要确定相应密度及其矩生成函数所满足的极限偏微分方程，并证明它们具有正则性和平稳性。

7.3.1 偏微分方程的确定

为方便起见，我们针对 f_0 引入以下解析性假设，该假设以其复矩生成函数 g_0 的形式表述。

Assumption 7.1. 生成函数 g_0 具有收敛半径 $r_0 > 1$。

命题 7.1. 在假设*7.1*下，偏微分方程（4.37）由 $g(t、\ z)$ 所满足，并在 $t = 0$ 处对 z（位于单位圆盘 $\mathbb{D}$ 的某个邻域内）成立，而偏微分方程（4.36）由密度 $f(t、\ x)$ 所满足，并以强意义在 $t = 0$处成立。

命题*7.1*的证明。 我们首先研究矩生成函数 $g(t、\ z)$ 的正则性，并证明它满足偏微分方程（4.37）在 $t = 0$ 处成立，由此（4.36）随之得出。

引理7.1. 假设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}_n(t) z^n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \partial_t \mathfrak{m}_n(t) z^n$ 在某个邻域 $[0、\ \epsilon) \times B(0、\ \delta)$上正规收敛。则对所有 $z \in B(0、\ \delta)$，有

$$\left. \frac{\partial g(t,z)}{\partial t} \right|_{t=0} = -2\pi^2 u_\alpha(2\pi\alpha\, g_0(z)) z g_0'(z). \tag{7.57}$$

引理 *7.1* 的证明。 首先，可以将（7.56）改写为以下形式

$$\mathfrak{m}_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{B_{n,k}(1!m_1, 2!m_2, \cdots)}{n!} \left. \frac{\partial^{k-1} h_t^n(z)}{\partial z^{k-1}} \right|_{z=0} (2\pi\alpha)^{k-1}, \tag{7.58}$$

其中，$B_{n、\ k}(x_1、\ \cdots、\ x_{n-k+1})$ 表示偏（或不完全）指数贝尔多项式。因此，应用 Faà di Bruno 公式，我们得到

$$\mathfrak{m}_n(t) = \frac{1}{2\pi\alpha\, n!} \left. \frac{\partial^n H_{t,n}(2\pi\alpha\, g_0(z))}{\partial z^n} \right|_{z=0} = \frac{1}{n!} \left. \frac{\partial^{n-1} g_0'(z)\, h_t^n(2\pi\alpha\, g_0(z))}{\partial z^{n-1}} \right|_{z=0}, \tag{7.59}$$

其中，$H_{t、\ n}$ 表示 h_t^n 的原函数。

此外，还可以写成

$$\frac{\partial \mathfrak{m}_n(t)}{\partial t} = -2\pi^2 n \sum_{k=1}^{n} \frac{B_{n,k}(1!m_1, 2!m_2, \cdots)}{n!} \left.\frac{\partial^{k-1} u_\alpha(z) h_t^n(z)}{\partial z^{k-1}}\right|_{z=0} (2\pi\alpha)^{k-1}.$$

再次应用 Faà di Bruno 公式，可类似地得到

$$\frac{\partial \mathfrak{m}_n(t)}{\partial t} = -2\pi^2 \frac{1}{(n-1)!} \left.\frac{\partial^{n-1} g_0'(z) u_\alpha(2\pi\alpha\, g_0(z)) h_t^n(2\pi\alpha\, g_0(z))}{\partial z^{n-1}}\right|_{z=0}. \tag{7.60}$$

随后，通过交换求导与求和的顺序，可得

$$\left.\frac{\partial g(t,z)}{\partial t}\right|_{t=0} = -2\pi^2 z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left.\frac{\partial^n (g_0'(z) u_\alpha(2\pi\alpha g_0(z)))}{\partial z^n}\right|_{z=0} z^n,$$

由此（7.57）可直接得出。 □

引理 7.2。 在假设 *7.1* 下，存在 $\delta > 1$ 和 $\varepsilon > 0$，使得 $\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}_n(t) z^n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \partial_t \mathfrak{m}_n(t) z^n$ 在 $[0、\ \varepsilon) \times B(0、\ \delta)$ 上正规收敛。

该引理的证明将在下文给出。结合引理7.1，这意味着在假设 7.1 下，矩生成函数 $g(t,\ z)$ 满足（7.57），且该式在单位圆盘 $\mathbb{D}$的一个邻域内成立。相应的密度偏微分方程推导如下。

首先 注意到 $\mathfrak{m}_0(t) = 1$，并且 $\mathfrak{m}_{-n}(t)$ 是 $\mathfrak{m}_n(t)$ 的复共轭。因此

$$2\pi f(t,x) = \operatorname{Re}\left(1 + 2g(t, e^{ix})\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathfrak{m}_n(t) e^{inx}. \tag{7.61}$$

进一步可以验证

$$2\pi \mathcal{H} f(t,x) = \operatorname{Im}\left(1 + 2g(t, e^{ix})\right) = -i \sum_{n\in\mathbb{Z}} \operatorname{sgn}(n) \mathfrak{m}_n(t) e^{inx}, \tag{7.62}$$

由（7.62）和（7.61）可得

$$1 + 2g(t, e^{ix}) = 2\pi \left(f(t,x) + i\, \mathcal{H} f(t,x)\right). \tag{7.63}$$

此外，注意到 $e^{ix} g_0'(e^{ix}) = -i\, \partial_x g_0(e^{ix})$，由（7.63）在 $t = 0$处的取值、 f_0的光滑性以及希尔伯特变换的标准性质可知

$$e^{ix} g_0'(e^{ix}) = \pi \left(\mathcal{H} f_0'(x) - i f_0'(x)\right). \tag{7.64}$$

最后，结合（7.64）、（7.63）在 $t = 0$处的取值以及（7.57），可得

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{t=0} = \frac{1}{\pi} \left.\frac{\partial \operatorname{Re}(g)}{\partial t}\right|_{t=0} &= -\frac{2\pi^2}{\sin(\pi\alpha)} \operatorname{Re}\left(\left(\mathcal{H} f_0' - i f_0'\right) \sin\left(2\pi^2\alpha \left(f_0 + i\mathcal{H} f_0\right)\right)\right) \\ &= -\frac{1}{\alpha \sin(\pi\alpha)} \frac{\partial \sin\left(2\pi^2\alpha\, f_0\right) \sinh\left(2\pi^2\alpha\, \mathcal{H} f_0\right)}{\partial x}.\end{aligned}$$

这就完成了命题的证明 7.1。 □

引理的证明 7.2。 证明的关键是将（7.59）表示为围道积分

$$\mathfrak{m}_n(t) = \frac{1}{2i\pi n} \int_0^{2\pi} \frac{i g_0'(re^{ix})\, h_t^n(2\pi\alpha\, g_0(re^{ix}))}{r^{n-1} e^{i(n-1)x}}\, dx, \quad \text{with} \quad 0 < r < r_0.$$

随后，利用中值不等式作一个简单估计可知，对于所有 $1 < \kappa < r_0$，都存在 $c_\kappa > 0$，使得对所有 $r \in [1,\ \kappa]$，都有

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\mathrm{Re}\sin\big(\pi\alpha\,(1+g_0(re^{ix}))\big) - \mathrm{Re}\sin\big(\pi\alpha\,(1+g_0(e^{ix}))\big)\right| \leqslant \sin(\pi\alpha) c_\kappa (r-1). \tag{7.65}$$

利用在 $t = 0$ 处取值的 (7.63)，以及关于 f_0 的界 (4.35)，可得

$$\mathrm{Re}\sin\big(\pi\alpha\,(1+g_0(e^{ix}))\big) = \sin\big(2\pi^2\alpha\, f_0(x)\big)\cosh\big(2\pi^2\alpha\, \mathcal{H}f_0(x)\big) \geqslant 0. \tag{7.66}$$

特别地，由 (7.66) 和 (7.65) 可得

$$|h_t^n(2\pi\alpha g_0(re^{ix}))| = e^{-2\pi^2 nt\ \mathrm{Re}\, u_\alpha(2\pi\alpha g_0(re^{ix}))} \leqslant e^{2\pi^2 c_\kappa nt(r-1)}. \tag{7.67}$$

现在，令 κ 充分接近 1，使得 $\ln(r) \geqslant (r-1)/2$ 对 $1 \leqslant r \leqslant \kappa$成立，并选择 $\varepsilon > 0$使得 $2\pi^2 c_\kappa \varepsilon < 1/2 - \eta$ 对某个 $0 < \eta < 1/2$成立。由 (7.67) 可得

$$\sup_{t\in[0,\varepsilon]} |\mathfrak{m}_n(t)| = \mathcal{O}\Big(e^{-\eta(\kappa-1)n}\Big).$$

我们推得 $g(t,\ z)$ 在 $[0,\ \varepsilon) \times B(0,\ \delta)$ 上正规收敛，其中 $\delta > 1$为某个值。证明矩导数的生成函数在类似定义域上正规收敛的方法完全相同，至此证明完成。

□

命题 7.2. 设 $t \geqslant 0$ 使得 $z \mapsto g(t,\ z)$ 的收敛半径大于 1。则存在 $\varepsilon > 0$ 和 $\delta > 1$，使得偏微分方程 （4.37）对 $g(t,\ z)$ 在 $[t,\ t+\varepsilon) \times B(0,\ \delta)$上成立，而偏微分方程 （4.36）对密度 $f(t,\ x)$ 在 $[t,\ t+\varepsilon)$上以强意义成立。

命题7.2的证明。 对任意 $s \geqslant 0$，令 q 表示使得 $q \leqslant L^2 s$成立的最大整数，并定义 s_* 和 s^*，其定义分别为 $q = L^2 s_*$ 和 $q + 1 = L^2 s^*$。此后，令

$$\vartheta = \begin{cases} \Theta(L^2 s_*), & \text{if } s = s_*, \\ \Theta(L^2 s^*), & \text{if } s > s_*. \end{cases}$$

注意 $s_* \leqslant s < s^* = s_* + 1/L^2$。此外，由于 $|\Theta(L^2 s) - \vartheta| = \mathcal{O}(1/L),$， ϑ 的经验测度依概率收敛到 $f(s,\ \theta)\, d\theta$，恰如 $\Theta(L^2 s)$的经验测度那样。

令 $t > s$ 固定，并注意到当 L 充分大时， $L^2 t > L^2 s + 1$，因此 $L^2 t > L^2 s^*$。于是，由马尔可夫性质，给定 $\Theta(L^2 s)$ 时 $\Theta(L^2 t)$ 的条件分布满足

$$\mathcal{L}\big(\Theta(L^2 t)\,|\,\Theta(L^2 s)\big) = \begin{cases} \mathcal{L}\big(\Theta(L^2(t-s_*))\,|\,\Theta(0) = \vartheta\big), & \text{if } s = s_*, \\ \mathcal{L}\big(\Theta(L^2(t-s^*))\,|\,\Theta(0) = \vartheta\big), & \text{if } s > s^*. \end{cases} \tag{7.68}$$

由于 $|\Theta(L^2(t-u)) - \Theta(L^2(t-s))| = \mathcal{O}(1/L)$ 对于 $u \in \{s_*,\ s^*\}$，由（7.68），再结合 ϑ 的经验测度依概率收敛以及关于后者的结果

经验矩的收敛性可知，在给定 $\Theta(L^2 s)$ 的条件下， $\Theta(L^2 t)$ 的经验测度依概率收敛于 $\Theta(L^2(t-s))$ 的经验测度，其中初始配置服从 $f(s,\ \theta)\, d\theta$。因此，对于某个半群核 $(Q_t)_{t\geqslant 0}$，有 $f(t,\ \theta) = Q_t f_0(\theta)$ 并且

$$\forall s, t \geqslant 0, \quad \mathfrak{m}_n(s+t) = \sum_{\pi \vdash n} \frac{(2\pi\alpha)^{\ell(\pi)-1}}{\prod_i l_i!} \left. \frac{\partial^{\ell(\pi)-1} h_t^n(x)}{\partial x^{\ell(\pi)-1}} \right|_{x=0} \mathfrak{m}_\pi(s). \tag{7.69}$$

根据命题 7.1，对于任意满足 $z \mapsto g(t_0, z)$ 的收敛半径大于 1 的时间 $t_0 \geqslant 0$，偏微分方程（4.37）对某个 $\delta > 1$在 $t = t_0$ 处、 $z \in B(0,\delta)$时成立，而偏微分方程（4.36）在 $t = t_0$处以强意义成立。此外，引理 7.2 和引理 7.1及其证明表明，对于某个 $\varepsilon > 0$ 和 $\delta > 1$，方程（4.37）在 $[t_0,$ $t_0 + \varepsilon) \times B(0,\delta)$ 上成立，因此方程（4.36）在 $[t_0, t_0 + \varepsilon)$上成立。命题 7.2 的证明至此完成。

注 7.2。 一般而言，即使是整函数初始密度 f_0 也不会在所有 $t \geqslant 0$时刻都保持光滑。请参阅第 *7.3.2* 节，以及第*7.4*节中详述的例子。

□

7.3.2 解的特征表示

标准的特征线法表明，任意局部光滑解 $g(t,z)$ 沿着常微分方程的轨迹 $t \mapsto (t, Z_t)$ 保持不变

$$\partial_t Z_t = A_0(w) Z_t, \quad Z_0 = w, \quad \text{with} \quad A_0(w) = 2\pi^2 \frac{\sin(\pi\alpha(1+2g_0(w)))}{\sin(\pi\alpha)}. \tag{7.70}$$

这一观察的主要意义在于，只要条件允许，它就能通过令 $g(t,z) := g_0(w(t,z))$，其中 $w(t,z)$ 满足

$$\Phi_t(w(t,z)) = z, \quad \text{with} \quad \Phi_t(w) = w e^{t A_0(w)}. \tag{7.71}$$

He这里 $\Phi_t(w)$ 表示常微分方程（7.70）的流。注意，必然有 $w(0,z) = z$.

本节的目标是定义分支 $w(t,z)$，使其对于 $z \in \mathbb{D}$，取值于 $V_t \subset \mathbb{D}$（见引理 7.5），并确立表示式 $g(t,$ $z) = g_0(w(t,z))$（见命题 7.3）。

我们从一个简单却至关重要的观察开始：流 Φ_t 是 $\mathbb{D}$内的膨胀。

引理 7.3。 对于所有 $w \in \mathbb{D}$，均有 实部 $A_0(w) > 0$。

引理 *7.3*的证明。 该结果可通过推广（7.63）并结合下界（7.66）来证明，后者可视为该引理的边界版本。

为此，需验证对于所有 $0 \leqslant r < 1$ 和所有 $x \in \mathbb{R}$，均有

$$1 + 2g_0(re^{ix}) = 2\pi \left(P_r f_0(x) + i\, P_r \mathcal{H} f_0(x) \right), \tag{7.72}$$

其中， $(P_r)_{0\leqslant r<1}$ 表示通常的泊松卷积核。回顾一下，它们构成一族光滑磨光子，当 $r \uparrow 1$ 时，并按如下方式作用于傅里叶级数

$$P_r \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} \right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\, r^{|n|} e^{inx}.$$

特别地，存在 $\eta_r > 0$，使得光滑密度 $h_r := P_r f_0$ 满足

$$\eta_r \leqslant \min_{x\in\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}} h_r(x) \leqslant \max_{x\in\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}} h_r(x) \leqslant \frac{1}{2\pi\alpha} - \eta_r.$$

直接计算即可得到

$$\operatorname{Re}\sin\bigl(\pi\alpha(1+2g_0(re^{ix}))\bigr) = \sin\bigl(2\pi^2\alpha h_r(x)\bigr)\cosh\bigl(2\pi^2\alpha\mathcal{H}h_r(x)\bigr) \geqslant \sin\bigl(2\pi^2\alpha\eta_r\bigr) > 0, \tag{7.73}$$

由此，引理 7.3 可通过取 $w = re^{ix}$得到。 □

注 7.3. 由 (7.72) 和 (7.73) 可知，函数 $1+2g_0(w)$ 与 $A_0(w)$ 属于 *Carathéodory–Herglotz* 类 $\mathcal{HC}$，即 $\mathbb{D}$ 上具有正实部的全纯函数。它们具有非切向边界极限以及 *Herglotz* 表示

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{ix}+w}{e^{ix}-w}\,\mu(dx),$$

对某个有限正博雷尔测度 μ。此外，由于 $1+2g_0(w)$ 属于 *Hardy* 空间 H^∞，相应的 μ 是绝对连续的，且具有有界密度。

引理 7.4. *T 函数 $g(t,\ z)$ 在 $[0,\ \infty)\times\mathbb{D}$ 上解析，并满足 (4.37) 于该定义域 .*

引理的证明 7.4。 首先，我们扩展（7.60）并写成

$$\frac{\partial^k \mathfrak{m}_n(t)}{\partial t^k} = \frac{(-2\pi^2)^k\, n^{k-1}}{(n-1)!}\, \frac{\partial^{n-1} g_0'(z)\, u_\alpha^k(2\pi\alpha\, g_0(z))\, h_t^n(2\pi\alpha\, g_0(z))}{\partial z^{n-1}}\bigg|_{z=0}.$$

特别地，对于任意 $0<r<1$，有

$$\frac{\partial^k \mathfrak{m}_n(t)}{\partial t^k} = \frac{(-2\pi^2)^k\, n^{k-1}}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{i g_0'(re^{ix})\, u_\alpha^k(2\pi\alpha\, g_0(re^{ix}))\, h_t^n(2\pi\alpha\, g_0(re^{ix}))}{r^{n-1}e^{i(n-1)x}}\,dx. \tag{7.74}$$

为了进一步推进，引理 7.3 表明，对所有 $w\in\mathbb{D}$,

$$|h_t^n(2\pi\alpha\, g_0(w))| = e^{-2\pi^2 nt\ \operatorname{Re} u_\alpha(2\pi\alpha\, g_0(w))} = e^{-nt\operatorname{Re} A_0(w)} \leqslant 1.$$

在（ $r\to 1$ 中令 7.74），可推出对于任意 $\varepsilon>0$，存在正常数 C 和 M，使得对所有 n，k，$t\geqslant 0$,

$$\left|\frac{\partial^k \mathfrak{m}_n(t)}{\partial t^k}\right| \leqslant C\, n^k M^k e^{\varepsilon n}. \tag{7.75}$$

此后，设 $\delta>0$ 满足 $M\delta<\varepsilon$。由（7.75）可知，幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\,\frac{\partial^k \mathfrak{m}_n(t)}{\partial t^k}\bigg|_{t=0} t^k z^n,$$

对所有 $0\leqslant t<\delta$ 和 $|z|<e^{-2\varepsilon}$ 都绝对收敛。由于 ε 可以任意小，我们推得 $g(t,z)$ 在满足 $|z|<1$ 的任意点 $(0,z)$ 的邻域内都是解析的。

与第7.3.1 节类似的论证（尤其参见引理7.1）表明，偏微分方程（7.57）在 $t=0$ 处对 $z\in\mathbb{D}$ 成立。其向任意时刻 $t>0$ 在 $\mathbb{D}$ 上的推广则由马尔可夫性质（见（7.69））得出，从而完成证明。 □

引理 7.5. 对任意 $t \geqslant 0$ 和 $z \in \mathbb{D}$，存在唯一的 $w(t,\ z) \in \mathbb{D}$ 求解（7.71）。此外，$|w(t,\ z)| < |z|$ 对所有 $t > 0$成立，且下列性质成立：

1. 对每个 $t \geqslant 0$，映射 $w(t,\cdot)$ 是从 $\mathbb{D}$ 到 V_t 的双全纯映射:$= \Phi_t^{-1}(\mathbb{D}) \cap \mathbb{D}$。
2. 族 $(V_t)_{t\geqslant 0}$ 是递减的：对所有 $0 \leqslant s \leqslant t$，都有 $V_t \subset V_s$。
3. 映射 $(t, z) \mapsto w(t, z)$ 在 $[0, \infty) \times \mathbb{D}$ 上是解析的。
4. 有 $\Phi_t(\partial V_t) = \mathbb{D}$。

引理的证明 *ma 7.5.* 应用引理 7.3，对所有 $t > 0,\ z \in \mathbb{D}$，以及 $w \in \mathbb{D}$ 满足 $|w| \geqslant |z$ |:

$$\left|(we^{tA_0(w)} - z) - we^{tA_0(w)}\right| < \left|we^{tA_0(w)}\right|.$$

儒歇定理（见引理6.1的证明）进而保证存在唯一解$w(t,\ z) \in \mathbb{D}$，即方程（7.71）的解，且满足 $|w(t,\ z)| < |z|$ 对所有 $t > 0$成立。

Φ_t 在 V_t 上的限制因此定义了一个从 V_t 到 $\mathbb{D}$上的双射解析映射，从而是一个双全纯映射。特别地，对所有 $w \in V_t$，有

$$\Phi_t'(w) = (1 + twA_0'(w))e^{tA_0(w)} \neq 0.$$

由于映射 $(t,\ w) \mapsto \Phi_t(w)$ 是解析的，这一非退化条件使我们得以应用隐函数定理，从而得到 $w(t,\ z)$ 的解析性。

包含关系 $\Phi_t(\partial V_t) \subset \partial\mathbb{D}$ 是经典的，它由如下事实推出：对每一个紧集 $K \subset \mathbb{D},\ \Phi_t^{-1}(K)$ 都是紧的。事实上，若对某个 $w \in \partial V_t$有 $\Phi_t(w) \in \mathbb{D}$，选取序列 $(w_n) \subset V_t$ 使得 $w_n \to w$，并令 $K = \{\Phi_t(w_n) : n \geqslant 0\} \cup \{\Phi_t(w)\}$。则 K在 $\mathbb{D}$中是紧的，从而$\Phi_t^{-1}(K) \subset V_t$ 也是紧的，这与 $w \in \partial V_t$这一事实相矛盾。

现在令 $z \in \partial\mathbb{D}$，并选择一个序列 $(z_n) \subset \mathbb{D}$，使得 $z_n \to z$。对每个 n，取 $w_n \in V_t$，满足 $\Phi_t(w_n) = z_n$。由 V_t的相对紧性，可取一个子序列，仍记为 (w_n)，收敛到某个 $w \in V_t$。由 Φ_t 的连续性可知，$\Phi_t(w) = z$。由于 $z \in \partial\mathbb{D}$，因此 $w \in \partial V_t$，这就证明了 Φ_t 将 ∂V_t 映射到 $\partial\mathbb{D}$ 上。

剩下需要证明的是，族 $(V_t)_{t\geqslant 0}$ 是递减的。令 $w_0 \in \mathbb{D} \cap V_s^c$。根据 V_s 的定义，有 $|\Phi_s(w_0)| \geqslant 1$，而引理 7.3 推出，对所有 $|\Phi_t(w_0)| \geqslant 1$，都有 $t \geqslant s$。换言之，对所有 $w_0 \in \mathbb{D} \cap V_t^c$，都有 $t \geqslant s$，这表明 $(V_t)_{t\geqslant 0}$ 是递减的，从而完成证明。 □

此时，对于任意初始密度剖面，可以验证 $(t,\ z) \mapsto g_0(w(t,\ z))$ 满足偏微分方程（4.37），在 $[0,\ \infty) \times \mathbb{D}$。只需注意到

$$\partial_t w(t,z) = -\frac{w(t,z)\,A_0(w(t,z))}{1 + t\,w(t,z)\,A_0'(w(t,z))} \quad \text{and} \quad \partial_z w(t,z) = \frac{e^{-tA_0(w(t,z))}}{1 + t\,w(t,z)\,A_0'(w(t,z))},$$

这意味着

$$\partial_t w(t,z) = -A_0(w(t,z))\,z\,\partial_z w(t,z) = -2\pi^2 u_\alpha(2\pi\alpha\, g_0(w(t,z)))\,z\,\partial_z w(t,z). \tag{7.76}$$

于是得到恒等式（4.37）。

注 7.4。 输运方程 (7.76) 与 *Loewner–Kufarev* 型偏微分方程密切相关。从这一角度看，族 $(w(t,\ \cdot))_{t\geqslant 0}$ 可解释为单位圆盘上的一个非增 *Loewner* 型链。近期参考文献见 *[BCDM12, CDMG10]*。

此外，由于 u_α 是整函数，柯西-柯瓦列夫斯卡娅定理（参见 [Pet12]）保证 (4.37) 存在唯一的局部解析解 $(t,z)\mapsto g(t,z)$ 在任意一个 (t_0,w_0) 的邻域内，只要$z\mapsto g(t_0,z)$ 在 w_0处是解析的。特别地，引理 7.4 给出以下命题。

命题 7.3。 对于所有 $t\geqslant 0$ 和所有 $z\in\mathbb{D}$，都有 $g(t,z)=g_0(w(t,z))$。

7.3.3 正则性和渐近性质

通过特征线法表示密度 $f(t,\ x)$ 需要将共形映射 $z\mapsto w(t,\ z)$ 从 $\mathbb{D}$ 连续延拓到 V_t 单位圆 $\mathbb{U}=\partial\mathbb{D}$上，并确定该延拓何时可跨边界解析延拓或光滑延拓。

这些条件取决于 ∂V_t的正则性。关于连续性定理和卡拉泰奥多里定理，请参阅 [Pom92，第 2], 章；在 ∂V_t 局部连通或为若尔当曲线的假设下，这些定理保证存在连续延拓，或边界之间存在同胚。另请参阅 [Ahl，第 4 章定理 6] 以及 [Pom92，第 3], 章，其中 ∂V_t的局部光滑性保证了跨边界的局部解析延拓。

Lem引理 7.6。对于所有 $t>0$，集合 $\partial V_t\cap\mathbb{D}$ 是一条解析曲线。此外，有

$$\partial V_t\cap\mathbb{U}\subset\mathcal{W}_0=\left\{w_0\in\mathbb{U}:\liminf_{w\to w_0}\operatorname{Re}A_0(w)=0\right\}.$$

引理 7.6 的证明。考虑 $w_0\in\partial V_t\cap\mathbb{D}$ 并令 $z_0=\Phi_t(w_0)\in\mathbb{U}$。我们断言 w_0 不是 Φ_t的临界点，也就是说，$\Phi_t'(w_0)\neq 0$。否则，根据复分析中的标准结果，方程 $\Phi_t(w)=z$ 在 w_0 的某个邻域内，对任意$z\in\mathbb{D}$，在 z_0的某个邻域内都会有多个解，这与引理 7.5矛盾。因此，由隐函数定理可知，∂V_t 在 w_0的某个邻域内是一条解析曲线。

最后，假设 $w_0\in\partial V_t\cap\mathbb{U}$并设 $(w_n)_{n\geqslant 1}\subset V_t$是一个满足 $w_n\to w_0$的序列。由于$|w_n|\to 1$，$w_ne^{tA_0(w_n)}\in\mathbb{D}$且 $\operatorname{Re}A(w_n)>0$（见引理 7.3），必有 $\operatorname{Re}\ A(w_n)\to 0$，由此完成该引理的证明。□

注7.5。 假设 A_0 在某个 $w_0\in\mathbb{D}$ 处连续。利用 (7.66) 并记 $\overline{w_0}=e^{ix_0}$，可见条件 $\operatorname{Re}A_0(w_0)=0$ 等价于 $f_0(x_0)$ 取得一个极值，即

$$\operatorname{Re}A_0(w_0)=0\quad\Longleftrightarrow\quad f_0(x_0)=0\quad or\quad f_0(x_0)=\frac{1}{2\pi\alpha}.$$

令

$$\mathcal{Z}_0=\left\{x\in\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}:f_0(x)=0\quad or\quad f_0(x)=\frac{1}{2\pi\alpha}\right\}.$$

根据引理 7.6 和注 7.5，正则性 $f(t,\ x)$ 似乎与集合 $\mathcal{Z}_0$ 密切相关。

命题 7.4。 定义

$$\mathcal{I}_t=\{x\in\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}:e^{ix}\in\Phi_t(\partial V_t\cap\mathbb{D})\}\quad and\quad\mathcal{I}=\bigsqcup_{t>0}\{t\}\times\mathcal{I}_t.$$

那么映射 $(t,\ x)\mapsto f(t,\ x)$ 在开集 $\mathcal{I}\subset(0,\ \infty)\times\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ 上是解析的，因此在此定义域上以强意义满足 (4.36)。

命题7.4的证明。 证明可由引理 7.6 上方给出的参考文献以及该引理证明中的论证得出。回顾一下，对于所有 $\Phi_t'(w) \neq 0$， $w \in \partial V_t \cap \mathbb{D}$。隐函数定理保证 $w(t,\ z)$ 可扩展为定义在 $(t,\ e^{ix})$邻域内的一对一解析函数，对 $x \in \mathcal{I}_t$，其值属于 $\mathbb{D}$，这意味着 $f(t,\ x)$ 在该点附近是解析的。 □

根据命题 7.4 和引理7.6，若 $\mathcal{W}_0$ 为空——例如，当 f_0 满足界（4.38）时——则映射 $(t,\ x) \mapsto f(t,\ x)$ 在 $(0,\ \infty)\times\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ 上解析，且在此定义域上以强意义满足（4.36）。同样可以像引理7.2那样通过标准估计证明这一点，这表明 $\mathfrak{m}_n(t)$ 随 $n \to \infty$几何级数式衰减。

始终会　　自发地变得光滑并收敛到平衡态　　.

命题 7.5. 对于任意初始密度剖面，存在 $t^* \geqslant 0$，使得 $(t,x) \mapsto f(t,x)$ 在 $(t^*,\infty)\times\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$上解析。此外，存在 $C,\lambda>0$，使得对于所有 $t \geqslant 0$,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|f(t,x)-\frac{1}{2\pi}\right| \leqslant Ce^{-\lambda t}. \tag{7.77}$$

命题7.5的证明。我们首先通过以下柯西积分表示来估计式（7.58）中的导数项，其中 $0<r<1$:

$$\left.\frac{\partial^{k-1}h_t^n(z)}{\partial z^{k-1}}\right|_{z=0} = \frac{(k-1)!}{2i\pi}\int_0^{2\pi}\frac{ie^{-2\pi^2 nt\,u_\alpha(re^{ix})}}{r^{k-1}e^{i(k-1)x}}\,dx.$$

由于 $u_\alpha(0)=1$，可以任意选取足够小的 r，使得 $|e^{-2\pi^2 nt\,u_\alpha(re^{ix})}| \leqslant e^{-\pi^2 nt}$ 关于 x、n 和 t 一致成立。特别地，对于这样的 r，我们有:

$$\left|\left.\frac{\partial^{k-1}h_t^n(z)}{\partial z^{k-1}}\right|_{z=0}\right| \leqslant \frac{(k-1)!\,e^{-\pi^2 nt}}{r^{k-1}}.$$

接下来，关于式（7.58）中的指数型偏 Bell 多项式，可以写成

$$|B_{n,k}(1!m_1,2!m_2,\cdots)| \leqslant B_{n,k}(1!|m_1|,2!|m_2|,\cdots).$$

于是，利用 $B_{n,\,k}(x_1a^1,\ x_2a^2,\ \cdots)=B_{n,\,k}(x_1,\ x_2,\ \cdots)a^n$ 以及 Faà di Bruno 公式，我们得到

$$\begin{aligned}|\mathfrak{m}_n(t)| &\leqslant \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}B_{n,k}\big(1!|m_1|e^{-\pi^2 t\times 1},2!|m_2|e^{-\pi^2 t\times 2},\cdots\big)(k-1)!\frac{(2\pi\alpha)^{k-1}}{r^{k-1}}\\ &\leqslant \frac{1}{n!}\left.\frac{\partial^n S_r\circ g_0^+(ze^{-\pi^2 t})}{\partial z^n}\right|_{z=0},\end{aligned}$$

其中我们定义

$$S_r(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\frac{(2\pi\alpha)^{k-1}}{r^{k-1}}z^k=-\frac{r}{2\pi\alpha}\ln\left(1-\frac{2\pi\alpha z}{r}\right)\quad\text{and}\quad g_0^+(z)=\sum_{n=1}^{\infty}|m_n|z^n.$$

于是得到恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\mathfrak{m}_n(t)|\,|z|^n \leqslant -\frac{r}{2\pi\alpha}\ln\left(1-\frac{2\pi\alpha\,g_0^+(|z|e^{-\pi^2 t})}{r}\right). \tag{7.78}$$

令 $R>1$ 任意，并选择 $t^*>0$ 使得$2\pi\alpha\, g_0^+(Re^{-\pi^2 t^*})<r$。那么，式（7.78）中的幂级数对所有 $t\geqslant t^*$ 和 $|z|\leqslant R$都绝对收敛。由第7.3.1 节可知，$f(t,\ x)$ 在 $[t^*$上光滑，$\infty)\times\mathbb{R}$ 并在此定义域上以强意义满足偏微分方程（4.36）。

接下来需要研究 $f(t、\ x)$ 当 $t\to\infty$时的收敛性。利用（7.78）中的上界，并注意到 $g_0^+(0)=0$，我们得到

$$\lim_{t\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}|\mathfrak{m}_n(t)|=0.$$

由于 $\mathfrak{m}_0(t)=1$ 且 $\mathfrak{m}_{-n}(t)$ 是 $\mathfrak{m}_n(t)$的复共轭，我们由7.77）可推出

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|f(t,x)-\frac{1}{2\pi}\right|\leqslant\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}|\mathfrak{m}_n(t)|=\mathcal{O}\left(g_0^+(e^{-\pi^2 t})\right).$$

□

继续之前，回顾一下，圆盘代数 $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ 由定义在 $\mathbb{D}$ 上的解析函数组成，并且这些函数可以连续延拓到 $\overline{\mathbb{D}}$。下一个结果是边界 ∂V_t 的正则性与 $f(t$的$x)$正则性之间对应关系的推论。其证明留给读者。

命题7.6。 假设 $A_0\in\mathcal{A}(\mathbb{D})$。如果 $\mathcal{Z}_0$ 是有限的，那么 $(t、\ x)\mapsto f(t、\ x)$ 在[0上是连续的，$\infty)\times\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$。此外，对于所有 $t>0$，映射 $x\mapsto f(t、\ x)$ 是解析的，除了可能在

$$\mathcal{I}_t^c=\{x\in\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}:e^{ix}\in\Phi_t(\partial V_t\cap\mathbb{U})\}=\mathcal{Z}_t,$$

其中

$$\mathcal{Z}_t=\left\{x\in\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}:f(t,x)=0\quad or\quad f(t,x)=\frac{1}{2\pi\alpha}\right\}.$$

在命题 7.6 的假设下，$(V_t)_{t\geqslant 0}$ 的单调性给出 $|\mathcal{Z}_t|\leqslant|\mathcal{Z}_0|$ 对所有$t\geqslant 0$均成立，同时有

$$x\in\mathcal{Z}_t\quad\Longleftrightarrow\quad\exists\, x_0\in\mathcal{Z}_0\text{ such that }e^{ix_0}\in\partial V_t\text{ and }e^{ix}=e^{i\left(x_0+t\ \mathrm{Im}\,A_0(e^{ix_0})\right)},\tag{7.79}$$

and

$$f(t,x)=0\ \left(\text{resp. }\frac{1}{2\pi\alpha}\right)\quad\Longrightarrow\quad\forall\,0\leqslant s\leqslant t,\ f(s,x)=0\ \left(\text{resp. }\frac{1}{2\pi\alpha}\right).$$

自然会问，在什么条件下，$w_0=e^{ix_0}\in\mathcal{W}_0$ 的零点$\mathrm{Re}\,A_0$ ——等价地，$x_0\in\mathcal{Z}_0$的极值点 f_0（见备注 7.5）——可能在 $f(t$中 $x)$产生不规则性。下一个命题大致说明，宏观空洞或拥塞会以线性速度传播，直到抵达临界点，并在该处发生导数的正则性损失。

命题 7.7。 假设 A_0 和 A_0' 属于 $\mathcal{A}(\mathbb{D})$。对于任意 $x_0\in\mathcal{Z}_0$，令 $w_0=e^{ix_0}$和 $v_0=\mathrm{Im}\,A_0(w_0)$。则有以下性质：

1. 对于充分小的 $t\geqslant 0$，边界 ∂V_t 是一条与单位圆在 w_0处相切的 $\mathcal{C}^1$ 闭曲线。此外，有 $x_0+tv_0\in\mathcal{Z}_t$。
2. 令 $t_0^*=$下确界$\{t>0:\ \ w_0\notin\partial V_t\}$。则 $t_0^*<\infty$，且必有 $1+t_0^*\,w_0A_0'(w_0)=0$。

命题 7.7的证明。 第一个结论由隐函数定理得出；为此，先应用惠特尼延拓定理，在某个开集上进行局部处理。相切性质是 ∂V_t 在 w_0处可微的结果，因为边界必须保持在单位圆盘内。

由（7.79）以及非临界点处的局部唯一性，我们推得 $x_0 + tv_0 \in \mathcal{Z}_t$ 对于充分小的 $t \geqslant 0$。命题 7.5 保证 $t_0^* < \infty$。反证可知， w_0 在时刻 t_0^*必为一个临界点。否则，对于足够小的 $s > 0$，将有 $w_0 \in \partial V_{t_0^*+s^\circ}$ □

注 7.6。 命题 A_0 中的全局假设 7.6 和 7.7 可以局部化，从而得到相应的局部正则性结果。此外，对 A_0 施加更高阶正则性假设可带来更强的边界正则性。

7.4 具有饱和的单模周期性密度分布

下面的例子补充了上文的命题 7.7 ，并表明即使是整函数解析初始密度剖面，也可能产生不规则性。

对于 $\alpha = 1/2,$ ，考虑以下初始密度剖面，以及其矩生成函数和特征系数：

$$f_0(x) = \frac{1 + \cos(px)}{2\pi}, \quad g_0(z) = \frac{z^p}{2}, \quad A_0(w) = 2\pi^2 \cos\left(\frac{\pi}{2} w^p\right),$$

其中 $p \geqslant 1$。注意， $\mathcal{W}_0 = \mathbb{U}_p \sqcup \zeta\, \mathbb{U}_p$，其中 $\mathbb{U}_p = \{\omega_1, \cdots, \omega_p\}$ 表示单位根的集合，并且 $\zeta^p = -1$。因此，

$$\mathcal{Z}_0 = \left\{ \frac{2k\pi}{p} : 0 \leqslant k \leqslant p-1 \right\} \sqcup \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{p} : 0 \leqslant k \leqslant p-1 \right\}.$$

注意， $\mathcal{W}_0$ 在复共轭和符号变化下保持不变。此外，对于所有 $w_0 \in \mathcal{W}_0$，都有 $A_0(w_0) = 0$，因此 $f(t,\ x)$ 的极值点是局部静止的。

我们断言，对于任意 $w_0 \in \mathcal{W}_0$，

$$t^* = \inf\{t > 0 : w_0 \notin \partial V_t\} = \frac{1}{p\pi^3}.$$

事实上，注意到，当且仅当 $t = 1/(p\pi^3)$时， $\Phi_t'(w_0) = 0$ 成立。根据命题 7.7，对于所有 $t \leqslant t^*$，必然有 $w_0 \in \partial V_t$ 。此外，可以验证，对于所有 $t > t^*$，都有 $w_0 \notin \partial V_t$ 。为此，我们研究 $\lambda \mapsto \Phi_t(\lambda w_0) w_0$ 在 [0上的映射， 1]，并注意到存在唯一的 $\lambda_t \in (0、\ 1)$，使得 $\lambda_t w_0 \in \partial V_t$。由对称性可容易验证，对于所有 $\lambda \in (-\lambda_t、\ \lambda_t)$，都有 $\lambda w_0 \in V_t$ ；而对于所有 $\lambda \in (\lambda_t、\ 1) \cup (-1、\ -\lambda_t)$，都有 $\lambda w_0 \in V_t^c$。还要注意，点 $\lambda_t w_0$ 是 Φ_t 的正则点，点 w_0 也是如此。因此，点 w_0 中没有任何一个能够属于边界，因为这将与前述性质之一相矛盾。

更确切地说，曲线 ∂V_t 的几何结构在复共轭、符号变化以及旋转角度为 $2\pi/p,$ 的旋转下保持不变，其形状取决于 t 相对于 t^* 的相对位置：

1. 如果 $0 < t < t^*$，曲线 ∂V_t 是解析的，并且对于任意 $w_0 \in \mathcal{W}_0$ 都将 w_0 与 $e^{2i\pi/p} w_0$ 连接起来。

2. 如果 $t = t^*$，曲线 ∂V_{t^*} 是连续的，除了点 w_0 外处处解析，并且具有与前一种情形相同的几何构型。

3. 若 $t > t^*$，则对任意 $w_0 \in \mathcal{W}_0$，曲线 ∂V_t 是解析的，并将 $\lambda_t w_0$ 连接到 $\lambda_t e^{2i\pi/p} w_0$ 。

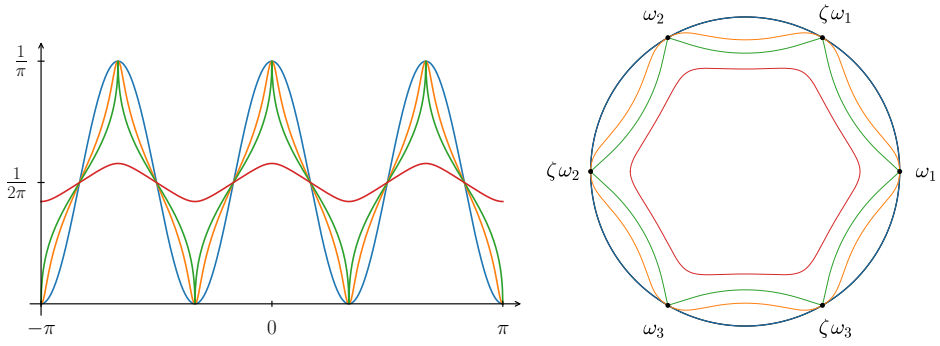

图12：密度 $f(t,\ x)$ 的演化，其与具有 $p=3$的周期调和剖面相关联，在四个不同时刻 $0<t_1<t^*<t_3$，以及边界 ∂V_t的相应演化。

我们得出结论： $f(t,\ x)$ 除在 $t=t^*$ 和 $x\in\mathcal{Z}_0$处外是解析的。该函数在这些点处保持连续，但在该处不具有空间导数（见图 12）。

进一步地，所得不规则性的阶可按如下方式确定。首先，拉格朗日–伯曼公式（例如，参见 [FS09]）使我们能够在原点附近写出：

$$w(t,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathfrak{a}_n(t)\,z^n,\quad \text{with}\quad \mathfrak{a}_n(t)=\frac{1}{n}\,[w^{n-1}]\,e^{-ntA_0(w)}.$$

这里，照usua l，$[w^k]S(w)$ 表示 w^k 在 $S(w)$的幂级数展开中的系数 .

等价地，有

$$\mathfrak{a}_n(t)=\frac{1}{2\pi i\,n}\oint_{\Gamma}\frac{e^{-ntA_0(w)}}{w^n}\,dw=\frac{1}{2\pi i\,n}\oint_{\Gamma}e^{-n\{tA_0(w)+\log(w)\}}\,dw, \tag{7.80}$$

其中 Γ 是一条包围0的正向简单闭曲线。

为了推导 $\mathfrak{a}_n(t)$ 的精确渐近行为，我们对（7.80）应用经典的最速下降法，也称鞍点法、拉普拉斯法或驻相法（参见例如 [FS09、BH86、Won01]）。在当前情形下，我们取 $\Gamma=\partial V_t$。沿此轮廓，（7.80）中的被积函数模长为一，因此相位函数

$$\mathfrak{f}_t(w)=tA_0(w)+\log(w), \tag{7.81}$$

是纯虚数，因为 ∂V_t 位于水平集 $\operatorname{Re}A_0(w)=0$ 上。此外，由于 Φ_t、 $\mathfrak{f}_t$ 和 $\operatorname{Im}\mathfrak{f}_t$ 具有相同的临界点，当 $t=t^*$时，驻相法是进行渐近分析的自然工具，此时临界点 w_0 位于 ∂V_{t^*}上。

此外，可以验证

$$\mathfrak{f}_{t^*}(w_0)=i\frac{(2k_0+\epsilon_0)\pi}{p}\quad\text{and}\quad \mathfrak{f}''_{t^*}(w_0)=-p\,\overline{w}_0^{\,2},$$

对某些 $0\leqslant k_0\leqslant p-1$ 和 $\epsilon_0\in\{0,\ 1\}$。

因此，在每个非退化临界点 w_0 处，曲线 ∂V_{t^*} 与单位圆相交，夹角为 $\pi/4,$，而从 w_0 发出的两条分支彼此正交。

结合直接计算和几何考量，可以发现， w_0 （来自分支两侧）对公式（7.80）中积分的贡献渐近为

$$i\,\overline{w}_0^{n-1}\sqrt{\frac{\pi}{2np}}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right).$$

将所有这些贡献相加并除以 $2i\pi n$ ，得到

$$\mathfrak{a}_n(t^*)=\begin{cases}\dfrac{1}{n\sqrt{2\pi np}}+\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right), & \text{if } 2p\mid(n-1),\\[2ex] \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right), & \text{otherwise.}\end{cases}$$

标准估计表明， $x\mapsto f(t^*,\ x)$ 在每个极值点 $x\in\mathcal{Z}_0$的邻域内都呈现平方根行为，正如 $x\mapsto w(t^*,\ e^{ix})$ 一样。

7.5 定理4.3的证明

现在考虑初始密度 f_0 由（4.39）给出的情形。与前一个例子不同， f_0 是不连续的，其饱和集 $\mathcal{Z}_0$ 与整个定义域重合。相应的解析结构呈现出新的特征，需要单独进行分析。

7.5.1 临界点

首先，由（4.40）可知， $\Phi_t(w)=we^{tA_0(w)}$ 在 $\mathcal{U}_\alpha=\mathbb{C}\backslash\{\omega_\alpha,\ \omega_\alpha\}$上定义良好。我们将对$\mathcal{C}_{\alpha,\ t}=\{w\in\mathcal{U}_\alpha$ 作出精确描述： $1+twA_0'(w)=0\}$。

为此，很容易验证

$$A_0'(w)=2\pi^2\times\begin{cases}\dfrac{-4w}{(w-i)^2(w+i)^2}, & \text{if } \alpha=1/2,\\[2ex] 2\cos(\pi\alpha)\dfrac{(w-\beta)(w-1/\beta)}{(w-\omega_\alpha)^2(w-\overline{\omega_\alpha})^2}, & \text{if } \alpha\neq 1/2,\end{cases}$$

其中

$$\beta=\frac{1-\sin(\pi\alpha)}{\cos\pi\alpha}\quad\text{and}\quad 1/\beta=\frac{1+\sin(\pi\alpha)}{\cos(\pi\alpha)}.$$

于是我们得到

$$1+twA_0'(w)=\frac{P_{\alpha,t}(w)}{(w-\omega_\alpha)^2(w-\overline{\omega_\alpha})^2},\tag{7.82}$$

其中

$$P_{\alpha,t}(w)=w^4+aw^3+bw^2+aw+1,\quad\text{with}\quad\begin{cases}a=4\cos(\pi\alpha)(\pi^2t-1),\\ b=4\cos^2(\pi\alpha)+2-8\pi^2t.\end{cases}$$

因此， $\mathcal{C}_{\alpha,\ t}$ 与 $P_{\alpha,\ t}$的根集重合。由于该多项式具有实系数且是回文的（即互反的），因此如果 $w\in\mathcal{C}_{\alpha,\ t}$，那么 w 和 $1/\overline{w}$

也属于 $\mathcal{C}_{\alpha,\ t}$。因此，只可能出现四种不同的构型：

$$\mathcal{C}_{\alpha,t} = \begin{cases} \{\zeta_1, \overline{\zeta}_1, \zeta_2, \overline{\zeta}_2\}, & \text{with } \zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{U}, \\ \{x_1, 1/x_1, \zeta_2, \overline{\zeta}_2\}, & \text{with } x_1 \in \mathbb{R}^*,\ \zeta_2 \in \mathbb{U}, \\ \{x_1, 1/x_1, x_2, 1/x_2\}, & \text{with } x_1, x_2 \in \mathbb{R}^*, \\ \{w, 1/w, \overline{w}, 1/\overline{w}\}, & \text{with } w \in \mathbb{C}^*. \end{cases} \tag{7.83}$$

事实上，(7.83) 中只有前三种情形是可能的。更准确地说，这些构型取决于 t 相对于 t_* 和 t^*的位置，具体如下：

$$t_* = \min\left(\frac{1-\cos(\pi\alpha)}{2\pi^2}, \frac{1+\cos(\pi\alpha)}{2\pi^2}\right), \quad t^* = \max\left(\frac{1-\cos(\pi\alpha)}{2\pi^2}, \frac{1+\cos(\pi\alpha)}{2\pi^2}\right). \tag{7.84}$$

注 7.7。 可以验证 $\mathcal{C}_{1-\alpha,t} = -\mathcal{C}_{\alpha,t}$。这种对称性反映了粒子系统与空位演化之间的对偶性：两个过程都遵循相同的最大熵动力学，其初始密度可通过交换 α和 $1-\alpha$轻易地相互推得。

因此，不失一般性，可以假设 $\alpha \leqslant 1/2$。

引理 7.7。 当 $\alpha \leqslant 1/2,$ 时，临界点集合 $\mathcal{C}_{\alpha,t}$ 具有如下结构：

1. 对所有 $0 < t < t_*$，单位圆上存在四个互不相同的临界点 $\zeta_1, \overline{\zeta}_1, \zeta_2, \overline{\zeta}_2$，满足 $\arg(\zeta_1) \in (0, \pi\alpha)$ 以及 $\arg(\zeta_2) \in (\pi\alpha, \pi)$。*2.* 当 $t = t_*$ 且 $\alpha < 1/2,$ 时，单位圆上存在两个互不相同的临界点 ζ_2, ζ_2，满足 $\arg(\zeta_2) \in (\pi\alpha, \pi)$，且 *1* 是一个二重临界点。*3.* 对所有 $t_*^- < t < t^*$，单位圆上存在两个互不相同的临界点 ζ_2, ζ_2，满足 $\arg(\zeta_2) \in (\pi\alpha, \pi)$，并且存在两个互不相同的正临界点 x_1 和 $1/x_1,$，满足 $x_1 < 1$。*4.* 当 $t = t^*$ 且 $\alpha < 1/2,$ 时，-1 是一个二重临界点，并且存在两个互不相同的正临界点 x_1 和 $1/x_1$，满足 $x_1 < 1$。*5.* 对所有 $t > t^*$，存在四个互不相同的实临界点 $x_1, 1/x_1, x_2, 1/x_2,$，其中 $0 < x_1 < 1$且 $-1 < x_2 < 0$。*6.* 当 $\alpha = 1/2$ 且 $t = t_* = t^*$ 时，-1 和 *1* 都是二重临界点。

证明　　引理 7.7. 利用$P_{\alpha,\ t}$ 是互反的，可以看出$P_{\alpha,\ t}(z) = 0$ 当且仅当i　　f

$$w^2 + \frac{a}{2}w + \frac{b-2}{4} = 0, \quad \text{with} \quad w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

此外，由于 $z^2 - 2wz + 1 = 0$，$P_{\alpha,t}(z)$的根可通过令 $z = w \pm \sqrt{w^2 - 1}$，从 w 中的相应多项式的根得到。注意，判别式为

$$\Delta = \frac{a^2 - 4(b-2)}{4} = 4\pi^2 t\left(\pi^2 \cos^2(\pi\alpha)\, t + 2\sin^2(\pi\alpha)\right).$$

因此，相应的根为

$$w^{\pm}(t) = \cos(\pi\alpha)(1-\pi^2 t) \pm \sqrt{\pi^2 t\left(\pi^2\cos^2(\pi\alpha)\,t + 2\sin^2(\pi\alpha)\right)}.$$

直接计算可知， $w^{+}(t)$ 递增，其中 $w^{+}(0) = \cos(\pi\alpha)$ 且 $w^{+}(t_*) = 1$；而 $w^{-}(t)$ 递减，其中 $w^{-}(0) = \cos(\pi\alpha)$ 且 $w^{-}(t^*) = -1$。由此可立即得出 $\mathcal{C}_{\alpha,\,t}$ 的结构。

□

7.5.2 ∂V_t 的边界

引入 $\mathfrak{f}_t(w)$ ，如式（7.81）所示，从而 $\Phi_t(w) = e^{\mathfrak{f}_t(w)}$，以及水平集

$$\mathcal{R}_t = \{w \in \mathcal{U}_\alpha \backslash \{0\} : \operatorname{Re}\mathfrak{f}_t(w) = 0\}.$$

首先注意到，除 $\operatorname{Re}\mathfrak{f}_t$ 的临界点外， $\mathcal{R}_t$ 局部上是一条一维光滑曲线；这些临界点与 $\mathfrak{f}_t$ 和 Φ_t 的临界点重合。此外，注意到 $\mathbb{U}\backslash\{\omega_\alpha,\ \overline{\omega_\alpha}\} \subset \mathcal{R}_t$，因为对所有模 2π 的 $\theta \neq \pm\pi\alpha,\ \overline{\pm\pi\alpha}$ 都有

$$A_0(e^{i\theta}) = \frac{2\pi^2\sin(\theta)\,i}{\cos(\pi\alpha) - \cos(\theta)}.$$

我们将描述 $\mathcal{R}_t$ 随 $t > 0$ 变化时的几何结构，尤其要证明它包含一条位于 $\mathcal{R}_t \cap \mathbb{D}$ 中的简单闭曲线。稍后我们将证明这条曲线与 $\overline{\partial V_t}$ 重合。

此外，根据备注 7.7，不失一般性，我们仍假设 $\alpha \leqslant 1/2$。关于边界的演化，请参见图 13；精确的数学描述见引理7.8、7.9、7.10和7.11 。

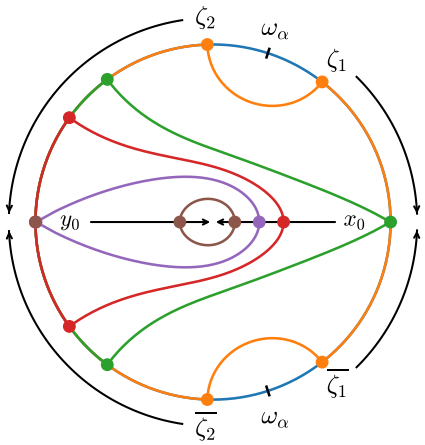

图 13：边界随 t 变化的演化。当 $t = t_*$ 时，临界点 ζ_1 和 ζ_1 在 1 处碰撞，并产生一个朝 0 移动的正则点 $x_0 > 0$；而 ζ_2 和 ζ_2 在 $t = t^*$ 处碰撞，并产生一个同样趋近于 0 的负正则点 $\overline{y_0} < 0$。

情形 $0 < t \leqslant t_*$。设 w_c 是单位圆上的一个临界点。由（7.82）可知，当且仅当 w_c 是 $P_{\alpha,\,t}$ 的单根时， w_c 才是 Φ_t 的非退化临界点。唯一不成立的情形是 $w_c = \pm 1$ （参见引理 7.7 及其证明）。在这种情形下，该临界点是二阶临界点，即 w_c 是 $P_{\alpha,\,t}$ 的二重根。

复分析中的初等结果表明，水平集 $\mathcal{R}_t$ 在其临界点附近具有简单的局部结构。在非退化临界点附近， $\mathcal{R}_t$ 局部由两条光滑分支组成，并且二者横截地相交，其中一条与单位圆重合。相比之下，在二阶退化临界点附近， $\mathcal{R}_t$ 局部由三条光滑分支组成，它们以 $\pi/3$, 的等角相交，并且通过角度为 $\pi/3$, 的旋转相互映射，其中一条分支再次与单位圆重合。

引理 7.8 （情形 $t < t_*$）。 沿着从 ζ_1 出发并向内或向外穿过单位圆的水平集 $\mathcal{R}_0$ ，路径会到达 ζ_2 （分别为 ζ_2）。此外，每条这样的路径都严格位于实轴上方（分别位于下方）。

引理 7.8 的证明。 由对称性，只需对非共轭临界点证明此结果。水平集 $\mathcal{R}_0$ 不能穿过实轴（除在此处排除的点 ± 1 外）这一事实，可以直接从 $\operatorname{Re} \mathfrak{f}_t(x) = \mathfrak{f}_t(x)$ 在 $\mathbb{R}^*$上的变化推出。

根据这一观察，从 ζ_1 出发，沿着与单位圆正交的方向向内追踪水平集，只有两种可能：水平集到达 ζ_2，或者终止于 ω_α。因此，只需证明后一种情况不可能发生。

为此，注意到 $\mathfrak{g}_t(w) = (\mathfrak{f}_t(w))^{-1}$ 可延拓为 ω_α邻域内的全纯函数，并且满足

$$\mathfrak{g}_t(\omega_\alpha) = 0 \quad \text{and} \quad \mathfrak{g}_t'(\omega_\alpha) = -\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi^2 t}\, i \neq 0.$$

由此可知， $\mathfrak{g}_t$ 在 ω_α的某个邻域 $\mathcal{B}$ 内是双全纯的。

此外，由于

$$\mathcal{R}_t \cap \mathcal{B} = \{\operatorname{Re} \mathfrak{g}_t(w) = 0\} \cap \mathcal{B} \backslash \{\omega_\alpha\},$$

我们推得 $(\mathcal{R}_t \cap \mathcal{B}) \sqcup \{\omega_\alpha\}$ 是一条光滑曲线。

根据局部唯一性，它必定与圆弧 $\mathbb{U} \cap \mathcal{B}$重合，这表明，从 ζ_1 出发并沿正交于单位圆且向内的方向延伸的分支不可能在 ω_α处终止。 □

以下引理的证明与上文引理 7.8的论证完全相同，故略去证明。

引理 7.9 (情形 $t = t_*$)。 沿着水平集 $\mathcal{R}_t$ 从1 出发，并沿上方（分别为下方）方向向内或向外穿过单位圆，该路径将到达 ζ_2 （分别为 ζ_2）。此外，除起点1 以及当 $\alpha = 1/2$（等价地， $t_* = t^*$）时的终点 -1 外，该路径始终严格位于实轴上方（分别为下方）。

情形 $t_* < t \leqslant t^*$。 考察 $\operatorname{Re} \mathfrak{f}_t(x) = \mathfrak{f}_t(x)$ 在 $\mathbb{R}^*$ 上的变化可知，存在唯一一点 $x_0 \in (0,\ 1)$ 使得 $\mathfrak{f}_t(x_0) = 0$。更确切地说，可以得到 $0 < x_0 < 1/x_1$, 其中 $1/x_1$表示 $(0, 1)$ 中唯一的实临界点，该点在引理 7.7中引入。特别地， x_0 是水平集上的一个正则点，并且可以证明该水平集在此点与实轴正交。

引理 7.10。 沿着水平集 $\mathcal{R}_t$ 从 x_0 出发，朝上方（分别朝下方）移动，路径会到达 ζ_2 （分别到达 ζ_2）。此外，除起点 x_0 以及当 $t = t^*$ 时的终点 -1外，它始终严格位于实轴上方（分别位于实轴下方）。

后一个引理的证明与上文引理 7.8 中的论证完全相同；与引理7.9一样，其证明从略。

情形 $t > t^*$。这里，$\operatorname{Re}\mathfrak{f}_t(x) = \mathfrak{f}_t(x)$ 的变化表明，除了 x_0之外，还存在第二个点 $y_0 \in (0,\ 1)$ 使得 $\mathfrak{f}_t(y_0) = 0$。这些是 $(-1,\ 1)$上的唯一零。此外，运用前面的引理中的相同论证，可得以下结果。

引理 7.11。沿着水平集 $\mathcal{R}_t$ 从 x_0 出发，向上（分别向下）移动，这条路径会到达 y_0。此外，除起点 x_0 和终点 y_0外，它始终严格位于实轴上方（分别下方）。

还需证明，上文所述的简单闭曲线（其内部记为 V_t，这里沿用记号）确实与引理 ∂V_t 中所刻画的边界 7.5相一致。事实上，只需证明以下结果即可。

引理 7.12。 Φ_t 从 ∂V_t 到 $\partial\mathbb{D}$诱导一个保向同胚。

假设此引理成立，由辐角原理可知

$$\#\{w \in V_t : \Phi_t(w) = z\} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial V_t} \frac{\Phi_t'(w)}{\Phi_t(w) - z}\, dw = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{dw}{w - z} = 1,$$

for 对所有 $z \in \mathbb{D}$ 和所有 $t > 0$ 均成立，这正是开集 V 的刻画 t.

引理 *7.12* 的证明。通过分析函数的变化

$$\theta \longmapsto \arg(\Phi_t(e^{i\theta})) = \theta + \frac{2\pi^2 t\, \sin(\theta)}{\cos(\pi\alpha) - \cos(\theta)},$$

其临界点与 Φ_t 位于单位圆上的临界点的辐角重合。可以观察到，对于 $t \leqslant t_*$，沿着 ∂V_t 从 $-\arg(\zeta_1)$ 到 $\arg(\zeta_1)$ 的部分，按三角方向前进时，其在 Φ_t 下的像正向描绘出 $\partial\mathbb{D}$ 上对应的圆弧，从 $\xi_1 = \Phi_t(\zeta_1)$ 到 $\xi_1 = \Phi_t(\zeta_1)$。同样的推理也适用于 ∂V_t 位于单位圆上的其他部分，例如 ζ_2 与 ζ_2 之间的圆弧。

现在考虑一段不包含在单位圆上的 ∂V_t 圆弧，例如当 $t \leqslant t_*$时，圆盘内连接 ζ_1 与 ζ_2 的圆弧。设 γ 是这段圆弧的单射参数化，并令 $z(s) = \Phi_t(\gamma(s))$。于是 $z(s)$ 沿着 $\partial\mathbb{D}$ 从 ξ_1 走到 ξ_2。由于全纯函数的实部和虚部的水平集在临界点以外彼此正交，函数 $s \mapsto \operatorname{Im}\mathfrak{f}_t(\gamma(s))$ 是单调的。正确的方向可由 $\mathfrak{f}_t$ 在 ζ_1 处的局部泰勒展开得出（当 $\zeta_1 \neq 1$ 时为二阶展开，否则为三阶展开）。同样的推理也适用于 ∂V_t 的所有其余圆弧。

总之，这给出了一个正向的连续参数化 $s \in [0,\ 1] \mapsto \gamma(s)$ 使得 ∂V_t，并且 $z(s) = \Phi_t(\gamma(s))$ 正向参数化了 $\partial\mathbb{D}$ 。最后，只需验证该参数化是一一对应的即可。这可由绕数的计算得出

$$\frac{1}{2i\pi}\int_0^1 \frac{z'(s)}{z(s)}\, ds = \frac{1}{2i\pi}\int_0^1 \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)}\, ds + \frac{1}{2i\pi}\int_0^1 t\, A_0'(\gamma(s))\, ds = 1.$$

这证明 Φ_t 诱导了一个从 ∂V_t 到 $\partial\mathbb{D}$的保向同胚。 □

7.5.3 正则性与饱和性质

只要定义良好，我们就令

$$\xi_i(t) = \Phi_t(\zeta_i) \in \mathbb{D} \quad \text{and} \quad \phi_i(t) = \arg(\xi_i(t)) \in (-\pi, \pi), \quad i \in \{1, 2\}.$$

可以验证， ϕ_1 在 $(0, t_*)$上从 $\pi\alpha$ 平滑地递减至 0，而 ϕ_2 在 $(0, t^*)$上从 $\pi\alpha$ 平滑地递增至 π 。回想一下，我们假设 $\alpha \leqslant 1/2$。

由特征线法可知，对于所有 $t > 0$， $x \mapsto f(t, x)$ 都是连续的，且除点 $x \in \{\pm\phi_1(t), \pm\phi_2(t)\}$外均为解析函数。这些点恰好是饱和集的边界。

对于所有 $0 \leqslant t \leqslant t_*$，密度在区间 $(-\phi_1(t), \phi_1(t))$上达到最大值 $1/(2\pi\alpha)$ ，并在 $(-\phi_2(t), \phi_2(t))$的补集上为零，对于所有 $0 \leqslant t \leqslant t^*$均如此。对于所有 $t > t^*$，密度变得光滑，并始终与这些极值保持一致的正距离。

关于不规则性的阶数，可以采用第 7.4节中的相同方法，确定 $x \mapsto f(t、 x)$的复矩的渐近行为。更确切地说，可以证明 $\mathfrak{m}_n(t)$ 满足以下渐近展开，具体取决于所处的情形：

$$\mathfrak{m}_n(t) = \begin{cases} \dfrac{\sum_{i\in\{1,2\},\,\pm} \lambda_{i,\pm}\, e^{\pm in\phi_i(t)}}{n^{3/2}} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right), & \text{if } t < t_*, \\ \dfrac{\lambda}{n^{4/3}} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^{5/3}}\right), & \text{if } t = t_* \text{ or } t = t^*, \\ \dfrac{\sum_{\pm} \lambda_{2,\pm}\, e^{\pm in\phi_2(t)}}{n^{3/2}} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right), & \text{if } t_* < t < t^*, \\ \dfrac{\lambda\, q(t)^n}{n^{3/2}} + \mathcal{O}\left(\dfrac{q(t)^n}{n^2}\right), & \text{if } t > t^*. \end{cases}$$

上式中， $q(t) = \Phi_t(x_1)$，其中 x_1 表示 Φ_t 在 $(0、 1)$中的唯一临界点；系数 $\lambda_{i、 \pm}$ 和 λ 是依赖于 t 的某些非零复常数。

由于证明依赖于标准但相当繁琐的渐近论证，且无法带来更多见解，因此略去，留给感兴趣的读者。

最后，这些渐近行为表明，密度在这些点处的奇点均为平方根型，但在 0 模 π处，当 $t \in \{t_*、 t^*\}$时例外，此时呈现立方根行为。

致谢。 作者感谢 Kilian Raschel 提醒其关注文献 [GLT23]。

参考文献

[Aba06] Alexander G. Abanov. 关联系统的流体动力学。载于 随机矩阵在物理学中的应用，第 221 卷，*NATO*科学丛书*II*：数学、物理与化学，第 139–161 页。Springer，多德雷赫特，2006 年。 9[AGS08] Luigi Ambrosio、Nicola Gigli 和 Giuseppe Savaré。 度量空间与概率测度空间中的梯度流。苏黎世联邦理工学院数学讲义。Birkhäuser Verlag，巴塞尔，第二版，2008 年。 9

[Ahl] L. V. Ahlfors。《复分析》。McGraw-Hill Book Company，第二版。57[AK16] Sergio Andraus 和 Makoto Katori。Dyson模型流体力学极限的刻画。载于《大尺度相互作用系统上的随机分析》，RIMS Kôkyûroku Bessatsu 第 B59 卷，第 157–173 页。数学科学研究所 (RIMS)，京都，2016 年。9[BBMP14] J. Bun、J. P. Bouchaud、S. N. Majumdar 和 M. Potters。大型随机矩阵的瞬子方法：Harish-Chandra-Itzykson-Zuber 积分。《物理评论快报》，113:070201，2014 年 8 月。9[BCDM12] Filippo Bracci、Manuel D. Contreras 和 Santiago Díaz-Madrigal。演化族与 Loewner方程 I：单位圆盘。J. Reine Angew. Math.，672:1–37，2012 年。56[BDL+20] Oriane Blondel、Aurelia Deshayes、Cyril Labbé、Laure Marêché 和 Marielle Simon。相互作用粒子系统的动力学。载于《2018 年 MAS 研讨会——采样与过程》，ESAIM Proc. Surveys 第 68 卷，第 52–72 页。EDP Sci.，莱兹，2020 年。10[BDLL22] Charles Bertucci、Mérouane Debbah、Jean-Michel Lasry 和 Pierre-Louis Lions。大型随机矩阵的谱支配方法。J. Math. Pures Appl. (9)，164:27–56，2022 年。9[BDLW10] Z. Burda、J. Duda、J. M. Luck 和 B. Waclaw。随机游走熵的诸多面向。Acta Physica Polonica B，41(5):949–987，2010 年。由 Z. Burda 在第二十二届 Marian Smoluchowski 统计物理学研讨会上报告。3[BH86] Norman Bleistein 和 Richard A. Handelsman。积分的渐近展开。多佛出版社，纽约，第二版，1986 年。61[Bia97a] Philippe Biane。自由布朗运动、自由随机演算与随机矩阵。载于《自由概率论》（安大略省滑铁卢，1995），Fields Inst. Commun. 第 12 卷，第 1–19 页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1997 年。10[Bia97b] Philippe Biane。Segal-Bargmann变换、矩阵空间上的函数演算，以及半圆系统与圆系统理论。J. Funct. Anal.，144(1):232–286，1997 年。10[BKM10] Piotr Biler、Grzegorz Karch 和 Régis Monneau。位错密度的非线性扩散与自相似解。Comm. Math. Phys.，294(1):145–168，2010 年。9[BLL24] Charles Bertucci、Jean-Michel Lasry 和 Pierre-Louis Lions。大型随机矩阵的谱支配方法：第二部分。J. Math. Pures Appl. (9)，192:论文编号 103630，30 页，2024 年。9[Bor11] Alexei Borodin。Schur过程的 Schur动力学。数学进展，228(4):2268–2291，2011 年。9[BP14] Alexei Borodin 和 Leonid Petrov。可积概率：从表示论到 Macdonald过程。Probab. Surv.，11:1–58，2014 年。8, 9

[BP25] Charles Bertucci 和 Valentin Pesce。通过粘性解理论研究酉戴森布朗运动的新方法。工作论文或预印本，2025 年。9[Cé95] Emmanuel Cépa。多值随机微分方程。载于《概率研讨班》XXIX，数学讲义第 1613 卷，第 86–107 页。Springer，柏林，1995 年。33[CDMG10] Manuel D. Contreras、Santiago Díaz-Madrigal 和 Pavel Gumenyuk。单位圆盘中的 Loewner 链。Rev. Mat. Iberoam.，26(3):975–1012，2010 年。56[CFP12] José A. Carrillo、Lucas C. F. Ferreira 和 Juliana C. Precioso。采用质量输运方法研究具有非局部速度的一维流体力学模型。数学进展，231(1):306–327，2012 年。9[CL97] Emmanuel Cépa 和 Dominique Lépingle。具有静电排斥作用的扩散粒子。Probab. Theory Related Fields，107(4):429–449，1997 年。33[CL01] Emmanuel Cépa 和 Dominique Lépingle。圆上的具有静电排斥作用的布朗粒子：重新审视酉随机矩阵的 Dyson 模型。ESAIM 概率与统计，5:203–224，2001 年。8, 33[Col03] Benoît Collins。酉群上多项式随机变量的矩与累积量、Itzykson-Zuber 积分及自由概率。国际数学研究通知，(17):953–982，2003 年。9[DH12] Nizar Demni 和 Taoufik Hmidi。自由酉布朗运动的谱分布：另一种方法。载于《概率研讨班 XLIV》，数学讲义第 2046 卷，第 191–206 页。Springer，海德堡，2012 年。10[DKM24] Rahul Dandekar、P. L. Krapivsky 和 Kirone Mallick。Dyson 气体中的电流涨落。《物理评论 E》，110(6)：论文编号 064153，16 页，2024 年。9[DO24] Thibaut Duboux 和 Yoann Offret。最大熵随机游走：无限情形及其蜘蛛网络示例与标度极限。工作论文或预印本，2024 年。9, 14[DO25] Sergey Dovgal 和 Yoann Offret。最大熵随机游走与中心马尔可夫链。预印本，见 https://arxiv.org/abs/2503.08172，2025 年。9, 11[Dud12] Jarosław Duda。扩展最大熵随机游走。雅盖隆大学，物理研究所。博士论文，克拉科夫，2012 年 11 月。3[Dys62] Freeman J. Dyson。随机矩阵特征值的布朗运动模型。《数学物理学杂志》，3:1191–1198，1962 年。8[EK86] Stewart N. Ethier 和 Thomas G. Kurtz。马尔可夫过程。Wiley 概率与数理统计丛书：概率与数理统计。John Wiley & Sons, Inc.，纽约，1986 年。《刻画与收敛》。35, 38, 44

[FGcN13] Tertuliano Franco、Patrícia Gon̦calves 和 Adriana Neumann。带慢键的对称排斥过程的流体动力学行为。Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.，49(2):402–427，2013 年。10[For98] Peter J. Forrester。随机矩阵、对数气体与 Calogero-Sutherland 模型。载于《量子多体问题与表示论》，MSJ Mem. 第 1 卷，第 97–181 页。日本数学会，东京，1998 年。8[For10] P. J. Forrester。对数气体与随机矩阵。伦敦数学会专著丛书第 34 卷。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2010 年。8[FS09] Philippe Flajolet 和 Robert Sedgewick。解析组合学。剑桥大学出版社，2009 年。61[FS16] Max Fathi 和 Marielle Simon。采用梯度流方法研究简单排斥过程的流体动力学极限。载于《从粒子系统到偏微分方程 III》，Springer Proc. Math. Stat. 第 162 卷，第 167–184 页。Springer，[Cham]，2016。10[Ful97] William Fulton。杨表：及其在表示论与几何学中的应用。伦敦数学会学生教材第 35 卷。剑桥大学出版社，剑桥，1997 年。16[FVG16] Lucas C. F. Ferreira 和 Julio C. Valencia-Guevara。通过质量输运研究具有非局部速度的一维模型的周期解。J. Differential Equations，260(10):7093–7114，2016 年。9[GGPN14] I. P. Goulden、Mathieu Guay-Paquet 和 Jonathan Novak。单调赫尔维茨数与 HCIZ 积分。Ann. Math. Blaise Pascal，21(1):71–89，2014 年。9[GLBM23] Arnaud Guillin、Pierre Le Bris 和 Pierre Monmarché。一维奇异排斥相互作用粒子系统：对数气体与黎兹气体。J. Éc. polytech. Math.，10:867–916，2023 年。9[GLT23] Jérémie Guilhot、Cédric Lecouvey 和 Pierre Tarrago。格拉斯曼流形的量子上同调与酉戴森布朗运动。arXiv 预印本 arXiv:2211.12836，2023 年。提交于 2022 年 11 月 23 日，最后修订于 2023 年 5 月 12 日。7, 8, 67[GM05] Alice Guionnet 和 Mylène Maïda。用于矩阵积分一阶渐近行为的特征标展开法。Probab. Theory Related Fields，132(4):539–578，2005 年。9[GS15] Vadim Gorin 和 Mykhaylo Shkolnikov。通过杰克多项式研究多层戴森布朗运动。Probab. Theory Related Fields，163(3-4):413–463，2015 年。9[Gui04] Alice Guionnet。矩阵积分的一阶渐近行为；理解矩阵模型的严格方法。Comm. Math. Phys.，244(3):527–569，2004 年。9[GW09] Wilfrid Gangbo 和 Michael Westdickenberg。等熵欧拉方程组的最优传输。Comm. Partial Differential Equations，34(7-9):1041–1073，2009 年。9

[Ham18] Tarek Hamdi. 重新探讨自由雅可比过程的谱分布。《分析与偏微分方程》，11(8):2137–2148，2018。10[HW96] David G. Hobson 和 Wendelin Werner. 圆上的非碰撞布朗运动。《伦敦数学学会会刊》，28(6):643–650，1996。8[Ker96] S. Kerov. 杨格格的边界与随机杨表。载于《形式幂级数与代数组合学》（新泽西州新不伦瑞克，1994），DIMACS丛书《离散数学、理论计算机科学》第24卷，第133–158页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1996。11[KL99] Claude Kipnis 和 Claudio Landim. 相互作用粒子系统的标度极限，数学科学基础丛书第320卷《数学科学基本原理》。Springer 出版社，柏林，1999。10[Koi89] Kazuhiko Koike. 经典群表示的张量积分解：借助泛特征。《数学进展》，74(1):57–86，1989。5，47[LW16] Karl Liechty 和 Dong Wang. 单位圆上的非相交布朗运动。《概率年刊》，44(2):1134–1211，2016。8[Mac15] I. G. Macdonald. 对称函数与霍尔多项式。牛津物理科学经典著作。克拉伦登出版社、牛津大学出版社，纽约，第二版，2015。A. V. Zelevinsky 贡献，并由 Richard Stanley 作序。24[Mat94] A. Matytsin. Itzykson-Zuber 积分的大N 极限。《核物理 B》，411(2-3):805–820，1994。9[Men17] Govind Menon. 复 Burgers 方程、HCIZ 积分与 Calogero–Moser 系统。2017。9[MS25] Matilde Marcolli 和 David Skigin. 工作空间上的合并作为霍普夫代数马尔可夫链。arXiv 预印本，2025。8[Nov20] Jonathan Novak. HCIZ 积分与 BGW 积分的复渐近。arXiv 预印本，2020。初步版本。9[Pet12] I.G. Petrovsky. 偏微分方程讲义。多佛数学丛书。多佛出版社，2012。57[Pom92] Ch. Pommerenke. 共形映射的边界行为，数学科学基础丛书第299卷《数学科学基本原理》。Springer 出版社，柏林，1992。57[RS15] Dan Romik 和 Piotr Sniady. 无限杨表上的滑动游戏动力学与二类粒子。《概率年刊》，43(2):682–737，2015。12

[Ser19] Sylvia Serfaty. 对数气体与库仑气体的微观描述。载于《随机矩阵》，IAS/Park City数学丛书第26卷，第341–387页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2019。8[Sta99] Richard P. Stanley.《计数组合学》第二卷，剑桥高等数学研究丛书第62卷。剑桥大学出版社，剑桥，1999。16，24[Ste87] John R. Stembridge. gl_n的有理杨表与张量代数。《组合理论杂志A辑》，46(1):79–120，1987。5，47[VJ67] D. Vere-Jones. 非负矩阵的遍历性质 I。《太平洋数学杂志》，22:361–386，1967。14[Wan10] Tower Wang. 库仑力作为熵力。《物理评论D辑》，81:104045，2010年5月。9[Won01] R. Wong.《积分的渐近近似》。工业与应用数学学会，2001。61