arXiv:2603.03913v1 [math.CO] 4 Mar 2026

交替定向 n 边形阶梯有向图的邻接谱

Hiroki Minamide *

摘要。对于整数 $n \geq 3$ 和 $r \geq 1$，令 $\Gamma_{n,\,r}$ 为沿单条边以阶梯式排列粘合 r 个有向 n 环所形成的交替定向有向图，并令 $A_{n,\,r}$ 为其邻接矩阵。一个典范的 n 层划分将 $A_{n,\,r}$ 化为 n 循环块形式，并分离出循环积核 $K_{n,\,r}$，因此 $A_{n,\,r}$ 的非零谱可由 $K_{n,\,r}$ 的非零谱经 n 次方根提升得到。我们证明 $K_{n,\,r}$ 是全非负且不可约的，因此其非零特征值均为实数、正数且互异。由此可知，$A_{n,\,r}$ 的所有非零特征值均为单重，并组成 $\exp(2\pi i/n)$ 轨道，在复平面上形成正则 n 边形的并集。一次 Schur 补给出了关于 r 的三项递推，用以递推 $A_{n,\,r}$ 的特征多项式 $\Phi_{n,\,r} \in \mathbb{Z}[x]$ 。这确定了零重数和非零谱计数，并导出一个三次分母生成函数。应用 Tran 型约束可得谱半径 $\rho(A_{n,r}) \leq (27/4)^{1/n}$ 的一致界；从以下意义上说，该界是尖锐的：对每个固定的 n，$\lim_{r\to\infty} \rho(A_{n,r}) = (27/4)^{1/n}$ 。最后，在 $x = 1$ 处取特例，将 $\Phi_{n,\,r}(1)$ 与帕多万螺旋数联系起来，并给出有理非零特征值的完整分类。

关键词。 有向图、邻接谱、块循环矩阵、全非负矩阵、根约束、帕多万数、 k-纳拉亚纳数

AMS 数学主题分类。 05C50, 15A18, 15B48,11B39.

1. 引言。 对于整数 $n \geq 3$ 和 $r \geq 1$，令 $\Gamma_{n,r}$ 为通过按阶梯式排列粘合 r 有向 n圈得到的交替定向有向图，并令$A_{n,r}$ 为其邻接矩阵。图 1 展示了例子 $\Gamma_{3,8}$ 和 $\Gamma_{4,6}$。我们的目标是描述$A_{n,r}$ 在复平面中的邻接谱。

相关研究。 通过沿共享边粘合有向 n-圈构造的有向图族，其谱问题近年来已成为研究多边形谱模式的沃土。在这类构造中，粘合参数 r 表示多边形块的数量，并决定所得有向图的规模。这一研究脉络源自化学动机模型：对于交替定向的线性连接六边形（用于模拟多并苯，即稠合苯环的线性链），Kashihara–Asano– Minamide 通过特征多项式的显式递推关系证明，其谱可分解为正六边形 [5]。随后，这一观点被推广至其他粘合方案。对于交替定向的梯子图，Ichikawa–Kashihara–Minamide 证明，其特征多项式与无向路径图的特征多项式相关，进而与斐波那契多项式相关 [4]。对于交替定向的梳状图，Kashihara–Minamide 发现，其特征多项式与无向梳状图的特征多项式相关，进而与佩尔多项式相关 [6]。对于交替定向的环带图，文献 [7] 也发现了类似的联系：其特征多项式与无向圈图的特征多项式相关，进而与第一类切比雪夫多项式相关。

这些工作的一个共同特征是，其特征多项式可以等同于或约化为某一经典特殊多项式族，从而使已知的根性质给出显式的谱信息。

*日本东京八王子市国立高等专门学校机构东京专门学校通识教育部，邮编 193-0997。东京科学大学计算学院数学与计算科学系，东京目黑区大冈山，邮编 152-8552，日本。（minamide@tokyo-ct.ac.jp）。

我们的阶梯有向图$\Gamma_{n,\ r}$归入这一思想之圆，但表现有所不同。其自然的伴随对象是视为 k中多项式的 k-纳拉亚纳数，一般而言并不存在显式的根公式。因此，我们采用基于循环约化与正性的线性代数途径。

研究方法与主要结果。一个规范的 n 层划分将 A_n、r 置于 n 循环（分块循环）标准形中，并分离出一个循环积核 K_n、r，因此 A_n、r 的非零谱可通过对 K_n、r 取 n 次根得到。我们证明 K_n、r 是全非负且不可约的，因此其非零特征值均为实数、正数且互异。 consequently，A_n、r 的非零特征值也是互异的，并且非零谱形成 exp(2$\pi i/n$)-组，即以原点为中心的正则 n 边形的并，每个正则多边形在正实轴上都有一个特定顶点。对粘合参数 r 进行一步 Schur补，可得到特征多项式 Φ_n、$r \in \mathbb{Z}[x]$的三项递推。由此递推，我们确定零特征值的代数重数以及非零谱计数。随后，我们将 Tran根限制定理 [10] 应用于相应的三次分母生成函数，得到一致界 $\rho(A_{n,r}) \le (27/4)^{1/n}$，以及对每个固定的 n均成立的精确极限 $\lim_{r\to\infty} \rho(A_{n,r}) = (27/4)^{1/n}$。最后，在 $x = 1$ 处对递推进行特化，将 Φ_n、r(1) 与帕多万螺旋数联系起来，并给出有理非零特征值的完整分类。图 2 展示了 Γ_3、8 的多边形谱。

组织结构。第2–3节介绍 n-循环约化与核理论；第4 节推导r-递推及谱的计数；第5–6节讨论约束、谱几何和重构问题；第7 节对有理非零特征值进行分类；附录汇集比较分析和实例。

2. 循环块形式与多边形谱。引言指出，$\Gamma_{n,r}$ 具有长度为 n的周期性。在本节中，我们将这种周期性转化为邻接矩阵的一种具体标准形式。我们不固定一个显式的分次映射 $V(\Gamma_{n,r}) \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$，而是沿着递推构造 $V(\Gamma_{n,r})$的规范划分，将其分成 n 层。随后，按层逐一列出顶点的单个置换将揭示一种 n循环块形式，由此通过标准的循环积约化可得非零特征值的多边形模式。

2.1. 有向图$\Gamma_{n,r}$。现在我们给出交替定向的 n边形阶梯有向图的精确定义，该图具有 r 个块，记作$\Gamma_{n,r}$。令 $n \ge 3$ 和 $r \ge 1$，并设

$$V(\Gamma_{n,r}) = \{1, 2, \dots, rn - 2r + 2\}.$$

有向边集 $E(\Gamma_{n,\ r}) \subset V(\Gamma_{n,\ r}) \times V(\Gamma_{n,\ r})$ 递归定义为

$$E(\Gamma_{n,1}) = \{(j, j+1) : 1 \le j \le n-1\} \cup \{(n, 1)\},$$

$$E(\Gamma_{n,2}) = E(\Gamma_{n,1}) \cup \{(1, n+1)\} \cup \{(j, j+1) : n+1 \le j \le 2n-3\} \cup \{(2n-2, n)\},$$

并且，对于 $r \ge 3$,

$$E(\Gamma_{n,r}) = E(\Gamma_{n,2}) \cup \bigcup_{i=1}^{r-2} F_i,$$

其中，对每个满足 i 且 $1 \le i \le r-2$ 的情形，我们设

$$\begin{aligned} F_i := \{(in - 2i + 2,\ in + n - 2i + 1)\} \cup\ & \{(j, j+1) : in + n - 2i + 1 \le j \le in + 2n - 2i - 3\} \\ \cup\ & \{(in + 2n - 2i - 2,\ in + n - 2i)\}. \end{aligned}$$

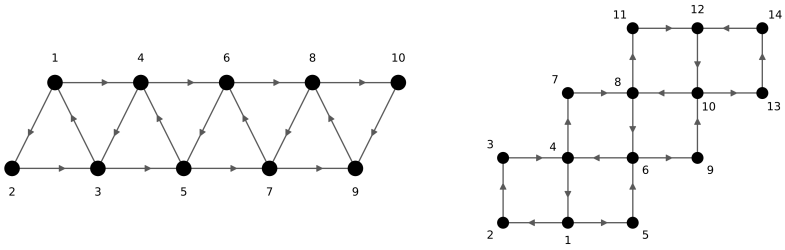

FIGURE 1。 *Visualizations of the digraphs* $\Gamma_{3,\ 8}$ *and* $\Gamma_{4,\ 6}$。

注2.1. 当 $n = 3$ 时， $E(\Gamma_{n,\ 2})$ 和 F_i 定义中的中间路径部分为空，因此 $E(\Gamma_{3,\ 2}) \setminus E(\Gamma_{3,\ 1})$，且每个 F_i 都由两条边组成。该构造仍然完全有效。

参见图1中的例子$\Gamma_{3,8}$ 和$\Gamma_{4,6}$ ，它们出现在$\Gamma_{n,r}$的定义中。

我们将$A_{n,r}$ 记为$\Gamma_{n,r}$的邻接矩阵，即由 $V(\Gamma_{n,r})$索引的(0, 1)-矩阵，其(u, v)-元为1当且仅当$(u, v) \in E(\Gamma_{n,r})$。我们令$\Phi_{n,r} := \det(xI - A_{n,r}) \in \mathbb{Z}[x]$ 为$A_{n,r}$的特征多项式。有向图$\Gamma_{n,r}$ 具有内在的周期-n 结构：每条边都属于由该构造所产生的 n-圈之一。在下一小节中，我们通过一个典范的 n-层划分将此形式化，从而将 $A_{n,r}$ 化为 n-循环块形式。

2.2. 层划分与诱导置换。 我们为每个顶点在 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$中指定一个层指标，使得每条有向边都使该指标模 n 增加1。

DEFINITION 2.2（层划分）。在 $E(\Gamma_{n,r})$的递归构造过程中，我们定义映射 $\ell : V(\Gamma_{n,r}) \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 如下。令 $\ell(1) = 0$。每当顶点 v 首次作为新添加边(u, v)的终端顶点出现时，定义

$$\ell(v) \equiv \ell(u) + 1 \pmod{n}.$$

对于每个 $c \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$，令

$$V_{n,r}^{(c)} := \{v \in V(\Gamma_{n,r}) : \ell(v) \equiv c \pmod{n}\}.$$

良定义性。每个顶点 $v \neq 1$ 首次作为新添加边（u, v）的终端顶点出现，而该边的初始顶点 u 已位于此前构造的有向图中。因此， $\ell(v)$至少被赋值一次，而“首次出现”这一条件确保它至多被赋值一次。

LEMMA 2.3（沿边的层递增）。对于每条边$(u, v) \in E(\Gamma_{n,r})$，有 $\ell(v) \equiv \ell(u) + 1$(模 n)。等价地，同一层内没有边，并且每条边都从 $V_n^{(c),r}$ 指向 $V_{(c+1)n,r}$ （指标按 n取模）。

证明。 根据定义 2.2，每当顶点 v 首次作为新添加边（u， v）的终点出现时，我们便赋予 $\ell(v) \equiv \ell(u) + 1$ (模 n)。因此，除非该边的终点已被赋予层，否则在每条边被引入时，同余关系都成立。

唯一终点已分配的边，是将新建路径连接回先前构造部分的闭合（出口）边。固定这样一条出口边（u， v）。顶点 u 位于新建的有向路径上，因此 $\ell(u)$ 是从入口边开始，每次加 1 得到的

路径上的结果。顶点 v 位于较旧部分中，并且已经分配了层。由于从 v 到 u的路径长度为 $n-1$，且其中每条边都会使层增加 1，因此我们有 $\ell(u) \equiv \ell(v) + n - 1$ (模 n)，故有 $\ell(v) \equiv \ell(u) + 1$ (模 n)。

因此 $\ell(v) \equiv \ell(u) + 1$ (模 n) 对每条边 $(u, v) \in E(\Gamma_{n,r})$ 都成立，而层陈述也随之成立。 □

2.3. n-循环块形式。 令$\sigma_{n,r}$ 为按逐层顺序列出顶点的置换：先按递增顺序列出 $V_{(0)n,r}$ 的所有顶点，然后列出 $V_{(1)n,r}$的所有顶点，依此类推，直到 $V_{(n-1)n,r}$。令 $S_{n,r}$ 为相应的置换矩阵，并定义

$$B_{n,r} := S_{n,r} A_{n,r} S_{n,r}^{-1}.$$

从现在起，我们使用 $B_{n,r}$ 及其分块。由于 $B_{n,r}$ 与 $A_{n,r}$置换相似，它们具有相同的谱；除非另有明确说明，我们不再切换回 $A_{n,r}$。

PROPOSITION 2.4 (n-循环块形式）。 按照逐层排序

$$V(\Gamma_{n,r}) = V_{n,r}^{(0)} \sqcup V_{n,r}^{(1)} \sqcup \cdots \sqcup V_{n,r}^{(n-1)},$$

矩阵 $B_{n,r}$ 具有分块形式

$$B_{n,r} = \begin{bmatrix} 0 & B_{n,r}^{(0)} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{n,r}^{(1)} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & B_{n,r}^{(n-3)} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & B_{n,r}^{(n-2)} \\ B_{n,r}^{(n-1)} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

其中 $B_{n}^{(c)},_{r}$ 编码从 $V_{n}^{(c)},_{r}$ 到 $V_{(c+1)n,r}$ 的边（指标按 n 取模）。

证明。 根据引理 2.3，$\Gamma_{n,r}$ 的每条边都从 $V_{n}^{(c)},_{r}$ 指向 $V_{(c+1)n,r}$（指标按 n 取模）。因此，按逐层顺序 $\sigma_{n,r}$排列时，邻接矩阵 $B_{n,r}$ 仅在位置 $(c, c+1)$ 处有非零块，从而得到所示形式。

□

2.4. 循环乘积约化与多边形特征值。 $B_{n,r}$ 的 n-循环块形式清楚地展现了各层的作用。$B_{n,r}$ 作用一次会将每一层映射到下一层，经过 n 步后便回到原层。由此，每一层上都得到一个 n 步返回映射，它由一个方阵表示。引入该返回映射的意义在于，一旦知道其特征值，便可通过取 n 次根得到 $A_{n,r}$ 的非零特征值。特别地，这些非零特征值按 $\exp(2\pi i/n)$ 构成轨道，因此在复平面上形成正 n 边形。

根据命题 2.4 中的 n-循环块形式，每个分块 $B_{n}^{(c)},_{r}$ 记录从 $V_{n}^{(c)},_{r}$ 到 $V_{(c+1)n,}$ $_{r}$的边（指标按 n 取模）。我们将循环积核定义为单个层上的 n 步返回映射，

$$K_{n,r} := B_{n,r}^{(0)} B_{n,r}^{(1)} \cdots B_{n,r}^{(n-1)}.$$

以下命题说明了在非零特征值和特征多项式层面上约化到核 $K_{n,r}$。

PROPOSITION 2.5（循环乘积约化）。$A_{n,r}$ 的非零特征值可由 $K_{n,r}$的非零特征值取n次根得到，同时保持代数重数不变。等价地，存在一个整数 $\nu_{n,r} \geq 0$ ，使得

$$\Phi_{n,r}(x) = x^{\nu_{n,r}} \det(x^n I - K_{n,r}).$$

证明。 由于 $A_{n,\,r}$ 与 $B_{n\text{置换相似},\,r}$因此只需研究$B_{n,\,r}$。根据命题 2.4，矩阵 $B^{n}_{n,\,r}$ 是分块对角的，其对角块为循环乘积

$$K^{(c)}_{n,r} := B^{(c)}_{n,r} B^{(c+1)}_{n,r} \cdots B^{(c-1)}_{n,r},$$

其中，上标按模 n 读取。这些块具有相同的非零谱及相同的代数重数，因为循环乘积 XY 和 YX 具有相同的非零谱；例如参见 [3, 定理 1.3。22]特别地，每个 $K^{(c)}_{n,\,r}$ 都与 $K_{n,\,r}$具有相同的非零谱。因此，$B^{n}_{n,\,r}$ 的非零特征值恰好是 $K_{n,\,r}$的非零特征值，且每个重复出现 n 次。于是，$B_{n,\,r}$的非零特征值恰好是 $K_{n,\,r}$的非零特征值的 n 次根，且代数重数保持不变。这等价于 $\Phi_{n,\,r}$的所示因式分解。

□

这一化简将非零谱集中到核 $K_{n,\,r}$中，而因子 $x^{\nu_{n,\,r}}$ 仅记录了零特征值贡献的一部分。下一条注释将解释这一差别。

注 2.6（零重数与约化指数）。我们将 $\mathrm{ord}_x\Phi$ 记作 $\Phi \in \mathbb{Z}[x]$ 在 $x = 0$处的消失阶数。根据命题 2.5，

$$\Phi_{n,r} = x^{\nu_{n,r}} \det(x^n I - K_{n,r}), \qquad \text{hence} \qquad \mathrm{ord}_x \Phi_{n,r} = \nu_{n,r} + \mathrm{ord}_x \det(x^n I - K_{n,r}).$$

第二项记录了 $K_{n,r}$ 的零特征值所作的贡献，因此是 n 的倍数。特别地，$\nu_{n,r}$ 是一个约化指数，而非完整的零重数；$\mathrm{ord}_x\Phi_{n,r}$ 的确切值将在后文通过 r-递推关系确定。

3. 全非负性与非零谱的单重性。 根据第2.4节中的循环约化，只需控制核 $K_{n,r}$；随后即可通过取 n 次方根提升，得到 $A_{n,r}$ 的非零谱。我们证明 $K_{n,r}$ 是全非负且不可约的；因此，$K_{n,r}$ 的非零特征值均为正且单重。命题2.5 随即将这一单重性传递给$A_{n,r}$。

我们沿用命题2.4中的记号。

3.1. 分块因子是全非负的。 n-循环标准形的作用不仅仅是重新组织指标：它将每个粘合步骤的组合结构转化为单调的关联模式。这正是全非负性的切入点。

PROPOSITION 3.1（核的全非负性）。循环积 $K_{n,\,r}$ 是全非负的，即 $K_{n,\,r}$ 的每个方形子式都非负。

证明。固定 c。在每一层内按递增顺序列出顶点后，分块 $B^{(c)}_{n,\,r}$ 记录从 $V^{(c)}_{n,\,r}$ 到 $V_{(c+1)n,\,r}$ 的边。我们声称，经过所有粘合步骤后，$B^{(c)}_{n,\,r}$ 的支撑至多包含两条相邻对角线。

事实上，在每个粘合步骤中，新顶点构成一条有向路径，其关联在两层中均遵循递增顺序，因此该新路径贡献一条由1组成的单一对角线字符串。闭合边连接在新追加线段的一个端点上，因此它至多只能产生一个额外的关联，位于

一条与来自该路径的对角线相邻的对角线上。由于递归构造总是在每一层序中将新创建的顶点置于先前已有顶点之后，每个粘合步骤仅在其边界处扩大当前的双对角支撑。因此 $B_n^{(c),r}$ 至多支撑在两条相邻对角线上，因而为双对角的。

每个双对角0–1矩阵都是全非负的：任意方子矩阵要么为零，要么是对角线非负的三角矩阵，因此其行列式非负。由于全非负性在矩阵乘积下由柯西-比内公式保持；例如参见 [2, 定理 1.1.2]，，循环积 $K_{n,r} = B_n^{(0),r} \cdots B_n^{(n-1),r}$ 是全非负的。

□

接下来证明 $K_{n,r}$ 是不可约的，因此简单性定理适用。

3.2. 不可约性。 若一个方阵不能通过同时置换行和列变为分块上三角形式，则称其为不可约的。若对于任意顶点有序对，都存在一条从第一个顶点到第二个顶点的有向途径，则称该有向图为强连通的。下文的关键在于这两个概念之间的联系。

LEMMA 3.2（的强连通性r）。有向图 $\Gamma_{n,r}$ 是强连通的。

证明。将 $\Gamma_{n,r}$ 视为由有向 n-圈 $C_1, \ldots, C_r$ 组成的链，其中 C_{k+1} 沿着共享有向边 (a_k, b_k) 与 C_k 粘合，对 $k = 1, \ldots, r-1$ 均如此。固定 $u \in V(C_i)$ 和 $v \in V(C_j)$。由于每个 C_k 都是强连通的，因此在 C_i 内部存在一条从 u 到 a_i 的有向途径。若 $i < j$，则沿着 (a_i, b_i) 进入 C_{i+1} 的 b_i 处，并沿链重复此过程，直到到达 C_j；随后在 C_j 内部前往 v。（$i > j$ 的情形类似。）将这些途径连接起来，得到 $\Gamma_{n,r}$ 中的一条从 u 到 v 的有向途径 W，因此 $\Gamma_{n,r}$ 是强连通的。

□

PROPOSITION 3.3（核的不可约性）。矩阵 $K_{n,r}$ 是不可约的。

证明。令 $G_{n,r}$ 为有向图，其顶点集为 $V_{(0)n,r}$；当且仅当 $K_{n,r}$ 的 (u, v) 项为正时，其中存在一条有向边 (u, v)。

令 $u, v \in V_{(0)n,r}$。由引理3.2，存在一条从 u 到 v 的有向途径 W，位于 $\Gamma_{n,r}$ 中。由引理2.3，每条边都使层数模 n 递增 1。因此，W 的长度是 n 的倍数。将 W 划分为长度为 n 的子途径。每条这样的子途径都始于并终于 $V_{(0)n,r}$，因此确定了一条长度为 n、穿过层的循环序列的有向途径。等价地，$K_{n,r} = B_n^{(0),r} \cdots B_n^{(n-1),r}$ 的相应 (u, v) 项为正，因为该项统计了从 u 到 v、长度为 n 且恰好经过一次层的循环序列的有向途径。因此，$G_{n,r}$ 包含一条从 u 到 v 的有向途径。由于 u 和 v 是任意的，$G_{n,r}$ 是强连通的。因此，根据定理 6.2，$K_{n,r}$ 是不可约的。24]

□

3.3. 简单非零谱。 全非负性决定符号，却不能保证彼此分离。不可约性是缺失的关键：它迫使正谱分裂为单特征值。

THEOREM 3.4（非零谱的正性与简单性）。$K_{n,r}$ 的每个非零特征值都为实数、正数且为单特征值。

证明。根据命题 3.1，矩阵 $K_{n,r}$ 是全非负的；根据命题 3.3，它是不可约的。因此，根据 [2, 定理 5.5.18(1)]，，$K_{n,r}$ 的所有非零特征值均为正且互异。

根据命题 2.5，$A_{n,r}$ 的非零特征值可由 $K_{n,r}$ 的特征值开 n 次方得到，并按代数重数计。由于根据定理 3.4，$K_{n,r}$ 的每个非零特征值都是单重的，因此 $A_{n,r}$ 的非零特征值也都是单重的。

Corollary 3.5（非零谱的简单性）。$A_{n,r}$ 的每个非零特征值都是单重的 .

4. 关于$\Phi_{n,\,r}$ 及零谱/非零谱计数的递推关系。第 2节–第 3节中的循环约化，将关于 $A_{n,\,r}$ 的谱问题转化为关于特征多项式的问题

$$\Phi_{n,r}(x) = \det(xI - A_{n,r}).$$

本节通过一次局部行列式计算，推导出关于粘合参数 r 的三项递推。该递推是我们的记账工具：它确定零特征值的重数，即 $\mathrm{ord}_x\Phi_{n,\,r}$，并通过

$$\deg \Phi_{n,r} = |V(\Gamma_{n,r})| = rn - 2r + 2,$$

也确定非零特征值的数量。我们注意到，命题2.5 中的 $\nu_{n,\,r}$ 是约化指数，而零重数为 $\mathrm{ord}_x\Phi_{n,\,r}$。

4.1. 关于粘合参数的三项递推。一次粘合步骤只会在局部改变图，但其特征多项式会从整体上反映这一变化。

Lemma 4.1（三项递推）。对于 $r \geq 4$，特征多项式满足

$$\Phi_{n,r} = x^{\,n-2}\Phi_{n,r-1} - x^{\,2(n-3)}\Phi_{n,r-3}.$$

证明。将 $xI - A_{n,\,r}$ 写成分块形式，把最后一次粘合步骤中新增的 $n-2$ 个顶点与此前构造的部分分开：

$$xI - A_{n,r} = \begin{bmatrix} M_{n,r-1} & U \\ V & T_n \end{bmatrix},$$

其中 $M_{n,\,r-1} = xI - A_{n,\,r-1}$，分块 T_n 对应于新添加的（$n-2$）顶点路径，而 U，V 表示两条连接边。由于 $\det(T_n) = x^{n-2}$，应用舒尔补可得

$$\Phi_{n,r} = x^{n-2}\det(M_{n,r-1} - UT_n^{-1}V).$$

矩阵 $UT_n^{-1}V$ 只有一个非零元素，它位于对应于两个连接顶点的位置，且该元素等于 $(T_n^{-1})_{1,\,n-2} = x^{-(n-2)}$。因此，通过修改单个元素即可得到 $M_{n,\,r-1} - UT_n^{-1}V$，它由 $M_{n,\,r-1}$ 变化而来，所以

$$\det(M_{n,r-1} - UT_n^{-1}V) = \det(M_{n,r-1}) - x^{-(n-2)}\Delta,$$

其中 Δ 是对应的余子式。删除定义 Δ 的行和列后，阶梯结构的末端部分便与先前构造的子图 $\Gamma_{n,\,r-3}$ 分离。将剩余顶点重新排序，使 $\Gamma_{n,\,r-3}$ 的顶点排在前面后，余子式矩阵变为分块上三角矩阵。其左上对角块恰为 $M_{n,\,r-3}$，其余两个对角块对应于最后两个粘合步骤产生的两条有向路径。每个路径块都是大小为 $n-3$ 的上三角矩阵，对角线元素均等于 x，因此其行列式为 x^{n-3}。于是

$$\Delta = x^{2(n-3)}\det(M_{n,r-3}).$$

将此恒等式代入上述舒尔补展开，即可得到所述递推关系。 □

4.2. 零重数与非零谱计数。 一旦得到递推关系，整除 $\Phi_{n,r}$ 的 x 的幂就成为关于 r 的显式周期函数。

PROPOSITION 4.2（零重数）。A_{n0} 是 $_{r}$,的特征值，其代数重数等于

$$\operatorname{ord}_x \Phi_{n,r} = rn - 2r + 2 - n\left\lfloor \frac{r+2}{3} \right\rfloor = \begin{cases} \dfrac{1}{3}(2n-6)(r-1), & r \equiv 1 \pmod 3, \\ \dfrac{1}{3}(2n-6)(r-2) + (n-2), & r \equiv 2 \pmod 3, \\ \dfrac{1}{3}(2n-6)(r-3) + 2(n-2), & r \equiv 0 \pmod 3. \end{cases}$$

证明。令

$$m_{n,r} := rn - 2r + 2 - n\left\lfloor \frac{r+2}{3} \right\rfloor.$$

我们首先证明 $x^{m_{n,r}}$ 整除$\Phi_{n,r}$，然后证明 $x^{m_{n,r}}$ 的系数不为零。

直接验证可得

$$m_{n,r} = \begin{cases} 2(n-3) + m_{n,r-3}, & r \equiv 1 \pmod 3, \\ (n-2) + m_{n,r-1} = 2(n-3) + m_{n,r-3}, & r \equiv 0, 2 \pmod 3. \end{cases}$$

因此，引理4.1 归纳可得，对所有 $r \geq 1$，$m_{n,r}$ ≤$\operatorname{ord}_x \Phi_{n,r}$ 。

令$c_{n,r}$ 表示$\Phi_{n,r}$中 $x^{m_{n,r}}$ 的系数。则

$$c_{n,r} = \begin{cases} -c_{n,r-3}, & r \equiv 1 \pmod 3, \\ c_{n,r-1} - c_{n,r-3}, & r \equiv 0, 2 \pmod 3. \end{cases}$$

由于

$$c_{n,1} = -1, \qquad c_{n,2} = -2, \qquad c_{n,3} = 1,$$

第一个关系确定了 $c_{n、3q+1}$ 的符号。由第二个关系可归纳推出，$c_{n、3q+2}$ =$c_{n、3q+1} - c_{n、3q-1}$ 以及 $c_{n、3q+3} = c_{n、3q+2} - c_{n、3q}$ 均为异号项之差，因而非零。因此，对于每个 $r \geq 1$，都有 $c_{n、r} \neq 0$ ，所以 $\operatorname{ord}_x \Phi_{n、r} = m_{n、r}$。

通过考虑 r 模 3 的剩余类，分段形式由取整表达式立即得到。

□

由 $\deg \Phi_{n、r} = rn - 2r + 2$ 和命题 4.2，非零谱计数立即可得。

COROLLARY 4.3（非零谱计数）。$A_{n、r}$ 的非零特征值个数为

$$\deg \Phi_{n,r} - \operatorname{ord}_x \Phi_{n,r} = n\left\lfloor \frac{r+2}{3} \right\rfloor.$$

引理中的递推4.1 将在两方面发挥作用：它确定本节中的谱计数，同时还导出一个三次分母生成函数。下一节中，我们将 Tran 型约束定理应用于该生成函数，从而得到一致谱界。

5. Tran 型约束与谱半径。 本节将第 r节中的递推4 转化为生成函数恒等式，并运用 Tran 的局限定理。由此得到谱的一致圆盘界；结合单重性，这也解释了复平面中的多边形几何。

5.1. Tran型根局限。生成函数的三次分母使我们恰好处于 Tran定理的适用情形。

LEMMA 5.1. 定义多项式 $H_m(z) \in \mathbb{Z}[z]$ 如下：

$$\sum_{m\geq 0} H_m(z)t^m = \frac{1}{1-t+zt^3}.$$

于是，对所有 $r \geq 1$,

$$\Phi_{n,r}(x) = x^{(n-2)r+2}\, H_{r+2}(x^{-n}).$$

证明。由生成函数可得 $H_0 = H_1 = H_2 = 1$，递推关系为 $H_m = H_{m-1} - zH_{m-3}$，其中 $m \geq 3$。令 $z = x^{-n}$，并乘以 $x^{(n-2)r+2}$，则对 $r \geq 4$,

$$x^{(n-2)r+2}H_{r+2}(x^{-n}) = x^{n-2}\, x^{(n-2)(r-1)+2}H_{r+1}(x^{-n}) - x^{2(n-3)}\, x^{(n-2)(r-3)+2}H_{r-1}(x^{-n}).$$

这与引理 4.1 中的递推关系一致。由于通过直接计算可知，所示恒等式在 $r = 1$，2，3 时与 $\Phi_{n,\,r}$ 相符，因此由归纳法可知，该结论对所有 $r \geq 1$ 均成立。 □

LEMMA 5.2. 对每个 $m \geq 0$，都有

$$H_m\left(\frac{4}{27}\right) > 0.$$

特别地，$\Phi_{n,\,r}$ 的任何非零根 λ 都不满足 $\lambda^n = 27/4$。

证明。在 $z = 4/27$处,

$$\sum_{m\geq 0} H_m\left(\frac{4}{27}\right) t^m = \frac{1}{1-t+\frac{4}{27}t^3} = \frac{1}{\left(1-\frac{2}{3}t\right)^2\left(1+\frac{1}{3}t\right)}.$$

部分分式分解给出

$$\frac{1}{\left(1-\frac{2}{3}t\right)^2\left(1+\frac{1}{3}t\right)} = \frac{1}{9}\frac{1}{1+\frac{1}{3}t} + \frac{2}{9}\frac{1}{1-\frac{2}{3}t} + \frac{2}{3}\frac{1}{\left(1-\frac{2}{3}t\right)^2}.$$

将每一项展开为幂级数,

$$\frac{1}{1+\frac{1}{3}t} = \sum_{m\geq 0}\left(-\frac{1}{3}\right)^m t^m, \qquad \frac{1}{1-\frac{2}{3}t} = \sum_{m\geq 0}\left(\frac{2}{3}\right)^m t^m, \qquad \frac{1}{\left(1-\frac{2}{3}t\right)^2} = \sum_{m\geq 0}(m+1)\left(\frac{2}{3}\right)^m t^m.$$

比较 t^m 的系数可得

$$H_m\left(\frac{4}{27}\right) = \frac{1}{9}\left(-\frac{1}{3}\right)^m + \frac{2}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^m + \frac{2}{3}(m+1)\left(\frac{2}{3}\right)^m = \frac{(-1)^m + (6m+8)2^m}{9\cdot 3^m} > 0.$$

现设 $\lambda \neq 0$ 是$\Phi_{n\text{的一个根，}\,r}$。若 $\lambda^n = 27/4$，则引理5.1 给出

$$0 = \Phi_{n,r}(\lambda) = \lambda^{(n-2)r+2}H_{r+2}(\lambda^{-n}) = \lambda^{(n-2)r+2}H_{r+2}\left(\frac{4}{27}\right),$$

这是不可能的，因为 $\lambda \neq 0$ 和 $H_{r+2}(4/27) > 0$。 □

THEOREM 5.3 (Tran 型约束）。固定 $n \geq 3$ 和 $r \geq 1$。$\Phi_{n,r}$ 的每个非零根 λ 都满足

$$\mathrm{Im}(\lambda^n) = 0, \qquad 0 < \mathrm{Re}(\lambda^n) < \frac{27}{4}.$$

证明。设 $\lambda \neq 0$ 是 $\Phi_{n,r}$ 的一个根。根据引理 5.1 可得 $H_{r+2}(\lambda^{-n}) = 0$。对 [10, 定理 3]应用

$$\sum_{m \geq 0} H_m(z) t^m = \frac{1}{1 + Bt + At^3} \quad \text{with} \quad B = -1, \quad A = z.$$

在 $z = \lambda^{-n}$ 处，Tran 参数为

$$-\frac{B^3}{A} = \frac{1}{z} = \lambda^n.$$

因此 $\mathrm{Im}(\lambda^n) = 0$ 且 $0 \leq \mathrm{Re}(\lambda^n) \leq 27/4$。由于 $\lambda \neq 0$，我们有 $\lambda^n \neq 0$，因此实际上 $\mathrm{Re}(\lambda^n) > 0$。此外，引理 5.2 排除了边界值 $\lambda^n = 27/4$。因此

$$0 < \mathrm{Re}(\lambda^n) < \frac{27}{4}.$$

□

5.2. Perron 根的双参数极限。 我们利用 Tran 的约束定理中的稠密性陈述，将定理 5.3 中的一致界提升为当 $r \to \infty$ 时的极限。

PROPOSITION 5.4 (Tran 界的尖锐性)。固定 $n \geq 3$。那么

$$\lim_{r \to \infty} \rho(A_{n,r}) = \left(\frac{27}{4}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

证明。由于 $\Gamma_{n,\,r-1}$ 是 $\Gamma_{n,\,r}$的诱导子图，因此矩阵 $A_{n,\,r-1}$ 是 $A_{n,\,r}$的主子矩阵。对于非负矩阵，谱半径关于取主子矩阵是单调的；参见例如 [3,推论 8.1.20(a)]。因此，$\rho(A_{n,\,r})$ 关于 r非递减。由定理 5.3，$\rho(A_{n,\,r}) \leq (27/4)^{1/n}$ 对所有 r均成立，因此 $\lim_{r\to\infty} \rho(A_{n,\,r})$ 存在。

还需证明 $\limsup \rho(A_{n,\,r}) \geq (27/4)^{1/n}$。在 $B = -1$，$A = z$这一特化中，根据$r\to\infty$定理5.3的证明，Tran定理 [10, 定理 3] 表明，$1/z$ 由根 z 的H_m 且 $\mathrm{Im}(1/z) = 0$ 所得的参数集合在 $(0,\ 27/4]$ 中稠密，$m \to \infty$。

令 $\varepsilon > 0$。任意选取足够大的 m，以及 H_m 的一个根 z_m，使得 $\mathrm{Im}(1/z_m) = 0$ 且 $1/z_m > 27/4 - \varepsilon$。记 $m = r + 2$，并选取满足 $\lambda^n = 1/z_m$ 的正实数 λ。根据引理 5.1，这个 λ 是 $\Phi_{n,\,r}$ 的非零根，因此是 $A_{n,\,r}$ 的特征值。因此

$$\rho(A_{n,r}) \geq \lambda = \left(\frac{1}{z_m}\right)^{\frac{1}{n}} > \left(\frac{27}{4} - \varepsilon\right)^{\frac{1}{n}}.$$

由于这对任意大的 r 都成立，且 $\varepsilon > 0$ 是任意的，我们得到

$$\limsup_{r \to \infty} \rho(A_{n,r}) \geq \left(\frac{27}{4}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

由于我们还有一致上界 $\rho(A_{n,\,r}) \leq (27/4)^{1/n}$，证明至此完成。□

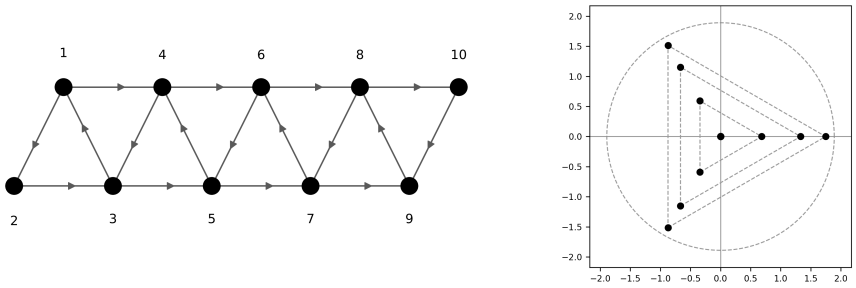

FIGURE 2。 *The spectrum of* $\Gamma_{3,\ 8}$ *and the dashed circle of radius* $(27/4)^{\ 1/3}$ *in the complex plane.*

5.3. 复平面中的正 n**边形**。 现在，代数问题转化为几何问题：每个簇都变成一个刚性的正 n边形。

THEOREM 5.5（多边形谱）。设 $n \geq 3$ 和 $r \geq 1$。$A_{n,\ r}$ 的谱由特征值0 及其代数重数$\mathrm{ord}_x \Phi_{n,\ r}$组成，此外恰好包含 $\lfloor (r+2)/3 \rfloor$ 个正则 n边形；这些多边形全部包含在半径为 $(27/4)^{\ 1/n}$的开圆盘内，且每个 n边形都有一个顶点位于正实轴上。

证明。命题 4.2 给出了零特征值的代数重数，而推论4.3 给出了非零特征值簇的数量。根据命题 2.5，$A_{n,\ r}$ 的非零特征值由 n次取根得到，即取$K_{n,\ r}$的非零特征值的 n次根，因此它们构成正则 n边形。定理 5.3 给出了开圆盘界，而$K_{n,\ r}$ 的非零特征值的正性意味着每个这样的 n边形都有一个顶点位于正实轴上。

□

图2 展示了定理5.5 ，其中$\Gamma_{3,\ 8}$。

注5.6（奇偶性）谱 n-边形在负实轴上有一个顶点 ，当且仅当 n 为偶数。

6. 从特征多项式重构。第4节中的三项递推在$\Phi_{n,\ r}$的最高次数部分留下了一个鲜明的指纹。本节将证明，仅凭$\Phi_{n,\ r}$ 即可确定参数$(n,\ r)$。

LEMMA 6.1（$\Phi_{n,\ r}$的二项式展开）。对于任意 $n \geq 3$ 和 $r \geq 1$,

$$\Phi_{n,r}(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor (r+2)/3 \rfloor} (-1)^j \binom{r+2-2j}{j} x^{(n-2)r+2-nj}.$$

证明。对于 $n \geq 3$ 和 $r \geq 1$，令$\Psi_{n,\ r} \in \mathbb{Z}[x]$ 表示右侧。利用二项式恒等式

$$\binom{m}{j} = \binom{m-1}{j} + \binom{m-1}{j-1},$$

可以验证，族 $\{\Psi_{n,r}\}_{r \geq 1}$ 满足与引理 4.1 中相同的三项递推。此外，$\Psi_{n,\ r} = \Phi_{n,\ r}$ 对于 $r = 1$，2，3 可通过直接验证得到。因此，对于所有 $r \geq 1$，$\Psi_{n,\ r} = \Phi_{n,\ r}$ 均成立。 □

THEOREM 6.2（由 $\Phi_{n,\ r}$ 重构）。假设多项式 $\Phi \in \mathbb{Z}[x]$ 具有形式 $\Phi = \Phi_{n,\ r}$，其中 $n \geq 3$ 和 $r \geq 1$。那么参数 (n, r) 由 Φ 确定。

证明。 由引理 6.1， Φ 的最高次数两项为 $x^{(n-2)r+2} - r\, x^{(n-2)r+2-n}$。因此 n 是最高两项指数之差，并且 r 是次高项系数的绝对值。 □

这种重构也解释了为什么第 7 节中的算术问题可以完全用 $\Phi_{n,\,r}(1)$ 来表述。

7. 有理非零特征值。本节确定 $A_{n,r}$ 的谱何时含有有理非零特征值。定理 5.5 中的多边形对称性表明，若存在这样的特征值，它必定出现在一个特殊顶点处；我们将看到，这个问题可归结为单一的特化 $\Phi_{n,r}(1)$。

设 $\lambda \in \mathbb{Q}$ 是 $A_{n,r}$ 的一个非零特征值。由于 $\Phi_{n,r}$ 是首一的，每个特征值都是代数整数，因此 λ 必须是整数。由定理 5.3 可知 $|\lambda| < (27/4)^{1/n} \le (27/4)^{1/3} < 2$。因此，可能的有理非零特征值只有 $\lambda = \pm 1$。此外，多边形结构意味着，只有当 n 为偶数且 1 属于同一个谱 n 边形时，-1 才可能出现。因此，只需确定 1 何时是 $A_{n,r}$ 的特征值，等价地，确定何时 $\Phi_{n,r}(1) = 0$。

7.1. 帕多万螺旋数与 de Weger 消失定理。我们使用帕多万数列 $\{P_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$，其规范化方式为

$$P_0 = P_1 = P_2 = 1, \qquad P_{m+3} = P_{m+1} + P_m \quad (m \in \mathbb{Z}),$$

并按相同的递推关系将其扩展到所有整数。这种规范化形式通常称为帕多万螺旋数，列于 [8,A134816]。

我们所需的唯一外部结果是对 $\{P_m\}$零点的分类。以下消失判据可追溯至 de Weger；便于查阅的明确表述见 [1, 表 1]。

Theorem 7.1（de Weger）。对于上述帕多万数列 $\{P_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$，

$$P_m = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad m \in \{-1, -3, -4, -8, -17\}.$$

7.2. 从$\Phi_{n,\,r}(1)$到帕多万数列。从我们的特征多项式到帕多万数运算的桥梁，是在 $x = 1$处进行特化。粘合参数 r 中的递推关系简化为帕多万递推，且初始值相符。

Lemma 7.2（$x = 1$处的帕多万数值）。对于每个 $n \ge 3$ 和 $r \ge 1$,

$$\Phi_{n,r}(1) = (-1)^r\, P_{-r-7}.$$

证明。将引理 4.1 中的递推式代入 $x = 1$，得到关于 r 的 $\Phi_{n,\,r}(1)$ 的三项递推。$(-1)^r P_{-r-7}$ 也满足相同的递推式。通过直接验证可知，这两个数列在 $r = 1$，2，3 时相同，因此根据归纳法，它们对所有 r 都相同。□

我们用 Spec(M) 表示矩阵 M 的谱，用 $\mathbb{Q}^\times$ 表示非零有理数集合。

Theorem 7.3（帕多瓦判据）。令 $n \ge 3$ 且 $r \ge 1$。则

$$\mathrm{Spec}(A_{n,r}) \cap \mathbb{Q}^\times \neq \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad 1 \in \mathrm{Spec}(A_{n,r}) \quad \Longleftrightarrow \quad r \in \{1, 10\}.$$

证明。如本节开头所述，要判定 Spec($A_{n,\,r}$)$\cap\mathbb{Q}^\times$ 是否非空，只需确定 1 何时是 $A_{n,\,r}$ 的特征值，也就是说，确定 $\Phi_{n,\,r}(1) = 0$ 何时成立。

根据引理7.2，我们有$\Phi_{n,\,r}(1) = (-1)^r P_{-r-7}$，因此$\Phi_{n,\,r}(1) = 0$ 当且仅当 $P_{-r-7} = 0$。现在，de Weger 的分类（定理7.1）推出 $r \in \{1, 10\}$。□

这也解释了下面所示的例外情形 $r = 10$。

例 7.4（例外值 $r = 10$）。在 $r = 10$，有理特征值可从特征多项式中直接看出。例如，当 $(n,\ r) = (4,\ 10)$ 时，可以得到

$$\Phi_{4,10}(x) = x^6(x-1)(x+1)(x^2+1)\big(x^{12} - 9x^8 + 19x^4 - 1\big),$$

因此 $x^4 - 1$ 整除 $\Phi_{4,\ 10}(x)$，而且 ± 1 确实是特征值。

附录A. 算术视角。 $n = 3$特征因子满足关于粘合参数的纳拉亚纳型递推。本附录记录相应的 k-纳拉亚纳数，并整理出后文将用到的几条算术事实。

A.1. k-纳拉亚纳数：定义与生成函数。 我们采用 k-纳拉亚纳数，其由 [9]引入。

Definition A.1（k-纳拉亚纳多项式 [9, 第 1] 节）。定义 $\{N_m\}_{m\ge 0} \subset \mathbb{Z}[k]$ 为

$$N_0 = 0, \qquad N_1 = 1, \qquad N_2 = k, \qquad N_m = k\,N_{m-1} + N_{m-3} \quad (m \ge 3).$$

下文将利用生成函数和系数公式，在 $n = 3$ 的情形下比较这些多项式与特征因子。

Proposition A.2（生成函数 [9, 式（2.4）]）。有

$$\sum_{m\ge 0} N_m\, z^m = \frac{z}{1 - kz - z^3}.$$

Proposition A.3（二项式展开）。对于所有 $m \ge 1$,

$$N_m = \sum_{j=0}^{\lfloor (m-1)/3 \rfloor} \binom{m-1-2j}{j}\, k^{\,m-1-3j}.$$

证明。将命题A.2展开为

$$\frac{z}{1 - kz - z^3} = \sum_{j\ge 0} \frac{z^{3j+1}}{(1-kz)^{j+1}} = \sum_{j\ge 0} z^{3j+1} \sum_{q\ge 0} \binom{q+j}{j} (kz)^q,$$

使用二项级数展开，并读出 z^m 的系数（因此 $q = m - 1 - 3j$）。 □

A.2. 一个直接的对应关系，其中有$\Phi_{3,\ r}$。此处我们采用约定 $\Phi_{n,\ r}(x) = \det(xI - A_{n,\ r})$。

Proposition A.4（ $n = 3$ 的对应关系）。对于所有 $m \ge 4$,

$$N_m = (-1)^{m+1}\, \Phi_{3,m-3}(-k).$$

证明。 将引理 6.1 特化到 $n = 3$ 和 $r = m - 3$ 可得

$$\Phi_{3,m-3}(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor (m-1)/3 \rfloor} (-1)^j \binom{m-1-2j}{j}\, x^{\,m-1-3j}.$$

代入 $x=-k$ 可得

$$\Phi_{3,m-3}(-k)=\sum_{j=0}^{\lfloor (m-1)/3\rfloor}(-1)^{m-1-2j}\binom{m-1-2j}{j}\,k^{\,m-1-3j}.$$

乘以 $(-1)^{m+1}$ 可消去剩余的符号，因为 $(-1)^{m+1}(-1)^{m-1-2j}=1$。因此 $N_m=(-1)^{m+1}\Phi_{3,\,m-3}(-k)$，正如所声称的那样。 □

命题A.4 指出， $n=3$ 特征因子与 k-纳拉亚纳多项式仅相差一个简单的符号变换，因此我们可以直接采用关于 $N_m(k)$的标准根信息。

A.3. 关于 k-纳拉亚纳多项式的根性质汇总。下一个命题归纳了我们将要用到的关于 $N_m(k)$ 的三项基本“根统计量”： $k=0$处的重数、非零根的单重性，以及有理非零根的完整列表。

PROPOSITION A.5（ N_m的根性质）。设 $m\geq 1$。则：

(i) 根 $k=0$ 的重数为

$$\operatorname{ord}_k N_m=\begin{cases}0, & m\equiv 1 \pmod 3,\\ 1, & m\equiv 2 \pmod 3,\\ 2, & m\equiv 0 \pmod 3.\end{cases}$$

(ii) N_m 的每个非零根都是单根。

(iii) N_m 唯一可能的有理非零根是 $k=-1$，且当且仅当

$$m\in\{4,13\}.$$

证明。 (i) 根据命题 A.3 ，对每个 $m\geq 1$,

$$N_m=\sum_{j=0}^{\lfloor (m-1)/3\rfloor}\binom{m-1-2j}{j}\,k^{\,m-1-3j}.$$

在各项中， k 的最小指数出现在 $j=\lfloor (m-1)/3\rfloor$时，因此

$$\operatorname{ord}_k N_m=(m-1)-3\left\lfloor\frac{m-1}{3}\right\rfloor,$$

当 $m\equiv 1$ 分别与 0、1、2 模 3 同余时，结果恰好为 0，1，2，0 (mod 3)。

(ii) 该 情形 $m=1$，2，3 显然成立。对于 $m\geq 4$，我们使用命题 A.4中的对应关系：

$$N_m=(-1)^{m+1}\,\Phi_{3,m-3}(-k).$$

由于前置因子 $(-1)^{m+1}$ 非零，非零 k_0 是 N_m 的根，当且仅当 $x=-k_0$ 是$\Phi_{3,m-3}(x)$的非零根；也就是说，$-k_0$ 是$A_{3,m-3}$的非零特征值。根据正文中的推论3.5 ，$A_{3,m-3}$ 的每个非零特征值都是单根，因此$\Phi_{3,m-3}$ 在 $x=-k_0$处有一个单根。因此， N_m 在 $k=k_0$处有一个单根。

(iii) 根据 (i)，从 N_m 中去掉 k 的最高次幂后，剩余多项式的常数项为 1，因此任何有理根都必须是整除 1 的整数，故属于 $\{\pm 1\}$。此外，对于所有 m， $N_m(1)>0$ （在 $k=1$ 处的递推会产生严格递增的正整数序列），因此 $k=1$ 永远不是根。最后，

$$N_m(-1)=0\iff\Phi_{3,m-3}(1)=0\iff m-3\in\{1,10\}\iff m\in\{4,13\},$$

其中　　中间的等价关系恰好是帕多瓦判据（定理 7.3）在 $n = 3$ 上的特例。 □

附录 B. 一个完整示例：四件套。

在本附录中，我们将明确推导例 $\Gamma_{3,\ 8}$ ，以展示层划分、诱导出的 3-循环分块形式、分块因子以及循环核心。每一层内的顶点均按递增顺序排列。

有向图 $\Gamma_{3,8}$. 下面明确演算示例 $\Gamma_{3,8}$ ，该示例见图2。左图展示有向图，右图展示相应的非零谱。

For $(n, r) = (3, 8)$ we have $|V(\Gamma_{3,8})| = rn - 2r + 2 = 10$, hence $V(\Gamma_{3,8}) = \{1, 2, \ldots, 10\}$.

根据第 2.1 节中的构造，有向边集为

$$E(\Gamma_{3,8}) = \{(1,2),(2,3),(3,1),\ (1,4),(4,3),\ (3,5),(5,4),\ (4,6),(6,5),\\ (5,7),(7,6),\ (6,8),(8,7),\ (7,9),(9,8),\ (8,10),(10,9)\}.$$

分级记录周期 3 结构中每个顶点所在的层，因此每条边都会使层索引加一（模 3）。

分级与层。 定义 $\ell : V(\Gamma_{3,\ 8}) \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 为

$\ell(1) = 0, \ell(2) = 1,\ \ell(3) = 2,\ \ell(4) = 1,\ \ell(5) = 0,\ \ell(6) = 2,\ \ell(7) = 1,\ \ell(8) = 0,\ \ell(9) = 2,\ \ell(10) = 1.$

则这些层 $V_{(c)\ 3,\ 8} := \{u \in V(\Gamma_{3,\ 8}) : \ell(u) \equiv c \pmod 3\}$ 为

$$V_{3,8}^{(0)} = \{1, 5, 8\}, \qquad V_{3,8}^{(1)} = \{2, 4, 7, 10\}, \qquad V_{3,8}^{(2)} = \{3, 6, 9\}.$$

置换为 3-循环分块形式。 设 $S_{3,\ 8}$ 为置换矩阵，它按照以下方式重新排列基

$$\sigma_{3,8} : (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10) \mapsto (1, 5, 8 \,|\, 2, 4, 7, 10 \,|\, 3, 6, 9),$$

也就是说，层序为 $(V_{(0)\ 3,\ 8} \,|\, V_{(1)\ 3,\ 8} \,|\, V_{(2)\ 3,\ 8})$。令 $B_{3,\ 8} := S_{3,\ 8} A_{3,\ 8} S_{3\ 8,}^{-1}$ 。则 $B_{3,\ 8}$ 具有 3-循环分块形式

$$B_{3,8} = \begin{bmatrix} 0 & B_{3,8}^{(0)} & 0 \\ 0 & 0 & B_{3,8}^{(1)} \\ B_{3,8}^{(2)} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad (|V_{3,8}^{(0)}|, |V_{3,8}^{(1)}|, |V_{3,8}^{(2)}|) = (3, 4, 3),$$

其中 $B_{3\ 8}^{(c)}$, 记录从 $V_{3\ 8}^{(c)}$, 到 $V_{(c+1)\ 3,\ 8}$ 的边（索引模 3）。具体地，

$$B_{3,8}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B_{3,8}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B_{3,8}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

循环核心与多边形谱。 在层 $V_{3\,8}^{(0)}$，上定义核如下：

$$K_{3,8} := B_{3,8}^{(0)} B_{3,8}^{(1)} B_{3,8}^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

其特征多项式为

$$\det(xI - K_{3,8}) = x^3 - 8x^2 + 15x - 4,$$

因此，$K_{3,8}$ 有三个实的、正的单特征值 $0 < \mu_1 < \mu_2 < \mu_3$。令

$$\theta := \frac{1}{3} \arccos\left(\frac{26\sqrt{19}}{361} \right).$$

那么（不可约情形下）可以写作

$$\mu_1 = \frac{8}{3} + \frac{2\sqrt{19}}{3} \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right), \qquad \mu_2 = \frac{8}{3} + \frac{2\sqrt{19}}{3} \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right), \qquad \mu_3 = \frac{8}{3} + \frac{2\sqrt{19}}{3} \cos\theta.$$

数值上，

$$\mu_1 \approx 0.3186693564, \qquad \mu_2 \approx 2.3579263675, \qquad \mu_3 \approx 5.3234042761.$$

令 $\omega_3 := \exp(2\pi i/3)$。根据命题 2.5，

$$\operatorname{Spec}(A_{3,8}) = \{0\} \ \cup \ \bigcup_{j=1}^{3} \{ \mu_j^{1/3},\ \mu_j^{1/3}\omega_3,\ \mu_j^{1/3}\omega_3^2 \}.$$

的非零谱 $A_{3,8}$ 是三个正三角形的互不相交并集，每个三角形都有一个顶点位于正实轴上；此外，0 的代数重数为 1。参见图 2，图中绘出了这三个三角形簇，以及半径为 $(27/4)^{1/3}$ 的圆。

参考文献

[1] E.F. Bravo、J.J. Bravo 和 F. Luca。关于帕多万型数列的重数。 *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)*，53:1519–1549，2022。[2] S.M. Fallat 和 C.R. Johnson。 *Totally Nonnegative Matrices*. 普林斯顿大学出版社，2011 年。[3] R.A. Horn 和 C.R. Johnson。 *Matrix Analysis*. 剑桥大学出版社，第二版，2013 年。[4] Y. Ichikawa、A. Kashihara 和 H. Minamide。关于由交替定向的 n边形梯形图得到的斐波那契型多项式的根。预印本，已投稿。[5] A. Kashihara、R. Asano 和 H. Minamide，关于由线性连接的六边形组成的有向图的谱，*JSIAM Letters* **15** (2023)，57–60。[6] A. Kashihara 和 H. Minamide，交替定向的四边形梳状图的谱，*JSIAM Letters* **17** (2025)，81–84。[7] A. Kashihara 和 H. Minamide，交替定向的四边形环图的谱，预印本，已投稿。[8] N. J. A. Sloane 等。《在线整数数列百科全书》，数列 A134816。https://oeis.org/A134816（访问日期：2026-02-22）。[9] J.L. Ram´ırez 和 V.F. Sirvent。关于 k-Narayana 数列的一则注记。 *Annales Mathematicae et Informaticae*，45:91–105，2015。[10] K. Tran。判别式与有理生成函数多项式的根的分布之间的联系。*Journal of Mathematical Analysis and Applications*，410(1):330–340，2014。