基于移动最小二乘方法的多变量数据依赖型单位分解

Inmaculada Garcés[a]，Juan Ruiz-Álvarez[b]，Dionisio F. Yáñez[a]

[a]瓦伦西亚大学数学系，瓦伦西亚（西班牙）。[b]卡塔赫纳理工大学应用数学与统计系，卡塔赫纳（西班牙）。

arXiv:2603.03936v1 [math.NA] 4 Mar 2026

摘要

数据逼近在几何设计、偏微分方程数值解和曲线建模等领域至关重要。移动最小二乘（MLS）是一种广泛应用于数据拟合的方法；然而，存在间断时，其精度会下降，常导致类似于吉布斯现象的伪振荡。本文将移动最小二乘与加权本质无振荡（WENO）方法以及一种创新的单位分解方法相结合，并将其推广至更高维度。我们基于移动最小二乘方法提出一种新颖的非线性单位分解，并据此构造数据依赖型算子 $\mathbb{R}^n$，该算子可提高间断附近的精度，同时在光滑区域保持高阶精度。我们展示了该方法的一些理论性质，并通过数值实验验证其有效性。

关键词：移动最小二乘、单位分解法、加权本质无振荡、高精度逼近、对间断的适应性得到改善，41A05，41A10，65D05，65M06，65N06。

1. 引言

数据近似是计算机辅助几何设计、偏微分方程数值解以及曲线与曲面建模等多个领域中的一项基础任务 [13, 15, 16, 17, 24]。尽管许多近似技术在数据光滑的假设下表现良好，但当数据包含间断时，便会面临挑战。

所研究的问题是：基于在开有界区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 内任意分布的一组点所对应的数据值 $\{f(\mathbf{x}_i)\}_{i=1}^N$，构造未知函数 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 的精确近似，其中 $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^N \subset \Omega$。在已有的方法中，移动最小二乘（MLS）方法是一种广泛采用且稳健的数据拟合策略，应用涵盖统计学和应用数学（例如，参见 [18]）。此外，单位分解法（PUM 或 PU 方法）将区域划分为多个较小的子域，并在每个子域内局部应用径向基函数法（RBF）[5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 23]。最终的近似由各插值函数的凸组合得到。对于由连续函数生成的数据，这些方法能给出令人满意的结果。作为示例，图 1 (a) 展示了针对 Franke 函数得到的近似：

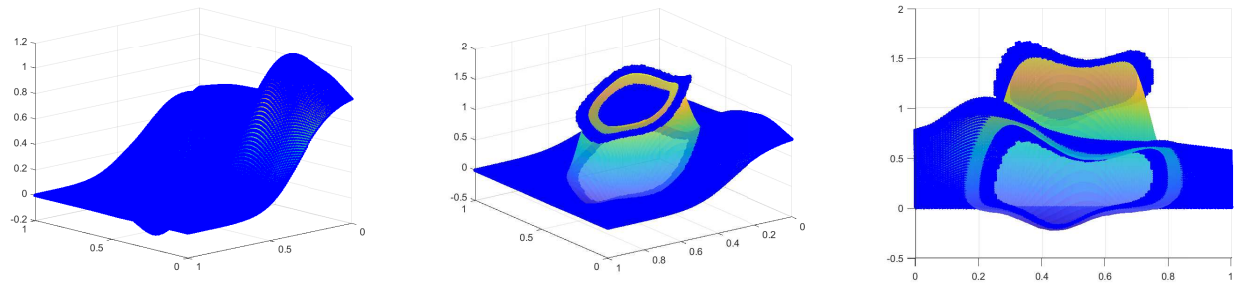
$$f_1(x,y) = \frac{3}{4}e^{-\frac{(9x-2)^2}{4}-\frac{(9y-2)^2}{4}} + \frac{3}{4}e^{-\frac{(9x+1)^2}{49}-\frac{(9y+1)}{10}} + \frac{1}{2}e^{-\frac{(9x-7)^2}{4}-\frac{(9y-3)^2}{4}} - \frac{1}{5}e^{-(9x-4)^2-(9y-7)^2}. \tag{1}$$

这里，移动最小二乘法应用于由 $X = \{(i/n_d, j/n_d)\colon\ i,j = 0,\ldots,n_d\}$ 定义的数据点均匀网格，其中离散参数设为 $n_d = 64$。然而，当存在间断时，该方法会产生众所周知的伪影，例如吉布斯现象，从而降低其近似质量（见 [1]）。图 1 (b) 和(c)清楚地展示了这一现象，其中给出了将移动最小二乘法应用于分段光滑函数的结果，即

*本研究获得项目 PID2023-146836NB-I00（由 MCIN/AEI/10.13039/501100011033 资助）和 CIAICO/2024/089 的支撑。电子邮箱地址：inmaculada.garces@uv.es（Inmaculada Garcés）、juan.ruiz@upct.es（Juan Ruiz-Álvarez）、dionisio.yanez@uv.es（DionisioF. Yáñez）

$$f_2(x,y) = \begin{cases} f_1(x,y)+1, & (x-0.5)^2+(y-0.5)^2 \le 0.25^2, \\ f_1(x,y), & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{2}$$

由于常用于径向基函数的单位分解法是径向基函数插值器的凸线性组合，因此，如果我们将单位分解法调整为移动最小二乘法，从而得到 PU-MLS，那么对于含有间断的数据，预期结果与图 1 所示的结果类似。



(a) **(b)** **(c)**

图 1： **(a)** 对 Frankе 函数的 MLS逼近，该函数由式 (1) 给出；**(b)** 对式 (2) 中定义的函数 f_2 进行 MLS逼近；**(c)** 旋转后的图 **(b)** 的视图。

在本研究中，我们将先前将移动最小二乘与加权本质无振荡（WENO）方法相结合的工作（例如， [4]），以及最初在一维情形下于 [14]，探索的一种新型单位分解框架，拓展至更高维情形。我们提出了一种基于 $\mathbb{R}^n$ 中移动最小二乘单位分解方法（DDPU-MLS）的数据依赖型逼近算子。这种方法在间断附近提高了精度，同时在光滑区域保持高阶收敛。由此还发展出了一些新技术（例如， [11, 21]）。我们建立了该方法的理论性质，并通过数值结果证明其性能与可靠性。本文共分六节：首先，我们在第 2 节介绍移动最小二乘法的一些重要性质和结果。第 3 节中，我们介绍单位分解方法框架，并建立有关其精度阶的理论结果。我们先回顾径向基函数插值的基础知识，然后在线性情形下将其与上述方法相结合。第 4 节将介绍 $\mathbb{R}^n$ 中的新型 DDPU-MLS 方法，并给出若干确立其主要性质的理论结果。我们特别关注吉布斯现象：这种现象通常在线性情形下出现在间断附近，而非线性形式则可减轻这一现象。我们还分析了底层数据平滑区域中的逼近阶。第 5 节报告的数值实验用于验证理论结果。最后，第 6 节总结全文，并展望未来研究方向。

2. 移动最小二乘法

移动最小二乘法是一种强大的算法，用于根据散点集 $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^N \subset \mathbb{R}^n$ 处已知的值来逼近函数 f： $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$。该技术在统计学中也称为局部多项式回归 [13]，，并应用于去噪、图像处理、细分格式以及偏微分方程的数值求解（参见，例如， [6, 19]）。

我们将点值 $\{f(\mathbf{x}_i)\}_{i=1}^N$ 视为函数 f 在位置 $\mathbf{x}_i$ 处的采样，目标是在特定位置 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 处逼近 $f(\mathbf{x})$。该值计算为已知数据的线性组合：

$$\mathcal{Q}(f)(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} a_i(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}_i), \tag{3}$$

其中系数 $\{a_i(\mathbf{x})\}_{i=1}^N$ 依赖于求值点 $\mathbf{x}$，并通过要求有限维多项式空间中的函数被精确再生来计算。

权函数 i s 现在定义为关于函数 $w: [0,\infty) \to \mathbb{R}$，该函数满足以下性质 :

- w 是非负、紧支撑的，并且在 $[0,c]$ 上单调递减，其中 $\text{supp}(w) \subseteq [0,c]$，对于某个常数 $c>0$。

- w 在原点处取得最大值，即 $w(0) = \max_{r\geq 0} w(r)$，且 w 有界。
- 存在 $p \in \mathbb{N}$，使得 $w \in \mathcal{C}^p([0,\infty))$，其中 w 在其支撑之外视为扩展为零。

在本文中，我们假设节点集是准均匀（或均匀）分布的。接下来引入填充距离的概念（例如，参见 [13, 24]），该距离用于量化 $X = \{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^N$中的点对区域 Ω 的覆盖程度。其定义为

$$h = h_{X,\Omega} = \sup_{\mathbf{x}\in\Omega} \min_{\mathbf{x}_j\in X} \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_j\|_2. \tag{4}$$

现在我们给出局部多项式再现这一概念的基本定义。

定义 2.1（[24]）。设 $X = \{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^N \subseteq \Omega$ 为一个点集。若存在常数 h_0，C_1，$C_2>0$，使得函数族 $a_i : \Omega \to \mathbb{R}$，$i = 1,\ldots,N$在 Ω 上实现次数为 m 的局部多项式再现，则称该函数族

(1) $\sum_{i=1}^N a_i(x)p(x_i) = p(x)$ $\forall p \in \Pi_m(\Omega)$, *(2)* $\sum_{i=1}^N |a_i(x)| \leq C_1$, $\forall x \in \Omega$, *(3)* $a_i(x) = 0$ 若 $\|x - x_i\|_2 > C_2 h_{X,\Omega}$ 且 $x \in \Omega$,

对于每个满足 X $h_{X,\Omega} \leq h_0$ 的集合。

系数 $\{a_i\}_{i=1}^N$ 也可以解释为生成了局部多项式再现；或者不那么严谨地说，公式（3）中的准插值算子 $\mathcal{Q}(f)$ 实现了局部多项式再现。

定理 2.1（[24]）。假设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 有界。定义 Ω 为 $\bigcup_{x\in\Omega} B(x, C_2h_0)$ 的闭包。假设 $f \in C^{m+1}(\widetilde{\Omega})$。定义 $\mathcal{Q}(f)(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N a_i f(\mathbf{x}_i)$，其中 $\{a_i\}_{i=1}^N$ 是 Ω 上 m 阶的局部多项式再现。于是存在一个常数 $C>0$，它仅取决于定义 *2.1* 中的常数，使得

$$|f(\mathbf{x}) - \mathcal{Q}(f)(\mathbf{x})| \leq C h_{X,\Omega}^{m+1} |f|_{C^{m+1}(\widetilde{\Omega})},$$

对所有 X满足 $h_{X,\ \Omega} \leq h_0$。右侧出现的半范数定义为 $|f|_{C^{m+1}(\widetilde{\Omega})} := \max_{|\boldsymbol{\alpha}|=m+1} \|D^{\boldsymbol{\alpha}} f\|_{\infty,\ \widetilde{\Omega}}$，其中

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^T \in \mathbb{N}_0^n, \quad |\boldsymbol{\alpha}| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n, \quad D^{\boldsymbol{\alpha}} f = \frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

因此，最小化问题为:

$$p_{\mathbf{x}} = \arg\min_{p\in\Pi_m} \sum_{i=1}^N (f(\mathbf{x}_i) - p(\mathbf{x}_i))^2 w\left(\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_i\|_2}{h}\right).$$

以下定义改编自 [18], ，形式化地定义了 MLS逼近。

定义 2.2（MLS逐点逼近）。设 $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^N \subset \mathbb{R}^n$，且 P = 张成$\{p_j\}_{j=1}^J$。给定权函数 $w_i(\mathbf{x}) := w\left(\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_h{}_i\|_2\right) \geq 0$，函数 $f(\mathbf{x})$ 的移动最小二乘逼近定义为 $p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$，其中 $p_{\mathbf{x}} \in P$在所有 $p \in P$中使加权最小二乘误差泛函最小

$$\sum_{i=1}^N (f(\mathbf{x}_i) - p(\mathbf{x}_i))^2 w_i(\mathbf{x}). \tag{5}$$

也就是说，通过在 $\mathbf{x}$ 处求值，得到最能以加权最小二乘意义拟合 $\mathbf{x}$ 周围数据 $\{f(\mathbf{x}_i)\}_{i=1}^N$ 的多项式 $p_{\mathbf{x}}$，从而近似 $f(\mathbf{x})$。为求解 (5)，我们使用 [24] 中的定理4.3。

定理 2.2（[24]）。假设对于每个 $x \in \mathbb{R}^n$，集合 $\{x_i\}_{i=1}^N \subset \mathbb{R}^n$ 都是 $\Pi_m(\mathbb{R}^n)$-唯一可解的（唯一在其中所有点处均为零的 $\Pi_m(\mathbb{R}^n)$ 次多项式是零多项式）。在这种情况下，问题 (5) 有唯一解。解 $\mathcal{Q}(f)(x) = p_{\mathbf{x}}(x)$ 可表示为 $\mathcal{Q}(f)(x) = \sum_{i=1}^N a_i^*(x) f(x_i)$，其中系数 $a_i^*(x)$ 定义为满足插值条件 $\sum_{i=1}^N a_i(x) p(x_i) = p(x)$ $\forall p \in \Pi_m(\mathbb{R}^n)$ 的二次泛函 $\sum_{i=1}^N a_i(x)^2 w_i^{-1}(x)$ 的最小化问题的解。

我们可以将算子 $\mathcal{Q}(f)$ 表示为以下矩阵形式：

$$\mathcal{Q}(f)(\mathbf{x}) = (f(\mathbf{x}_1), \ldots, f(\mathbf{x}_N)) D E (E^T D E)^{-1} (p_1(\mathbf{x}), \ldots, p_J(\mathbf{x}))^T, \tag{6}$$

其中，$E \in \mathbb{R}^{N \times J}$ 和 $D \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 定义如下：

$$E_{i,j} = p_j(\mathbf{x}_i), \quad 1 \le i \le N,\ 1 \le j \le J, \qquad D = \operatorname{diag}(w_1(\mathbf{x}), \ldots, w_N(\mathbf{x})). \tag{7}$$

我们注意到，尽管某些权重 $w_i(\mathbf{x})$ 可能为零，矩阵 $E^T D E$ 仍然可逆。事实上，只有满足 $w_i(\mathbf{x}) > 0$ 的节点 $\mathbf{x}_i$ 会对该矩阵产生贡献；根据局部多项式再生假设（定义 2.1），这些节点构成次数至多为 m 的多项式空间的唯一可解点集。因此，$E^T D E$ 是对称正定的，故而可逆。

假设 $\operatorname{rank}(E) = J$，上述表达式便给出了求值点 $\mathbf{x}$ 处局部近似的唯一解。此方法还假设数据足够光滑，因而在每个点 $\mathbf{x}$ 的邻域内都可以用多项式很好地近似。我们将这种情形称为线性 移动最小二乘方法。基于这一表述，可以使用式（4）定义分离距离和拟均匀性。

定义 2.3（[24]）。考虑点的有限集 $X = \{\mathbf{x}_1, \ldots\ldots, \mathbf{x}_N\} \subset \Omega$。$X$ 的分离距离由下式给出

$$q_X := \frac{1}{2} \min_{i \ne j} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|_2.$$

此外，集合 X 被视为拟均匀的，并由常数 $c_{qu} \ge 1$刻画，当 r

$$q_X \le h_{X,\Omega} \le c_{qu} q_X. \tag{8}$$

分离距离给出了以不同数据位置为中心的两个球基本不相交时所能取的最大半径。拟均匀性的概念应结合多组数据点集来理解。具体而言，我们考虑一个集合序列，其元素逐渐更稠密地覆盖区域 Ω。在此设定下，关键在于序列中的每个集合都满足条件 (8)，并使用同一个常数 c_{quo}

我们假设区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 满足内锥条件，其表述遵循 [13, 21, 24]。这意味着存在角度 $\theta \in (0, \pi/2)$ 和半径 $r > 0$，使得下列结论成立：对每个点 $\mathbf{x} \in \Omega$，存在单位方向向量 $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})$，使得圆锥

$$C = \{\mathbf{x} + \lambda \mathbf{y} :\ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n,\ \|\mathbf{y}\|_2 = 1,\ \mathbf{y}^T \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) \ge \cos\theta,\ \lambda \in [0, r]\}$$

包含在 Ω 中（见图2）。

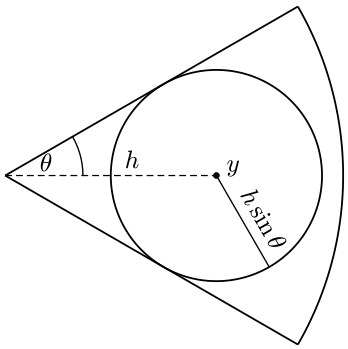


图2：圆锥中的球。

Wendland 在 [24] 中建立的引理表明，任何球都满足内锥条件。这一性质在我们的数值实验中具有相关性，尤其是在构造单位分解法的特定版本时。

引理 2.3（[21, 24]）。任何半径为 $\delta > 0$ 的球都满足内锥条件，该条件由相同的半径 δ 和角度 $\theta = \pi/3$ 定义。

在建立了这些初步结果之后，我们现在可以根据 [24] 中定理 4.7 和推论 4.8 的陈述，确定相应的精度阶。

定理 *2.4*（**[24]**）。假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个紧集，对某个角度 $\theta \in (0, \pi/2)$ 和半径 $r > 0$ 满足内锥条件。固定一个整数 $m \in \mathbb{N}$，并令 h_0、C_1 和 C_2 为仅依赖于 m、θ 和 r 的正常数。假设 $X = \{x_1, \ldots, x_N\} \subseteq \Omega$ 满足 (8) 以及 $h_X, \Omega \leq h_0$。用 Ω 表示 $\bigcup_{x \in \Omega} B(x, 2C_2 h_0)$ 的闭包。假设局部基函数 $a_i^*(x)$ 按定理 *2.2* 构造，且其支撑集包含于 $B(x, \delta)$ 中，即它们通过 $\delta := 2C_2 h_{X,\Omega}$ 依赖于 h_X, Ω。则对所有 $x \in \Omega$，下列性质成立：

(1) $\sum_{i=1}^{N} a_i^*(\mathbf{x})\, p(\mathbf{x}_i) = p(\mathbf{x}),\ \forall p \in P,$

(2) $\sum_{i=1}^{N} |a_i^*(\mathbf{x})| \leq \widetilde{C}_1,$

(3) $a_i^*(\mathbf{x}) = 0$ *if* $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|_2 > \widetilde{C}_2 h_{X,\Omega},$

$\widetilde{C}_1$, $\widetilde{C}_2 > 0$ 对于某些常数。

推论 2.5（[24]）。在定理 *2.4* 的假设下，可以确定一个可显式计算的常数 $c > 0$，使得对每个函数 $f \in \mathcal{C}^{m+1}(\widetilde{\Omega})$，逼近误差满足如下界：

$$\|f - \mathcal{Q}(f)\|_{\infty,\Omega} \leq c h_{X,\Omega}^{m+1} |f|_{\mathcal{C}^{m+1}(\widetilde{\Omega})}.$$

然而，当数据出现间断或强梯度时，线性移动最小二乘可能会引入诸如吉布斯振荡之类的伪影。为解决这一问题，加权本质无振荡法已被提出[22]。加权本质无振荡构建局部多项式逼近的非线性组合，并包含光滑度指标，以检测数据中的非光滑行为。我们将在第 4 节中更详细地讨论这一点。

3. 单位分解法

单位分解法（常简称为单位分解法）的提出是为了便于高效的数值计算，尤其是在无网格逼近技术的背景下。其主要思想是将复杂问题分解为若干更小、更易处理的部分，同时保持所需的逼近精度。设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为开有界区域，它被一组 M 个重叠子区域 Ω_j 覆盖，使得 [7, 21, 23]:

- 子域的集合完全覆盖区域 Ω，即

$$\Omega \subseteq \bigcup_{j=1}^{M} \Omega_j.$$

- 存在一个统一常数 K，确保每个点 $\mathbf{x} \in \Omega$ 至多属于 K 个子域 Ω_j。
- 存在一个正常数 C_r 和一个角度 $\theta \in (0, \pi/2)$，使得每个交集 $\Omega_j \cap \Omega$ 都满足由角度 θ 和半径 $r = C_r h_{X,\,\Omega}$ 所刻画的内锥条件。
- 局部填充距离 h_{X_j,Ω_j}（其中 $X_j = \Omega_j \cup X$）由全局填充距离 $h_{X,\Omega}$ 一致控制。

这样的配置称为 $(\Omega\ X)$ 的正则覆盖，参见 [24]。基于此覆盖，我们构造一组连续、非负、紧支撑函数 $\{w_j\}_{j=1}^M$，其中 $w_j : \Omega_j \to \mathbb{R}$，满足

$$\sum_{j=1}^{M} w_j(\mathbf{x}) = 1,\ \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad \text{and} \quad \operatorname{supp}(w_j) \subseteq \Omega_j.$$

这族函数称为单位分解。于是，全局逼近定义为加权组合

$$\mathcal{Q}_{\mathrm{PU}}(f)(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{M} w_j(\mathbf{x}) \mathcal{Q}_j(f)(\mathbf{x}).$$

考虑一个有界区域 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$，并令 $\{\Omega_j\}_{j=1}^M$ 表示一组满足 $\Omega \subseteq \bigcup_{j=1}^M \Omega_j$ 的开有界子集。

定义 3.1（[24]）。考虑一族非负函数 $\{w_j\}_{j=1}^M$，其中每个 $w_j \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$。如果这族函数构成与覆盖 $\{\Omega_j\}_{j=1}^M$ 相关的 k-稳定单位分解，则称其为该覆盖的 k-稳定单位分解；当对每个指标 $j = 1, \ldots, M$ 满足以下性质时，该说法成立：

1. 每个函数的支撑包含于其对应的集合中：$\operatorname{supp}(w_j) \subseteq \Omega_j$.
2. 这些函数在 Ω 上构成单位分解：$\sum_{j=1}^M w_j \equiv 1$ 在 Ω 上。
3. 对于满足 $|\alpha| \le k$ 的每个多重指标 $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$，存在一个常数 $C_\alpha > 0$ 使得

$$\|D^\alpha w_j\|_{L^\infty(\Omega_j)} \le \frac{C_\alpha}{\delta_j^{|\alpha|}}, \quad \textit{for all } 1 \le j \le M \quad \textit{and} \quad \delta_j = \operatorname{diam}(\Omega_j) = \sup_{x,y \in \Omega_j} \|x - y\|_2.$$

单位分解法将全局区域划分为一组较小的重叠子区域，并在每个子区域上局部应用径向基函数方法。接下来，我们将把这一方法融入第 2 节中介绍的移动最小二乘法。

3.1. 径向基函数方法

径向基函数插值方法已在文献中得到广泛研究（例如，参见[5, 7, 13, 24]）。在本文中，我们主要采用 [8]中确立的记号。径向基函数方法通过将目标函数表示为以给定数据点集为中心的径向基函数的线性组合，来构造其近似，记为 $X = \{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^N \subset \Omega$。每个点 $\mathbf{x}_i$ 都对应一个函数值 $f_i = f(\mathbf{x}_i)$，其中 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ 表示在这些节点处采样的未知函数。散乱数据插值问题的目标是确定一个算子 $\mathcal{Q}(f) : \Omega \to \mathbb{R}$，使其在相应位置精确重现已知数据，即

$$\mathcal{Q}(f)(\mathbf{x}_i) = f(\mathbf{x}_i), \quad i = 1, \ldots, N.$$

我们的目标是针对选定的范数，最小化 $\mathcal{Q}(f)$ 与 f 之间的距离。首先，我们引入径向基函数 $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}$，它通过单变量函数 ϕ: $[0, \infty[\to \mathbb{R}$ 定义，使得

$$\Phi(\mathbf{x}) = \phi(\|\mathbf{x}\|_2), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega,$$

其中，$\|\cdot\|_2$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的欧几里得范数。我们定义 $\Phi_i(\mathbf{x}) = \phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|_2)$ $i = 1, \ldots, N$，并采用径向基函数展开来表示插值问题：

$$\mathcal{Q}(f)(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} c_i \Phi_i(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} c_i \phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|_2), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \tag{9}$$

其中，c_i 是由插值方程组 $A\mathbf{c} = \mathbf{f}$ 确定的系数，其中

$$A = \begin{bmatrix} \phi(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_1\|_2) & \phi(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|_2) & \ldots & \phi(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_N\|_2) \\ \phi(\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|_2) & \phi(\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_2\|_2) & \ldots & \phi(\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_N\|_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi(\|\mathbf{x}_N - \mathbf{x}_1\|_2) & \phi(\|\mathbf{x}_N - \mathbf{x}_2\|_2) & \ldots & \phi(\|\mathbf{x}_N - \mathbf{x}_N\|_2) \end{bmatrix}, \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix}, \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix}.$$

矩阵 A 显然是对称的。为了保证相应线性系统解的唯一性，必须确保 A 是正定的。这一性质取决于径向基函数 ϕ的选择，而该函数必须满足适当的正定条件。为此，我们回顾以下定义（参见 [13]）。

定义 3.2（[13]）。实值连续函数 $\Phi:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 在 $\mathbb{R}^n$上称为正定的，若对于任意一组由 N个互异点 $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^N \subset \mathbb{R}^n$构成的点集以及任意系数向量 $c = [c_1, \ldots, c_N] \in \mathbb{R}^N$，下列不等式均成立：

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} c_j c_i \Phi_i(\mathbf{x}_j) \geq 0. \tag{10}$$

此外，若表达式（10）仅在$\mathbf{c} = \mathbf{0}$时等于零，则称 Φ 在 $\mathbb{R}^n$ 上严格正定。

文献中已知，函数 ϕ 的若干种选取方式可产生严格正定核函数。表1列出了一些常用实例（例如，参见 [13]）。在该表中，截断函数 $(\cdot)_+:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 定义为

$$(x)_+ = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

$\phi\ (r)$	RBF	记作:
e^{-r^2}	高斯函数 $\mathcal{C}^\infty$	G
$\left(1+r^2\right)^{-1/2}$	逆多二次函数 C^∞	IMQ
e^{-r}	Matérn $\mathcal{C}^0$	M0
$e^{-r}\,(1+r)$	Matérn $\mathcal{C}^2$	M2
$e^{-r}\left(3+3r+r^2\right)$	Matérn $\mathcal{C}^4$	M4
$(1-r)_+^2$	Wendland $\mathcal{C}^0$	W0
$(1-r)_+^4\,(4r+1)$	Wendland $\mathcal{C}^2$	W2
$(1-r)_+^6\left(35r^2+18r+3\right)$	Wendland $\mathcal{C}^4$	W4

表1：所选径向基函数（径向基函数）。

公式（9）中引入的插值函数有一个显著特点，即其光滑性，因为它可以表示为光滑基函数的线性组合 Φ_i。因此，插值算子的连续性继承自径向函数 $\phi(\|\cdot\|_2)$ 的连续性。

3.2. 在 $\mathbb{R}^n$ 中将移动最小二乘与单位分解法相结合

设有一个开区域 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$、一些数据点 $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^N$，其分量为 $\mathbf{x}_i = (x_1^i, \ldots, x_n^i)$，填充距离为 h，以及与之关联的集合 $\{f_i = f(\mathbf{x}_i)\}_{i=1}^N$，其中 $f: \Omega \to \mathbb{R}$ 是一个未知函数。设 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 为区域中的一点，并假设权函数 w 的紧支撑大小为常数 c。我们认为，$\{\tilde{\mathbf{x}}_k\}_{k=1}^M \subset \mathbb{R}^n$ 是一些中心点，其分量为 $\tilde{\mathbf{x}}_k = (\tilde{x}_1^k, \ldots, \tilde{x}_n^k)$，并称

$$\Omega_k = B(\tilde{\mathbf{x}}_k, \varepsilon(h)) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}_k\|_2 < \varepsilon(h)\}, \quad k = 1, \ldots, M,$$

其中，M 表示单位分解中使用的子域数量（一般来说，M 不必与 N一致），而 $\varepsilon(h) > 0$ 决定球的半径。

每个 k 在 $\mathbb{R}^n$ 中的移动最小二乘问题为：

$$p_k = \underset{p \in \Pi_d}{\arg\min} \sum_{\mathbf{x}_i \in \Omega_k} \left(f(\mathbf{x}_i) - p(\mathbf{x}_i)\right)^2 w\left(\mu_k \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|_2}{h}\right),$$

其中，$\mu_k > 0$ 是一个常数（类似于形状参数，见 [24]）。

中心集 $\{\tilde{\mathbf{x}}_k\}_{k=1}^M$ 的选取必须满足以下条件：

1. 所有子域的并集应覆盖整个区域Ω，即，

$$\Omega \subseteq \bigcup_{k=1}^{M} \Omega_k.$$

2. 子域 Ω_k 之间必须有少量重叠。

3. 每个 子域必须包含比多项式项数量更多的数据点，即

$$|\Omega_k \cap \{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^{N}| > \binom{d+n}{n}, \quad \forall k = 1, \ldots, M.$$

4. 对于每个点 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$，包含该点的子域数量受全局常数 K_1 限制，即

$$\sum_{k=1}^{M} \chi_{\Omega_k}(\mathbf{x}) \leq K_1, \quad \text{for all } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

因此，可以设计一种单位分解法

$$\mathcal{Q}_{\mathrm{PU}}(f)(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{M} \theta_k(\mathbf{x}) p_k(\mathbf{x}), \tag{11}$$

作为

$$\theta_k(\mathbf{x}) = \frac{\delta_k(\mathbf{x})}{\sum_{j=1}^{M} \delta_j(\mathbf{x})}, \quad \text{with} \quad \delta_k(\mathbf{x}) = w\left(\mu_k \frac{\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}_k\|_2}{h}\right).$$

4. DDPU-MLS 方法

为了在我们的方法中引入非线性，我们将采用一种广为人知的工具：WENO。WENO 格式已被广泛认为是数据重构的有效方法，尤其适用于涉及间断的问题（例如，参见 [22]）。它在不同模板上构造多个多项式近似，并使用非线性权重将它们组合起来。为清晰、简洁地说明问题，我们简要回顾一下 WENO 方法在一维情形下的主要思想。考虑函数 $f(x)$，我们希望近似其在区间 (x_{i-1}, x_i) 中点（记为 $x_{i-\frac{1}{2}}$）处的值。 f在$x_{i-\frac{1}{2}}$处的 WENO 重构可表示为

$$\hat{f}(x_{i-\frac{1}{2}}) = \sum_{k=0}^{r-1} \beta_k p_k(x_{i-\frac{1}{2}}),$$

其中， r 表示模板的数量， p_k 表示与各个模板对应的局部多项式逼近，β_k 表示相应的非线性权重。这些权重定义为

$$\beta_k = \frac{\alpha_k}{\sum_{l=0}^{r-1} \alpha_l}, \quad \text{with } \alpha_k = \frac{C_k}{(\epsilon + I_k)^t},$$

其中， C_k 表示线性权重， ϵ 是一个用于防止除以零的小正参数， t 通常取值为 2，以提高光滑区域内的精度。光滑度指标 I_k 定义如下：

$$I_k = \sum_{l=1}^{r-1} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \Delta x^{2l-1} \left(\frac{d^l}{dx^l} p_k(x)\right)^2 dx,$$

其中 Δx 表示 网格间距。这些值用于标记某个节点是否接近间断。

本节将简要回顾 [3]，中提出的经典 WENO 方法。该方法将一维格式扩展为真正的多变量、非可分离二维 WENO 插值，同时在光滑区域保持相同的精度阶，且不依赖张量积构造。这

种方法后来在 [20] 中得到改进，改进方式是构造一个精度阶逐步提高的一般多变量 WENO 插值多项式。

我们考虑超立方体的中点，在该处我们希望逼近函数 $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*) \in \prod_{j=1}^n [x_j^{(i_j-1)}, x^{(i_j)}{}_j \quad]$，其中 $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*_{\frac{1}{2}}$。其构造与一维情形十分相似。我们设计一个由次数为 r 的低次插值多项式构成的凸组合。令 $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n)$，并定义

$$p_0^{2r-1}(\mathbf{x}^*_{\frac{1}{2}}) = \sum_{\mathbf{k}\in\{0,1,\ldots,r-1\}^n} C_{\mathbf{k}}^r p_{\mathbf{k}}^r(\mathbf{x}^*_{\frac{1}{2}}),$$

其中 $C_{\mathbf{k}}^r = \prod_{j=1}^n C_{k_j}^r$ 为最优权重，且 $C_{k_j}^r$ 对于 $k_j = 0, \ldots, r-1$ 以及 $j = 1, \ldots, n$，表示相应的一维最优权重，其显式公式见 [2]:

$$C_k^r = \frac{1}{2^{2r-1}} \binom{2r}{2k+1}, \quad k = 0, \ldots, r-1. \tag{12}$$

多项式 $p_{\mathbf{k}}^r$ 在节点处进行插值

$$\mathcal{S}_{\mathbf{k}}^r = \{x_1^{(i_1+k_1-r)}, \ldots, x_1^{(i_1+k_1)}\} \times \{x_2^{(i_2+k_2-r)}, \ldots, x_2^{(i_2+k_2)}\} \times \ldots \times \{x_n^{(i_n+k_n-r)}, \ldots, x_n^{(i_n+k_n)}\} = \prod_{j=1}^n \mathcal{S}_{k_j}^r.$$

随后使用以下公式将最优权重替换为非线性权重

$$\beta_{\mathbf{k}}^r = \frac{\alpha_{\mathbf{k}}^r}{\sum_{\mathbf{l}\in\{0,\ldots,r-1\}^n} \alpha_{\mathbf{l}}^r}, \text{ with } \alpha_{\mathbf{k}}^r = \frac{C_{\mathbf{k}}^r}{(\epsilon + I_{\mathbf{k}}^r)^t}, \tag{13}$$

其中 $I_{\mathbf{k}}^r$ 表示光滑度指标，它们需满足以下条件:

P1 在没有间断的区域中，光滑度指标的阶为 h^2，即 ,

$$I_{\mathbf{k}}^r = O(h^2) \text{ if } f \text{ is smooth in } \mathcal{S}_{\mathbf{k}}^r.$$

P2 在没有间断的区域中，两个光滑度指标之间的距离为 h^{r+1}，即，设 $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n)$ 和 $\mathbf{k}' = (k_1', \ldots, k_n')$ 满足 $\mathcal{S}_{\mathbf{k}}^r$ 和 $\mathcal{S}_{\mathbf{k}'}^r$ 均不存在间断，则

$$I_{\mathbf{k}}^r - I_{\mathbf{k}'}^r = O(h^{r+1}).$$

P3 当模板 $\mathcal{S}_{\mathbf{k}}^r$ 受到间断影响时，有:

$$I_{\mathbf{k}}^r \nrightarrow 0 \text{ as } h \to 0.$$

为构造 $\mathbb{R}^n$中的光滑度指标，我们考虑

$$\mathcal{S}_k = \Omega_k \cap X = \{\mathbf{x}_{k_i} \in \Omega_k \cap X : i = 1, \ldots, N_k\}, \tag{14}$$

其中 $N_k > 3$，以及线性最小二乘问题

$$p_k = \underset{p\in\Pi_1(\mathbb{R}^2)}{\arg\min} \sum_{i=1}^{N_k} (f(\mathbf{x}_{k_i}) - p(\mathbf{x}_{k_i}))^2, \tag{15}$$

其中 $\Pi_1(\mathbb{R}^2)$ 表示次数至多为一的所有多项式构成的空间。随后，我们将光滑度指标定义为绝对误差的平均值，即

$$I_k = \frac{1}{N_k} \sum_{i=1}^{N_k} |f(\mathbf{x}_{k_i}) - p_k(\mathbf{x}_{k_i})|, \tag{16}$$

其满足条件（参见，例如 [2, 4]）：

- 在无间断区域内，光滑度指标的阶为 h^2；即当 f 在Ω_k内光滑时， $I_k = \mathcal{O}(h^2)$。

- $I_k \not\to 0$ 当间断穿过 Ω_k 时为 $h \to 0$ 。

该算子为:

$$\mathcal{Q}_{\mathrm{PU}}^{\mathrm{DD}}(f)(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{M} \mathcal{W}_k(\mathbf{x}) p_k(\mathbf{x}), \tag{17}$$

其中

$$\mathcal{W}_k(\mathbf{x}) = \frac{\alpha_k(\mathbf{x})}{\sum_{j=1}^{M} \alpha_j(\mathbf{x})}, \quad \text{with } \alpha_k(\mathbf{x}) = \gamma_k \varphi_k(\mathbf{x}) = \frac{\varphi_k(\mathbf{x})}{(\epsilon + I_k)^t}, \quad \varphi_k(\mathbf{x}) = \varphi\left(\mu_k \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x_k}\|}{h}\right),$$

其中 $0 < \gamma_k = (\epsilon + I_k)^{-t}$、 μ_k 是一些正常数（μ_k 与 h 无关），而 φ 是紧支撑函数。注意，常数$\frac{\mu_k}{h}$ 的选取是为了使 φ_k 的支撑位于 Ω_k 中。下面来看该方法的一些重要性质。考虑函数 $\zeta\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$、 $\zeta \in \mathcal{C}^1$，以及集合

$$\Gamma = \{\mathbf{x} \in \Omega : \zeta(\mathbf{x}) = 0\}, \quad \Omega^+ = \{\mathbf{x} \in \Omega : \zeta(\mathbf{x}) \geq 0\}, \quad \Omega^- = \Omega \setminus \Omega^+ \tag{18}$$

也就是说，Ω 被分成两个子集 $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$。设所考虑的数据由如下形式的分段定义函数生成

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} f^+(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega^+, \\ f^-(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega^-, \end{cases}$$

其中 $f^{\pm} \in \mathcal{C}^k(\overline{\Omega^{\pm}})$ $k \in \mathbb{N}$，但

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0 \in \Gamma} f^-(\mathbf{x}) \neq f^+(\mathbf{x}_0).$$

因此，散乱数据点集 $X = \{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^N$ 自然划分为两个子集， $X^{\pm} = X \cap \Omega^{\pm}$。换言之，我们考虑 $\mathbb{R}^n$ 中的一个区域，该区域由一条光滑曲线分为两部分。我们要近似的函数在每一部分内均光滑，但在曲线两侧存在跳跃不连续，因此根据数据点位于间断哪一侧，将数据分为两组。为便于阐述，这里考虑这种双区域情形。所提出的 DDPU–MLS 方法可自然推广至多个间断或相交间断的情形，因为非线性权重会局部地适应每个片上数据的正则性，这与经典 WENO 格式的思想相同。

我们的目标是证明，在光滑区域内，近似保持预期的收敛阶。因此可以观察到，该方法能够有效抑制吉布斯现象。

命题 4.1。 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为一个开有界区域，满足 $\Omega \subseteq \bigcup_{k=1}^{M} \Omega_k$，其中每个 $\Omega_k \subset \mathbb{R}^n$ 均为开集。设函数 $\zeta\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 将区域划分为两个子集，$\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$，其中 Ω^+ 和 Ω^- 的定义见式 (18)。令 $h > 0$ 表示局部填充距离。给定离散集 $X \subset \Omega$，定义式 (14)中给出的局部样本集 $\mathcal{S}_k$，其中 $N_k > 3$。对于每个 k，考虑式 (15)中定义的线性最小二乘多项式逼近 p_k ，局部光滑度指标由式 (16)定义。令 $\varphi_k(\mathbf{x})$ 为紧支撑权函数，其支撑为 Ω_k，并将非线性权重定义为

$$\alpha_k(\mathbf{x}) = \frac{\varphi_k(\mathbf{x})}{(\epsilon + I_k)^t}, \quad \mathcal{W}_k(\mathbf{x}) = \frac{\alpha_k(\mathbf{x})}{\sum_{j=1}^{M} \alpha_j(\mathbf{x})},$$

其中 $\epsilon > 0$ 和 $t > 0$ 是固定参数 .

于是，以下结论成立:

- *If* $f \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega_k})$, *then*

$$\|f - p_k\|_{\infty, \Omega_k} = O(h^2) \quad as\ h \to 0.$$

- 如果 f 在 Ω_{k_0} 中有间断，那么

$$\|f - p_{k_0}\|_{\infty, \Omega_{k_0}} = O(1) \quad as\ h \to 0.$$

因此，归一化权重满足：

$$\mathcal{W}_k(\mathbf{x}) = \begin{cases} O(1), & \text{if } f \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega_k}), \\ O(h^{2t}), & \text{if } f \text{ is not smooth in } \overline{\Omega_k}. \end{cases}$$

证明。 假设 $f \in \mathcal{C}^2(\Omega_k)$。 那么，根据准均匀样本上的一次多项式最小二乘逼近理论，我们有：

$$|f(\mathbf{x}_{k_i}) - p_k(\mathbf{x}_{k_i})| = O(h^2), \quad \text{for all } i = 1, \ldots, N_k,$$

这意味着

$$I_k = \frac{1}{N_k} \sum_{i=1}^{N_k} |f(\mathbf{x}_{k_i}) - p_k(\mathbf{x}_{k_i})| = O(h^2).$$

因此，

$$\alpha_k(\mathbf{x}) = \frac{\varphi_k(\mathbf{x})}{(\epsilon + O(h^2))^t} = O(h^{-2t}),$$

归一化权重为

$$\mathcal{W}_k(\mathbf{x}) = \frac{\alpha_k(\mathbf{x})}{\sum_{j=1}^M \alpha_j(\mathbf{x})} = \frac{O(h^{-2t})}{O(h^{-2t})} = O(1).$$

现在假设 f 在 Ω_k 中不光滑（即存在间断或奇异性）。那么，当 $h \to 0$ 时，最小二乘误差不会趋于零，并且

$$|f(\mathbf{x}_{k_i}) - p_k(\mathbf{x}_{k_i})| = O(1),$$

因此

$$I_k = O(1), \quad \text{and therefore,} \quad \alpha_k(\mathbf{x}) = \frac{\varphi_k(\mathbf{x})}{(\epsilon + O(1))^t} = O(1).$$

与光滑情形相比，此时 $\alpha_j(\mathbf{x}) = O(h^{-2t})$，我们得到

$$\mathcal{W}_k(\mathbf{x}) = \frac{O(1)}{O(h^{-2t}) + O(1)} = O(h^{2t}).$$

因此，我们将区域划分为两部分：一部分中函数是光滑的，另一部分中函数则不是。在光滑区域，逼近误差 $f(\mathbf{x}) - p_k(\mathbf{x})$ 随 $h \to 0$ 的变化呈现 $O(h^2)$ 的量级，权重 $\mathcal{W}_k(\mathbf{x})$ 保持有界，即为 $O(1)$。相比之下，在非光滑区域（例如间断附近），逼近误差不会随着 h 减小，而是保持在 $O(1)$ 的量级。

正如前面的计算所示，为了达到预期的精度，非光滑区域中的权重必须为 $O(h^{2t})$ 的量级。这样，当 $h \to 0$ 时，非光滑区域对总误差的影响会变小，从而使最终逼近保持所需的精度阶。

■

新的逼近算子的光滑性仅取决于函数 φ_k，因为 $\alpha_k = \gamma_k \varphi_k$。我们在下一个命题中概述这一性质。

命题 4.2。 设 $\nu \in \mathbb{N}$。设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个开有界区域，满足 $\Omega \subseteq \bigcup_{k=1}^M \Omega_k$，其中每个 $\Omega_k \subset \mathbb{R}^n$ 都是开集。若对于所有 $k = 1, \ldots, M$，权函数 $\varphi_k \in \mathcal{C}^\nu(\Omega_k)$ 均满足条件，则公式 (17) 中定义的新近似是 $\mathcal{C}^\nu(\Omega)$。

*P*证明。 根据公式（17），由于每个 $\gamma_k \in \mathbb{R}^+$ 都是常数且 $\varphi_k \in \mathcal{C}^\nu(\overline{\Omega}_k)$，因此可得

$$\alpha_k(\mathbf{x}) = \gamma_k \varphi_k(\mathbf{x}) \in \mathcal{C}^\nu(\overline{\Omega_k}).$$

此外，分母 $\sum_{j=1}^M \alpha_j(\mathbf{x})$ 是 $\mathcal{C}^\nu$ 个函数的有限和，因此它也是 $\mathcal{C}^\nu$，并且由于覆盖假设 $\Omega \subseteq \bigcup_{k=1}^M \Omega_k$ 以及 φ_k 在其支撑集内为正，所以它在 Ω 上严格为正。因此，归一化权重

$$\mathcal{W}_k(\mathbf{x}) = \frac{\alpha_k(\mathbf{x})}{\sum_{j=1}^M \alpha_j(\mathbf{x})} \in \mathcal{C}^\nu(\overline{\Omega}).$$

由于每个 p_k 都是多项式函数，因此它是无限次可微的，从而属于任意 ν 的 $\mathcal{C}^\nu(\Omega_k)$。乘积 $\mathcal{W}_k(\mathbf{x})\overline{p_k}(\mathbf{x})$ 因此是 $\mathcal{C}^\nu$，而有限和

$$\mathcal{Q}_{\mathrm{PU}}^{\mathrm{NL}}(f)(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{M} \mathcal{W}_k(\mathbf{x}) p_k(\mathbf{x})$$

在 Ω 上同样为 $\mathcal{C}^\nu$。因此，全局数据依赖 PU-MLS 逼近为 $\mathcal{C}^\nu(\Omega)$。 ■

注 4.1. 上述构造的 *DDPU-MLS* 方法能有效缓解间断附近的吉布斯现象。这是通过非线性加权机制实现的：该机制对在函数缺乏光滑性的区域上构造的局部近似函数赋予显著更小的权重。因此，全局逼近避免了标准移动最小二乘或线性 *PU-MLS* 方法在逼近具有跳跃或间断的函数时通常出现的伪振荡。我们将在下一节的数值实验中考察这一事实。

5. 数值实验

在本节中，我们给出一系列数值算例，以验证本文所建立的结果，并考察所提出的数据依赖算法 DDPU-MLS 相对于传统 PU-MLS 方法的性质。在第 5.1 小节中，我们首先通过一个光滑测试算例分析精度阶，即式 (1) 中给出的著名 Franke 函数。随后的小节重点讨论间断附近不良振荡的抑制。为此，我们重新考察第 1 节中引入的算例，用以说明所提算法对此类函数的有效性。数值测试分别采用规则网格和 Halton 序列作为采样点。在所有情形中，均采用与 [8] 相同的参数设置；具体而言，沿单一方向的子域数目由 $\lfloor\sqrt{N}/2\rfloor$ 给出，半径取为 $\delta = \sqrt{2/M}$。所有数值实验均在二维空间中进行，与第 4 节所引入的 DDPU–MLS 方法的多变量形式保持一致。

5.1. 精度阶

我们首先考察式（1）中给出的著名 Franke 函数，以分析近似阶。数值测试采用两种数据分布：均匀网格 $X_{N=2^l+1} = \{(i/2^l, j/2^l) : i,j = 0,\dots,2^l\}$，以及由 Halton 序列生成的一组 $N = (2^l+1)^2$ 散乱数据点，如 [17] 所述。参数 h_l 表示相应的填充距离，而逐点误差定义为

$$e_j^l = |f(\mathbf{z}_j) - \mathcal{Q}^l(\mathbf{z}_j)|,$$

其中，$\{\mathbf{z}_j\}_{j=1}^{N_{\mathrm{eval}}}$ 表示 $[0,1]^2$，上的均匀求值网格，其间距为 $N_{\mathrm{eval}} = 120^2$；$\mathcal{Q}^l$ 表示每个细化层级 l 下的 $\mathcal{Q}_{\mathrm{PU}}(f)$ 或 $\mathcal{Q}_{\mathrm{PU}}^{\mathrm{DD}}(f)$。这里，索引 j 标记二维区域中的求值点，e_j^l 表示位置 $\mathbf{z}_j \in \mathbb{R}^2$ 处的逐点误差。最后，离散最大误差和均方根误差及其相应的收敛率按如下方式计算：

$$\mathrm{MAE}_l = \max_{j=1,\dots,120} e_j^l, \quad \mathrm{RMSE}_l = \left(\frac{1}{120}\sum_{j=1}^{120}(e_j^l)^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad r_l^\infty = \frac{\log(\mathrm{MAE}_{l-1}/\mathrm{MAE}_l)}{\log(h_{l-1}/h_l)}, \quad r_l^2 = \frac{\log(\mathrm{RMSE}_{l-1}/\mathrm{RMSE}_l)}{\log(h_{l-1}/h_l)}.$$

当使用方程 (11) 和 (17) 中所示的算子时，我们分别使用缩写 PU-MLS$_{\mathcal{H}}^p$ 和 DDPU-MLS$_{\mathcal{H}}^p$，其中 p 表示多项式的次数，$\mathcal{H}$ = G、W2、W4 表示 w 为高斯函数、Wendland $\mathcal{C}^2$或 Wendland $\mathcal{C}^4$ 函数，如表1所示。我们采用以下形式的这些函数：$w_i(\mathbf{x}) = w(\gamma_k|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|)$，其中每个细化层级 k对应的形状参数定义为 $\gamma_k = \frac{\mu_k}{h}$。对于 W2 和 W4，我们取 $\gamma_k = \lfloor\sqrt{N}/2\rfloor/\sqrt{2}$；对于 G，我们取 $\gamma_k = \sqrt{2}\lfloor\sqrt{N}/2\rfloor$。在高斯函数情形下，我们仅考虑满足 $w_i(\mathbf{x}) > 10^{-10}$ 的 $\mathbf{x}_i \in X$ 值。

表 2 和表 3 证实，在均匀网格上，数值精度阶与理论预测相符：二次重构时接近 3（$p=2$），三次重构时接近 4（$p=3$）。在这两种情况下，PU-MLS 和 DDPU-MLS 的收敛率相当。随着网格细化，误差持续减小；总体而言，DDPU-MLS 方法得到的误差值略小。

	PU-MLS^2 W2		DDPU-MLS^2 W2		PU-MLS^2 W2		DDPU-MLS^2 W2	
l	MAE_l	r_l^∞	MAE_l	r_l^∞	均方根误差$_l$	r_l^2	均方根误差$_l$	r_l^2
4	1.0660e-02		2.8853e-02		1.2781e-03		3.7739e-03	
5	8.9460e-04	3.5748	2.6184e-03	3.4620	1.0177e-04	3.6506	4.2879e-04	3.1377
6	6.7838e-05	3.7211	4.4858e-04	2.5453	7.6350e-06	3.7365	5.2508e-05	3.0297
7	5.3291e-06	3.6701	4.6282e-05	3.2768	6.6164e-07	3.5285	6.3381e-06	3.0504
	PU-MLS^2 W4		DDPU-MLS^2 W4		PU-MLS^2 W4		DDPU-MLS^2 W4	
l	MAE_l	r_l^∞	MAE_l	r_l^∞	均方根误差$_l$	r_l^2	均方根误差$_l$	r_l^2
4	8.4714e-03		3.0652e-02		9.8372e-04		3.4076e-03	
5	7.4136e-04	3.5144	2.4897e-03	3.6219	7.8304e-05	3.6511	3.7181e-04	3.1961
6	5.8730e-05	3.6580	3.9069e-04	2.6719	6.6490e-06	3.5579	4.4703e-05	3.0561
7	4.2374e-06	3.7928	3.6824e-05	3.4073	5.3169e-07	3.6445	5.3467e-06	3.0636
	PU-MLS^2 G		DDPU-MLS^2 G		PU-MLS^2 G		DDPU-MLS^2 G	
l	MAE_l	r_l^∞	MAE_l	r_l^∞	均方根误差$_l$	r_l^2	均方根误差$_l$	r_l^2
4	1.8314e-02		5.4331e-02		2.4049e-03		8.0603e-03	
5	1.7815e-03	3.3617	9.7512e-03	2.4781	2.0424e-04	3.5577	1.0028e-03	3.0068
6	1.3656e-04	3.7055	1.0640e-03	3.1961	1.5270e-05	3.7415	1.2148e-04	3.0453
7	2.1561e-05	2.6631	9.9053e-05	3.4252	2.5381e-06	2.5889	1.3977e-05	3.1196

表 2： 使用 线性和数据依赖型 PU-MLS 方法（次数 2）在网格点上对 Franke 测试函数进行计算所得的误差及收敛率。

	PU-MLS^3 W2		DDPU-MLS^3 W2		PU-MLS^3 W2		DDPU-MLS^3 W2	
l	MAE_l	r_l^∞	MAE_l	r_l^∞	均方根误差$_l$	r_l^2	均方根误差$_l$	r_l^2
2	2.6635e-01		1.2665e+00		7.5969e-02		6.9229e-02	
3	5.8942e-02	2.1759	6.4884e-02	4.2868	1.0215e-02	2.8947	1.2481e-02	2.4717
4	1.0321e-02	2.5138	1.8325e-02	1.8241	1.1200e-03	3.1891	1.5477e-03	3.0115
5	8.1815e-04	3.6570	1.2601e-03	3.8621	8.2028e-05	3.7712	9.9590e-05	3.9580
	PU-MLS^3 W4		DDPU-MLS^3 W4		PU-MLS^3 W4		DDPU-MLS^3 W4	
l	MAE_l	r_l^∞	MAE_l	r_l^∞	均方根误差$_l$	r_l^2	均方根误差$_l$	r_l^2
2	2.8200e-01		1.2665e+00		7.8948e-02		7.0630e-02	
3	5.7881e-02	2.2845	6.2876e-02	4.3322	9.4199e-03	3.0671	1.1173e-02	2.6603
4	8.4535e-03	2.7755	1.7929e-02	1.8102	9.1034e-04	3.3712	1.4273e-03	2.9686
5	7.0882e-04	3.5760	8.5953e-04	4.3826	6.6973e-05	3.7648	8.4005e-05	4.0867
	PU-MLS^3 G		DDPU-MLS^3 G		PU-MLS^3 G		DDPU-MLS^3 G	
l	MAE_l	r_l^∞	MAE_l	r_l^∞	均方根误差$_l$	r_l^2	均方根误差$_l$	r_l^2
2	2.4911e-01		2.5331e+00		7.0075e-02		1.2272e-01	
3	2.4548e-01	0.0212	8.1384e-02	4.9600	4.0979e-02	0.7740	9.8184e-03	3.6437
4	1.3354e-02	4.2003	1.4330e-02	2.5057	1.5689e-03	4.7071	6.8683e-04	3.8375
5	1.2850e-03	3.3775	5.1022e-04	4.8117	1.3171e-04	3.5743	3.3476e-05	4.3587

表3：采用线性和数据相关PU-MLS方法（次数为3）对在网格点处求值的 Franke 测试函数进行计算所得的误差和收敛率。

现在，我们在区间 $[0,1]^2$ 内使用 Halton 点，在非均匀网格上重复该实验。与之前一样，我们使用相同的形状参数值 γ_k。

再次使用 $[0,1]^2$ 中的 Halton 点在非均匀网格上重复相同的实验（见表4和表5）时，观测到的精度阶仍与理论估计一致（见定理 2.4 和命题 4.2）。这两种算法的收敛行为类似，而非线性变体产生的误差略低。

总而言之，对于 $p=2$ 和 $p=3$，无论数据分布在均匀网格上还是 Halton 点上，线性方法与数据相关方法在精度和收敛率方面均表现出相近的性能。然而，即使目标函数是光滑的，DDPU-MLS 方法通常仍能获得略高的精度。

	PU-MLS^2 W2		DDPU-MLS^2 W2		PU-MLS^2 W2		DDPU-MLS^2 W2	
l	MAE_l	r_l^∞	MAE_l	r_l^∞	均方根误差$_l$	r_l^2	均方根误差$_l$	r_l^2
2	1.2181e+00		1.2181e+00		1.0833e-01		1.4901e-01	
3	2.6721e-01	2.1886	2.6721e-01	2.1886	1.6203e-02	2.7411	2.6141e-02	2.5110
4	6.4666e-02	2.0469	6.4812e-02	2.0436	2.7382e-03	2.5650	4.2469e-03	2.6218
5	4.6229e-03	3.8061	3.7808e-03	4.0995	2.6968e-04	3.3439	5.3960e-04	2.9765
	PU-MLS^2 W4		DDPU-MLS^2 W4		PU-MLS^2 W4		DDPU-MLS^2 W4	
l	MAE_l	r_l^∞	MAE_l	r_l^∞	均方根误差$_l$	r_l^2	均方根误差$_l$	r_l^2
2	1.5395e+00		1.5395e+00		1.2517e-01		1.8510e-01	
3	2.6657e-01	2.5299	2.6657e-01	2.5299	1.5564e-02	3.0075	2.3416e-02	2.9827
4	6.4795e-02	2.0406	6.4812e-02	2.0402	2.6643e-03	2.5464	3.9539e-03	2.5661
5	3.3082e-03	4.2917	3.5490e-03	4.1908	2.6460e-04	3.3318	4.7547e-04	3.0559
	PU-MLS^2 G		DDPU-MLS^2 G		PU-MLS^2 G		DDPU-MLS^2 G	
l	MAE_l	r_l^∞	MAE_l	r_l^∞	均方根误差$_l$	r_l^2	均方根误差$_l$	r_l^2
2	5.2726e-01		5.2726e-01		1.0378e-01		8.1783e-02	
3	8.1774e-02	2.6888	1.2125e-01	2.1206	1.8985e-02	2.4507	2.8204e-02	1.5359
4	1.5458e-02	2.4033	4.4310e-02	1.4522	2.8313e-03	2.7453	7.3400e-03	1.9420
5	3.3042e-03	2.2260	9.9623e-03	2.1531	3.5984e-04	2.9760	1.0553e-03	2.7982

表 4：误差和 使用线性和数据依赖型 PU-MLS 方法（次数 2）对所提供的 Halton 点测试的收敛率 s.

	PU-MLS^3 W2		DDPU-MLS^3 W2		PU-MLS^3 W2		DDPU-MLS^3 W2	
l	MAE_l	r_l^∞	MAE_l	r_l^∞	均方根误差$_l$	r_l^2	均方根误差$_l$	r_l^2
2	1.9404e+00		1.9404e+00		1.7834e-01		1.9074e-01	
3	2.6038e-01	2.8977	2.6038e-01	2.8977	1.6501e-02	3.4340	2.1348e-02	3.1594
4	5.8785e-02	2.1471	5.8897e-02	2.1443	2.2947e-03	2.8462	2.7146e-03	2.9753
5	3.6878e-03	3.9946	2.5759e-03	4.5150	1.3960e-04	4.0389	1.5111e-04	4.1671
	PU-MLS^3 W4		DDPU-MLS^3 W4		PU-MLS^3 W4		DDPU-MLS^3 W4	
l	MAE_l	r_l^∞	MAE_l	r_l^∞	均方根误差$_l$	r_l^2	均方根误差$_l$	r_l^2
2	1.9421e+00		1.9421e+00		1.8229e-01		1.8919e-01	
3	3.2329e-01	2.5867	2.6038e-01	2.8989	1.7048e-02	3.4186	2.0985e-02	3.1725
4	5.8884e-02	2.4569	5.8897e-02	2.1443	2.1875e-03	2.9623	2.4949e-03	3.0723
5	4.3867e-03	3.7467	2.5759e-03	4.5150	1.4931e-04	3.8729	1.4366e-04	4.1182
	PU-MLS^3 G		DDPU-MLS^3 G		PU-MLS^3 G		DDPU-MLS^3 G	
l	MAE_l	r_l^∞	MAE_l	r_l^∞	均方根误差$_l$	r_l^2	均方根误差$_l$	r_l^2
2	5.4493e+00		5.4463e+00		7.5698e-01		7.7851e-01	
3	2.9662e-01	4.1994	3.6358e+00	0.5830	4.4877e-02	4.0762	1.8134e-01	2.1020
4	1.4680e-02	4.3367	8.0028e-02	5.5056	1.8423e-03	4.6064	9.2098e-03	4.2994
5	2.1421e-03	2.7768	1.4321e-02	2.4824	1.5831e-04	3.5407	6.7622e-04	3.7676

表 5：使用线性和数据依赖型 PU-MLS 方法（次数为 3）对 Halton 点上的给定测试进行计算所得的误差和收敛率。

需要强调的是，DDPU-MLS表述的目标并不是提高光滑函数的逼近精度。在这种情况下，线性 PU–MLS 方法已经达到最优，而非线性权重旨在恢复相同的渐近行为。表 2–5 所报告的结果证实，所提出的数据相关方法在光滑区域中保持了预期的收敛率和精度，且不会导致任何性能下降。

在下一小节中，将考察算法在数据呈现强梯度或间断时的性能。

5.2. 避免间断附近的振荡

虽然光滑测试函数的数值结果表明 PU–MLS 与 DDPU–MLS 的表现相当，但当存在间断时，这两种方法之间的差异变得显著。在本小节中，我们从分段光滑函数 f_2（式 (2)）开始进行若干实验，并使用第 1 节中定义的式 (1)。

我们的目标是比较线性和数据依赖型 PU-MLS 方法。我们在正方形 $[0,1]^2$ 内使用由 $N_{\text{eval}} = 120^2$ 个点组成的均匀求值网格，并采用 Wendland $\mathcal{C}^2$ 和 $\mathcal{C}^4$ 函数，形状参数 γ_k 定义见上一小节。图 3 和图 4 展示了结果，以及各方法所得近似与原函数之间的逼近误差。我们观察到，数据依赖方法在间断附近表现恰当，而线性方法则产生了明显的振荡。旋转图形后（图中的第二列），这些差异更加显著。第三列的误差图也支持这一观察：线性 PU-MLS 方法在间断附近产生了范围更广的高误差区域，表明存在涂抹效应。相比之下，DDPU-MLS 方法的误差分布范围更集中，能更有效地保留间断结构。更多数值算例将进一步验证这一观察。

为了分析间断更加显著时的表现，我们选用函数（19）（用于 [1]），首先使用 Wendland $\mathcal{C}^2$ 函数（图 5），随后使用 Wendland $\mathcal{C}^4$ 函数（图 6）。

$$g(x,y) = \begin{cases} \sin(xy), & (x-0.5)^2 + (y-0.5)^2 \geq 0.25^2, \\ \cos(xy), & (x-0.5)^2 + (y-0.5)^2 < 0.25^2. \end{cases} \tag{19}$$

使用线性方法时，会出现一些不理想的效应以及间断的涂抹效应；采用数据依赖算法后，这些现象有所减轻。此外，与前一个示例相比，间断越显著，这些差异就越明显。误差图证实了这一表现：线性方法会在间断附近产生更宽的高误差区域，而非线性方法则能保持更局部且更准确的重建。

现在，我们研究函数（20），以确认所构造的方法能够避免吉布斯现象，从而减轻间断附近的振荡和图像扩散。图 7 和图 8 展示了相应结果，分别使用径向基函数 Wendland $\mathcal{C}^2$ 和 $\mathcal{C}^4$ 函数。

$$h(x,y) = \begin{cases} y\sin(x) + y\cos(x), & (x-0.5)^2 + (y-0.5)^2 \geq 0.25^2, \\ \exp(xy) + 1, & (x-0.5)^2 + (y-0.5)^2 < 0.25^2. \end{cases} \tag{20}$$

如前述示例所示，将线性 PU-MLS 应用于函数 (20) 时，会在间断附近产生振荡。相比之下，数据相关公式能够有效抑制这些伪影，从而在两个区域内得到更准确、更稳定的近似。非线性方法中的误差仍更加局部化，进一步证明了其保持间断并减少振荡的能力。

最后，我们测试 (21)，其中包含跨越间断的正负跳跃。

$$j(x,y) = \begin{cases} -(x+y+1)\cos(4x) + \sin(4(x+y)), & (x-0.5)^2 + (y-0.5)^2 \geq 0.1, \\ \exp(-10((x-0.5)^2 + (y-0.5)^2)), & (x-0.5)^2 + (y-0.5)^2 < 0.1. \end{cases} \tag{21}$$

图 9 和图 10 展示了线性方法与非线性方法之间的比较。与前面的情况一样，数据相关方法能够持续减少间断附近的误差，从而提供更稳定、更准确的近似。这些结果证实，应用 DDPU-MLS 方法时，振荡和涂抹效应等不期望现象能够得到有效缓解。

6. 结论

在这项工作中，我们提出了单位分解移动最小二乘法（DDPU-MLS）的数据依赖增强方法。据我们所知，这是文献中首次尝试在 PU-MLS 框架中引入非线性策略。提出这一方法的动机是，我们发现经典的 PUMLS 方案虽然在光滑区域具有很高的精度，但在苛刻条件下可能产生振荡行为或失去稳定性。DDPU-MLS 的公式采用了一种改进的加权策略，可根据局部情况进行调整，旨在增强稳定性，同时保持近似质量。

数值实验首先证实，对于光滑函数，观测到的精度阶与理论预测一致，PU-MLS 和 DDPU-MLS 均达到了预期的收敛率。更重要的是，对于具有明显间断的函数，数据依赖方法有效抑制了应用线性 PU-MLS 时在跳跃附近出现的振荡。这表明，DDPU-MLS 方法在保持光滑区域近似质量的同时，成功减轻了吉布斯现象。

总体而言，结果表明，DDPU-MLS 是标准 PUMLS 方法的一种可靠替代方案。在平滑测试案例中，两种方法表现出几乎相同的收敛特性，而非线性机制则提供了额外的稳健性，在更复杂的情形下可能具有优势。未来的研究将重点评估 DDPU-MLS 在涉及不规则数据分布或间断的问题中的表现，并进一步完善自适应加权策略，以减少手动调整参数的需求。

利益冲突

作者声明，本研究不存在任何利益冲突。

声明　　在写作过程中使用生成式 AI 和 AI 辅助工具的声明　　ss

在准备本研究期间，作者仅使用 Microsoft Copilot 协助进行拼写和语法校正。随后，作者对所有内容进行了审阅和编辑，并对最终发表内容的精度和完整性承担全部责任。

参考文献

[1] S. Amat, D. Levin, J. Ruiz-Álvarez, D. F. Yáñez（2024年）：“基于非线性 WENO B样条的近似方法”。*Numer. Algor.*，98(3)，1141–1169。[2] F. Aràndiga, A. M. Belda, P. Mulet（2010年）：“点值 WENO 多分辨率在稳定图像压缩中的应用”。*J. Sci. Comput.*，43(2)，158–182。[3] F. Aràndiga, P. Mulet, V. Renau（2012年）：“非可分二维加权 ENO 插值”。*Appl. Numer. Math.*，62(8)，975—987。[4] A. Baeza, R. Bürger, P. Mulet, D. Zorío（2019年）：“通过全局平均权重构造中心 WENO 格式”，*J. Sci. Comput.* 78，499–530。[5] M. D. Buhmann：径向基函数：理论与实现，剑桥大学出版社，2003年。[6] J. C. Carr, R. K. Beatson, J. B. Cherrie, T. J. Mitchell, W. R. Fright, B. C. McCallum, T. R. Evans（2001年）：“利用径向基函数重建和表示三维物体”。发表于第*28*届计算机图形学与交互技术年度会议论文集，67–76。[7] R. Cavoretto, A. De Rossi, E. Perracchione（2016年）：“通过基于块的搜索技术高效计算单位分解插值函数”，*Comput. Math. Appl.* 71，2568–2584。[8] R. Cavoretto, A. De Rossi, E. Perracchione, S. Lancellotti（2022年）：“单位分解法的软件实现”，*DRNA*，15(2)，35–46。[9] R. Cavoretto, A. De Rossi, S. Lancellotti（2025年）：“利用贝叶斯优化搜索径向基函数形状参数”。*AIP Conf. Proc.*，3347，1–4。[10] R. Cavoretto（2026年）：“优化有理 RBF 单位分解插值中的形状参数”。*Appl. Math. Lett.*，109766。[11] F. Dell’Accio, F. Larosa, F. Nudo, N. Siar（2026年）：“一种适用于含跳跃函数且无吉布斯现象的 C^∞ 有理拟插值算子”，*Math. Comput. Simul.*，241，A辑，391–407。[12] S. De Marchi, A. Martínez, E. Perracchione（2019年）：“快速稳定的基于有理 RBF 的单位分解插值”。*J. Comput. Appl. Math.*，349，331–343。

[13] G. E. Fasshauer：使用 Matlab 的无网格近似方法，世界科学出版社，新加坡，2007年。[14] I. Garcés, J. M. Ramón, J. Ruiz-Álvarez, D. F. Yáñez（2026年）："将移动最小二乘与非线性加权本质无振荡方法相结合：一种新颖的一维单位分解方法"，*J. Comput. Appl. Math.* 477，117143。[15] A. Guessab, O. Nouisser, G. Schmeisser（2006年）："二阶求积公式的定号性理论"，*Constr. Approx.*，24(3)，263–288。[16] A. Guessab, G. Schmeisser（2010年）："正定求积公式的构造及通过 Voronoi 镶嵌近似函数"，*Adv. Comput. Math.*，32(1)，25–53。[17] J.H. Halton（1960年）："关于某些点准随机序列在多维积分计算中的效率"，*Numer. Math.* 2，84–90。[18] D. Levin（1998年）："移动最小二乘的逼近能力"，*Math. Comput.*，67(224)，1517–1531。[19] D. Levin（2004年）："网格无关曲面插值。载于《科学可视化的几何建模》"，施普林格柏林海德堡，37–49。[20] P. Mulet, J. Ruiz-Álvarez, C.W. Shu, D. F. Yáñez（2024年）："一种非可分渐进式多变量 WENO-$2r$ 点值方法"，*Appl. Numer. Math.* 204，26–47。[21] J. M. Ramón, J. Ruiz-Álvarez, D. F. Yáñez（2026年）："非线性单位分解方法"，*J. Comput.Appl. Math.* 473，116891。[22] C.-W. Shu（1999年）："对流主导问题的高阶加权本质无振荡格式"，*SIAM*评论，51(1)，82–126。[23] H. Wendland（2002年）："径向基函数的快速计算：基于单位分解的方法"，载于：C.K. Chui, L.L. Schumaker, J. Stöckler（编），《逼近理论X：小波、样条及其应用》，范德比尔特大学出版社，田纳西州纳什维尔，473–483。[24

] H. Wendland：《散乱数据逼近》，剑桥大学出版社，2004年。

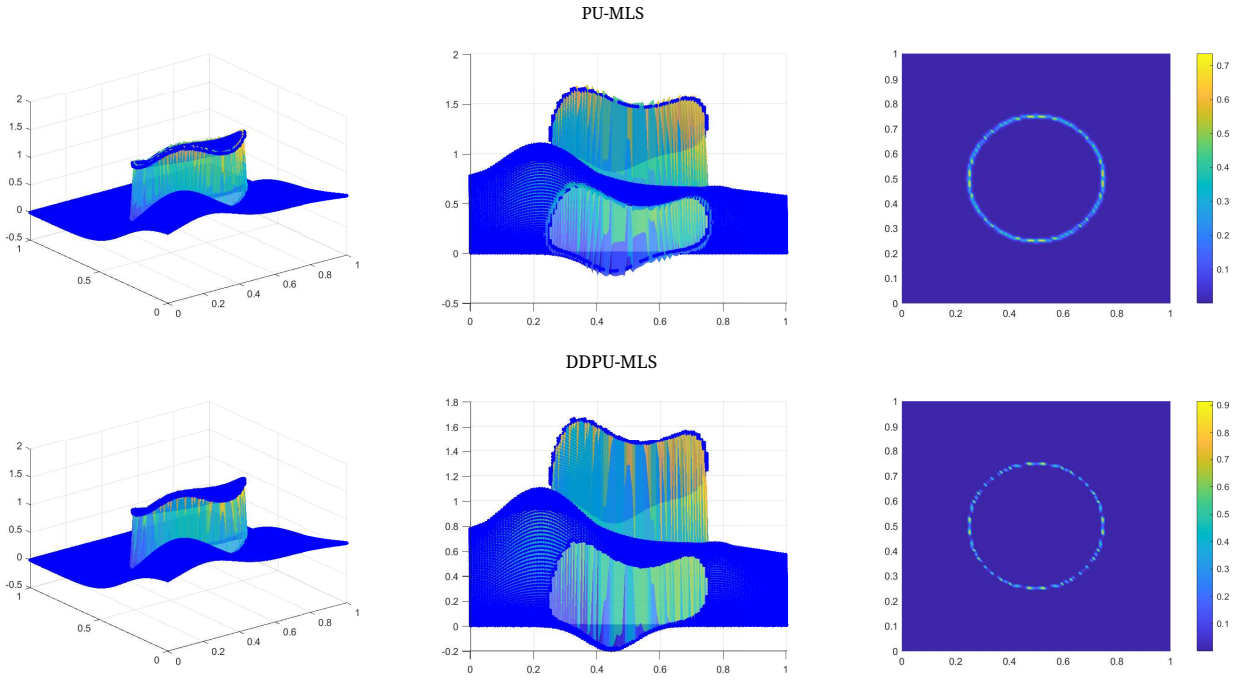


图 3： 使用 PU-MLS 和 DDPU-MLS 以及 Wendland $\mathcal{C}^2$ 函数对函数 f_2（式 (2)）进行近似。第二列显示第一列图形的旋转视图。第三列显示原函数与其近似之间的误差。

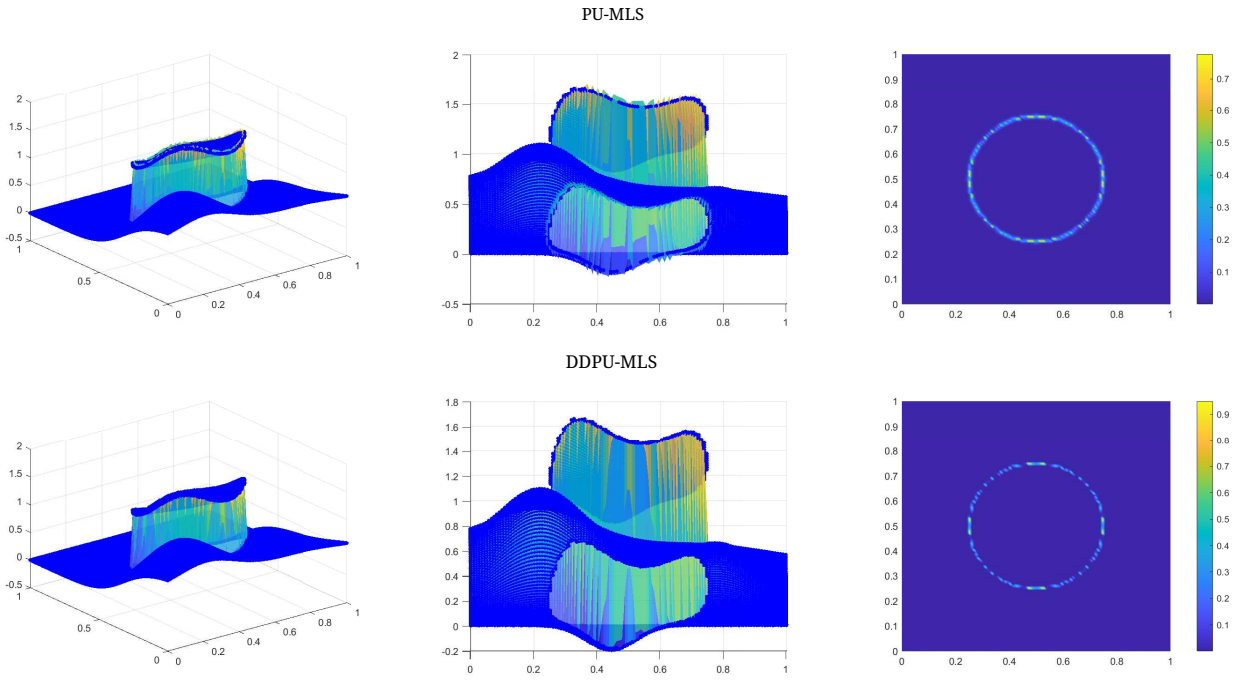


图 4： 函数的近似
第一列图像的旋转视图

在 f_2 中，使用基于 Wendland $\mathcal{C}^4$ 函数的 PU-MLS 和 DDPU-MLS，公式（2）。第二列显示
。第三列显示原函数与其近似之间的误差。

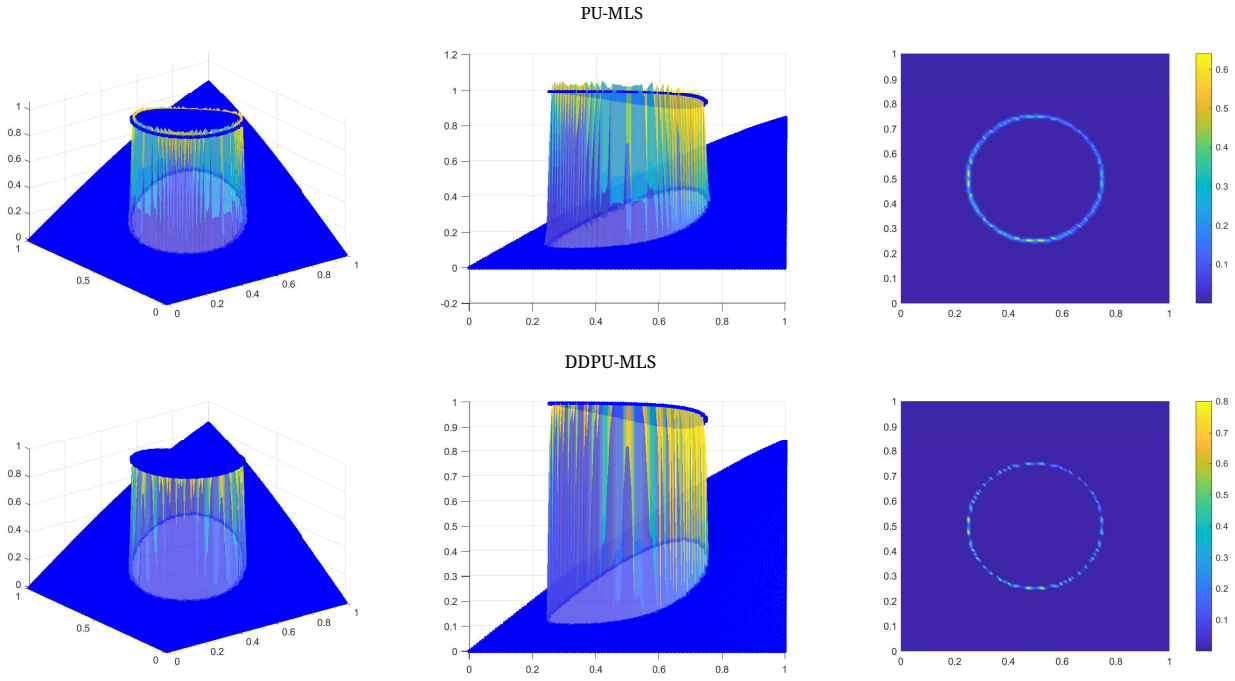


图 5：使用 PU-MLS 和 DDPU-MLS 以及 Wendland $\mathcal{C}^2$ 函数对函数 g（式 (19)）进行近似。第二列展示了第一列图形的旋转视图。第三列展示了原函数与其近似之间的误差。

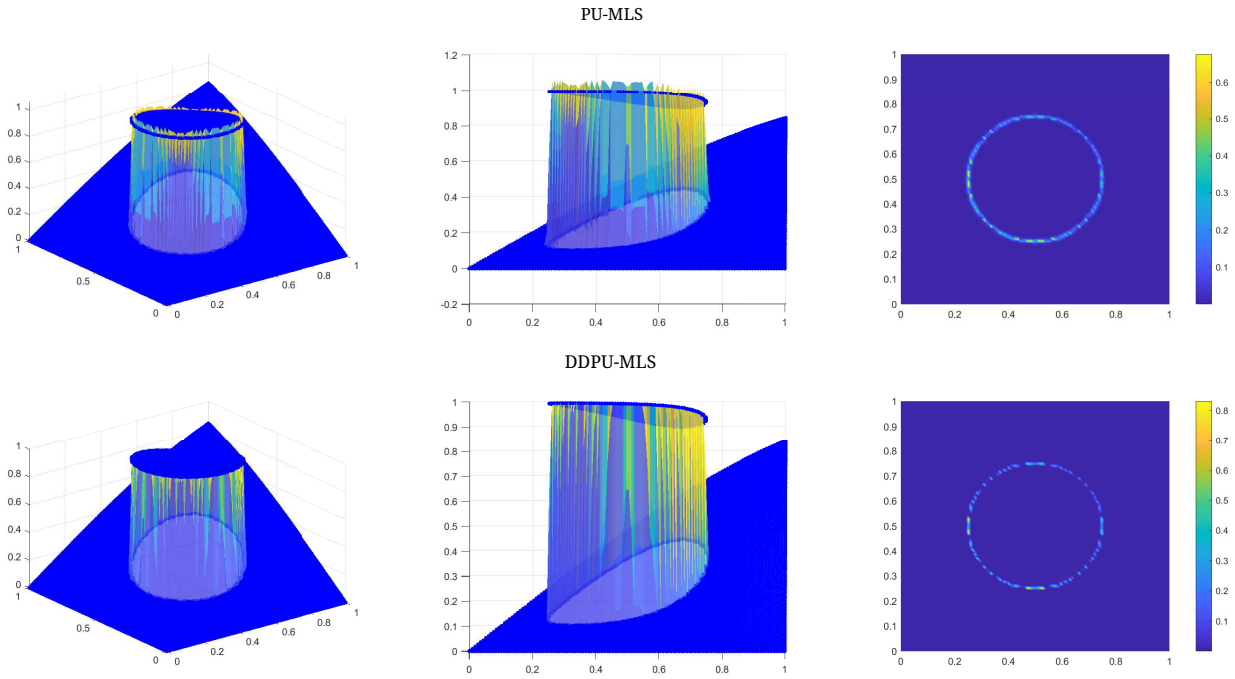


图 6：函数的近似 在 g上，式（19），使用PU-MLS和DDPU-MLS以及Wendland $\mathcal{C}^4$ 函数。第二列显示各图的旋转视图，在第一列。第三列显示原函数与其近似之间的误差。

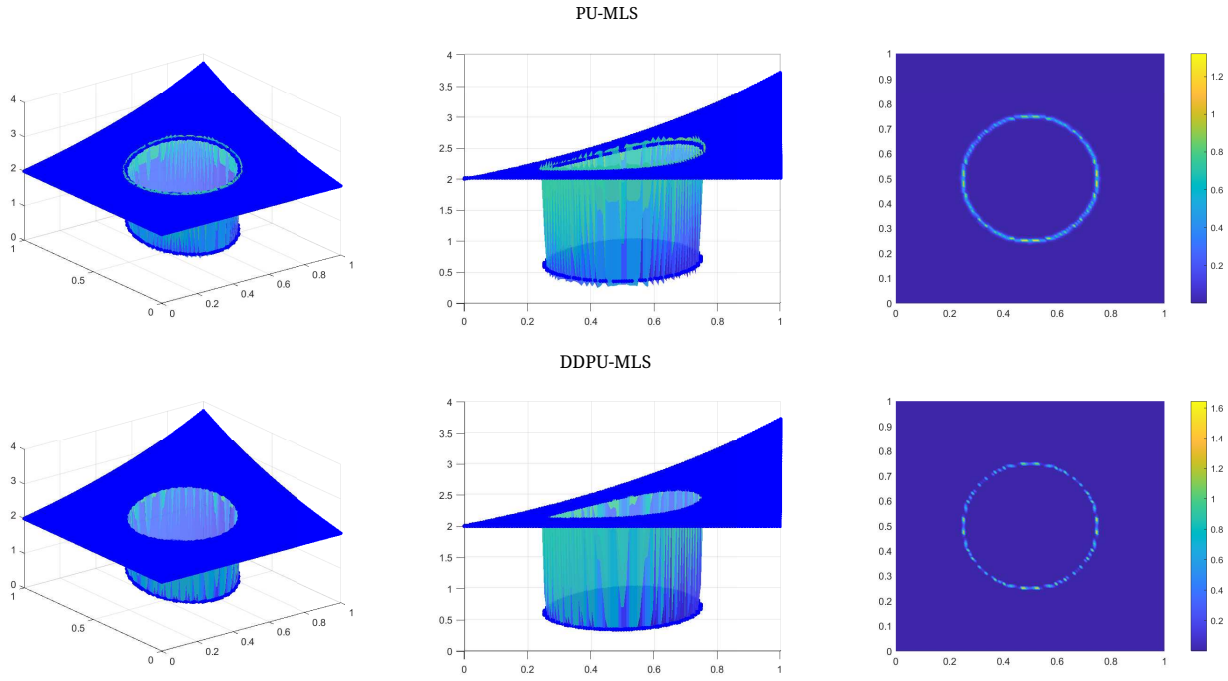


图7： 使用 Wendland $\mathcal{C}^2$ 函数，通过 PU-MLS 和 DDPU-MLS 对公式（20）中的函数 h进行近似。第二列展示了第一列图形的旋转视图。第三列展示了原函数与其近似之间的误差。

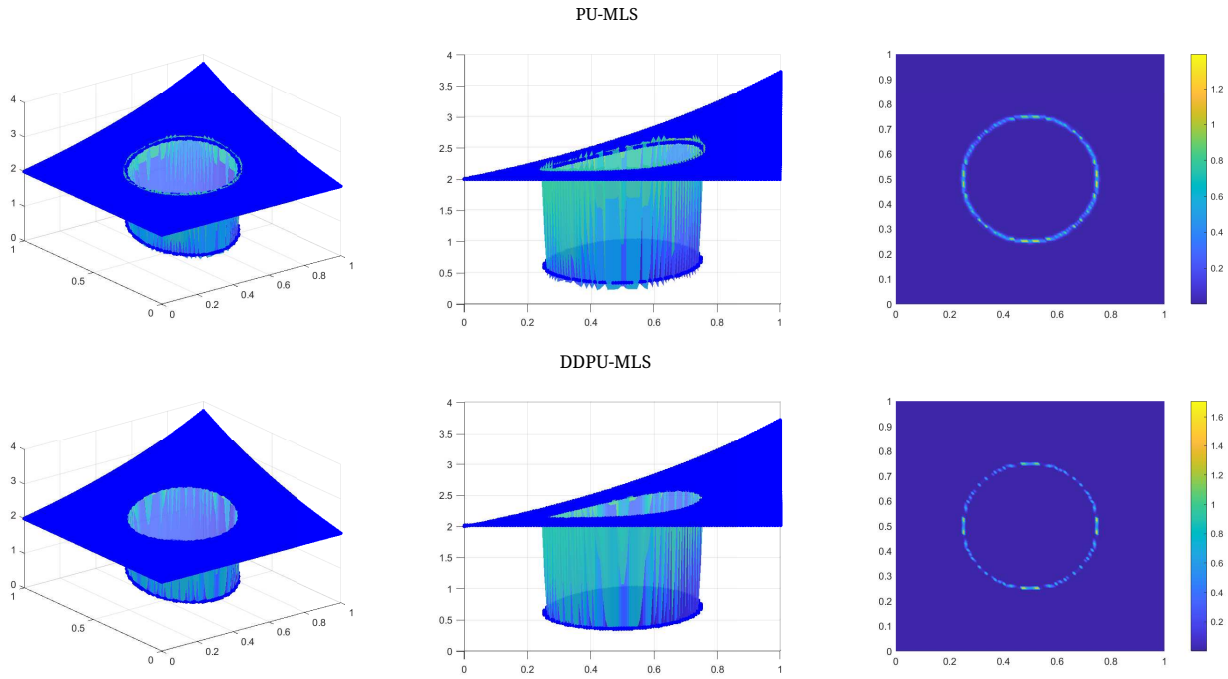


图8： 函数的近似 在 h 上，使用 Wendland $\mathcal{C}^4$ 函数的 PU-MLS 和 DDPU-MLS，见公式（20）。第二列显示第一列图形的旋转视图 。第三列显示原函数与其近似之间的误差。

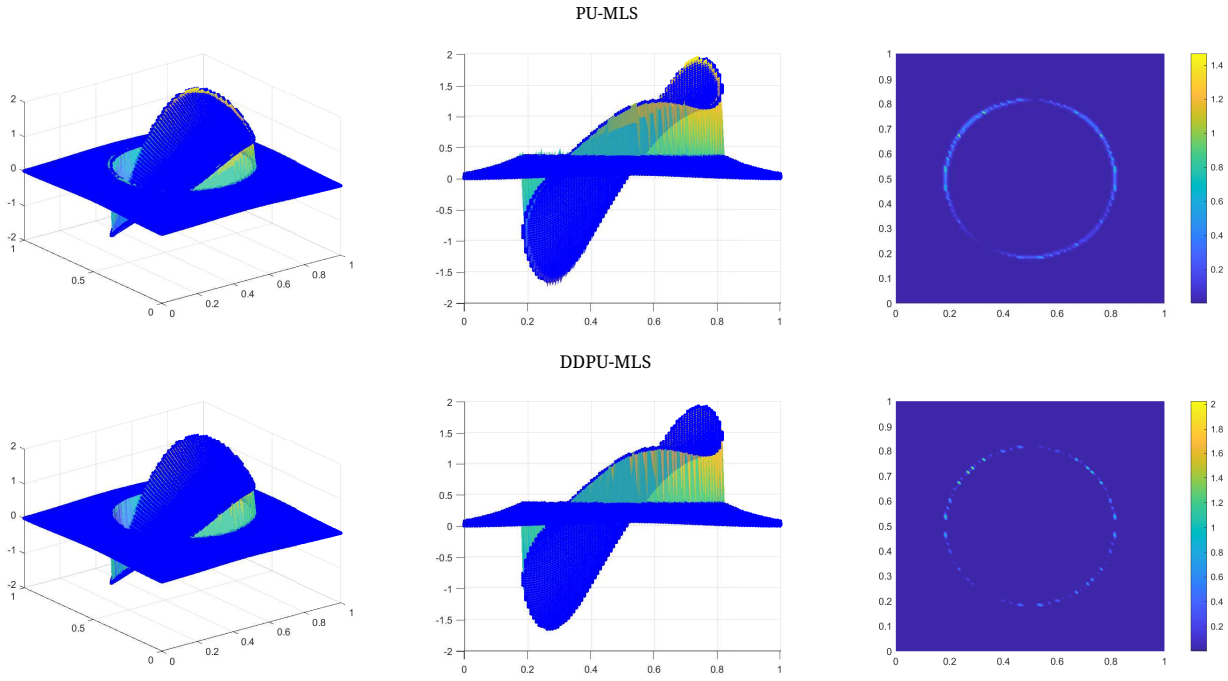


图 9： 使用 PU-MLS 和 DDPU-MLS 以及 Wendland $\mathcal{C}^2$ 函数对函数 j（式 (21)）进行近似。第二列展示了第一列图形的旋转视图。第三列展示了原函数与其近似之间的误差。

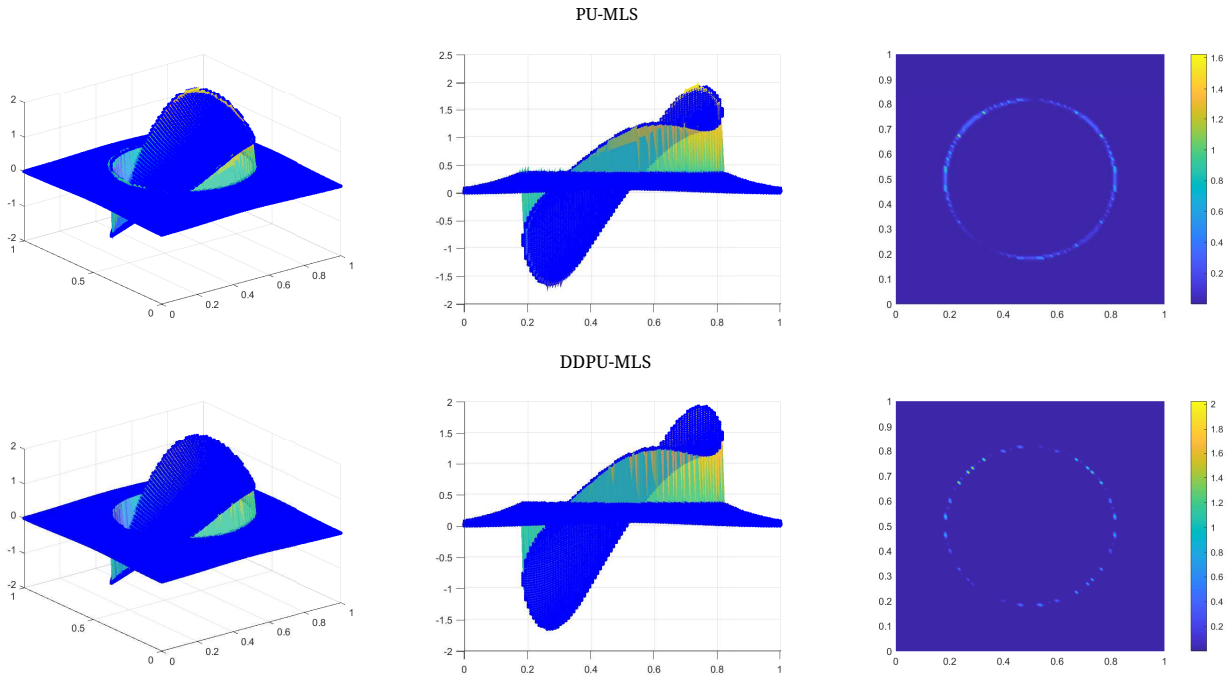


图 10： 对函数的近似ion j，式（21），使用 PU-MLS 和 DDPU-MLS 以及 Wendland $\mathcal{C}^4$ 函数。第二列显示第一列图形的旋转视图。第三列显示原函数与其近似之间的误差。