定位辅助系统的联合高斯波束方向图及其优化

Yuanbo Liu，IEEE 学生会员；Bingcheng Zhu，IEEE 高级会员；Shuojin Huang，IEEE 学生会员；Han Zhang；Zaichen Zhang，IEEE 高级会员

arXiv:2603.03940v1 [cs.IT] 4 Mar 2026

摘要——波束成形是一项基础技术，不仅能够提升通信效率，也为大规模多输入多输出（MIMO）系统奠定了基础。然而，该技术依赖准确的信道状态信息（CSI）估计，因此会带来显著的训练开销和反馈成本，尤其是在大规模天线系统中。本文研究将定位辅助波束成形作为基于 CSI 方法的有力替代方案，以避开复杂的 CSI 估计。具体而言，我们分析了采用联合高斯波束的定位辅助系统的中断概率，并推导出二维（2D）和三维（3D）场景下的闭式表达式。在此基础上，我们还推导出联合高斯波束方向图的最优解闭式表达式。在二维场景中，最优解与定位误差分布无关，而在三维情况下则取决于该分布。随后，我们分析了近似误差的渐近性能。数值结果验证了所推导的中断概率表达式，并展示了波束图优化的有效性。

索引词——波束宽度优化、高斯波束、失效概率、定位辅助波束成形。

I. 引言

AS 作为大规模多输入多输出（MIMO）系统的一项基础技术，波束成形在信号强度、空间复用能力和频谱效率方面带来了显著提升。同时，它还提高了感知应用中的目标识别精度，因此成为集成感知与通信（ISAC）系统的一种有前景的实现策略 [1]–[3]。然而，大规模MIMO系统中的波束成形在根本上受到信道获取硬件限制的制约。具体而言，射频（RF）链数量有限会降低信道状态信息（CSI）的估计精度，而天线阵列规模扩大则会导致导频开销呈指数级增长，两者共同加重了训练资源的负担[4], [5]。下行信道估计还受到高昂CSI反馈成本的进一步制约。此外，混合波束成形架构需要求解计算上难以处理的非凸优化问题，其计算复杂度随系统维度呈超线性增长 [6]–[8]。

为解决这些局限性，基于全面的系统级分析，对用于波束成形设计的定位信息进行了验证。

Y. Liu、B. Zhu、S. Huang、H. Zhang 和 Z. Zhang 隶属于东南大学移动通信国家重点实验室、移动信息通信与安全前沿科学中心（中国南京 210096）。B. Zhu、H. Zhang 和 Z. Zhang 也隶属于紫金山实验室（中国南京 211111）。B. Zhu 为通讯作者（电子邮箱：zbc@seu.edu.cn）。

该系统级分析基于第五代（5G）网络中的二维（2D）均匀矩形阵列 [9]。在 [10]–[12], 中，利用定位信息构建缩减的波束搜索空间，并改善波束对齐结果，从而有效降低训练开销。然而，这些方法仍然依赖波束训练流程，因此无法消除相关的训练成本。相比之下， [13] 中的方法利用接收机定位信息构建发射波束成形向量，无需复杂的CSI计算和反馈机制，为波束成形系统设计提供了一种新范式。[14] 基于接收机位置的概率密度函数（PDF）推导了波束成形无线链路的容量，但所得表达式涉及积分，详细的解析表征仍有待研究。

在这些分析框架的基础上，一些研究探讨了多种实际部署场景中的定位辅助波束成形。基于车载ISAC信道测量提出了定位误差的统计模型，但未能建立定位误差与通信性能之间的联系 [15]。 [16],分析了定位误差对车对车（V2V）网络中波束成形性能的影响，但未给出定位误差与性能指标之间的显式解析关系。此外，[17] 中的工作考察了车对车网络中波束指向性与定位误差容限之间的折中，并建立了波束相位查找表以降低波束训练时延。然而，该方法局限于二维移动性和二分波束覆盖场景。二维毫米波无人机（UAV）系统的波束成形向量采用基于模型的在线框架进行了优化，且不依赖离线训练数据或先验信息 [18]。然而，所得解仅为近最优，并依赖于数值迭代。此后，[19], 提出了车对基础设施（V2I）网络中基于位置的混合波束成形方案，并推导了天线最优物理倾斜角的闭式解。尽管如此，其分析框架仍局限于二维道路几何结构，最优波束的设计仍依赖数值优化。为应对更一般的三维场景，在波束图样有限的三维场景中，波束方向直接由用户位置信息计算得到[20], ，但并未对最优波束成形进行充分研究。在多无人机场景中， [21], 研究了最优波束成形解，而

波束方向图受恒模约束限制，且最优波束宽度的确定依赖于数值迭代解。分布式无人机场景中三维 3 dB 波束宽度的闭式表达式推导于 [22], , 但其受限于有限的波束方向图，且不支持任意波束图样。在 [23], 中，针对三维无人机场景获得了最大化信干噪比的闭式最优波束成形权重，但分析仅限于固定的定位误差，并未考察不同误差条件下的性能变化。总体而言，仍缺乏以显式解析形式刻画波束图样与通信可靠性之间关系的系统性分析框架，这限制了在实际系统中为满足规定的可靠性要求而对波束成形参数进行精确优化。

为波束成形设计提供理论指导，文献 [24]，针对二维场景推导了定位辅助波束成形系统中断概率的闭式界，其中最优波束宽度表示为链路距离和发射功率的函数。然而，该分析仅限于二维情况，且尚无中断概率的闭式表达式。因此，我们在先前的工作 [25]，中分析了三维定位辅助波束成形系统的中断概率，但尚未研究最优波束宽度。

本文研究定位辅助波束成形系统，并对中断概率和最优波束宽度进行理论分析。本文的贡献概括如下：

- 通过考虑定位误差分布、链路距离、传输功率和波束宽度，我们推导了二维和三维中断概率的闭式表达式。这些表达式为波束成形提供了数学上易于处理的判据。
- 我们还分别为二维和三维情况推导了最优波束图样的闭式表达式，这表明可根据传输功率、链路距离和定位误差分布对波束图样进行优化。
- 针对所推导的中断概率进行了近似误差的渐近分析，以量化中断概率表达式的收敛速度。

分析结果量化了定位精度、链路距离、传输功率和波束宽度对中断概率的影响，并揭示了可通过优化波束方向图来降低中断概率。

本文组织如下。在第 II节中，我们介绍二维和三维场景下的系统模型。在第 III节中，我们推导定位辅助波束成形系统的中断概率闭式表达式。第 IV 节优化波束方向图，并给出最优波束宽度表达式。在第 V节中，我们分析近似误差，并推导中断概率的渐近界。第 VI 节给出数值结果。最后，第 VII节总结全文。

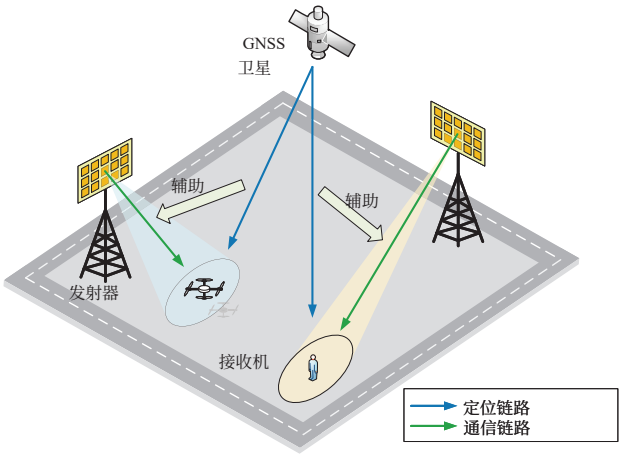


图1. 通感一体化系统定位辅助波束成形框架的整体场景。

II. System Model

定位辅助波束成形框架的场景如图 1所示，其中，射频发射机根据全球导航卫星系统（GNSS）、蓝牙低功耗（BLE）或无线保真（Wi-Fi）系统提供的定位结果，将波束对准接收机。波束方向图可通过射频链中的移相器进行调整。本节将在二维和三维场景下说明由定位信息辅助的信道模型和波束成形系统，并定义中断概率。

假设发射天线的最大输入功率为 $P_{\max}$，接收功率 P_r 可表示为 [26]

$$P_r = P_{\max} A_e G_\theta G_d \tag{1}$$

其中， A_e 为接收天线的有效面积， G_θ 为归一化发射天线增益； G_d 表示自由空间传播损耗，可计算如下

$$G_d = 1/\left(4\pi d\right)^2 \tag{2}$$

其中， d 为发射天线与接收天线之间的距离。

A. 二维波束方向图与中断概率

在二维场景中， G_θ 可计算为 [27]

$$G_\theta = \max\left\{10^{-1.2\frac{\theta^2}{\theta_{3\text{dB}}^2}}, a_m\right\} \tag{3}$$

其中， θ 是波束轴向与接收机方向之间的夹角， $\theta_{3\text{dB}}$ 表示天线辐射方向图的 3 dB波束宽度； $a_m \le 1$ 表示天线方向图的旁瓣电平，在主瓣增益较低时提供有保障的最低传播增益。

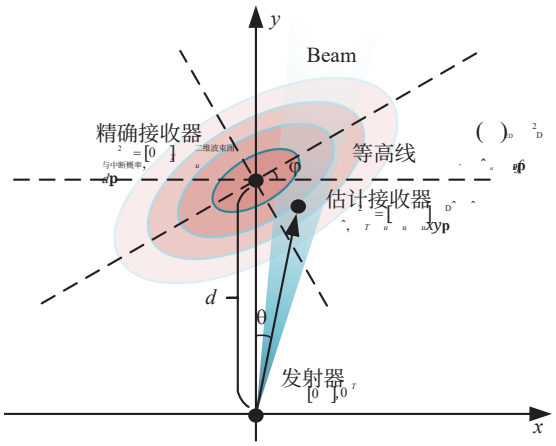


图2. 典型定位辅助波束成形系统示意图。发射器位于原点，精确接收机和估计接收位置分别位于 $\mathbf{p}_u^{2D} = [0, d]^T$ 和 $\hat{\mathbf{p}}_u^{2D} = [\hat{x}_u, \hat{y}_u]^T$。波束指向估计的接收机位置。

当接收功率 P_r （1）低于阈值 γ_{th}时，就会发生中断事件，因此二维中断概率可表示为 [24]

$$P_{\text{out}}^{\text{2D}}(\gamma_{th}, \theta_{\text{3dB}}) = \Pr(P_r \le \gamma_{th}) = \Pr(P_{\max} A_e G_\theta G_d \le \gamma_{th}) = \Pr\left(\max\left\{10^{-1.2\frac{\theta^2}{\theta_{\text{3dB}}^2}}, a_m\right\} \frac{A_e P_{\max}}{(4\pi d)^2} \le \gamma_{th}\right). \tag{4}$$

图 2 展示了一个典型的定位辅助波束成形系统。假设精确接收机位置为 $\mathbf{p}[0, d]^T$，估计接收机位置为 $\hat{\mathbf{p}}_u^{2D} = [x_u \ y_u]^T$，估计接收机位置为 $\hat{\mathbf{p}}$。θ 表示误差角，其计算方式为

$$\theta = \text{atan2}(\hat{x}_u, \hat{y}_u) \in (-\pi, \pi] \tag{5}$$

其中，atan2 $(\cdot, \cdot)$ 是四象限反正切函数。

由于 $\hat{\mathbf{p}}_u^{2D}$服从二元高斯分布，其联合概率密度函数可表示为

$$f_{\hat{\mathbf{p}}_u^{2D}}(\hat{\mathbf{p}}_u^{2D}) = \frac{1}{2\pi |\mathbf{\Sigma}^{2D}|^{\frac{1}{2}}} \times \exp\left(-\frac{(\hat{\mathbf{p}}_u^{2D} - \mathbf{p}_u^{2D})^T (\mathbf{\Sigma}^{2D})^{-1} (\hat{\mathbf{p}}_u^{2D} - \mathbf{p}_u^{2D})}{2}\right) \tag{6}$$

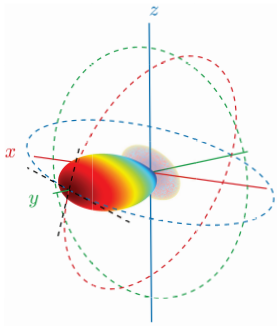
其中 $\mathbf{\Sigma}^{2D} = E\left[(\hat{\mathbf{p}}_u^{2D} - \mathbf{p}_u^{2D})(\hat{\mathbf{p}}_u^{2D} - \mathbf{p}_u^{2D})^T\right] \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ 是定位误差向量$\hat{\mathbf{p}}_u^{2D} - \mathbf{p}_u^{2D}$的二维协方差矩阵，并可通过谱分解表示为

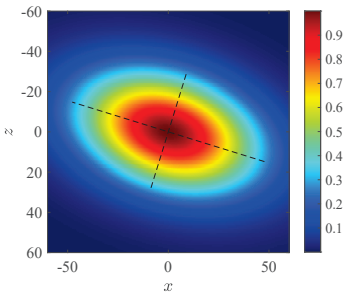
$$\mathbf{\Sigma}^{2D} = \mathbf{R}^{2D} \mathbf{\Lambda}^{2D} (\mathbf{R}^{2D})^T = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \tag{7}$$

其中$\mathbf{R}^{2D} \in \text{SO}(2)$ 是由方向角 φ参数化的二维旋转矩阵；σ_1^2 和 σ_2^2 分别表示最大估计误差方向和最小估计误差方向上的方差，如图2所示。由此，我们可以进一步将（4）改写为以下三种情形：

1) $\gamma_{th} \le \frac{P_{\max} A_e a_m}{2} (4\pi d)$：由于阈值 γ_{th} 足够低，接收波束功率 a_m 始终高于 γ_{th}，因此中断概率为零，所以我们有

$$P_{\text{out}}^{\text{2D}}(\gamma_{th}, \theta_{\text{3dB}}) = 0. \tag{8}$$





(a) 三维天线辐射方向图：$G_{(\theta,\phi)}$ 在（11）中由$\mathbf{A}$表征。

(b) 三维天线辐射方向图在 xoz 平面上的投影。

图3. $G_{(\theta,\phi)}$的三维天线辐射方向图。联合高斯波束由A表征，取值为 $\theta_{\text{3dB}} = 1.2$ rad、 $\phi_{\text{3dB}} = 0.08$ rad、 $\psi = 0.3$ rad。

2) $\gamma_{th} > \frac{P_{\max} A_e}{2} (4\pi d)$：即使在完美指向下，接收功率也低于阈值，即 $\theta = 0$，因此

$$P_{\text{out}}^{\text{2D}}(\gamma_{th}, \theta_{\text{3dB}}) = 1. \tag{9}$$

3) $\frac{P_{\max} A_e a_m}{(4\pi d)^2} \le \gamma_{th} < \frac{P_{\max} A_e}{2} (4\pi d)^2$：$\gamma_{th}$ 既不是很高也不是很低，并且当指向误差处于特定区域内时会发生中断。具体而言，$P_{\text{out}}^{\text{2D}}(\gamma_{th}, \theta_{\text{3dB}})$可表示为

$$P_{\text{out}}^{\text{2D}}(\gamma_{th}, \theta_{\text{3dB}}) = \Pr\left(\theta^2 \ge \frac{\theta_{\text{3dB}}^2}{1.2} \lg\left(\frac{P_{\max} A_e}{(4\pi d)^2 \gamma_{th}}\right)\right). \tag{10}$$

值得注意的是，（10）涉及在一个非平凡区域上对二维联合高斯概率密度函数进行积分，无法得到闭式表达式。因此，需要在第III 节中开发一种近似方法，以便对（10）进行可处理的计算。

B. 三维波束方向图和中断概率

在三维场景中，我们使用 θ 和 ϕ 分别表示波束轴与水平和垂直方向上接收方向之间的偏差，并且（3）中的归一化发射天线增益应重新定义为 [25]

$$G_{(\theta,\phi)} = \max\left\{10^{-1.2[\theta,\phi]\mathbf{A}[\theta,\phi]^T}, a_m\right\} \tag{11}$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\theta_{\text{3dB}}^2} & m \\ m & \frac{1}{\phi_{\text{3dB}}^2} \end{bmatrix} \tag{12}$$

表示以主轴和方向描述的三维波束方向图，其中 θ_{3dB} 和 ϕ_{3dB} 分别表示天线辐射方向图的水平和垂直 3 dB波束宽度，而 m 表示由波束旋转角 ψ参数化的波束旋转。图 3 展示了式 $G_{(\theta,\phi)}$（11）中由 $\mathbf{A}$ 表征的天线辐射方向图及其在 xoz 平面上的投影。因此，三维3定位信息辅助波束成形的中断概率可改写为

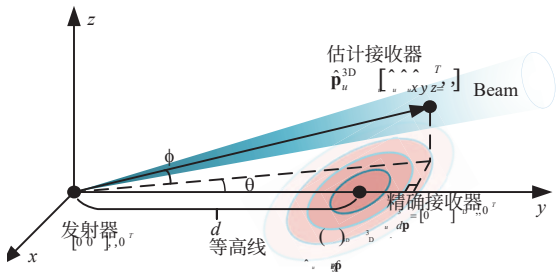


图 4. 一般三维定位辅助波束成形系统示意图。发射器位于原点，精确接收机和估计接收位置分别位于 $\mathbf{p}_u^{3D} = [0, d, 0]^T$ 和 $\hat{\mathbf{p}}_u^{3D} = [\hat{x}_u, \hat{y}_u, \hat{z}_u]^T$。波束指向估计的接收机位置。

定位信息辅助的波束成形可改写为

$$\begin{aligned} P_{\text{out}}^{3D}(\gamma_{th}, \mathbf{A}) &= \Pr(P_r \le \gamma_{th}) \\ &= \Pr\left(P_{\max} A_e G_{(\theta,\phi)} G_d \le \gamma_{th}\right) \\ &= \Pr\left(\max\left\{10^{-1.2[\theta,\phi]\mathbf{A}[\theta,\phi]^T}, a_m\right\} \frac{P_{\max} A_e}{(4\pi d)^2} \le \gamma_{th}\right). \end{aligned} \tag{13}$$

图中展示了一般三维定位辅助波束成形系统。4 $\hat{\mathbf{p}}_u^{3D} =$ 。精确接收机位于$\mathbf{p}$，估 $[0, d, 0]^T$ 计的接收机位置为$\hat{\mathbf{p}}[x_u\ y_u\ z_u]^T$ ，，。发射器位于原点，我们可以计算 θ 和 ϕ 如下

$$\theta = \operatorname{atan2}(\hat{x}_u, \hat{y}_u) \in (-\pi, \pi] \tag{14}$$

and

$$\phi = \arctan \frac{\hat{z}_u}{\sqrt{\hat{x}_u^2 + \hat{y}_u^2}} \in (-\pi/2, \pi/2]. \tag{15}$$

与二维场景类似，$\hat{\mathbf{p}}_u^{3D}$服从三元高斯分布，其概率密度函数表示为

$$\begin{aligned} f_{\hat{\mathbf{p}}_u^{3D}}(\hat{\mathbf{p}}_u^{3D}) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} |\mathbf{\Sigma}^{3D}|^{\frac{1}{2}}} \\ &\times \exp\left(-\frac{(\hat{\mathbf{p}}_u^{3D} - \mathbf{p}_u^{3D})^T (\mathbf{\Sigma}^{3D})^{-1} (\hat{\mathbf{p}}_u^{3D} - \mathbf{p}_u^{3D})}{2}\right) \end{aligned} \tag{16}$$

其中 $\mathbf{\Sigma}^{3D} = E\left[(\hat{\mathbf{p}}_u^{3D} - \mathbf{p}_u^{3D})(\hat{\mathbf{p}}_u^{3D} - \mathbf{p}_u^{3D})^T\right] \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ 表示定位误差向量 $\hat{\mathbf{p}}_u^{3D} - \mathbf{p}_u^{3D}$的三维协方差矩阵，可进行特征分解，得到

$$\mathbf{\Sigma}^{3D} = \mathbf{R}^{3D} \mathbf{\Lambda}^{3D} (\mathbf{R}^{3D})^T \tag{17}$$

其中 $\mathbf{R}^{3D} \in \mathrm{SO}(3)$ 表示由方向角参数化的三维旋转矩阵 φ_x, φ_y, φ_z 且 $\mathbf{\Lambda}^{3D} = \mathrm{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2)$ 是由满足以下条件的特征值构成的对角矩阵$\sigma_1^2 > \sigma_2^2 > \sigma_3^2$。因此，式（13）可改写如下:

1) $\gamma_{th} \le \frac{P_{\max} A_e a_m}{2}(4\pi d)$：由于阈值 γ_{th} 足够低，接收波束功率 a_m 始终超过 γ_{th}，因此中断概率为零，所以有

$$P_{\text{out}}^{3D}(\gamma_{th}, \mathbf{A}) = 0. \tag{18}$$

2) $\gamma_{th} > \frac{P_{\max} A_e}{2}(4\pi d)$：即使在完美指向下，接收功率也低于阈值，即 $\theta = 0, \phi = 0$，因此

$$P_{\text{out}}^{3D}(\gamma_{th}, \mathbf{A}) = 1. \tag{19}$$

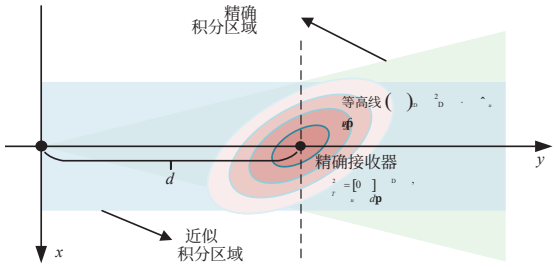


图 5. 定位辅助波束成形系统的等效模型。三角形区域和矩形区域分别表示精确积分区域和近似积分区域。

3) $\frac{P_{\max} A_e a_m}{(4\pi d)^2} \le \gamma_{th} < \frac{P_{\max} A_e}{2}(4\pi d)$：$\gamma_{th}$ 既不过高也不过低，当指向误差处于特定区域内时便会发生中断。具体而言，$P_{\text{out}}^{3D}(\gamma_{th}, \mathbf{A})$ 可表示为

$$P_{\text{out}}^{3D}(\gamma_{th}, \mathbf{A}) = \Pr\left([\theta, \phi]\, \mathbf{A}\, [\theta, \phi]^T \ge \frac{1}{1.2} \lg \frac{P_{\max} A_e}{(4\pi d)^2 \gamma_{th}}\right). \tag{20}$$

与 (10) 类似，式 (20) 也表示二维正态分布在非平凡区域上的积分，而推导其闭式解析表达式通常较为困难。因此，第 III 节针对 (20) 给出了一个渐近紧致的近似。

III. 渐近中断概率分析

本节简化二维场景下 (10) 中的中断概率表达式，以及三维场景下 (20) 中的表达式。

A. 二维渐近中断概率

Substituting (5) into (10), we can rewrite (10) as

$$\begin{aligned} P_{\text{out}}^{2D}(\gamma_{th}, \theta_{3\text{dB}}) &= \Pr\left(\theta^2 \ge \frac{\theta_{3\text{dB}}^2}{1.2} \lg\left(\frac{P_{\max} A_e}{(4\pi d)^2 \gamma_{th}}\right)\right) \\ &\approx \Pr\left(\frac{|\hat{x}_u|}{\hat{y}_u} \ge \tan\sqrt{\frac{\theta_{3\text{dB}}^2}{1.2} \lg\left(\frac{P_{\max} A_e}{(4\pi d)^2 \gamma_{th}}\right)}\right) \\ &= \Pr(|\hat{x}_u| \ge k \hat{y}_u) \\ &= \iint_{|x| \ge ky} f_{\hat{\mathbf{p}}_u^{2D}}(\hat{\mathbf{p}}_u^{2D})\, dxdy \end{aligned} \tag{21}$$

其中

$$k = \tan\sqrt{\frac{\theta_{3\text{dB}}^2}{1.2} \lg\left(\frac{P_{\max} A_e}{(4\pi d)^2 \gamma_{th}}\right)}. \tag{22}$$

鉴于定位误差远小于链路距离，我们有 $\hat{y}_u/d \to 1$ ，且式（21）可

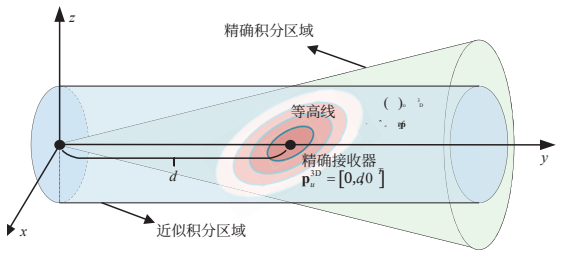


图 6. 三维定位辅助波束成形系统的等效模型。圆锥区域和圆柱区域分别表示精确积分区域和近似积分区域。

近似为

$$\begin{aligned} &P_{\text{out}}^{\text{2D},\infty}\left(\gamma_{th},\theta_{\text{3dB}}\right)\\ &\approx \Pr\left(|\hat{x}_u|\geq k\hat{y}_u\right)\approx \Pr\left(|\hat{x}_u|\geq kd\right)\\ &=1-\int_{-kd}^{kd}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\hat{y}_u}\left(y\right)\,dy\right)\cdot f_{\hat{x}_u}\left(x\right)\,dx\\ &=1-\int_{-kd}^{kd} f_{\hat{x}_u}\left(x\right)\,dx\\ &=2Q\left(\frac{d}{\sigma_x}\tan\sqrt{\frac{\theta_{\text{3dB}}^2}{1.2}\lg\left(\frac{P_{\max}A_e}{\left(4\pi d\right)^2\gamma_{th}}\right)}\right) \end{aligned} \tag{23}$$

其中 $Q(x)=\int_x^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-t^2/2\right)\,dt$ 表示高斯 Q-函数，且 $\sigma_x=\sqrt{\sigma_1^2\cos^2\varphi+\sigma_2^2\sin^2\varphi}$ 是 $\hat{x}_u$ 的标准差。图 5 展示了式（10）中的精确积分区域和式（23）中的近似积分区域。

B. 三维渐近中断概率

由于分量 $\hat{x}_u$ 和 $\hat{z}_u$ 来自定位误差，且与链路距离相比可忽略，因此有 $\hat{y}_u/d\to 1$。为便于进一步分析，我们对式（14）和式（15）进行泰勒级数展开，得到解析近似如下：

$$\theta=\operatorname{atan2}\left(\hat{x}_u,\hat{y}_u\right)=\frac{\hat{x}_u}{d}+o\left(\frac{\hat{x}_u}{d}\right) \tag{24}$$

and

$$\phi=\arctan\frac{\hat{z}_u}{\sqrt{\hat{x}_u^2+\hat{y}_u^2}}=\frac{\hat{z}_u}{d}+o\left(\frac{\hat{z}_u}{d}\right). \tag{25}$$

将式（24）和式（25）代入式（20），式（20）可近似表示为

$$\begin{aligned} &P_{\text{out}}^{\text{3D},\infty}\left(\gamma_{th},\mathbf{A}\right)\\ &=\Pr\left(\left[\hat{x}_u,\hat{z}_u\right]\mathbf{A}\left[\hat{x}_u,\hat{z}_u\right]^T\geq\frac{d^2}{1.2}\lg\frac{P_{\max}A_e}{\left(4\pi d\right)^2\gamma_{th}}\right) \end{aligned} \tag{26}$$

其中，近似过程如图 6所示。（$[\hat{x}_u,\ \hat{z}_u]$ 在（26）中的联合概率密度函数可通过对 $\hat{y}_u$ 进行边缘化得到：

$$\begin{aligned} f_{\hat{x}_u,\hat{z}_u}\left(x,z\right)&=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\hat{\mathbf{p}}_u^{\text{3D}}}\left(\hat{\mathbf{p}}_u^{\text{3D}}\right)\,dy\\ &=\frac{1}{2\pi|\mathbf{\Sigma}'^{\text{2D}}|^{\frac{1}{2}}}\exp\left(-\frac{[x,z]\left(\mathbf{\Sigma}'^{\text{2D}}\right)^{-1}[x,z]^T}{2}\right). \end{aligned} \tag{27}$$

其中

$$\mathbf{\Sigma}'^{\text{2D}}=\begin{bmatrix}\mathbf{\Sigma}^{\text{3D}}\left(1,1\right) & \mathbf{\Sigma}^{\text{3D}}\left(1,3\right)\\ \mathbf{\Sigma}^{\text{3D}}\left(3,1\right) & \mathbf{\Sigma}^{\text{3D}}\left(3,3\right)\end{bmatrix} \tag{28}$$

是 $[\hat{x}_u$的协方差矩阵，$\hat{z}_u]$ 以及 $\mathbf{\Sigma}^{\text{3D}}\left(m,n\right)$ 表示(m,n)项，即 $\mathbf{\Sigma}^{\text{3D}}$中的对应元素。结合（26）、（27）和（28），可将（26）计算为

$$\begin{aligned} P_{\text{out}}^{\text{3D},\infty}\left(\gamma_{th},\mathbf{A}\right)&=\iint\limits_{\substack{[x,z]\mathbf{A}[x,z]^T\\ \geq\frac{d^2}{1.2}\lg\frac{P_{\max}A_e}{(4\pi d)^2\gamma_{th}}}} f_{\hat{x}_u,\hat{z}_u}\left(x,z\right)\,dxdz\\ &=\iint\limits_{\substack{[x,z]\mathbf{A}[x,z]^T\\ \geq\frac{d^2}{1.2}\lg\frac{P_{\max}A_e}{(4\pi d)^2\gamma_{th}}}}\frac{1}{2\pi\left|\mathbf{\Sigma}'^{\text{2D}}\right|^{\frac{1}{2}}}\\ &\quad\times\exp\left(-\frac{[x,z]\left(\mathbf{\Sigma}'^{\text{2D}}\right)^{-1}[x,z]^T}{2}\right)dxdz. \end{aligned} \tag{29}$$

对$\mathbf{A}$ 进行特征值分解，即$\mathbf{A}=\mathbf{U}\mathbf{Y}\mathbf{U}^T$，并定义$\mathbf{t}=\sqrt{\mathbf{Y}}\mathbf{U}^T[x,z]^T$，可将（29）变换为

$$\begin{aligned} &P_{\text{out}}^{\text{3D},\infty}\left(\gamma_{th},\mathbf{A}\right)\\ &=\iint\limits_{\mathbf{t}^T\mathbf{t}\geq\frac{d^2}{1.2}\lg\frac{P_{\max}A_e}{(4\pi d)^2\gamma_{th}}}\frac{1}{2\pi\left|\mathbf{Y}\mathbf{\Sigma}'^{\text{2D}}\right|^{\frac{1}{2}}}\\ &\quad\times\exp\left(-\frac{\mathbf{t}^T\sqrt{\mathbf{Y}^{-1}}\mathbf{U}^T\left(\mathbf{\Sigma}'^{\text{2D}}\right)^{-1}\mathbf{U}\sqrt{\mathbf{Y}^{-1}}\mathbf{t}}{2}\right)d\mathbf{t}. \end{aligned} \tag{30}$$

令$\mathbf{H}^{-1}=\sqrt{\mathbf{Y}^{-1}}\mathbf{U}^T\left(\mathbf{\Sigma}'^{2\text{D}}\right)^{-1}\mathbf{U}\sqrt{\mathbf{Y}^{-1}}$，且$\mathbf{H}$ 的特征值分解由$\mathbf{H}=\mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^T$给出，其中$\mathbf{D}=\operatorname{diag}\left(\lambda_1^2,\ \lambda_2^2\right)$ 和 $\lambda_1\leq\lambda_2$。定义$\mathbf{q}=\mathbf{V}^T\mathbf{t}$，则（30）可进一步计算为

$$\begin{aligned} &P_{\text{out}}^{\text{3D},\infty}\left(\gamma_{th},\mathbf{A}\right)\\ &=\iint\limits_{\mathbf{q}^T\mathbf{q}\geq\frac{d^2}{1.2}\lg\frac{P_{\max}A_e}{(4\pi d)^2\gamma_{th}}}\frac{1}{2\pi\left|\mathbf{D}\right|^{\frac{1}{2}}}\exp\left(-\frac{\mathbf{q}^T\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}}{2}\right)d\mathbf{q} \end{aligned} \tag{31}$$

其中$\mathbf{q}=(q_1,q_2)$。此外，式（31）可根据 λ_1 与λ_2 是否相等分为以下两种情形。

1) $\lambda_1<\lambda_2$：定义 $q=\lambda_1/\lambda_2\in(0,1)$ 和 $\omega=\lambda_1^2+\lambda_2^2$ [28]，且（31）可表示为 [29]

$$P_{\text{out}}^{\text{3D},\infty}\left(\gamma_{th},\mathbf{A}\right)=1-\int_0^{\sqrt{\frac{d^2}{1.2}\lg\frac{P_{\max}A_e}{(4\pi d)^2\gamma_{th}}}} h\left(x;q,\omega\right)\,dx \tag{32}$$

其中， $h(x;\ q,\omega)$ 是 Hoyt分布的概率密度函数，其累积分布函数（CDF）可计算为 [30]

$$\begin{aligned} H(x;q,\omega) &= \int_0^x h(x;q,\omega)\,dx \\ &= Q_1\left(\frac{x\sqrt{1-q^4}}{2q\sqrt{\omega}}\sqrt{\frac{1+q}{1-q}}, \frac{x\sqrt{1-q^4}}{2q\sqrt{\omega}}\sqrt{\frac{1-q}{1+q}}\right) \\ &\quad - Q_1\left(\frac{x\sqrt{1-q^4}}{2q\sqrt{\omega}}\sqrt{\frac{1-q}{1+q}}, \frac{x\sqrt{1-q^4}}{2q\sqrt{\omega}}\sqrt{\frac{1+q}{1-q}}\right) \end{aligned} \tag{33}$$

其中 $Q_1(a,\ b) = \int_b^{+\infty} x\exp\left(-\frac{x^2+a^2}{2}\right) I_0(ax)\,dx$ 表示一阶 Marcum Q-函数； $I_0(x)$ 表示第一类一阶修正贝塞尔函数。将（33）代入（32），可得

$$\begin{aligned} &P_{\text{out}}^{\text{3D},\infty}(\gamma_{th},\mathbf{A}) \\ &= 1 - Q_1\left(\frac{\sqrt{(1-q^4)\frac{d^2}{1.2}\lg\frac{P_{\max}A_e}{(4\pi d)^2\gamma_{th}}}}{2q\sqrt{\omega}}\sqrt{\frac{1+q}{1-q}}, \right. \\ &\qquad \left. \frac{\sqrt{(1-q^4)\frac{d^2}{1.2}\lg\frac{P_{\max}A_e}{(4\pi d)^2\gamma_{th}}}}{2q\sqrt{\omega}}\sqrt{\frac{1-q}{1+q}}\right) \\ &\quad + Q_1\left(\frac{\sqrt{(1-q^4)\frac{d^2}{1.2}\lg\frac{P_{\max}A_e}{(4\pi d)^2\gamma_{th}}}}{2q\sqrt{\omega}}\sqrt{\frac{1-q}{1+q}}, \right. \\ &\qquad \left. \frac{\sqrt{(1-q^4)\frac{d^2}{1.2}\lg\frac{P_{\max}A_e}{(4\pi d)^2\gamma_{th}}}}{2q\sqrt{\omega}}\sqrt{\frac{1+q}{1-q}}\right). \end{aligned} \tag{34}$$

2） $\lambda_1 = \lambda_2$：定义 $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$，我们可以将（31）计算为

$$\begin{aligned} &P_{\text{out}}^{\text{3D},\infty}(\gamma_{th},\mathbf{A}) \\ &= \iint\limits_{q_1^2+q_2^2 \geq \frac{d^2}{1.2}\lg\frac{P_{\max}A_e}{(4\pi d)^2\gamma_{th}}} \frac{1}{2\pi\lambda^2}\exp\left(-\frac{q_1^2+q_2^2}{2\lambda^2}\right) dq_1\,dq_2 \\ &= \exp\left(-\frac{d^2}{2.4\lambda^2}\lg\frac{P_{\max}A_e}{(4\pi d)^2\gamma_{th}}\right). \end{aligned} \tag{35}$$

由（35）可知，当 $\lambda_1 = \lambda_2$时，中断概率可表示为关于指数函数的紧凑闭式表达式，从而无需使用 Marcum Q-函数。这是因为（32）中的 Hoyt分布概率密度函数特化为瑞利分布概率密度函数，这与 [25] 中给出的表达式一致。

IV. 波束方向图的优化

由于我们已经推导出了中断概率的闭式表达式，因此可以进一步优化波束宽度，以降低中断概率。具体而言，我们优化波束方向图，以最小化表达式$P_{\text{out}}^{\text{2D}}(\gamma_{th},\theta_{\text{3dB}})$。

A. 二维最优波束方向图

假设发射功率 P_t 固定且旁瓣电平 a_m 可忽略不计，则 P_t 可计算为

$$\begin{aligned} P_t &= \int_{-\pi}^{\pi} P_{\max}G_\theta\,d\theta \\ &= \frac{P_{\max}\theta_{\text{3dB}}\sqrt{\pi}}{\sqrt{1.2\ln 10}}\left[1 - 2Q\left(\frac{\pi\sqrt{2.4\ln 10}}{\theta_{\text{3dB}}}\right)\right]. \end{aligned} \tag{36}$$

注意到 $Q\left(\frac{\pi\sqrt{2.4\ln 10}}{\theta_{\text{3dB}}}\right) \approx 0$当 $\theta_{\text{3dB}} < \pi$时，我们可以近似得到 [24]

$$P_t \approx P_{\max}\frac{\theta_{\text{3dB}}\sqrt{\pi}}{\sqrt{1.2\ln 10}} \tag{37}$$

and

$$P_{\max} \approx P_t\frac{\sqrt{1.2\ln 10}}{\theta_{\text{3dB}}\sqrt{\pi}}. \tag{38}$$

将（38）代入（22），通过最大化 k （22）中的

$$\max_{\theta_{\text{3dB}}} \theta_{\text{3dB}}^2 \lg\left(\frac{A_eP_t\sqrt{1.2\ln 10}}{\theta_{\text{3dB}}(4\pi d)^2\gamma_{th}\sqrt{\pi}}\right). \tag{39}$$

对（39）求导并令其等于零，可得（39）的最大值点

$$\theta_{\text{3dB}}^* = \frac{A_eP_t}{(4\pi d)^2\gamma_{th}}\sqrt{\frac{1.2\ln 10}{e\pi}}. \tag{40}$$

注意到（39）中目标函数的二阶导数为$2\lg\left(\frac{A_eP_t\sqrt{1.2\ln 10}}{4\pi d\,\theta_{\text{3dB}}()^2\gamma_{th}\sqrt{\pi}}\right) - \frac{3}{\ln 10} > 0$，并将（40）应用于（22），可得全局中断概率极小点

$$k^* = \tan\left(\frac{A_eP_t}{(4\pi d)^2\gamma_{th}}\sqrt{\frac{1}{2e\pi}}\right) \tag{41}$$

且（23）中的最低中断概率为

$$P_{\text{out}}^{\text{2D},*} = 2Q\left(\frac{d}{\sigma_x}\tan\left(\frac{A_eP_t}{(4\pi d)^2\gamma_{th}}\sqrt{\frac{1}{2e\pi}}\right)\right). \tag{42}$$

公式（40）给出了最优波束宽度关于发射功率的闭式表达式P_t、链路距离 d和中断阈值 γ_{th}。该表达式无需依赖数值优化或穷举搜索，即可直接求得最优波束配置。随着 d 增大，最优波束宽度相应减小，从而形成更窄的波束，有助于抵消路径损耗的增加，并沿预期方向更有效地集中能量。相反，当 P_t增大时，宜采用更宽的波束宽度，以覆盖更大的角度区域，涵盖更广的潜在用户分布范围，并增强系统抵御由定位误差或角度不确定性引起的波束失准的能力。方向性聚焦与角度覆盖之间的这种权衡，体现了定向通信系统设计中的基本考量，也凸显了公式（41）所推导表达式的实际价值。

值得注意的是，本研究针对近似中断概率进行优化

，即式（23），而 [24] 针对式（21中的精确中断概率进行优化。尽管目标函数有所不同，式（41）中的结论与 [24]报告的结论一致。

B. 三维最优波束图

我们从式（26）中的中断概率表达式出发，旨在通过波束图优化使其最小化。由于式（$\hat{x}_u, \hat{z}_u$）中的随机变量不服从标准高斯分布，波束图优化问题在解析上变得难以处理。因此，我们首先将它们转换为等价的标准高斯形式。

首先，对式（$[\hat{x}_u, \hat{z}_u]$）中协方差矩阵进行特征值分解，得到 $\mathbf{\Sigma'^{2}_{D}} = \mathbf{G\Omega G}^T$。然后，定义 $\mathbf{w} = \sqrt{\Omega^{-1}}\mathbf{G}^T[x,z]^T$，式（26）可改写为

$$P_{\text{out}}^{\text{3D},\infty}(\gamma_{th},\mathbf{A}) = \Pr\left(\mathbf{w}^T\sqrt{\mathbf{\Omega}}\mathbf{G}^T\mathbf{A}\mathbf{G}\sqrt{\mathbf{\Omega}}\mathbf{w} \geq \frac{d^2}{1.2}\lg\frac{P_{\max}A_e}{(4\pi d)^2\gamma_{th}}\right). \tag{43}$$

定义

$$\mathbf{B} = \sqrt{\mathbf{\Omega}}\mathbf{G}^T\mathbf{A}\mathbf{G}\sqrt{\mathbf{\Omega}}, \tag{44}$$

并对其进行特征值分解，得到

$$\mathbf{B} = \mathbf{Q}\mathbf{M}\mathbf{Q}^T \tag{45}$$

其中 $\mathbf{M} = \text{diag}(\xi_1,\xi_2)$ 是对角矩阵，ξ_1,ξ_2 是 $\mathbf{B}$的特征值。令 $\mathbf{v} = \mathbf{Q}^T\mathbf{w}$，式（43）可改写为

$$\begin{aligned} P_{\text{out}}^{\text{3D},\infty}(\gamma_{th},\mathbf{A}) &= \Pr\left(\mathbf{v}^T\mathbf{M}\mathbf{v} \geq \frac{d^2}{1.2}\lg\frac{P_{\max}A_e}{(4\pi d)^2\gamma_{th}}\right) \\ &= \Pr\left(\xi_1 v_1^2 + \xi_2 v_2^2 \geq \frac{d^2}{1.2}\lg\frac{P_{\max}A_e}{(4\pi d)^2\gamma_{th}}\right) \end{aligned} \tag{46}$$

其中 $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ 和 $v_1, v_2 \sim \mathcal{N}(0,1)$ 相互独立。如式（46）所示，式（26中的中断概率表达式被改写为标准高斯随机变量v_1, v_2的形式，从而显著简化了后续的解析推导。

由于 $P_{\max}$ 在式（46）中是 $\mathbf{A}$的函数，而 $\theta_{3\text{dB}}$ 和 $\phi_{3\text{dB}}$ 又取决于待优化的波束图参数，因此必须先明确计算$P_{\max}$。类似于式（36，三维场景中的发射功率可计算为

$$\begin{aligned} P_t &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{-\pi}^{\pi} P_{\max}G_{(\theta,\phi)}\,d\theta\,d\phi \\ &\approx \frac{P_{\max}\pi\theta_{3\text{dB}}\phi_{3\text{dB}}}{1.2\ln 10\sqrt{1-m^2\theta_{3\text{dB}}^2\phi_{3\text{dB}}^2}}, \end{aligned} \tag{47}$$

并且可以得到

$$P_{\max} \approx P_t\frac{1.2\ln 10\sqrt{1-m^2\theta_{3\text{dB}}^2\phi_{3\text{dB}}^2}}{\pi\theta_{3\text{dB}}\phi_{3\text{dB}}}. \tag{48}$$

将 (48) 代入 (46)，可计算得 (46) 为

$$P_{\text{out}}^{\text{3D},\infty}(\gamma_{th},\mathbf{A}) = \Pr\left(\xi_1 v_1^2 + \xi_2 v_2^2 \geq h(\theta_{3\text{dB}},\phi_{3\text{dB}},m)\right) \tag{49}$$

其中

$$h(\theta_{3\text{dB}},\phi_{3\text{dB}},m) = \frac{d^2}{1.2}\lg\frac{1.2\ln 10 A_e P_t\sqrt{1-m^2\theta_{3\text{dB}}^2\phi_{3\text{dB}}^2}}{\pi(4\pi d)^2\gamma_{th}\theta_{3\text{dB}}\phi_{3\text{dB}}}. \tag{50}$$

为计算 $P_{\text{out}}^{\text{3D},\infty}(\gamma_{th},\mathbf{A})$ 在式（49）中的值，定义 $v_1 = r\cos\alpha, v_2 = r\sin\alpha$，则式（49）可计算为

$$\begin{aligned} &P_{\text{out}}^{\text{3D},\infty}(\gamma_{th},\mathbf{A}) \\ &= \iint\limits_{\substack{\xi_1 v_1^2+\xi_2 v_2^2 \\ \geq h(\theta_{3\text{dB}},\phi_{3\text{dB}},m)}} \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{v_1^2+v_2^2}{2}\right)dv_1 dv_2 \\ &= \int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{\frac{h(\theta_{3\text{dB}},\phi_{3\text{dB}},m)}{\xi_1\cos^2\alpha+\xi_2\sin^2\alpha}}}^{+\infty}\frac{r}{2\pi}\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)dr d\alpha \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\left(-\frac{h(\theta_{3\text{dB}},\phi_{3\text{dB}},m)}{2(\xi_1\cos^2\alpha+\xi_2\sin^2\alpha)}\right)d\alpha. \end{aligned} \tag{51}$$

由于 $P_{\text{out}}^{\text{3D},\infty}$ 在式（51）中涉及多个参数，例如$\theta_{3\text{dB}}$, $\phi_{3\text{dB}}, m, \xi_1, \xi_2$，这使得解析计算变得复杂。为进一步简化式（51），需要计算$h(\theta_{3\text{dB}},\phi_{3\text{dB}},m)$ 在式（50）中的值。$\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的行列式为

$$|\mathbf{A}| = \frac{1-m^2\theta_{3\text{dB}}^2\phi_{3\text{dB}}^2}{\theta_{3\text{dB}}^2\phi_{3\text{dB}}^2}, |\mathbf{B}| = \xi_1\xi_2. \tag{52}$$

根据（44），可得

$$|\mathbf{B}| = |\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{\Omega}| = |\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{\Sigma'^{2D}}|. \tag{53}$$

将（52）和（53）代入（50），即可计算h（$\theta_{3\text{dB}}$，$\phi_{3\text{dB}}$，m）如下

$$\begin{aligned} h(\xi_1,\xi_2) &= \frac{d^2}{1.2}\lg\frac{1.2\ln 10 A_e P_t|\mathbf{A}|^{\frac{1}{2}}}{\pi(4\pi d)^2\gamma_{th}} \\ &= \frac{d^2}{1.2}\lg\frac{1.2\ln 10 A_e P_t\sqrt{\xi_1\xi_2}}{\pi(4\pi d)^2\gamma_{th}|\mathbf{\Sigma'^{2D}}|^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \tag{54}$$

通过上述推导，h（$\theta_{3\text{dB}}$，$\phi_{3\text{dB}}$，m）在（50）中可等价地改写为（$\xi_1\xi_2$在（54）中的乘积函数。因此，（51）中的中断概率仅取决于 ξ_1，ξ_2。

为计算最优波束方向图，我们首先考虑一个特殊情形，其中 $\xi_1\xi_2 = K$ 为常数。因此，我们需要求解由（51）导出的以下优化问题：

$$\begin{aligned} &P_{\text{out}}^{\text{3D},\infty}(\gamma_{th},\mathbf{A}) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\left(-\frac{h}{2\left(\xi\cos^2\alpha+\frac{K}{\xi}\sin^2\alpha\right)}\right)d\alpha \end{aligned} \tag{55}$$

其中，我们用 ξ 表示 ξ_1，且在此情形下 $h = h(\xi_1,\xi_2)$ 为常数。

可以观察到，(55) 的结构适用于詹森不等式。基于 (55)，我们定义

$$g(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\alpha}{\xi\cos^2\alpha+\frac{K}{\xi}\sin^2\alpha}, \tag{56}$$

且如附录 A所示，对于任意 $g(\xi) = 1/\sqrt{K}$ ，其保持不变 ξ。根据詹森不等式，我们可以将 (55) 计算为

$$\begin{aligned} P_{\text{out}}^{\text{3D},\infty}(\gamma_{th},\mathbf{A}) &= \mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{h}{2\left(\xi\cos^2\alpha+\frac{K}{\xi}\sin^2\alpha\right)}\right)\right] \\ &\geq \exp\left(-\frac{h}{2}\cdot\mathbb{E}\left[\frac{1}{\xi\cos^2\alpha+\frac{K}{\xi}\sin^2\alpha}\right]\right) \\ &= \exp\left(-\frac{h}{2}\cdot g(\xi)\right) = \exp\left(-\frac{h}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{K}}\right) \end{aligned} \tag{57}$$

当且仅当 $\xi\cos^2\alpha+\frac{K}{\xi}\sin^2\alpha$ 为常数时等号成立，这要求 $\xi=\frac{K}{\xi}$，此外，我们有最优解 $\xi^*=\xi_1=\xi_2=\sqrt{K}$。

方程（57）表明， $P^{\text{3D},\infty}_{\text{out}}(\gamma_{th},\mathbf{A})$ 当且仅当 $\xi_1=\xi_2$ 在约束 $\xi_1\xi_2=K$下时取得其最小值。换言之，任何不满足 $\xi_1=\xi_2$ 的点都不是该约束下的极小值点，因此也不可能是全局极小值点。因此， $P^{\text{3D},\infty}_{\text{out}}(\gamma_{th},\mathbf{A})$ 在 $\xi_1=\xi_2$时取得最小值。将 $\xi_1=\xi_2$ 代入$\mathbf{M}$ （45）中的$\mathbf{B}^*$，可计算得到最优值

$$\mathbf{B}^*=\mathbf{Q}\begin{bmatrix}\xi^* & \\ & \xi^*\end{bmatrix}\mathbf{Q}^T=\xi^*\mathbf{E} \tag{58}$$

其中$\mathbf{E}$ 为单位矩阵。将（58）代入（44），可计算得到最优 $\mathbf{A}^*$ 为

$$\mathbf{A}^*=\mathbf{G}\sqrt{\mathbf{\Omega}^{-1}}\mathbf{B}^*\sqrt{\mathbf{\Omega}^{-1}}\mathbf{G}^T=\xi^*\mathbf{G}\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{G}^T=\xi^*\left(\mathbf{\Sigma}'^{\text{2D}}\right)^{-1}. \tag{59}$$

方程（59）表明，为了使中断概率最小，波束长轴和短轴的比例及其旋转角应与定位误差相匹配。这一观察颇具启发性，因为只有当波束形状与定位误差的特性相匹配时，波束才能最大程度地覆盖用户分布概率最高的区域。

接下来，我们需要计算ξ^*的最优值。将（54）代入（57），可将方程（57）重写为关于 ξ 的函数：

$$\begin{aligned} P_{\text{out}}^{\text{3D},\infty}(\xi) &= \exp\left(-\frac{h(\xi)}{2\xi}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{d^2}{2.4\xi}\lg\frac{1.2\ln 10A_eP_t\xi}{\pi(4\pi d)^2\gamma_{th}\left|\mathbf{\Sigma}'^{\text{2D}}\right|^{\frac{1}{2}}}\right). \end{aligned} \tag{60}$$

对60）关于 ξ 求导并令其为零，可得到（60）的最优解：

$$\xi^*=\frac{e\pi(4\pi d)^2\gamma_{th}\left|\mathbf{\Sigma}'^{\text{2D}}\right|^{\frac{1}{2}}}{1.2\ln 10A_eP_t}. \tag{61}$$

根据（12）、（28）、（59）和（61），三维场景中的最优波束方向图可计算为

$$\begin{aligned} \theta^*_{\text{3dB}} &= \sqrt{\frac{1.2\ln 10A_eP_t\left|\mathbf{\Sigma}'^{\text{2D}}\right|^{\frac{1}{2}}}{e\pi(4\pi d)^2\gamma_{th}\mathbf{\Sigma}^{\text{3D}}(3,3)}}, \\ \phi^*_{\text{3dB}} &= \sqrt{\frac{1.2\ln 10A_eP_t\left|\mathbf{\Sigma}'^{\text{2D}}\right|^{\frac{1}{2}}}{e\pi(4\pi d)^2\gamma_{th}\mathbf{\Sigma}^{\text{3D}}(1,1)}}, \\ m^* &= \frac{e\pi(4\pi d)^2\gamma_{th}\mathbf{\Sigma}^{\text{3D}}(1,3)}{1.2\ln 10A_eP_t\left|\mathbf{\Sigma}'^{\text{2D}}\right|^{\frac{1}{2}}}, \end{aligned} \tag{62}$$

而（60）中的最低中断概率为

$$P^{\text{3D},*}_{\text{out}}=\exp\left(-\frac{A_eP_t}{2e\pi(4\pi)^2\gamma_{th}\left|\mathbf{\Sigma}'^{\text{2D}}\right|^{\frac{1}{2}}}\right). \tag{63}$$

值得注意的是，由于 m 本质上是波束旋转角 ψ 的函数，因此可用 ψ 对其进行参数化； ψ 表示波束长轴与坐标轴正方向之间的较小夹角。由于 A 可进行特征值分解，得到

$$\mathbf{A}=\mathbf{U}\mathbf{Y}\mathbf{U}^T=\begin{bmatrix}\cos\psi & -\sin\psi\\ \sin\psi & \cos\psi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\zeta_1 & 0\\ 0 & \zeta_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\psi & \sin\psi\\ -\sin\psi & \cos\psi\end{bmatrix}, \tag{64}$$

结合（12）、（62）和（64），可计算得 ψ^*：

$$\psi^*=\frac{1}{2}\arctan\frac{2\mathbf{\Sigma}^{\text{3D}}(1,3)}{\mathbf{\Sigma}^{\text{3D}}(1,1)-\mathbf{\Sigma}^{\text{3D}}(3,3)}. \tag{65}$$

根据（65）中推导出的表达式，下面分析两种特殊情况:

1）情况 1: $\mathbf{\Sigma}^{\text{3D}}(1,1)=\mathbf{\Sigma}^{\text{3D}}(3,3)$：在这种情况下，定位误差在两个方向上的方差相同，误差分布的等高线呈圆形。因此，波束方向图也呈圆形，其旋转角ψ 可以任意选取。还需注意，根据（62），在此情况下， θ_{3dB}与 ϕ_{3dB} 重合。

2) 情况 2: $\psi=\pm\pi/4$: 在（65）中，旋转角 ψ 无法达到 $\pm\pi/4$，尽管这种配置在实际实现中可能出现。在这种情况下，定位误差的等高线在 x和 y-轴上的截距相等，这意味着 $\theta_{\text{3dB}}=\phi_{\text{3dB}}$。这种情况实际上已包含在情况 1 中。

基于（40），式（62）进一步将用户定位误差的统计分布纳入波束设计框架，从而扩展了分析。具体而言，该式推导出一个闭式表达式，用于确定考虑定位不确定性所引入角度离散的最优波束宽度。当用户分布的方差较大时，用户更可能分散在较大的角度范围内。在这种情况下，需要沿相应方向采用更宽的波束，以维持足够的覆盖，并确保用户概率质量中的显著部分落在波束方向图的主瓣内。相反，当用户分布的方差较小，表明定位精度较高时，波束可以聚焦得更紧。较窄的波束宽度能增强信号集中度，从而提高接收信号强度，并减少向非目标方向的功率泄漏。通过这种方式，方向自适应策略能够平衡覆盖与信号

增益，并根据用户的空间不确定性进行调整，从而在用户位置信息不完美的情况下实现稳健的波束成形。

V. 近似误差的渐近分析

本节研究二维情况中（21）与（23）之间的近似误差，以及三维情况下（20）与（26）之间的近似误差，并分析其渐近性能。

A. 二维近似误差的渐近分析

定义 $\varepsilon^{\mathrm{2D}}$ 为（21）中的精确中断概率与（23）中的近似中断概率之间的误差。根据全概率公式，该误差可表示为

$$\begin{aligned}\varepsilon^{\mathrm{2D}} &= P_{\mathrm{out}}^{\mathrm{2D}}\left(\gamma_{th},\theta_{\mathrm{3dB}}\right)-P_{\mathrm{out}}^{\mathrm{2D},\infty}\left(\gamma_{th},\theta_{\mathrm{3dB}}\right)\\ &=\Pr\left(|\hat{x}_u|\geq k\hat{y}_u\right)-\Pr\left(|\hat{x}_u|\geq kd\right)\\ &=\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{\Pr\left(|\hat{x}_u|\geq ky\mid \hat{y}_u=y\right)}_{p(y)}f_{\hat{y}_u}\left(y\right)dy\\ &\quad-\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{\Pr\left(|\hat{x}_u|\geq kd\mid \hat{y}_u=y\right)}_{q(y)}f_{\hat{y}_u}\left(y\right)dy\\ &=\mathbb{E}\left[p\left(\hat{y}_u\right)\right]-\mathbb{E}\left[q\left(\hat{y}_u\right)\right]\end{aligned}\tag{66}$$

其中，$f_{\hat{y}_u}(y)$ 是 $\hat{y}_u$ 的边缘概率密度函数，$\mathbb{E}[\cdot]$ 表示该函数的期望。为计算 $\mathbb{E}[p(\hat{y}_u)]$ 和 $\mathbb{E}[q(\hat{y}_u)]$,，我们对 $p(\hat{y}_u)$ 和 $q(\hat{y}_u)$ 在 $\hat{y}_u=d$ 附近进行泰勒级数展开，得到

$$\begin{aligned}p\left(\hat{y}_u\right)=p(d)+\left.\frac{dp\left(y\right)}{dy}\right|_{y=d}\cdot\left(\hat{y}_u-d\right)+\frac{1}{2}\cdot\left.\frac{d^2p\left(y\right)}{dy^2}\right|_{y=d}\\ \times\left(\hat{y}_u-d\right)^2+o\left(\left(\hat{y}_u-d\right)^2\right),\hat{y}_u-d\to 0\end{aligned}\tag{67}$$

and

$$\begin{aligned}q\left(\hat{y}_u\right)=q(d)+\left.\frac{dq\left(y\right)}{dy}\right|_{y=d}\cdot\left(\hat{y}_u-d\right)+\frac{1}{2}\cdot\left.\frac{d^2q\left(y\right)}{dy^2}\right|_{y=d}\\ \times\left(\hat{y}_u-d\right)^2+o\left(\left(\hat{y}_u-d\right)^2\right),\hat{y}_u-d\to 0.\end{aligned}\tag{68}$$

对两边取期望（67）和（68），$\mathbb{E}[p(\hat{y}_u)]$ 和 $\mathbb{E}[q(\hat{y}_u)]$ 可计算为

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[p\left(\hat{y}_u\right)\right]&=p(d)+\left.\frac{dp\left(y\right)}{dy}\right|_{y=d}\cdot\mathbb{E}\left[\left(\hat{y}_u-d\right)\right]\\ &\quad+\frac{1}{2}\cdot\left.\frac{d^2p\left(y\right)}{dy^2}\right|_{y=d}\cdot\mathbb{E}\left[\left(\hat{y}_u-d\right)^2\right]+o\left(\mathbb{E}\left[\left(\hat{y}_u-d\right)^2\right]\right)\\ &=p(d)+\frac{1}{2}\cdot\left.\frac{d^2p\left(y\right)}{dy^2}\right|_{y=d}\cdot\sigma_y^2+o\left(\sigma_y^2\right),\sigma_y\to 0\end{aligned}\tag{69}$$

and

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[q\left(\hat{y}_u\right)\right]&=q(d)+\left.\frac{dq\left(y\right)}{dy}\right|_{y=d}\cdot\mathbb{E}\left[\left(\hat{y}_u-d\right)\right]\\ &\quad+\frac{1}{2}\cdot\left.\frac{d^2q\left(y\right)}{dy^2}\right|_{y=d}\cdot\mathbb{E}\left[\left(\hat{y}_u-d\right)^2\right]+o\left(\mathbb{E}\left[\left(\hat{y}_u-d\right)^2\right]\right)\\ &=q(d)+\frac{1}{2}\cdot\left.\frac{d^2q\left(y\right)}{dy^2}\right|_{y=d}\cdot\sigma_y^2+o\left(\sigma_y^2\right),\sigma_y\to 0.\end{aligned}\tag{70}$$

由于 $p(d)=q(d)$，将（69）和（70）代入（66），ε 可计算为

$$\begin{aligned}\varepsilon^{\mathrm{2D}}&=\mathbb{E}\left[p\left(\hat{y}_u\right)\right]-\mathbb{E}\left[q\left(\hat{y}_u\right)\right]\\ &=\frac{\sigma_y^2}{2}\left(\left.\frac{d^2p\left(y\right)}{dy^2}\right|_{y=d}-\left.\frac{d^2q\left(y\right)}{dy^2}\right|_{y=d}\right)+o\left(\sigma_y^2\right).\end{aligned}\tag{71}$$

为推导（71）中的二阶导数，必须先推导 $p(y)$ 和 $q(y)$ 的表达式。由于 $p(y)$ 和 $q(y)$定义为条件概率，因此需要求得条件概率密度函数。根据二元高斯分布的条件期望和方差公式，给定 $\hat{x}_u$ 时 $\hat{y}_u=y$ 的条件概率密度函数为

$$f_{\hat{x}_u|\hat{y}_u}\left(x\mid y\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{x|y}}\exp\left(-\frac{\left(x-\mu_{x|y}\right)^2}{2\sigma_{x|y}^2}\right)\tag{72}$$

其中，$\mu_{x|y}=\frac{\rho\sigma_x}{\sigma_y}(y-d)$ 和 $\sigma_{x|y}^2=\sigma_x^2\left(1-\rho^2\right)$ 分别为条件期望和方差，ρ 表示 $\hat{x}_u$ 与 $\hat{y}_u$ 之间的相关系数。根据 $\mu_{x|y}$ 和 $\sigma_{x|y}^2$，我们可以计算出 $p(y)$ 和 $q(y)$，如下所示：

$$\begin{aligned}p\left(y\right)&=\Pr\left(|\hat{x}_u|\geq ky\mid\hat{y}_u=y\right)\\ &=\Pr\left(\hat{x}_u\geq ky\mid\hat{y}_u=y\right)+\Pr\left(\hat{x}_u<-ky\mid\hat{y}_u=y\right)\\ &=Q\left(\frac{ky-\mu_{x|y}}{\sigma_{x|y}}\right)+1-Q\left(\frac{-ky-\mu_{x|y}}{\sigma_{x|y}}\right)\\ &=Q\left(\frac{ky-\frac{\rho\sigma_x}{\sigma_y}\left(y-d\right)}{\sigma_x\sqrt{1-\rho^2}}\right)+Q\left(\frac{ky+\frac{\rho\sigma_x}{\sigma_y}\left(y-d\right)}{\sigma_x\sqrt{1-\rho^2}}\right)\end{aligned}\tag{73}$$

and

$$\begin{aligned}q\left(y\right)&=\Pr\left(|\hat{x}_u|\geq kd\mid\hat{y}_u=y\right)\\ &=\Pr\left(\hat{x}_u\geq kd\mid\hat{y}_u=y\right)+\Pr\left(\hat{x}_u<-kd\mid\hat{y}_u=y\right)\\ &=Q\left(\frac{kd-\mu_{x|y}}{\sigma_{x|y}}\right)+1-Q\left(\frac{-kd-\mu_{x|y}}{\sigma_{x|y}}\right)\\ &=Q\left(\frac{kd-\frac{\rho\sigma_x}{\sigma_y}\left(y-d\right)}{\sigma_x\sqrt{1-\rho^2}}\right)+Q\left(\frac{kd+\frac{\rho\sigma_x}{\sigma_y}\left(y-d\right)}{\sigma_x\sqrt{1-\rho^2}}\right).\end{aligned}\tag{74}$$

对 $p(\hat{y}_u)$ 和 $q(\hat{y}_u)$ 在（73）和（74）中求二阶导数，并将其代入（71），ε 可计算为

$$\varepsilon^{\mathrm{2D}}\approx\frac{k^3d\sigma_y^2}{\sqrt{2\pi}\sigma_x^3\left(1-\rho^2\right)^{3/2}}\exp\left(-\frac{k^2d^2}{2\sigma_x^2\left(1-\rho^2\right)}\right).\tag{75}$$

$\varepsilon^{\mathrm{2D}}$ 的渐近行为可分两种情况进行分析。

1）情况 1：$d\to+\infty$：在此情况下，（75）中的指数项满足

$$\lim_{d\to+\infty}\exp\left(-\frac{k^2d^2}{2\sigma_x^2\left(1-\rho^2\right)}\right)=0.\tag{76}$$

由于指数项的衰减速度远快于式（75）中的线性项，因此我们有

$$\lim_{d\to+\infty}\varepsilon^{\mathrm{2D}}=0.\tag{77}$$

2) 情况 2：$\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\Sigma}^{\mathrm{2D}}\right)\to 0$：这种情况等价于 $\sigma_x\to 0$ 和 $\sigma_y\to 0$，因此我们有

$$\lim_{\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{\mathrm{2D}})\to 0}\exp\left(-\frac{k^2d^2}{2\sigma_x^2\left(1-\rho^2\right)}\right)=0. \tag{78}$$

基于与情况 1 相同的理由，我们可以得出结论：

$$\lim_{\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{\mathrm{2D}})\to 0}\varepsilon^{\mathrm{2D}}=0. \tag{79}$$

情况 1 对应于发射器和接收机相距足够远的情形，而情况 2 对应于定位系统足够准确的情形。

B. 三维近似误差的渐近分析

将（20）中的精确中断概率与（26）中的近似中断概率之间的误差定义为

$$\begin{aligned}\varepsilon^{\mathrm{3D}}&=P_{\mathrm{out}}^{\mathrm{3D}}\left(\gamma_{th},\mathbf{A}\right)-P_{\mathrm{out}}^{\mathrm{3D},\infty}\left(\gamma_{th},\mathbf{A}\right)\\&=\Pr\left(\left[\theta,\phi\right]\mathbf{A}\left[\theta,\phi\right]^T\geq\frac{1}{1.2}\lg\frac{P_{\max}A_e}{\left(4\pi d\right)^2\gamma_{th}}\right)\\&\quad-\Pr\left(\left[\hat{x}_u,\hat{z}_u\right]\mathbf{A}\left[\hat{x}_u,\hat{z}_u\right]^T\geq\frac{d^2}{1.2}\lg\frac{P_{\max}A_e}{\left(4\pi d\right)^2\gamma_{th}}\right)\\&=\iiint\limits_{\substack{[\theta,\phi]\mathbf{A}[\theta,\phi]^T\\\geq\frac{1}{1.2}\lg\frac{P_{\max}A_e}{(4\pi d)^2\gamma_{th}}}}f_{\hat{x}_u,\hat{y}_u,\hat{z}_u}\left(x,y,z\right)dxdydz\\&\quad-\iiint\limits_{\substack{\frac{1}{d^2}[x,z]\mathbf{A}[x,z]^T\\\geq\frac{1}{1.2}\lg\frac{P_{\max}A_e}{(4\pi d)^2\gamma_{th}}}}f_{\hat{x}_u,\hat{y}_u,\hat{z}_u}\left(x,y,z\right)dxdydz.\end{aligned} \tag{80}$$

（80）的渐近性能可分两种情况进行分析。

1）情况 1：$d\to+\infty$：在这种情况下，不等式右侧，即$1\,1_{\circ}\,2\lg\frac{P_{\max}A_e}{(4\pi d)^2\gamma_{th}}$在（80）中趋于 $-\infty$，而左侧，即 $[\theta,\phi]\,\mathbf{A}\,[\theta,\phi]^T$和 $\frac{1}{d^2}[x,z]\mathbf{A}\,[x,z]^T$均为正。因此，这两个不等式始终成立，两个积分区域也就扩展至整个三维欧几里得空间 $\mathbb{R}^3$，从而得到

$$\begin{aligned}\lim_{d\to+\infty}\varepsilon^{\mathrm{3D}}&=\iiint_{\mathbb{R}^3}f_{\hat{x}_u,\hat{y}_u,\hat{z}_u}\left(x,y,z\right)dxdydz\\&\quad-\iiint_{\mathbb{R}^3}f_{\hat{x}_u,\hat{y}_u,\hat{z}_u}\left(x,y,z\right)dxdydz\\&=0.\end{aligned} \tag{81}$$

2) 情况 2：$\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\Sigma}^{\mathrm{3D}}\right)\to 0$：当 $\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\Sigma}^{\mathrm{3D}}\right)\to 0$ 时，概率密度函数 $f_{\hat{x}_u,\ \hat{y}_u,\ \hat{z}_u}(x,y,z)$ 的表现类似于狄拉克δ分布 $\delta(x,y-d,z)$。对于边界 $\partial\mathcal{D}$ 不包含均值点 $(0,d,0)$ 的任意区域 $\mathcal{D}\subseteq\mathbb{R}^3$，有 [31]

$$\lim_{\boldsymbol{\Sigma}^{\mathrm{3D}}\to 0}\iiint_{\mathcal{D}}f_{\hat{x}_u,\hat{y}_u,\hat{z}_u}(x,y,z)dxdydz=\begin{cases}1, & (0,d,0)\in\mathcal{D},\\0, & (0,d,0)\notin\mathcal{D}.\end{cases} \tag{82}$$

由于 θ、ϕ 是$\hat{}x_u$、$\hat{}y_u$、$\hat{}z_u$的函数，根据（14）和（15），在均值点$(0,\ d,\ 0)$处对它们求值，得到$[\theta,\phi]\,\mathbf{A}\,[\theta,\phi]^T=\frac{1}{d^2}[x,z]\,\mathbf{A}\,[x,z]^T=0$。因此，若$(0,\ d,\ 0)$属于（80）中某个积分区域的点，也必然属于另一个积分区域。这样，（80）中的两个积分将同时取值为 0 或 1，因此

$$\begin{aligned}\lim_{\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{\mathrm{3D}})\to 0}\varepsilon^{\mathrm{3D}}&=\iiint\limits_{\substack{[\theta,\phi]\mathbf{A}[\theta,\phi]^T\\\geq\frac{1}{1.2}\lg\frac{P_{\max}A_e}{(4\pi d)^2\gamma_{th}}}}f_{\hat{x}_u,\hat{y}_u,\hat{z}_u}\left(x,y,z\right)dxdydz\\&\quad-\iiint\limits_{\substack{\frac{1}{d^2}[x,z]\mathbf{A}[x,z]^T\\\geq\frac{1}{1.2}\lg\frac{P_{\max}A_e}{(4\pi d)^2\gamma_{th}}}}f_{\hat{x}_u,\hat{y}_u,\hat{z}_u}\left(x,y,z\right)dxdydz.\\&=0.\end{aligned} \tag{83}$$

与二维场景类似，情况 1 和情况 2 分别对应于链路距离趋于无穷大以及定位精度变得极高的情形。

VI. 仿真结果

本节将展示在各种参数设置下，基于定位信息的二维和三维波束成形系统的中断概率仿真结果。

图 7 展示了定位误差变化时二维波束成形系统的中断概率随距离d 的变化。可以观察到，理论中断概率与仿真中断概率高度吻合，验证了解析推导的准确性。结果表明，距离较小或较大时，中断概率均较低，而在中等距离处达到峰值。这是因为在距离较大时，严重的路径损耗会导致接收信号功率不足；而在距离较短时，固定波束宽度对角度扩展的覆盖不足，则会导致失配增加。此外，定位误差越小，中断概率越低；中断概率也受方向角影响。值得注意的是，如第23节所述，当 d 较小或 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{\mathrm{2D}})$ 较大时，式中的近似（V-A）预计会失去准确性。然而，图 7 中的紫色曲线（对应极大的定位误差）及其放大视图表明，即使在 d 较小且定位误差较大的情况下，理论曲线与仿真曲线仍然高度重合，这与第 V-A节的二维渐近分析一致。

图8 展示了不同发射功率 P_t下，波束宽度和定位误差对中断概率的影响。可以观察到，中断概率始终随着发射功率的增加而降低。对于给定的定位误差，最优波束宽度在整个发射功率范围内都能实现最低的中断概率，并且始终优于非最优波束宽度配置。例如，在定位误差由 $\sigma_1=1.5$，$\sigma_2=1.0$表征的情况下，最优波束宽度对应的中断概率曲线在某些发射功率下与固定波束宽度为 0.1 rad 和 0.15 rad 的曲线相切，这表明它们在切点处具有相同的中断概率。然而，在这些特定点之外，最优波束宽度始终能实现更低的中断概率。这是因为固定波束宽度

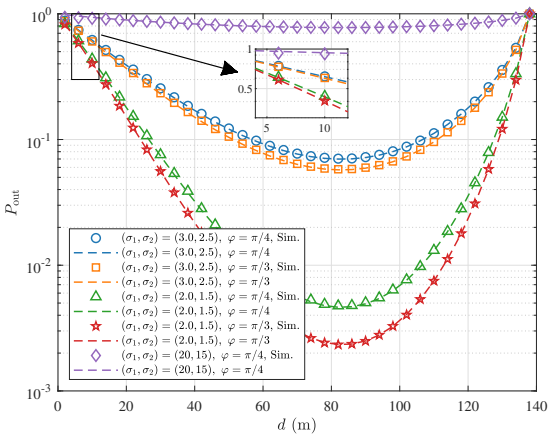


图 7. 二维波束成形系统的中断概率随距离 d的变化关系。 $P_t = 25$ $A_e = 1$ ^{2} $a_m = 10^{-4}$ $\gamma_{th} = 10^{-7}$ $\theta_{3\text{dB}} =$ dB; cm; ; W; rad。 0.1

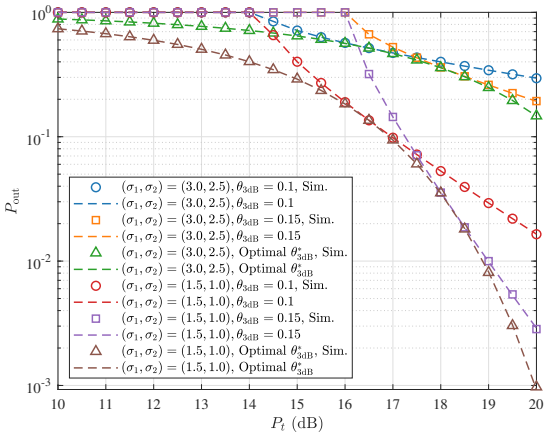


图 8. 二维波束成形系统的中断概率随发射功率 P_t 的变化关系。 $d = 40$ m; A_{th}=1 cm^2; $a_m = 10^{-4}$; 10^{-7} W; $\varphi = \pi/3$ rad。

在切点处与式（40）的最优值一致，因此能够实现最低的中断概率。

图 9 展示了在方向角固定的情况下，不同距离和定位误差条件下中断概率随$\theta_{3\text{dB}}$ 的变化关系。图中的竖线表示根据（40）计算得出的最优，它们与中断概率曲线的最小值精准重合，从而证实了理论结果的正确性。同时，这也揭示了一项重要结论：在波束方向固定时，中断概率仅由传输距离决定，与定位误差无关。这不仅与式（40）中的分析结果一致，也为最优波束宽度设计提供了有价值的指导。

随后，我们研究中断概率与距离 d 在三维场景下各种定位误差模式中的关系，并在图10中加以展示。与二维场景一致，三维情形下理论与仿真中断概率之间的高度吻合验证了解析表达式的准确性。中断概率随距离的变化呈现出典型的谷形趋势，其特征为先下降至最小值

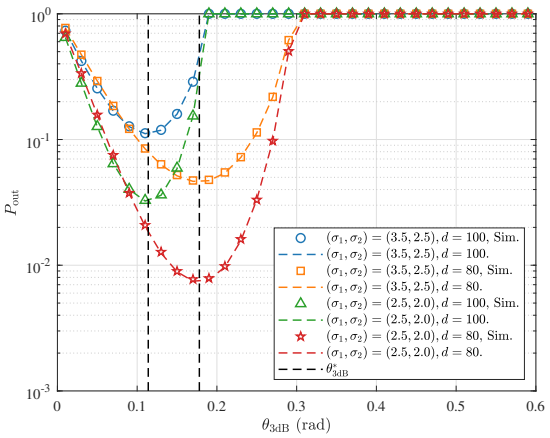


图 9. 二维波束成形系统中，中断概率随 3 dB波束宽度 $\theta_{3\text{dB}}$ 的变化关系。 $P_t = 25$ dB; $A_e = 1$ cm^2; $a_m = 10^{-4}$; $\gamma_{th} =$ 10^{-7} W; $\varphi = \pi/4$ rad。

随后在更大距离处单调上升。这种非单调行为源于与二维情形相同的物理机制：在较远距离处，严重的路径损耗主导信号劣化；而在近距离处，由于固定波束宽度相对于定位误差的角度覆盖不足所导致的波束失准成为主要损伤。此外，定位误差和方向角均显著影响中断概率，证实了它们在系统优化中的关键作用。与二维情形类似，即使当 d 较小且$\text{tr}\left(\boldsymbol{\Sigma}^{3\text{D}}\right)$ 极大时，定位误差较大的紫色曲线以及放大视图均表明理论曲线与仿真曲线仍高度吻合，这与第V-B节中的三维渐近分析一致。

图11 展示了不同定位误差和波束旋转角下，中断概率随发射功率 P_t 的变化关系。尽管总体趋势与二维情形相似，但对应于非最优波束宽度的中断概率曲线始终高于理论最优波束宽度对应的曲线。这是因为在三维情况下，最优中断性能取决于 $\theta_{3\text{dB}}$、 $\phi_{3\text{dB}}$ 和 ψ的共同作用。当 $\theta_{3\text{dB}}$、$\phi_{3\text{dB}}$ 或 ψ中的任意一项固定时，整个发射功率范围内都无法完全满足联合最优条件，因此曲线不会呈现相切关系。

图12 刻画了三维场景中，在方向角固定的情况下，不同定位误差和距离对应的 3 dB波束宽度 $\theta_{3\text{dB}}$ 与中断概率之间的关系。尽管二维场景中的最优波束宽度与定位误差无关，但在三维场景中情况并非如此，定位误差的空间特性会显著影响最优波束宽度。四条曲线对应不同的参数组，每组参数在定位误差或距离上有所不同，因此所有情形下的最优波束宽度也各不相同。例如，绿色和蓝色曲线对应相同的 $\boldsymbol{\Sigma}^{3\text{D}}$ (3,3)，这意味着最优波束宽度主要取决于$\boldsymbol{\Sigma}'^{2}$D的行列式。由于绿色曲线的行列式小于蓝色曲线，因此其对应的最优波束宽度也较小。其他两条曲线也呈现出相同的依赖关系，

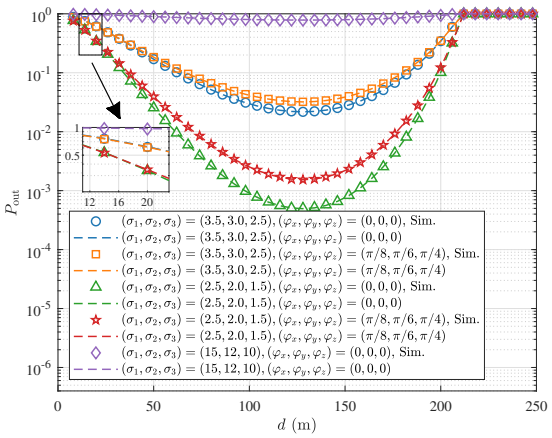


图10. 三维波束成形系统的中断概率与距离 d 的关系。 $P_t=20$ dB； $A_e=1$ cm^2; $a_m=10^{-4}$； $\gamma_{th}=10^{-7}$ W；$\theta_{3\text{dB}}=0.1$ rad； $\phi_{3\text{dB}}=0.1$ rad； $\psi=0.5$ rad。

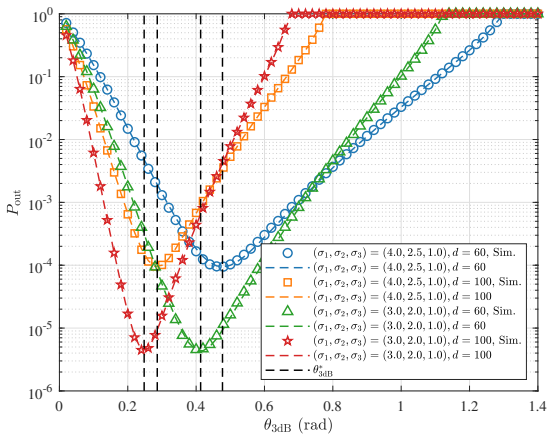


图12. 三维波束成形系统的中断概率随 3 dB波束宽度 $\theta_{3\text{dB}}$ 的变化。 $P_t=20$ dB； $A_e=1$ cm^2； $a_m=10^{-4}$； $\gamma_{th}=10^{-7}$ W；最优 $\phi^*_{3\text{dB}}$；最优 ψ^*；$(\varphi_x,\varphi_y,\varphi_z)$ $(0,0,0)$。

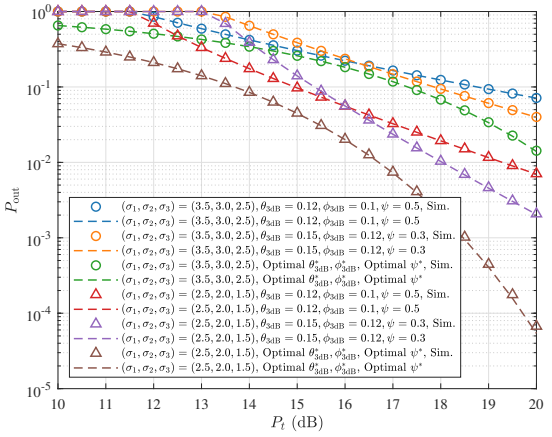


图11. 三维波束成形系统的中断概率与发射功率 P_t 的关系。 $d=80$ m； $A_e=1$ cm^2; $a_m=10^{-4}$; 10^{-7} W；$(\varphi_x,\varphi_y,\varphi_z)$ $(\pi/3,\pi/6,\pi/4)$。

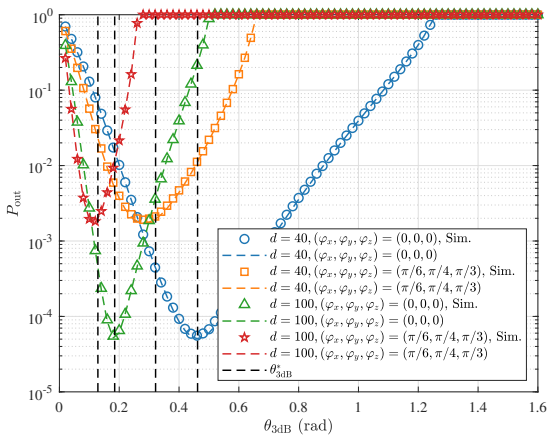


图13. 三维波束成形系统的中断概率随 3 dB波束宽度 $\theta_{3\text{dB}}$ 的变化。 $P_t=20$ dB； $A_e=1$ cm^2； $a_m=10^{-4}$; 10^{-7} W；最优 $\phi^*_{3\text{dB}}$；最优 ψ^*；$(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$ $(2.5\ 2.0\ 1.5)$。

这进一步表明，波束宽度受定位误差的空间分布影响。这一观察结果与式（62）中给出的解析表达式完全一致。

从(62)可以看出，最优波束宽度取决于定位误差和方向角。因此，图13 比较了$\theta_{3\text{dB}}$ 在定位误差固定时，不同方向角下的中断概率和3 dB波束宽度。可以看出，在其他参数均保持不变的情况下，旋转角的变化会影响中断概率和最优波束宽度，这也与(62)中的结果一致。值得注意的是，由于 $\phi_{3\text{dB}}$ 呈现出与 $\theta_{3\text{dB}}$相同的趋势，因此为避免重复，此处不再展示相应的仿真结果。

图 14 展示了中断概率随波束旋转角 ψ 变化的情况，其中定位误差和方向角各不相同。图中的结果印证了（65）中的结论：波束的主轴必须与定位误差的主轴对齐，才能覆盖用户分布概率最高的区域。此外，最优波束旋转角取决于定位误差的大小。

例如，当定位误差的方向角为零时，相应的误差等高线呈椭圆形，其主轴与坐标轴重合，因此无需旋转波束，如图中的蓝色曲线和绿色曲线所示。当定位误差的方向角变化时，应相应调整波束旋转角，以保持最佳对准并维持最佳链路质量。

VII. 结论

我们研究了定位辅助波束成形系统，并分析了其在二维和三维场景下的性能。基于定位误差分布、链路距离、传输功率和波束宽度，推导出了中断概率的闭式渐近表达式。此外，我们还量化了新渐近中断概率表达式的收敛速度。进一步地，我们还推导出了最优二维和三维波束方向图表达式，为融合定位信息的实际波束成形系统设计奠定了理论基础。

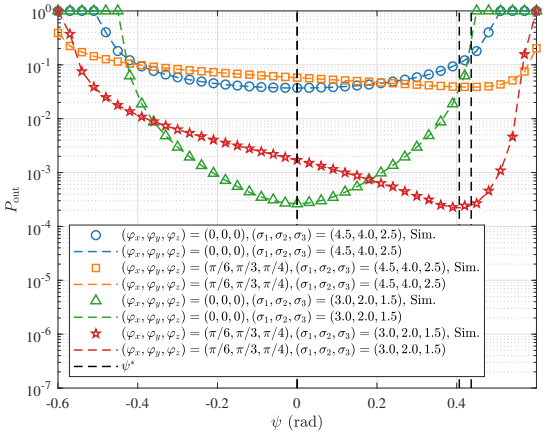


图14. 三维波束成形系统中中断概率随波束旋转角 ψ 的变化关系。 $d=120$ m; $P_t=20$ dB; $A_e=1$ cm^2; $a_m=10^{-4}$; $\gamma_{th}=10^{-7}$ W; 最优 $\theta^*_{3\text{dB}}$; 最优 $\phi^*_{3\text{dB}}$。

附录 A

我们需要证明（56）恒等于 $1/\sqrt{K}$，对于任意 ξ。由于积分区域以 π 为周期且具有对称性，因此有

$$g(\xi)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{d\alpha}{\xi\cos^2\alpha+\frac{K}{\xi}\sin^2\alpha}. \tag{84}$$

定义 $\omega=\tan\alpha$，并且（84）可计算得到 as

$$\begin{aligned} g(\xi)&=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\omega^2+1}{\xi+\frac{K}{\xi}\omega^2}\cdot\frac{d\omega}{\omega^2+1}\\ &=\frac{2\xi}{\pi\sqrt{K}}\int_0^{+\infty}\frac{d\left(\sqrt{K}\omega\right)}{\xi^2+\left(\sqrt{K}\omega\right)^2}\\ &=\frac{2\xi}{\pi\sqrt{K}}\cdot\frac{1}{\xi}\cdot\arctan\frac{\sqrt{K}\omega}{\xi}\Big|_0^{+\infty}\\ &=\frac{1}{\sqrt{K}}. \end{aligned} \tag{85}$$

因此，原始论断得证。

参考文献

[1] F. Liu、Y.-F. Liu、A. Li、C. Masouros 和 Y. C. Eldar，“联合雷达通信波束成形的 Cram´er–Rao 界优化”，IEEE《信号处理汇刊》，第70卷，第240–253页，2022年。[2] Z. Zhang、J. Dang、Z. Zhang、L. Wu、B. Zhu 和 Y. Wu，“通过随机散射结合涡轮概率数据关联检测器并将碰撞视为干扰实现无授权随机接入”，IEEE《无线通信汇刊》，第23卷，第12期，第17 899–17 914页，2024年。[3] R. Vahdani 和 S. M. Razavizadeh，“毫米波大规模MIMO系统中混合波束成形的容量实现设计”，IEEE《车辆技术汇刊》，第74卷，第3期，第4247–4256页，2025年。[4] X. Gao、L. Dai、S. Han、R. W. Heath 等，“具有大型天线阵列的毫米波MIMO系统的高能效混合模拟与数字预编码”，IEEE《精选通信领域期刊》，第34卷，第4期，第998–1009页，2016年。[5] M. Jafri、S. Kumar、S. Srivastava 和 A. K. Jagannatham，“存在依赖随机信道不确定性的小区边缘用户时毫米波多小区系统中的分布式混合波束成形”，IEEE《通信汇刊》，第73卷，第7期，第5344–5356页，2025年。[6] Z. Cheng、L. Wu、B. Wang、M. B. Shankar 和 B. Ottersten，“基于双移相器的混合波束成形：存在扩展目标和杂波时的毫米波双功能雷达通信”，IEEE《无线通信汇刊》，第22卷，第6期，第3671–3686页，2023年。

[7] X. Li、F. Liu、Z. Zhou、G. Zhu、S. Wang、K. Huang 和 Y. Gong，“空中一体化感知、通信与计算：MIMO波束成形设计”，IEEE《无线通信汇刊》，第 22 卷，第 8 期，第 5383–5398 页，2023 年。[8] R. Liu、M. Li、Q. Liu 和 A. L. Swindlehurst，“面向到达方向估计的通感一体化系统联合阵列划分与波束成形设计”，IEEE《无线通信汇刊》，第 24 卷，第 3 期，第 2052–2066 页，2025 年。[9] J. Talvitie、T. Levanen、M. Koivisto、T. Ihalainen、K. Pajukoski 和 M. Valkama，“采用 5G新空口的现代铁路定位与位置感知通信”，IEEE《通信杂志》，第 57 卷，第 9 期，第 24–30 页，2019 年。[10] T.-H. Chou、N. Michelusi、D. J. Love 和 J. V. Krogmeier，“通过含噪张量补全实现快速的位置辅助MIMO波束训练”，IEEE《精选信号处理主题期刊》，第 15 卷，第 3 期，第 774–788 页，2021 年。[11] W. Li、W. Yang、L. Yang、H. Xiong 和 Y. Hui，“面向大规模MIMO系统的双向定位辅助混合波束成形”，IEEE《通信汇刊》，第 69 卷，第 5 期，第 3367–3378 页，2021 年。[12] W. Wang 和 W. Zhang，“智能反射面辅助毫米波通信中的联合波束训练与定位”，IEEE《无线通信汇刊》，第 20 卷，第 10 期，第 6282–6297 页，2021 年。[13] R. Maiberger、D. Ezri 和 M. Erlihson，“基于位置的波束成形”，载于 IEEE 第 26 届以色列电气与电子工程会议论文集，2010 年，第 184–187 页。[14] J. Talvitie、T. Levanen、M. Koivisto、T. Ihalainen、K. Pajukoski 和 M. Valkama，“定位不确定性下的波束成形无线链路容量”，IEEE《车辆技术汇刊》，第 69 卷，第 16 235–16 240 页，第 12 期，2020 年。[15] Z. Zhang、R. He、B. Ai、M. Yang、X. Zhang、Z. Qi 和 Y. Yuan，“28 GHz 下动态车载通感一体化场景的信道测量与建模”，IEEE《通信汇刊》，第 73 卷，第 8 期，第 6884–6897 页，2025 年。[16] N. Kanthasamy 、 R. Du 、 K. S. Gill 、 A. M. Wyglinski 和 R. Cowlagi，“采用双波束成形的车对车网络中定位误差的影响评估”，载于 IEEE 第 88 届车辆技术会议（VTC-Fall）论文集，2018 年，第 1–5 页。[17] X. Chen、J. Lu、T. Li、P. Fan 和 K. B. Letaief，“高速列车通信中大规模MIMO上行波束成形的方向性与波束宽度权衡”，IEEE Access，第 5 卷，第 5936–5946 页，2017 年。[18] X. Yu、X. Huang、K. Wang、F. Shu 和 X. Dang，“节能型无人机辅助多用户毫米波系统的功率分配、波束成形与定位联合设计”，IEEE《精选通信领域期刊》，第 40 卷，第 10 期，第 2930–2945 页，2022 年。[19] J. Song、J.-H. Lee 和 S. Noh，“ 面向车对基础设施通信的基于位置的自适应波束成形与路侧单元扇区化”，IEEE《车辆技术汇刊》，第 73 卷，第 2 期，第 2960–2965 页，2024 年。[20] Y. Lu、M. Koivisto、J. Talvitie、M. Valkama 和 E. S. Lohan，“用于增强毫米波移动网络通信的定位辅助三维波束成形”，IEEE Access，第 8 卷，第 55 513–55 525 页，2020 年。[21] L. Zhu、J. Zhang、Z. Xiao、X.-G. Xia 和 R. Zhang，“多无人机辅助毫米波网络：定位、聚类与波束成形”，IEEE《无线通信汇刊》，第 21 卷，第 7 期，第 4637–4653 页，2022 年。[22] W. Guo、J. Du、M. Yan、H. Zhao 和 S. Shao，“位置扰动对无人机集群分布式协作波束成形的影响”，载于 IEEE 国际通信会议研讨会（ICC Workshops）论文集，2023 年，第 1908–1913 页。[23] W. Miao、C. Luo、G. Min、Y. Mi 和 Z. Yu，“面向蜂窝网络支持的无人机通信的基于位置的鲁棒波束成形设计”，IEEE《物联网期刊》，第 8 卷，第 12 期，第 9934–9944 页，2021 年。[24] B. Zhu、Z. Zhang 和 J. Cheng，“定位辅助波束成形的中断分析与波束宽度优化”，IEEE《通信快报》，第 26 卷，第 7 期，第 1543–1547 页，2022 年。[25] Y. Zhang、K. Zhang、S. Huang、B. Zhu 和 Z. Zhang，“定位辅助三维波束成形系统及其中断分析”，载于 IEEE/CIC 中国国际通信会议（ICCC）论文集，2024 年，第 72–77 页。[26] T. A. Milligan，《现代天线设计》。John Wiley & Sons，2005 年。[27] S. M. Razavizadeh、M. Ahn 和 I. Lee，“三维波束成形：5G无线网络的一项全新赋能技术”，IEEE《信号处理杂志》，第 31 卷，第 6 期，第 94–101 页，2014 年。[28] A. Jajszczyk 和 T. Maseng，“衰落信道上的数字通信：一种统一的性能分析方法”，IEEE《通信杂志》，第 39 卷，第 7 期，第 36–36 页，2001 年。[29] B. Zhu 、 J. Cheng 、 J. Yan 、 J.-Y. Wang 、 L. Wu 和 Y. Wang，“一种针对相关对数正态衰落信道分集接收的新型渐近分析技术”，IEEE《通信汇刊》，第 66 卷，第 2 期，第 845–861 页，2018 年。

[30] F. J. Lopez-Martinez 和 J. M. Romero-Jerez，“广义 Marcum q-函数对称差的渐近精确近似”，IEEE《车辆技术汇刊》，第 64 卷，第 2154–2159 页，第 5 期，2015 年。[31] B. Patrick，《概率测度的收敛》，第二版。John Wiley & Sons，1999 年。