arXiv:2603.03962v1 [math.FA] 4 Mar 2026

精细数值半径估计与欧几里得算子半径

PINTU BHUNIA 和 RUKAYA MAJEED

Abstract. 我们为复希尔伯特空间上有界线性算子的数值半径得到了新的下界和上界，从而改进了已有结果。特别地，若 $w(A)$ 和 $\|A\|$ 分别表示 A 的数值半径和算子范数，则我们证明

$$\nu(A)+\frac{1}{4}\left\||A|^2+|A^*|^2\right\|\leq w^2(A)\leq\frac{1}{2}w\left(\frac{|A|+|A^*|}{2}A\right)+\frac{1}{4}\left\||A|^2+\left(\frac{|A|+|A^*|}{2}\right)^2\right\|,$$

其中 $\nu(A)\geq 0$ 是一个实数，涉及 A 的笛卡尔分解的算子范数。我们还通过算子二元组的欧几里得算子半径，为算子乘积和算子和建立了若干新的数值半径不等式。此外，我们给出了这些不等式的等号成立刻画。作为应用，我们为算子的交换子推导出数值半径不等式，并改进了 Fong 和 Holbrook 的不等式 $w(AB\pm BA)\leq 2\sqrt{2}w(A)\|B\|$ [加拿大数学杂志 1983]。

1. Introduction

设 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 表示复希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上所有有界线性算子的 C^*-代数。 $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 的笛卡尔分解定义为 $A=Re(A)+iIm(A)$，其中 $Re(A)=\frac{1}{2}(A+A^*)$，且 $Im(A)=\frac{1}{2i}(A-A^*)$。记 $|A|=\sqrt{A^*A}$，其中 A^* 是 A 的伴随算子。 $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 的算子范数和数值半径分别定义为

$$\|A\|=\sup\{\|Ax\|:x\in\mathcal{H},\|x\|=1\}\text{ and }w(A)=\sup\{|\langle Ax,x\rangle|:x\in\mathcal{H},\|x\|=1\}.$$

对这两个量，即 $\|A\|$ 和 $w(A)$ 之间可能关系的探究，由于计算 $\|A\|$ 的简便性，以及这些关系可能带来的观察结果，已引起众多研究者的兴趣。作为这方面的一个基本关系，我们有 [16,定理 1.3-1]:

$$\frac{1}{2}\|A\|\leq w(A)\leq\|A\|, \tag{1.1}$$

对所有 $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 都成立。这些界是锐利的：当 $A^2=0$ 且 $w(A)=\|A\|$ 时，$\frac{1}{2}\|A\|=w(A)$；若 A 是正规算子，则 $=\|A\|$ 。这些经典界已由多位研究者加以改进。这里，我们首先提及以下众所周知的界（见 [19, 20, 14]）：

$$w(A)\leq\frac{1}{2}\left\||A|+|A^*|\right\|, \tag{1.2}$$

日期：2026年3月5日。2020年数学主题分类：47A12、47A30、15A60。关键词和短语：数值半径、算子范数、欧几里得算子半径、欧几里得算子范数、联合数值半径。

$$\frac{1}{4}\left\||A|^2+|A^*|^2\right\| \leq w^2(A) \leq \frac{1}{2}\left\||A|^2+|A^*|^2\right\| \tag{1.3}$$

and

$$w^2(A) \leq \frac{1}{2}w(A^2)+\frac{1}{2}\|A\|^2. \tag{1.4}$$

此外，Abu-Omar 和 Kittaneh [1]（另见 [3]）得出了上界

$$w^2(A) \leq \frac{1}{2}w(A^2)+\frac{1}{4}\||A|^2+|A^*|^2\|. \tag{1.5}$$

最近，Bhunia 和 Paul [4] 也建立了如下上界

$$w^2(A) \leq \frac{1}{2}w(|A||A^*|)+\frac{1}{4}\||A|^2+|A^*|^2\|. \tag{1.6}$$

一般而言，上述两个界 (1.5) 和 (1.6) 互不包含。这两个界都改进了 (1.3) 中的上界。关于数值半径与算子范数关系的进一步改进及讨论，可参见大量参考文献，其中我们引用了 [2, 5, 7, 10, 8, 22, 21, 27, 26]。我们还请读者参阅 [6, 16, 29] 中的书籍，以便更系统地研究这一主题。

本文的主要目的是进一步研究涉及算子范数、数值半径和欧几里得算子半径（经典数值半径的一种推广）的不等式与关系。特别地，我们得到了数值半径的若干改进下界和上界。

有界线性算子的数值半径定义表明，研究数值半径不等式最直接的方法是考察内积不等式。在这方面，柯西-施瓦茨不等式被视为基石；对于 $x, y \in \mathcal{H}$，我们有

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|.$$

柯西-施瓦茨不等式的一个加强版本称为布扎诺不等式，下面给出相应的引理。

引理 1.1. [13] 若 $x, y, e \in \mathcal{H}$ 满足 $\|e\| = 1$，则

$$|\langle x, e\rangle\langle e, y\rangle| \leq \frac{1}{2}\left(\|x\|\|y\| + |\langle x, y\rangle|\right).$$

柯西-施瓦茨不等式的另一个有用推广是混合施瓦茨不等式，其内容如下：

$$|\langle Ax, y\rangle|^2 \leq \langle |A|\, x, x\rangle \langle |A^*|\, y, y\rangle,$$

对于每个 $x, y \in \mathcal{H}$。沿着这一方向的另一个推广是以下引理 .

引理 1.2. [18, 定理 5] 设 $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 且 $x, y \in \mathcal{H}$.。若 f, g 是 $[0, \infty)$ 上的两个连续非负函数，并且对所有 $t \geq 0$，都有 $f(t)g(t) = t$，则

$$|\langle ABx, y\rangle| \leq r(B)\|f(|A|)x\|\|g(|A^*|)y\| \quad for\ all\ x, y \in \mathcal{H}$$

其中 $r(B)$ 表示谱半径。特别地，对于 $B = I$，

$$|\langle Ax, y\rangle| \leq \|f(|A|)x\|\|g(|A^*|)y\|.$$

本文利用这些内积不等式，建立了若干新的数值半径不等式，并对先前相关的不等式进行了改进。此外，我们基于算子二元组的欧几里得算子半径和欧几里得算子范数，推导出若干数值半径不等式，从而进一步改进了已有的界。我们还研究了数值半径不等式的等号成立条件。此外，我们得到了算子交换子的数值半径不等式，对 Fong 和 Holbrook [15] 给出的著名不等式 $w(AB \pm BA) \leq 2\sqrt{2}w(A)\|B\|$ 进行了改进和推广。

2. Upper bounds for the numerical radius

本节首先给出以下涉及两个非负连续函数的不等式，并由此推导出有界线性算子数值半径的若干改进上界。

定理 2.1. 设 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$。若 f, g 是定义在 $[0,\infty)$ 上的两个连续非负函数，且对所有 $t \geq 0$，均有 $f(t)g(t) = t$，则

$$w^2(A) \leq \frac{1}{2} w\left(A\frac{f^2(|A|)+g^2(|A^*|)}{2}\right) + \frac{1}{4}\left\||A^*|^2 + \left(\frac{f^2(|A|)+g^2(|A^*|)}{2}\right)^2\right\|$$

and

$$w^2(A) \leq \frac{1}{2} w\left(\frac{f^2(|A^*|)+g^2(|A|)}{2}A\right) + \frac{1}{4}\left\||A|^2 + \left(\frac{f^2(|A^*|)+g^2(|A|)}{2}\right)^2\right\|.$$

证明. 取满足 $\|x\| = 1$. 的 $x \in \mathcal{H}$。由引理 1.2 及算术-几何平均不等式，得

$$|\langle Ax, x\rangle| \leq \langle f^2(|A|)x, x\rangle^{1/2}\langle g^2(|A^*|)x, x\rangle^{1/2} \leq \left\langle \frac{f^2(|A|)+g^2(|A^*|)}{2}x, x\right\rangle.$$

因此，利用引理 1.1，可得

$$\begin{aligned}
|\langle Ax, x\rangle|^2 &\leq \left\langle \frac{f^2(|A|)+g^2(|A^*|)}{2}x, x\right\rangle |\langle x, A^*x\rangle| \\
&\leq \frac{\left|\left\langle A\frac{f^2(|A|)+g^2(|A^*|)}{2}x, x\right\rangle\right| + \|A^*x\|\left\|\frac{f^2(|A|)+g^2(|A^*|)}{2}x\right\|}{2} \\
&\leq \frac{\left|\left\langle A\frac{f^2(|A|)+g^2(|A^*|)}{2}x, x\right\rangle\right| + \frac{\|A^*x\|^2+\left\|\frac{f^2(|A|)+g^2(|A^*|)}{2}x\right\|^2}{2}}{2} \\
&\qquad (\text{ by the AM-GM inequality}) \\
&\leq \frac{1}{2} w\left(A\frac{f^2(|A|)+g^2(|A^*|)}{2}\right) + \frac{1}{4}\left\||A^*|^2 + \left(\frac{f^2(|A|)+g^2(|A^*|)}{2}\right)^2\right\|.
\end{aligned}$$

对 $\|x\| = 1$ 取上确界，我们得到

$$w^2(A) \leq \frac{1}{2} w\left(A\frac{f^2(|A|)+g^2(|A^*|)}{2}\right) + \frac{1}{4}\left\||A^*|^2 + \left(\frac{f^2(|A|)+g^2(|A^*|)}{2}\right)^2\right\|.$$

将 A 替换为 A^*，我们得到

$$w^2(A) \leq \frac{1}{2}w\left(\frac{f^2(|A^*|)+g^2(|A|)}{2}A\right)+\frac{1}{4}\left\||A|^2+\left(\frac{f^2(|A^*|)+g^2(|A|)}{2}\right)^2\right\|,$$

正如所需。 □

在定理 2.1 中令 $f(t)=t^\alpha$ 和 $g(t)=t^{1-\alpha}, \alpha\in[0,1]$，可得以下推论。推论 2.2。设 $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 且 $\alpha\in[0,1]$。则

$$w^2(A) \leq \frac{1}{2}w\left(A\frac{|A|^{2\alpha}+|A^*|^{2(1-\alpha)}}{2}\right)+\frac{1}{4}\left\||A^*|^2+\left(\frac{|A|^{2\alpha}+|A^*|^{2(1-\alpha)}}{2}\right)^2\right\|$$

and

$$w^2(A) \leq \frac{1}{2}w\left(\frac{|A^*|^{2\alpha}+|A|^{2(1-\alpha)}}{2}A\right)+\frac{1}{4}\left\||A|^2+\left(\frac{|A^*|^{2\alpha}+|A|^{2(1-\alpha)}}{2}\right)^2\right\|.$$

特别地，在推论 2.2 中令 $\alpha=\frac{1}{2}$，可得以下界。

推论 2.3。设 $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$。则

$$w^2(A) \leq \frac{1}{2}w\left(A\frac{|A|+|A^*|}{2}\right)+\frac{1}{4}\left\||A^*|^2+\left(\frac{|A|+|A^*|}{2}\right)^2\right\|$$

and

$$w^2(A) \leq \frac{1}{2}w\left(\frac{|A|+|A^*|}{2}A\right)+\frac{1}{4}\left\||A|^2+\left(\frac{|A|+|A^*|}{2}\right)^2\right\|.$$

注记 2.4。(i) 推论 2.3 中的不等式看起来类似于 (1.5) 和 (1.6)，但并非相同。为支持我们的界，我们考虑一个例子。取一个矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$.

我们看到

$$\frac{1}{2}w\left(A\frac{|A|+|A^*|}{2}\right)+\frac{1}{4}\left\||A^*|^2+\left(\frac{|A|+|A^*|}{2}\right)^2\right\| = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{13}}{16}+\frac{1}{2}\approx 0.86510120331,$$

然而

$$\frac{1}{2}w(|A||A^*|)+\frac{1}{4}\left\||A|^2+|A^*|^2\right\|=1.$$

这表明，对于某些算子，推论 2.3 给出的界优于式 (1.6) 中的界。

(i) 显然，推论 2.3 中的界总是比式 (1.1) 中的经典上界估计给出更强的估计。

利用数值半径的定义和柯西-施瓦茨不等式，我们可验证

$$w\left(A\frac{|A|+|A^*|}{2}\right)\leq\frac{1}{2}\left\||A^*|^2+\left(\frac{|A|+|A^*|}{2}\right)^2\right\|$$

and

$$w\left(\frac{|A|+|A^*|}{2}A\right) \le \frac{1}{2}\left\||A|^2+\left(\frac{|A|+|A^*|}{2}\right)^2\right\|.$$

将这些不等式应用于推论 2.3，可得以下界，该界改进了式（1.1）中的经典上界。

推论 2.5. 若 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，则

$$w^2(A) \le \frac{1}{2}\min\left\{\left\||A|^2+\left(\frac{|A|+|A^*|}{2}\right)^2\right\|, \left\||A^*|^2+\left(\frac{|A|+|A^*|}{2}\right)^2\right\|\right\}.$$

现在，根据定理 2.1 的证明，我们还可以得到以下数值半径不等式，由此可推导出更优的界。

定理 2.6. 设 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$。若 f, g 是定义在 $[0,\infty)$ 上的两个连续非负函数，且对所有 $t \ge 0$，均有 $f(t)g(t) = t$，则

$$w^2(A) \le \frac{1}{2}w\left(A\frac{f^2(|A|)+g^2(|A^*|)}{2}\right) + \frac{1}{2}\|A\|\left\|\frac{f^2(|A|)+g^2(|A^*|)}{2}\right\|$$

and

$$w^2(A) \le \frac{1}{2}w\left(\frac{f^2(|A^*|)+g^2(|A|)}{2}A\right) + \frac{1}{2}\|A\|\left\|\frac{f^2(|A^*|)+g^2(|A|)}{2}\right\|.$$

在定理 2.6 中令 $f(t) = t^\alpha$ 和 $g(t) = t^{1-\alpha}, \alpha \in [0,1]$，可得以下推论。

推论 2.7. 设 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 且 $\alpha \in [0,1]$。则

$$w^2(A) \le \frac{1}{2}w\left(A\frac{|A|^{2\alpha}+|A^*|^{2(1-\alpha)}}{2}\right) + \frac{1}{2}\|A\|\left\|\frac{|A|^{2\alpha}+|A^*|^{2(1-\alpha)}}{2}\right\|$$

and

$$w^2(A) \le \frac{1}{2}w\left(\frac{|A^*|^{2\alpha}+|A|^{2(1-\alpha)}}{2}A\right) + \frac{1}{2}\|A\|\left\|\frac{|A^*|^{2\alpha}+|A|^{2(1-\alpha)}}{2}\right\|.$$

特别　　是，取推论 2.7 中的 $\alpha = \frac{1}{2}$，可得以下精细界　　.

推论 2.8。设 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$。则

$$w^2(A) \le \frac{1}{2}\min\left\{w\left(A\frac{|A|+|A^*|}{2}\right), w\left(\frac{|A|+|A^*|}{2}A\right)\right\} + \frac{1}{2}\|A\|\left\|\frac{|A|+|A^*|}{2}\right\|.$$

我们注意到，推论 2.8 和推论 2.3 给出了不同的数值半径界，而且一般来说，这些界并不可比较。为说明这一点，考虑矩阵 $\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

and $\begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}$.

注 2.9。（i）显然，我们有

$$\begin{aligned} w^2(A) &\leq \frac{1}{2}\min\left\{w\left(A\frac{|A|+|A^*|}{2}\right), w\left(\frac{|A|+|A^*|}{2}A\right)\right\} + \frac{1}{2}\|A\|\left\|\frac{|A|+|A^*|}{2}\right\| \\ &\leq \frac{1}{2}\min\left\{\left\|A\frac{|A|+|A^*|}{2}\right\|, \left\|\frac{|A|+|A^*|}{2}A\right\|\right\} + \frac{1}{2}\|A\|\left\|\frac{|A|+|A^*|}{2}\right\| \\ &\leq \|A\|\left\|\frac{|A|+|A^*|}{2}\right\| \leq \|A\|^2. \end{aligned}$$

因此，推论 2.8 改进了界 $w^2(A) \leq \|A\|\left\|\frac{|A|+|A^*|}{2}\right\|$，该界由结合已有的界 $w(A) \leq \|A\|$ 和 $w(A) \leq \left\|\frac{|A|+|A^*|}{2}\right\|$ 得出，见 [19]（另见 [7]）。

(ii) 我们考虑一个简单例子，以说明存在一些算子，对于这些算子，推论 2.8 给出的界比 Dragomir [14] 给出的著名界 (1.4) 更强。取$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$。我们看到

$$\begin{aligned} \frac{3}{8} &= \frac{1}{2}\min\left\{w\left(A\frac{|A|+|A^*|}{2}\right), w\left(\frac{|A|+|A^*|}{2}A\right)\right\} + \frac{1}{2}\|A\|\left\|\frac{|A|+|A^*|}{2}\right\| \\ < \frac{1}{2} &= \frac{1}{2}w(A^2) + \frac{1}{2}\|A\|^2. \end{aligned}$$

(iii) 由 (i) 中的不等式可推出，若 $w(A) = \|A\|$（例如 A 为正规算子），则

$$w\left(A\frac{|A|+|A^*|}{2}\right) = w\left(\frac{|A|+|A^*|}{2}A\right) = w(A|A|) = w(A|A^*|) = w(|A|A) = w(|A^*|A) = \|A\|^2.$$

2.1. 通过欧几里得算子半径得到的界。设 $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$。回顾一下，二元组 (A, B) 的欧几里得算子范数和欧几里得算子半径分别定义为（见 [25]）

$$\|A, B\|_e = \sup\left\{\sqrt{|\langle Ax, y\rangle|^2 + |\langle Bx, y\rangle|^2} : \|x\| = \|y\| = 1\right\}$$

and

$$w_e(A, B) = \sup\left\{\sqrt{|\langle Ax, x\rangle|^2 + |\langle Bx, x\rangle|^2} : \|x\| = 1\right\}.$$

另一个更一般化的概念称为二元组 (A, B) 的 p-数值半径，其定义为（见 [24]）

$$w_p(A, B) = \sup\left\{(|\langle Ax, x\rangle|^p + |\langle Bx, x\rangle|^p)^{1/p} : \|x\| = 1\right\},$$

其中 $p \geq 1$.

在本小节中，我们将利用欧几里得算子范数和欧几里得算子半径，得到涉及算子之和与乘积的数值半径不等式。利用欧几里得算子范数的概念，我们首先得到以下定理。

定理2.10. 若 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，则

$$w^2(A) \leq \frac{1}{4}w(A^2) + \frac{1}{4}\|A, A^*\|_e^2 + \frac{1}{8}\|A^*A + AA^*\|.$$

证明. 取 $x, y \in \mathcal{H}$ ，满足 $\|x\| = \|y\| = 1$。我们有

$$\langle Re(A)x, y\rangle = \frac{\langle Ax, y\rangle + \langle A^*x, y\rangle.}{2}$$

因此,

$$\begin{aligned}
|\langle Re(A)x, y\rangle|^2 &\leq \frac{1}{4}\left(|\langle Ax, y\rangle|^2 + |\langle A^*x, y\rangle|^2 + 2|\langle Ax, y\rangle\langle A^*x, y\rangle|\right) \\
&\leq \frac{1}{4}\left(|\langle Ax, y\rangle|^2 + |\langle A^*x, y\rangle|^2 + \|Ax\|\|A^*x\| + |\langle Ax, A^*x\rangle|\right) \\
&\quad (by\ Lemma\ 1.1) \\
&\leq \frac{1}{4}\left(|\langle Ax, y\rangle|^2 + |\langle A^*x, y\rangle|^2 + \frac{1}{2}(\|Ax\|^2 + \|A^*x\|^2) + |\langle A^2x, x\rangle|\right) \\
&\quad (by\ AM\text{-}GM\ inequality) \\
&\leq \frac{1}{4}\left(\|A, A^*\|_e^2 + \frac{1}{2}\|A^*A + AA^*\| + w(A^2)\right).
\end{aligned}$$

对 $\|x\| = \|y\| = 1$ 取上确界，得到

$$\|Re(A)\|^2 \leq \frac{1}{4}\left(\|A, A^*\|_e^2 + \frac{1}{2}\|A^*A + AA^*\| + w(A^2)\right).$$

将 A 替换为 $e^{i\theta}A, \theta \in \mathbb{R}$，得到

$$\|Re(e^{i\theta}A)\|^2 \leq \frac{1}{4}\left(\|A, A^*\|_e^2 + \frac{1}{2}\|A^*A + AA^*\| + w(A^2)\right).$$

对 $\theta \in \mathbb{R}$ 取上确界，得到

$$w^2(A) = \sup_{\theta\in\mathbb{R}} \|Re(e^{i\theta}A)\|^2 \leq \frac{1}{4}\left(\|A, A^*\|_e^2 + \frac{1}{2}\|A^*A + AA^*\| + w(A^2)\right),$$

如所需。 □

与定理 2.19 类似，我们也可以证明如下数值半径界。

推论 2.11. 若 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，则

$$w^2(A) \leq \frac{1}{4}w(A^2) + \frac{1}{4}w_e^2(A, A^*) + \frac{1}{8}\|A^*A + AA^*\|.$$

注 2.12. (i) 容易验证 $w_e(A, A^*) \leq \|A,\ A^*\|_e$ 并且由柯西-施瓦茨不等式可得 $\|A, A^*\|_e^2 \leq \|A^*A + AA^*\|$. 此外，由数值半径的幂不等式及 (1.3)，我们有 $w(A^2) \leq w^2(A) \leq \frac{1}{2}\|A^*A + AA^*\|$. 因此,

$$\begin{aligned}
w^2(A) &\leq \frac{1}{4}w(A^2) + \frac{1}{4}w_e^2(A, A^*) + \frac{1}{8}\|A^*A + AA^*\| \\
&\leq \frac{1}{4}w(A^2) + \frac{1}{4}\|A, A^*\|_e^2 + \frac{1}{8}\|A^*A + AA^*\| \\
&\leq \frac{1}{2}\|A^*A + AA^*\| \\
&\leq \|A\|^2.
\end{aligned}$$

因此，定理 2.19 与推论 2.20 中的两个数值半径界都改进了由 Kittaneh [20] 证明的著名界 $w^2(A) \leq \frac{1}{2}\|A^*A + AA^*\|$。为看出这是严格改进，可取一个简单矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(ii) 由上述不等式可知，若 $w(A) = \|A\|$ （例如，若 A 是正规算子），则

$$\|A\| = \frac{1}{\sqrt{2}}\|A, A^*\|_e.$$

接下来，我们需要以下引理来给出这一方向上的更多结果。第一个引理称为麦卡锡不等式。

引理 2.13. [18] 设 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 为正的。则

$$\langle Ax, x\rangle^p \leq \langle A^p x, x\rangle,$$

对所有 $p \geq 1$，以及满足 $\|x\| = 1$. 的所有 $x \in \mathcal{H}$

第二个引理也是一个涉及 2×2 正算子矩阵的内积不等式。

引理 2.14. [18] 设 $A, B, C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，其中 A 和 B 为正的。那么，算子矩阵 $\begin{bmatrix} A & C^* \\ C & B \end{bmatrix} \in \mathcal{B}($ $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$为正的，当且仅当

$$|\langle Cx, y\rangle|^2 \leq \langle Ax, x\rangle\langle By, y\rangle.$$

第三个引理称为玻尔不等式，适用于 n 正实数。

引理 2.15. [28] 设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 为正实数。那么

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^r \leq n^{r-1}\sum_{i=1}^{n} a_i^r,$$

对所有 $r \geq 1$均成立。

这里我们还回顾双凸函数的概念（见 [12]）。若函数h：$[0, \infty) \to [0, \infty)$满足 $h(t)$为凸函数，且 $h(t)$为几何凸函数，即对于所有 $a, b \in [0, \infty)$，都有 $h(\sqrt{ab}) \leq \sqrt{h(a)h(b)}$，则称其为双凸函数。

现在，利用双凸函数的概念和上述引理，我们给出数值半径不等式。

定理 2.16. 设 $A, B, C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，其中 A 和 B 是正的，并设 h 是定义在 $[0, \infty)$ 上的递增双凸函数。若算子矩阵 $\begin{bmatrix} A & C^* \\ C & B \end{bmatrix}$ 是正的，则

$$h(w(C)) \leq \sqrt{\frac{\alpha\beta}{2}} w_e\left(\frac{h(A)}{\alpha}, \frac{h(B)}{\beta}\right),$$

对所有 $\alpha, \beta > 0$ 均成立。

证明。为证明该结果，我们首先注意到如下不等式。对任意两个正实数 a和 b，我们有

$$\sqrt{ab} \leq \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{2}\left(\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta}\right), \tag{2.1}$$

其中 α、$\beta > 0$。这可通过在 $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$ 中分别将 a 和 b 替换为 $\frac{a}{\alpha}$ 和 $\frac{b}{\beta}$ 而得到。现在，利用引理 2.14 和递增双凸函数 h，我们得到

$$\begin{aligned} h(|\langle Cx,x\rangle|) &\le h(\sqrt{\langle Ax,x\rangle\langle Bx,x\rangle}) \\ &\le \sqrt{h(\langle Ax,x\rangle\langle Bx,x\rangle)} \\ &\le \sqrt{\langle h(A)x,x\rangle\langle h(B)x,x\rangle} \\ &\le \sqrt{\frac{\alpha\beta}{2}}\left(\sqrt{\frac{|\langle h(A)x,x\rangle|^2}{\alpha^2}+\frac{|\langle h(B)x,x\rangle|^2}{\beta^2}}\right) \quad (\text{by } (2.1)) \\ &= \sqrt{\frac{\alpha\beta}{2}}\left(\sqrt{\left|\left\langle \frac{h(A)x}{\alpha},x\right\rangle\right|^2+\left|\left\langle \frac{h(B)x}{\beta},x\right\rangle\right|^2}\right). \end{aligned}$$

对 $\|x\| = 1$ 取上确界，得到所需的不等式。□

对于每个 $B, C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，我们注意到 $\begin{bmatrix} BB^* & BC \\ C^*B^* & C^*C \end{bmatrix} \ge 0$。将此算子矩阵用于定理 2.16，可得以下推论。

推论 2.17。设 $B, C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，且设 h 为定义在 $[0,\infty$ 上的双凸递增函数。则

$$h(w(BC)) \le \sqrt{\frac{\alpha\beta}{2}}\, w_e\left(\frac{h(BB^*)}{\alpha},\frac{h(C^*C)}{\beta}\right),$$

对所有 $\alpha, \beta > 0$ 均成立。特别地，当 $h(t) = t$ 时，

$$w(BC) \le \min_{\alpha,\beta>0}\sqrt{\frac{\alpha\beta}{2}}\, w_e\left(\frac{BB^*}{\alpha},\frac{C^*C}{\beta}\right). \tag{2.2}$$

设 $A = U|A|$ 是 A 的极分解。在 (2.2) 中令 $B = U|A|^{1-t}$ 和 $C = |A|^t$（其中 $t \in [0,1]$），可得以下界。

推论 2.18. 设 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$。则

$$w(A) \le \min_{\alpha,\beta>0}\sqrt{\frac{\alpha\beta}{2}}\, w_e\left(\frac{1}{\alpha}|A^*|^{2(1-t)},\frac{1}{\beta}|A|^{2t}\right),$$

对所有 $t \in [0,1]$。

我们指出，推论 2.18 改进了现有的界 $w^2(A) \le \frac{1}{2}\||A|^2+|A^*|^2\|$，见下文注 2.21。

下一个不等式同样适用于算子的乘积，表述如下。

定理 2.19. 设 $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 满足 $|A|B = B^*|A|$。设 f, g 是 $[0,\infty)$ 上的非负连续函数，满足 $f(\lambda)g(\lambda) = \lambda$ 对所有 $\lambda \in [0,\infty)$。则

$$w(AB) \le \frac{r(B)}{\sqrt{2}} w_e\left(f^2(|A|),g^2(|A^*|)\right). \tag{2.3}$$

特别地，

$$w(AB) \le \frac{r(B)}{\sqrt{2}} w_e\left(|A|^{2t},|A^*|^{2(1-t)}\right), \quad \textit{for all } t \in [0,1]. \tag{2.4}$$

证明。取 $x \in \mathcal{H}$，满足 $\|x\| = 1.$。利用引理 1.2，我们有

$$\begin{aligned} |\langle ABx, x\rangle| &\leq r(B)\left(\langle f(|A|)x, f(|A|)x\rangle\langle f(|A^*|)x, f(|A^*|)x\rangle\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{r(B)}{\sqrt{2}}\left(|\langle f^2(|A|)x, x\rangle|^2 + |\langle g^2(|A^*|)x, x\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

对 $\|x\| = 1$ 取上确界，得到所需的第一个不等式 (2.3)。特别地，在 (2.3) 中令 $f(\lambda) = \lambda^t$ 和 $g(\lambda) = \lambda^{1-t}$，即可得到所需的第二个不等式 (2.4)。□

在定理 2.19 中令 $B = I$，我们得到数值半径的以下新上界。

推论 2.20。设 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$。则

$$w(A) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} w_e\left(|A|^{2t}, |A^*|^{2(1-t)}\right), \tag{2.5}$$

对所有 $t \in [0, 1]$.

注 2.21。利用引理 2.13，我们看到

$$w(A) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} w_e\left(|A|^{2t}, |A^*|^{2(1-t)}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left\| |A|^{4t} + |A^*|^{4(1-t)} \right\|^{1/2},$$

对所有 $t \in [0, 1].$。特别地，对于 $t = \frac{1}{2}$，

$$w^2(A) \leq \frac{1}{2} w_e^2\left(|A|, |A^*|\right) \leq \frac{1}{2} \left\| |A|^2 + |A^*|^2 \right\|.$$

因此，定理 2.16 和定理 2.19 改进并推广了 (1.3) 中众所周知的第二个不等式。

接下来，我们建立涉及算子二元组的 p-数值半径的乘积算子之和的数值半径不等式。

定理 2.22. 设 A_i、B_i、$X_i \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，对 $i = 1, 2, \ldots\ldots, n$。设 f、g 是 $[0, \infty)$ 上的两个非负连续函数，使得对所有 $t \in [0, \infty)$ 有 $f(t)\, g(t) = t$。则

$$w^p\left(\sum_{i=1}^n A_i^* X_i B_i\right) \leq \frac{n^{p-1}}{2}\left(\sum_{i=1}^n w_p^p(B_i^* f^2(|X_i|)B_i, A_i^* g^2(|X_i^*|)A_i)\right),$$

其中 $p \geq 1.$

证明。取 $x \in \mathcal{H}$，满足 $\|x\| = 1.$，我们有

$$\begin{aligned} \left|\left\langle \left(\sum_{i=1}^n A_i^* X_i B_i\right)x, x\right\rangle\right|^p &\leq \left(\sum_{i=1}^n |\langle (A_i^* X_i B_i)x, x\rangle|\right)^p \\ &\leq n^{p-1}\left(\sum_{i=1}^n |\langle (A_i^* X_i B_i)x, x\rangle|^p\right) \\ &= n^{p-1}\left(\sum_{i=1}^n |\langle (X_i B_i)x, A_i x\rangle|^p\right) \\ &\leq n^{r-1}\left(\sum_{i=1}^n \|f(|X_i|)\|B_i x\|^r \|g(|X_i^*|)A_i x\|^p\right) \quad (by\ Lemma\ 1.2) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= n^{p-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\langle f^2(|X_i|)B_ix,B_ix\rangle^{\frac{p}{2}}\langle g^2(|X_i^*|)A_ix,A_ix\rangle^{\frac{p}{2}}\right)\\
&\le \frac{n^{p-1}}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\langle B_i^*f^2(|X_i|)B_ix,x\rangle^p+\langle A_i^*g^2(|X_i^*|)A_ix,x\rangle^p\right).
\end{aligned}
$$

对 $\|x\|=1$ 取上确界，即得所需的不等式。 □

注 2.23. 我们看到

$$
\begin{aligned}
&w^r\left(\sum_{i=1}^{n}A_i^*X_iB_i\right)\\
\le\ & \frac{n^{p-1}}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}w_p^p(B_i^*f^2(|X_i|)B_i,A_i^*g^2(|X_i^*|)A_i)\right)\\
=\ & \frac{n^{p-1}}{2}\sup_{\|x\|=1}\sum_{i=1}^{n}\left(\langle B_i^*f^2(|X_i|)B_ix,x\rangle^p+\langle A_i^*g^2(|X_i^*|)A_ix,x\rangle^p\right)\\
\le\ & \frac{n^{p-1}}{2}\sup_{\|x\|=1}\sum_{i=1}^{n}\left(\langle[B_i^*f^2(|X_i|)B_i]^px,x\rangle+\langle[A_i^*g^2(|X_i^*|)A_i]^px,x\rangle\right)\ (\textit{by Lemma 2.13})\\
=\ & \frac{n^{p-1}}{2}\sup_{\|x\|=1}\left(\sum_{i=1}^{n}\langle[B_i^*f^2(|X_i|)B_i]^px,x\rangle+\sum_{i=1}^{n}\langle[A_i^*g^2(|X_i^*|)A_i]^px,x\rangle\right)\\
\le\ & \frac{n^{p-1}}{\sqrt{2}}\sup_{\|x\|=1}\left(\left|\sum_{i=1}^{n}\langle[B_i^*f^2(|X_i|)B_i]^px,x\rangle+i\sum_{i=1}^{n}\langle[A_i^*g^2(|X_i^*|)A_i]^px,x\rangle\right|\right)\\
\le\ & \frac{n^{p-1}}{\sqrt{2}}w\left(\sum_{i=1}^{n}[B_i^*f^2(|X_i|)B_i]^p+i[A_i^*g^2(|X_i^*|)A_i]^p\right),
\end{aligned}
$$

其中第三个不等式由不等式 $|a+b|\le\sqrt{2}|a+ib|$ 对 $a,b\in\mathbb{R}$. 得出。因此，定理 2.22 改进了 [4, 定理 2.11]，即

$$
w^r\left(\sum_{i=1}^{n}A_i^*X_iB_i\right)\le\frac{n^{p-1}}{\sqrt{2}}w\left(\sum_{i=1}^{n}[B_i^*f^2(|X_i|)B_i]^p+i[A_i^*g^2(|X_i^*|)A_i]^p\right).
$$

在定理 2.22 中令 $f(\lambda)=\lambda^t$ 和 $g(\lambda)=\lambda^{1-t}$, $t\in[0,1]$，可得以下推论。

推论 2.24. 设 $A_i,B_i,X_i\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 对于 $i=1,2,\ldots,n$。则

$$
w^p\left(\sum_{i=1}^{n}A_i^*X_iB_i\right)\le\frac{n^{p-1}}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}w_p^p(B_i^*|X_i|^{2t}B_i,A_i^*|X_i^*|^{2(1-t)}A_i)\right),
$$

对于所有 $p\ge1$。

再次，在定理 2.22 中令 A_i、$B_i=I$，我们导出如下关于算子和的界。

推论 2.25. 设 $X_i \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，其中 $i = 1, 2, \ldots, n$。设 f、g 为 $[0,\infty)$ 上的两个非负连续函数，使得对所有 $t \in [0,\infty)$ 有 $f(t)g(t) = t$。则

$$w^p\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \leq \frac{n^{p-1}}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} w_p^p(f^2(|X_i|), g^2(|X_i^*|))\right).$$

在推论 2.25 中令 $n = 1$和 $f(t) = g(t) = t^{\frac{1}{2}}$，可得以下上界。

推论 2.26. 设 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$。则

$$w(A) \leq \frac{1}{2^{1/p}} w_p(|A|, |A^*|),$$

对所有 $p \geq 1$.

注 2.27. 利用不等式 $|a+b| \leq \sqrt{2}|a+ib|$ 对任意 $a, b \in \mathbb{R}$，可知

$$\begin{aligned} w^p(A) &\leq \frac{1}{2} w_p^p(|A|, |A^*|) \\ &= \frac{1}{2} \sup_{\|x\|=1} \left(\langle |A|x, x\rangle^p + \langle |A^*|x, x\rangle^p\right) \\ &\leq \frac{1}{2} \sup_{\|x\|=1} \left(\langle |A|^p x, x\rangle + \langle |A^*|^p x, x\rangle\right) \quad \text{(by Lemma 2.13)} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \sup_{\|x\|=1} |\langle |A|^p x, x\rangle + i\langle |A^*|^p x, x\rangle| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} w\left(|A|^p + i|A^*|^p\right), \quad \text{for all } p \geq 1. \end{aligned}$$

因此，推论 2.26 改进并推广了 $w(A) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} w\left(|A| + i|A^*|\right)$，该结果见 [4,推论 2.15]。

3. Lower bounds for the numerical radius

利用笛卡尔分解，我们在本节得到有界线性算子数值半径的下界，这些下界改进了 (1.1) 和 (1.3) 中已有的下界。为给出这些界，我们首先指出由 Maligranda [23] 给出的、关于赋范线性空间 $\mathcal{X} = (\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ 中非零向量 x、y 的如下不等式：

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| - \left(2 - \left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\right\|\right) \min\left(\|x\|, \|y\|\right). \tag{3.1}$$

应用 Maligranda 不等式，我们得到下界。第一个界如下，它改进了 $\frac{1}{2}\|A\| \leq w(A)$。

命题 3.1. 若 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 满足 $Re(A) \pm Im(A) \neq 0$，则

$$\frac{1}{2}\|A\| + \mu(A) \leq w(A),$$

其中 $\mu(A) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(2 - \left\| \frac{Re(A)+Im(A)}{\|Re(A)+Im(A)\|} + i \frac{Re(A)-Im(A)}{\|Re(A)-Im(A)\|} \right\|\right)$ 最小值 $(\|Re(A) \pm Im(A)\|)$。

证明。根据 [9, 定理 2.1]，我们得到

$$w(A) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \max\left\{\|Re(A) + Im(A)\|, \|Re(A) - Im(A)\|\right\}.$$

在（3.1）中取赋范线性空间 $\mathcal{X} = (\mathcal{B}(\mathcal{H}), \|\cdot\|)$ 以及向量 $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(Re(A) + Im(A))$ 和 $y = \frac{i}{\sqrt{2}}(Re(A) - Im(A))$，并利用上述不等式，即可得到所需的界。□

注 3.2. 由于对每个 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，$\mu(A) \geq 0$，命题 3.1 改进了经典数值半径界 $\frac{1}{2}\|A\| \leq w(A)$。为说明这种改进是严格的，我们考虑一个简单的例子。假设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$. 我们看到

$$\frac{1}{2}\|A\| = \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\|A\| + \mu(A) < 1 = w(A).$$

根据 [9, 注 2.2]，，若 $w(A) = \frac{1}{2}\|A\|$，则 $\|Re(A) + Im(A)\| = \|Re(A) - Im(A)\|$. 利用这一点和命题 3.1，我们推导出等式成立的一个必要条件$w(A) = \frac{1}{2}\|A\|$.

推论 3.3。设 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 且 $\|Re(A) \pm Im(A)\| \neq 0$。若 $w(A) = \frac{1}{2}\|A\|$，则

$$\|Re(A) \pm Im(A)\| = \frac{1}{\sqrt{2}}\|A\|.$$

与命题 3.1 类似，我们还得到以下数值半径界，它改进了界 $\frac{1}{4}\|A^*A + AA^*\| \leq w^2(A)$。

命题 3.4。若 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 且 $Re(A) \pm Im(A) \neq 0$，则

$$\frac{1}{4}\|A^*A + AA^*\| + \nu(A) \leq w^2(A),$$

其中 $\nu(A) = \frac{1}{4}\left(2 - \left\|\frac{(Re\ A + Im\ A)^2}{\|Re\ A + Im\ A\|^2} + i\frac{(Re\ A - Im\ A)^2}{\|Re\ A - Im\ A\|^2}\right\|\right) \min\left(\|Re(A) \pm Im(A)\|^2\right)$。

注 3.5. 由于对每个 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，$\nu(A) \geq 0$，命题 3.4 改进了 Kittaneh [20] 所证明的数值半径界 $\frac{1}{4}\|A^*A + AA^*\| \leq w^2(A)$。我们考虑一个简单的例子来展示这种严格改进。设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$. 。我们看到

$$\frac{1}{4}\|A^*A + AA^*\| = \frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{4}\|A^*A + AA^*\| + \nu(A) < 1 = w^2(A).$$

最近，Jana 等人 [17] 证明了

$$\frac{1}{4}\|A^*A + AA^*\| + \frac{\mu}{2}\max\{\|Re(A)\|, \|Im(A)\|\} \leq w^2(A), \tag{3.2}$$

其中 $\mu = \left|\|Re(A) + Im(A)\| - \|Re(A) - Im(A)\|\right|$. 。考虑上述例子，我们得出结论：存在一些算子，使得命题 3.4 给出的估计比估计 (3.2) 更强。

与命题 3.1 类似，我们还得到了以下其他下界，这些下界最近也在 [11]中进行了研究。

推论 3.6. 若 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 且 $Re(A) \neq 0$，并且 $Im(A) \neq 0$，则

$$\frac{1}{2}\|A\| + \gamma(A) \leq w(A), \tag{3.3}$$

其中 $\gamma(A) = \frac{1}{2}\left(2 - \left\| \frac{Re}{\|Re\|}(A) \quad (A) \| - i \frac{Im}{\|Im\|}(A) \quad (A) \| \right\|\right) \min\{\|Re(A)\|, \|Im(A)\|\}$

且

$$\frac{1}{4}\|A^*A + AA^*\| + \delta(A) \leq w^2(A), \tag{3.4}$$

其中 $\delta(A) = \frac{1}{2}\left(2 - \left\| \frac{Re^2}{\|Re\|}(A) \quad (A) \|^2 + i \frac{Im^2}{\|Im\|}(A) \quad (A) \|^2 \right\|\right) \min\{\|Re(A)\|^2, \|Im(A)\|^2\}$。

接下来，应用命题 3.4，我们得到算子的广义交换子和反交换子的数值半径上界，该上界改进（并推广）了 Fong 和 Holbrook 给出的不等式 $w(AB \pm BA) \leq 2\sqrt{2}w(A)\|B\|$ [15]。

推论 3.7. 设 $A, B, X, Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$。则

$$w(AXB \pm BYA) \leq 2\sqrt{2}\max\{\|XB\|, \|BY\|\}\sqrt{w^2(A) - \nu(A)},$$

其中 $\nu(A)$ 与命题 3.4 相同。

特别地，对于 $X = Y = I$，

$$w(AB \pm BA) \leq 2\sqrt{2}\|B\|\sqrt{w^2(A) - \nu(A)}. \tag{3.5}$$

交换 A 和 B，得到

$$w(AB \pm BA) \leq 2\sqrt{2}\|A\|\sqrt{w^2(B) - \nu(B)}. \tag{3.6}$$

Proof. 取满足 $\|x\| = 1$ 的 $x \in \mathcal{H}$。假设 $\|X\| \leq 1$ 和 $\|Y\| \leq 1$，则得到

$$\begin{aligned} |\langle (AX \pm YA)x, x\rangle| &\leq \|A^*x\| + \|Ax\| \leq \sqrt{2(\|A^*x\|^2 + \|Ax\|^2)} \\ &\leq \sqrt{2\|AA^* + A^*A\|} \leq 2\sqrt{2}\sqrt{w^2(A) - \nu(A)} \quad (by\ Proposition\ 3.4). \end{aligned}$$

对 $\|x\| = 1$ 取上确界，得到

$$w(AX \pm YA) \leq 2\sqrt{2}\sqrt{w^2(A) - \nu(A)}. \tag{3.7}$$

现在考虑一般的 X, Y，其中 $\max\{\|X\|, \|Y\|\} \neq 0$；否则推论 3.7 显然成立。在 (3.7) 中将 X 替换为 $\frac{X}{\max\{\|X\|, \|Y\|\}}$，并将 Y 替换为 $\frac{Y}{\max\{\|X\|, \|Y\|\}}$，得到

$$w(AX \pm YA) \leq 2\sqrt{2}\max\{\|X\|, \|Y\|\}\sqrt{w^2(A) - \nu(A)}. \tag{3.8}$$

再次，在 (3.8) 中将 X 替换为 XB，并将 Y 替换为 BY，得到

$$w(AXB \pm BYA) \leq 2\sqrt{2}\max\{\|XB\|, \|BY\|\}\sqrt{w^2(A) - \nu(A)},$$

这正是所需的。 □

再次应用不等式 (3.4)，可得到算子的广义交换子和反交换子的以下数值半径界。

推论 3.8. 设 $A, B, X, Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$。则

$$w(AXB \pm BYA) \leq 2\sqrt{2}\max\{\|XB\|, \|BY\|\}\sqrt{w^2(A) - \delta(A)},$$

其中 $\delta(A)$ 与 (3.4) 中相同。

特别地，对于 $X = Y = I$，

$$w(AB \pm BA) \leq 2\sqrt{2}\|B\|\sqrt{w^2(A) - \delta(A)}. \tag{3.9}$$

将 A 与 B互换，我们得到

$$w(AB \pm BA) \leq 2\sqrt{2}\|A\|\sqrt{w^2(B) - \delta(B)}. \tag{3.10}$$

注 3.9。（i）显然，推论 3.7 和推论 3.8 中的不等式改进并推广了不等式 $w(AB \pm BA) \leq 2\sqrt{2}w(A)\|B\|$，该不等式由 Fong 和 Holbrook [15] 建立。为展示这种严格改进，我们取一个简单的矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1+2i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$。于是可得 $\nu(A) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{\sqrt{2}})$ 以及 $\delta(A) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$。

（ii）根据不等式（3.5）和（3.9），我们得出，如果 $w(AB \pm BA) = 2\sqrt{2}w(A)\|B\|$，那么 $\left\| \frac{(Re\ A + Im\ A)^2}{\|Re\ A + Im\ A\|^2} + i \frac{(Re\ A - Im\ A)^2}{\|Re\ A - Im\ A\|^2} \right\| = \left\| \frac{Re^2}{\|Re\ A\|^2} + i \frac{Im^2}{\|Im\ A\|^2} \right\| = 2.$

利益冲突声明。作者声明不存在利益冲突 t.

数据可用性声明。本文不适用数据共享，因为本研究未生成或分析任何数据集。

References

1. A. Abu-Omar 与 F. Kittaneh，数值半径的上界与下界及其在对合算子中的应用，《落基山数学杂志》45（2015），第4期，1055–1065。2. N. Altwaijry、C. Conde、S. S. Dragomir 与 K. Feki，涉及正算子的算子的进一步范数与数值半径不等式，《AIMS 数学》10（2025），第2期，2684–2696。3. P. Bhunia、S. Bag 与 K. Paul，数值半径不等式及其在多项式零点估计中的应用，《线性代数及其应用》573（2019），166–177。4. P. Bhunia 与 K. Paul，希尔伯特空间算子数值半径的新上界，《数学科学通报》167（2021），论文编号 102959，11页。5. P. Bhunia 与 K. Paul，数值半径不等式的发展及等号成立条件的刻画，《线性代数及其应用》630（2021），306–315。6. P. Bhunia、S. S. Dragomir、M. S. Moslehian 与 K. Paul，《数值半径不等式讲义》，印孚瑟斯科学基金会数学科学丛书，施普林格，沙姆，2022，xii+209 页。7. P. Bhunia，借助算子极分解改进的数值半径界，《线性代数及其应用》683（2024），31–45。8. P. Bhunia，借助 $B(H)$ 上的新范数改进的数值半径界，《格鲁吉亚数学杂志》32（2025），第4期，551–566。9. P. Bhunia、S. Jana 与 K. Paul，希尔伯特空间算子数值半径的精细不等式，《落基山数学杂志》55（2025），第2期，323–332。10. P. Bhunia、F. Kittaneh 与 S. Sahoo，利用 Moore-Penrose 逆改进的数值半径界，《线性代数及其应用》711（2025），1-16。11. P. Bhunia，分块矩阵的 ℓ^p-算子范数不等式，《加拿大数学通报》（2026），12页。
http://dx.doi.org/10.4153/S0008439526101714 12. J.-C. Bourin 与 F. Hiai，算子均值与反范数的詹森不等式与闵可夫斯基不等式，《线性代数及其应用》456（2014），22–53。13. M. L. Buzano，柯西–施瓦茨不等式的推广，《都灵理工大学数学研讨纪要》31（1971/73）（1974），405–409。14. S. S. Dragomir，希尔伯特空间中线性算子的范数与数值半径的若干不等式，《淡江数学杂志》39（2008），第1期，第1–7页。15. C. K. Fong 与 J. A. R. Holbrook，酉不变算子范数，加拿大数学杂志 35（1983年），第2期，274–299。16. K. E. Gustafson、D. K. M. Rao，《数值域》，施普林格，纽约，1997。17. S. Jana、P. Bhunia 与 K. Paul，一对有界线性算子的欧几里得算子半径不等式及其应用，《巴西数学会通报》（新辑）54（2023），第1期，论文编号 1，14页。

18. F. Kittaneh，关于希尔伯特空间算子若干不等式的注记，数学科学研究所出版物 24（1988），第2期，283–293。19. F. Kittaneh，数值半径不等式及弗罗贝尼乌斯伴随矩阵数值半径的一个估计，《数学研究》158（2003），第1期，11–17。20. F. Kittaneh，希尔伯特空间算子的数值半径不等式，《数学研究》168（2005），第1期，73–80。21. F. Kittaneh、H. R. Moradi 与 M. Sababheh，数值半径的更精确的界，线性与多重线性代数 73（2025），第10期，2309–2319。22. F. Kittaneh、H. R. Moradi 与 M. Sababheh，数值半径与谱半径的互补界，《数学问题》48（2025），第6期，863–877。23. L. Maligranda，简单范数不等式，《美国数学月刊》113（2006），第3期，256–260。24. M. S. Moslehian、M. Sattari、K. Shebrawi，欧几里得算子半径不等式的推广。《斯堪的纳维亚数学》120（2017），第1期，129–144。25. G. Popescu，多变量算子理论中的酉不变量，美国数学会回忆录 200（2009），第941号，vi+91 页。26. M. Sababheh 与 H. R. Moradi，新的范数与数值半径界，《国际数学杂志》36（2025），第1期，论文编号 2450066，17页。27. M. Sababheh、H. R. Moradi 与 S. Sahoo，内积不等式及其应用，线性与多重线性代数 73（2025），第9期，2089–2102。28. M.P. Vasi´c、D. J. Keˆcki´c，复数的若干不等式，《巴尔干数学》1（1971），282–286。29. P. Y. Wu 与 H.-L. Gau，《希尔伯特空间算子的数值域》。数学及其应用百科全书 179，剑桥大学出版社，剑桥，2021。

（Bhunia）Department of Mathematics, SRM University AP, Amaravati 522240, AndhraPradesh, India电子邮箱：pintubhunia5206@gmail.com；pintu.b@srmap.edu.in（Majeed）Department of Mathematics, SRM University AP, Amaravati 522240, AndhraPradesh, India电子邮箱：rukayamajeed20@gmail.com；rukaya majeed@srmap.edu.in