arXiv:2603.03966v1 [math.CO] 4 Mar 2026

二部图中的谱半径与彩虹哈密顿性*

Meng Chen[a]，**Ruifang Liu**[a†]，**Qixuan Yuan**[a]

[a] 郑州大学数学与统计学院，中国河南郑州 450001 na

摘要 设 $\mathcal{G} = \{$图 G_1, 图 $G_2, \ldots,$图 $G_k\}$是定义在同一顶点集上的一族二部图。 $\mathcal{G}$ 中的彩虹哈密顿路径（圈）是指一条经过每个顶点恰好一次的路径（圈），且任意两条边都属于 $\mathcal{G}$ 中的不同图。本文采用双移位技术，给出了一族图 $\mathcal{G}$ 分别存在彩虹哈密顿路径和圈的、关于谱半径的紧致充分条件。同时，我们完整刻画了相应的谱极值图。

关键词： 彩虹哈密顿路径，彩虹哈密顿圈，二部图，谱半径，极值图

AMS分类： 05C50; 05C35

1 引言

本文中，我们只考虑简单无向图。令 V(G) 和 E(G) 分别表示图 G 的顶点集和边集。对于任意顶点 u $\in$ V(G)，记 N_G(u) 为 u 在图 G 中的邻域。设 G 为一个二部图，其二部划分为$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$(X, Y)。记 G 为其拟补图，其中 V(G) = V(G)，且对于任意 x $\in$ X 和$\widehat{\ }$y $\in$ Y，xy $\in$ E(G) 当且仅当 xy $\notin$ E(G)。设 G_1 和 G_2 是两个二部图，其二部划分分别为 (X_1, Y_1) 和 (X_2, Y_2)。我们用 $G_1 \sqcup G_2$ 表示由 $G_1 \cup G_2$ 得到的二部图，其中添加了 X_1 与 Y_2 之间的所有可能边，以及 Y_1 与 X_2之间的所有可能边。

图 G 的邻接矩阵是 $|V(G)| \times |V(G)|$ 矩阵 $A(G) = (a_{uv})$，其中 a_{uv} 表示连接 u 和 v的边的数量。图 G 的特征值定义为其邻接矩阵 $A(G)$ 的特征值。$A(G)$ 的特征值模的最大值称为图 G 的谱半径，记为 $\rho(G)$。

设 $\mathcal{G} = \{$图 G_1, 图 $G_2, \ldots,$图 $G_k\}$为一个具有相同顶点集 V 的、不一定互不相同的图所构成的图族。设 H 是顶点集 $V(H) \subseteq V$ 上具有 k 条边的图。我们称$\mathcal{G}$ 包含 H 的彩虹副本，如果存在一个双射 $\phi : E(H) \to [k]$ 使得

*本研究得到国家自然科学基金委员会（编号：12371361）和河南省杰出青年科学基金（编号：242300421045）的资助。

†通讯作者。电子邮箱：cm4234635@163.com（M. Chen）、rfliu@zzu.edu.cn（R. Liu）、yuanqixuan6@gmail.com（Q. Yuan）。

对所有 e ∈E(H)，有 e ∈E(G$_{\phi(e)}$)，其中 [k] = {1, 2,. . ., k}。换言之，H 的每条边来自不同的图 G$_i$。特别地，若 G$_1$ =G$_2$ = ⋯ =G$_k$，则 H 的彩虹副本退化为 H 的经典副本。以下一般性问题由 Joos 与 Kim 在 [11] 中提出。

问题 1.1。设 H 是一个具有 k 条边的图，且 $\mathcal{G} = \{G_1, G_2, \ldots, G_k\}$ 是定义在同一顶点集 V 上的一个不一定互不相同的图族。对图族 $\mathcal{G}$施加哪些性质和约束，才能得到 H 的一个彩虹副本？

围绕问题 1.1，Guo 等人 [8] 给出了一个关于图族中存在彩虹匹配的充分条件，其条件以谱半径表示。He, Li and Feng [10]提出了一个谱半径条件，使图族包含彩虹哈密顿路径。此外，他们还提出了一个关于图族的谱半径条件，以保证存在给定大小的彩虹线性森林。Zhang and van Dam [17]分别给出了一个基于规模和谱半径的充分条件，以保证图族中存在彩虹哈密顿圈。Zhang and Zhang [16]提出了一个关于谱半径的充分条件，使图族包含一个彩虹 k-因子。

问题1.1 的二部图版本同样是一个自然且引人关注的问题。Bradshaw [3] 分别提出了使一族二部图存在彩虹哈密顿圈和彩虹完美匹配的最小度条件。此外，Bradshaw [3]证明了一个更强的结果，即在最小度条件下，一族二部图具有二部泛圈性。受 [3], Hu 等人 [9] 的启发，研究了一族二部图具有顶点二部泛圈性的最小度条件。Shi、Li 和 Chen [15] 给出了一个关于谱半径的充分条件，以保证一族二部图中存在彩虹匹配。

若二部图的二部划分为（X,Y），则称其为平衡的，如果 $|X| = |Y|$。Li and Ning [13] 给出了一个谱半径条件，保证具有给定最小度的平衡二部图包含哈密顿路。记 $Q_n^k = K_{k,n-k-1} \sqcup \widehat{\ \ n-k\ \ } K_{,k+1}$ 和$R_n^k = \widehat{\ \ \ \ } K_{k,k} \sqcup K_{n-k,n-k}$。

定理1.1 (Li and Ning [13])。设图 G 是一个具有 $2n$ 个顶点的平衡二部图，其最小度为 $\delta($图 $G) \geq k$，其中 $k \geq 0$ 且 $n \geq (k+2)^2$。
(i) 若 $k \neq 1$ 且 $\rho($图 $G) \geq \rho(Q_n^k)$，则 G 存在一条哈密顿路，除非 $G \cong Q_n^k$。(ii)
若 k 且 (图 $G) \geq \rho(R_n^k)$，则 G 存在一条哈密顿路，除非 $G \cong R_n^k$。

由定理1.1，可得以下结果。

推论1.1 (Li and Ning [13])。设图 G 是一个具有 $2n$ 个顶点的平衡二部图，且 $n \geq 4$。若

$$\rho(G) \geq \rho(K_{n,n-1} \cup K_1),$$

则 G 存在一条哈密顿路，除非 $G \cong K_{n,\ n-1} \cup K_1$。

若二部图的二部划分为（X,Y），且 $|X| - |Y| = 1$（由对称性亦然），则称其为近乎平衡二部图。Li and Ning [13] 还提出了一个谱半径条件，用于判定给定最小度的近乎平衡二部图是否包含哈密顿路。定义$S_{kn} = K_{k,n-k-1} \sqcup \widehat{\ \ n-k\ \ } K_{,k}$ 以及$T_n^k = K_{k,n-k-1} \sqcup \widehat{\ \ n-k-1\ \ } K_{,k+1}$。

定理*1.2*（*Li and Ning* [13]）。设 G 是一个有 $2n-1$ 个顶点、最小度为 $\delta(G) \geq k$ 的近乎平衡二部图，其中 $k \geq 0$ 且 $n \geq (k+1)^2$。*(i)* 若 $k \geq 1$ 且 $\rho(G) \geq \rho(S_{kn})$，则 G 存在一条哈密顿路，除非 $G \cong S_n^k$。*(ii)* 若 $k = 0$ 且 $\rho(G) \geq \rho(T_n^0)$，则 G 存在一条哈密顿路，除非 $G \cong T^0 n$。

根据定理1.2，可以推导出以下结果。

推论1.2 (Li and Ning [13])。设图 G 是一个具有$2n-1$个顶点的近乎平衡二部图。若

$$\rho(G) \geq \rho(K_{n-1,n-1} \cup K_1),$$

那么图 G 存在一条哈密顿路，除非 $G \cong K_{n-1,\ n-1} \cup K_1$。

基于推论1.1 和1.2，一个自然而有趣的问题随之产生。

问题1.2。关于谱半径，存在彩虹哈密顿路径的充分条件是什么？

围绕问题1.2，我们给出了充分条件，这些条件基于谱半径，保证图族中的二部图存在彩虹哈密顿路径。

定理 1.3。设 $\mathcal{G} = \{G_1, G_2, \ldots, G_{2n-1}\}$ 是一个由顶点集为 $[2n]$、二部划分为 (X,Y) 的平衡二部图构成的图族，其中 n 。若

$$\rho(G_i) \geq \rho(K_{n,n-1} \cup K_1)$$

对每个 $i \in [2n-1]$，则 $\mathcal{G}$ 存在彩虹哈密顿路，除非 $G_1 = G_2 = \cdots = G_{2n-1} \cong K_{n,n-1} \cup K_1$。

定理 1.4。设 $\mathcal{G} = \{G_1, G_2, \ldots, G_{2n-2}\}$ 是一个由顶点集为 $[2n-1]$、二部划分为 (X,Y) 的近乎平衡二部图构成的图族，其中 n 。若

$$\rho(G_i) \geq \rho(K_{n-1,n-1} \cup K_1)$$

对每个 $i \in [2n-2]$，则 $\mathcal{G}$ 存在彩虹哈密顿路，除非 $G_1 = G_2 = \cdots = G_{2n-2} \cong K_{n-1,n-1} \cup K_1$。

Li and Ning [12] 还为具有给定最小度的二部图建立了保证存在彩虹哈密顿圈的谱半径条件。记$B_n^k = K_{k,\ n-k} \sqcup \widehat{K_{n-k,\ k}}$。

定理1.5 (Li and Ning [12])。设图 G 是一个有$2n$ 个顶点、最小度为 δ(图 G) $\geq k \geq 1$。若 $n \geq (k+1)^2$ 且 ρ(图 G) $\geq \rho(B_n^k)$，则图 G 存在哈密顿圈，除非图 $G \cong B_n^k$。

根据定理 1.5，我们可以立即得到以下推论。

推论 1.3 (Li and Ning [12])。设图 G 是一个有$2n$ 个顶点的平衡二部图，其中 $n \geq 4$。若

$$\rho(G) \geq \rho(K_{1,n-1} \sqcup \widehat{K_{n-1,1}}),$$

则图 G 含有一个哈密顿圈，除非图 $G \cong K_{1,n-1} \sqcup \widehat{K_{n-1}}, K_1$。

受推论1.3的启发，我们提出以下问题。

问题 1.3。关于谱半径，存在彩虹哈密顿圈的充分条件是什么？

围绕问题1.3，我们提出了一个基于谱半径的充分条件，以保证一族平衡二部图包含彩虹哈密顿圈。

定理 1.6。设 $\mathcal{G} = \{G_1, G_2, \ldots, G_{2n}\}$ 是一族定义在顶点集 $[2n]$ 上、二部划分为 (X,Y) 的平衡二部图，其中 $n \geq 2$。若

$$\rho(G_i) \geq \rho(K_{1,n-1} \sqcup \widehat{K_{n-1,1}})$$

对每个 $i \in [2n],$，则 $\mathcal{G}$ 存在彩虹哈密顿圈，除非 $G_1 = G_2 = \cdots = G_{2n} \cong \widehat{K_{1,n-1} \sqcup K_{n-1,1}}$。

2 预备知识

本节首先介绍一种重要技巧和若干辅助结果，后续论证中都会用到这些内容。

在极值集合论中，移位是一种最重要且应用最广泛的工具。图上的移位运算也称为 Kelmans 操作（例如参见 [2]），它使我们能够关注具有特定结构性质的集合。令图 G 为顶点集 $[n]$上的一个图。定义 (x,y)-移位 S_{xy} 为 $S_{xy}(G) = \{S_{xy}(e) : e \in E(G)\}$，其中

$$S_{xy}(e) = \begin{cases} (e \setminus \{y\}) \cup \{x\}, & \text{if } y \in e,\ x \notin e \text{ and } (e \setminus \{y\}) \cup \{x\} \notin E(G); \\ e, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

若对每一对满足$x < y$的 (x,y)，都有$S_{xy}(G) =$ 图 G，则称图 G 是移位的，记作$S(G)$。根据 (x, y)-移位的定义，我们有 $|E(G)| = |E(S_{xy}(G))|$。换言之，(x, y)-移位不会改变边的数量。此外，一个自然的问题是：移位是否会影响图的谱半径？2009 年，Csikv´ari [4] 证明，移位运算不会降低图的谱半径。

引理 2.1 (Csikv´ari [4])。设 x，y 是图 G 中的两个顶点。则 $\rho(S_{xy}(G)) \geq \rho(G)$。

Guo 等人 [8] 确定了连通图中进行 (x,y)-移位操作后谱半径的变化。

引理 2.2 (Guo 等人 [8])。设 G 是一个顶点集为 $[n]$ 的连通图。设 x，y 是 G 的两个顶点。则 $\rho(S_{xy}(G)) > \rho(G)$ 除非 $G \cong S_{xy}(G)$。

对于一个二部图，为确保该图在 (x,y)-移位之后仍为二部图，我们必须从同一部中选取顶点 x 和 y。设图 G 是顶点集 $[n]$ 上的一个二部图。若对图 G 的同一部中满足 $x < y$ 的每一对 (x,y)，都有 S_{xy}(图 G) = 图 G，则称图 G 为双移位。下面的观察给出了二部图 G的 (x,y)-移位的一个基本性质。

观察 2.1. 设图 G 是顶点集 $[n]$ 上具有划分 (X,Y) 的二部图. 若图 G 为双移位，则对任意 $\{x_1,x_2\}\subseteq X$ 和 $\{y_1,y_2\}\subseteq Y$，只要 $x_1\le x_2$ 且 $y_1\le y_2$,，$\{x_2,y_2\}\in E$(图 G) 便蕴含 $\{x_1,y_1\}\in E$(图 G).

对所有满足条件的二元组（x，y）迭代（x，y）-移位$x<y$最终将得到一个移位图（见 [5] 和 [6]）。类似地，对于二部图图 G，可以验证，通过在图 G的同一部分中反复应用移位运算，可以得到一个双移位图。

Let $S_{xy}(\mathcal{G})=\{S_{xy}(G_1),S_{xy}(G_2),\ldots,S_{xy}(G_n)\}$ and $S(\mathcal{G})=\{S(G_1),S(G_2),\ldots,S(G_n)\}$.

引理 2.3（He, Li and Feng [10]）。给定一个图族 $\mathcal{G}=\{$图 G_1,图 $G_2,\ldots,$ 图 $G_{n-1}\}$，其顶点集为 $[n]$。设 $x<y$ 是 $[n]$中的两个顶点。如果 $S_{xy}(\mathcal{G})$ 具有一条彩虹哈密顿路径，那么 $\mathcal{G}$也具有一条彩虹哈密顿路径。

引理 2.4（Zhang and van Dam [17]）。设 $\mathcal{G}=\{$图 G_1, 图 $G_2,\ldots,$ 图 $G_n\}$是定义在顶点集 $[n]$上的图族。如果 $S(\mathcal{G})$ 具有一条彩虹哈密顿圈，那么 $\mathcal{G}$也具有一条彩虹哈密顿圈。

我们将使用以下关于二部图的谱不等式，该不等式是 Nosal [14]结果的直接推论。（另见 [1]。）

引理 2.5（Nosal [14], Bhattacharya, Friedland and Peled [1]）。设 G 是一个二部图，则

$$\rho(G)\le\sqrt{|E(G)|}.$$

设A 是一个实对称矩阵，其行和列的指标由$X=[n]$给出。给定一个划分 $\Pi: X=X_1\cup X_2\cup\cdots\cup X_m$，矩阵$A$ 记为

$$A=\begin{bmatrix}A_{11}&\cdots&A_{1m}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ A_{m1}&\cdots&A_{mm}\end{bmatrix},$$

其中，A_{ij}是A中行指标属于X_i且列指标属于X_j的子矩阵。设B_Π是一个阶数为m 的矩阵，其（i，j）项等于A_{ij}的平均行和。则B_Π 称为A 关于该划分的商矩阵。如果每个块A_{ij} 的行和均为常数，则该划分 Π 是均匀的。

引理 2.6（Brouwer and Haemers [2], Godsil and Royle [7]）。设 A 是一个实对称矩阵，且 $\rho(A)$ 是其最大特征值。设 B_Π 是 A 的一个均匀商矩阵。则 B_Π 的特征值也是 A 的特征值。此外，如果 A 是非负且不可约的，则 $\rho(A)=\rho(B_\Pi)$。

引理 2.7. *(i)* 对于 $1\le k\le n-2$，有 $\rho(Q_n^k)<\rho(Q_n^0)$ 以及 $\rho(T^{kn})<\rho(T^{0}{}_n)$。*(ii)* 对于 $2\le k\le n-2$，有 $\rho(B_n^k)<\rho(B_n^1)$。

证明。 (i) 经过计算，我们得到 $\rho(Q_n^0)=\sqrt{n(n-1)}$ 和 $\rho(T_n^0)=n-1$。结合引理 2.5 和 $1\le k\le n-2$，我们得到

$$\begin{aligned}\rho(Q_n^k)\le\sqrt{|E(Q_n^k)|}&=\sqrt{nk+(n-k)(n-k-1)}\\&=\sqrt{k^2-(n-1)k+n(n-1)}\\&<\sqrt{n(n-1)}=\rho(Q_n^0).\end{aligned}$$

对于 $1 \le k \le n-3$，由引理 2.5，我们得到

$$\begin{aligned}\rho(T_n^k) \le \sqrt{|E(T_n^k)|} &= \sqrt{nk+(n-k-1)^2} \\ &= \sqrt{k^2-(n-2)k+(n-1)^2} \\ &< n-1=\rho(T_n^0).\end{aligned}$$

当$k = n-2$时，$T_n^{n-2} = K_{n-2,1} \sqcup \overset{\frown}{1} K_{,n-1}$ 的邻接矩阵具有均匀商矩阵

$$B_\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ n-2 & 1 & 0 & 0 \\ n-2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

根据引理 2.6，我们得到 $\rho(B_\Pi) = \rho(T_n^{n-2})$。经计算，$B_\Pi$ 的特征多项式为

$$P(x) = x^4-(n-1)^2x^2+(n-1)(n-2).$$

于是我们有

$$P(n-1) = (n-1)^4-(n-1)^4+(n-1)(n-2) = (n-1)(n-2) > 0.$$

容易验证，若$x > n-1$，则$P(x) > P(n-1)$。因此可得$\rho(T_{n-2n}) < \rho(T_n^0)$。

(ii) 注意到 Q_n^0 是 B_n^1的真子图。于是我们有 $\rho(Q_n^0) \le \rho(B_n^1)$。当 $2 \le k \le n-2$时，由引理 2.5可得

$$\begin{aligned}\rho(B_n^k) \le \sqrt{|E(B_n^k)|} &= \sqrt{nk+(n-k)^2} \\ &= \sqrt{k^2-nk+n^2} \\ &\le \sqrt{n^2-2n+4} \\ &< \sqrt{n(n-1)} \\ &= \rho(Q_n^0) \le \rho(B_n^1).\end{aligned}$$

结论得证。 □

引理 2.8. 设 $p \ge q \ge 0$ 为整数。设 $G \cong G_1 \cup pK_1$，且 G' 是 G 的子图，其中 G_1 是连通的。若 $\rho(G') = \rho(G)$，则 $G' \cong G_1 \cup qK_1$。

证明。设 G_1' 是 G' 的一个连通分量，满足 $\rho(G_1') = \rho(G')$。那么 G_1' 是 G 的子图。此外，G_1' 是 G_1的子图。注意，$\rho(G) = \rho(G_1)$。于是$\rho(G_1') = \rho(G_1)$。由于 G_1 是连通的，$G_1' \cong G_1$。因此 $G' \cong G_1 \cup qK_1$。 □

引理 2.9. 设 r 为正整数，且 $\mathcal{G} = \{G_1, G_2, \ldots, G_{n-1}\}$ 是定义在顶点集 $[n]$. 上的一个图族。假设 $P_{r+1} = u_1u_2\cdots u_ru_{r+1}$ 是 $\mathcal{G}$ 的一条最长彩虹路径，满足对每个 $i \in [r]$，$u_iu_{i+1} \in E(G_i)$。若 $d_{G_{r+1}}(u_{r+1}) > 0$，则 $N_{G_{r+1}}(u_{r+1}) \subset V(P_{r+1})$。

证明。 反设存在一个顶点 $u_{r+2} \notin$ 图 $G(P_{r+1})$，使得$u_{r+1}u_{r+2} \in E($图 $G_{r+1})$。那么$P_{r+2} = u_1u_2\cdots u_{r+1}u_{r+2}$是一条更长的、属于 $\mathcal{G}$ 的彩虹路径，这与P_{r+1}的选择矛盾。□

3 定理1.3 的证明

回顾一下，$Q_n^0 = K_{n,\ n-1} \cup K_1$。在给出证明之前，我们先介绍一些关键引理。

引理 3.1. 设图 G 是顶点集 $[2n]$ 上的平衡二部图，二部划分为(X, Y), 其中 $n \geq 2$. 设 $\{u,v\} \subseteq X$ 或 $\{u,v\} \subseteq Y$，且 $u < v$. 若 $\rho(G) \geq \rho(Q_n^0)$ 且 $S_{uv}(G) \cong Q_n^0$, 则 $G \cong Q_n^0$.

证明。注意，$S_{uv}(G) \cong Q_n^0$。设 w 是 S uv(G) 中的孤立顶点。不失一般性，假设 $w \in X$。记 $X_1 = X \setminus \{w\}$。若 $\{u, v\} \subseteq X_1$, , 则根据 (u, v)-移位的定义，有 $G = S_{uv}(G) \cong Q_n^0$。若 $u = w$ 或 $v = w$，由 $u < v$ 可知，$u \in X_1$ 且 $v = w \in X$。我们断言 $d_G(u) = 0$ 或 $d_G(v) = 0$。事实上，若 $d_G(u) > 0$ 且 $d_G(v) > 0$，则 G 连通且 $G \ncong S_{uv}(G)$。由引理 2.2，得到$\rho(S\ uv(G)) > \rho(G)$。注意，$S_{uv}(G) \cong Q_n^0$。于是

$$\rho(Q_n^0) = \rho(S_{uv}(G)) > \rho(G) \geq \rho(Q_n^0),$$

矛盾。因此 $d_G(u) = 0$ or $d_G(v) = 0$，所以图 G 是 Q_n^0 的子图。注意，$\rho(G) \geq \rho(Q_n^0)$。由引理 2.8，$G \cong Q_n^0$。若 $\{u, v\} \subseteq Y$，则有 $G = S_{uv}(G) \cong Q_n^0$。□

由引理 2.1和 3.1，我们立即得到以下结果。

推论 3.1。设图 G 是一个顶点集为 $[2n]$ 的平衡二部图，其二部划分为$(X,\ Y)$，其中 $n \geq 2$。若 $\rho(G) \geq \rho(Q_n^0)$ 且 $S(G) \cong Q_n^0$，则 $G \cong Q_n^0$。

接下来我们证明一个对主要结果至关重要的技术引理。

引理 3.2. 设 $\mathcal{G} = \{G_1, G_2, \ldots, G_{2n-1}\}$ 是定义在顶点集 $[2n]$ 上、二部划分为(X,Y), 的平衡二部图族，其中 $n \geq 2$. 若对于每个 $i \in [2n-1]$,，均有 $G_i \cong Q_n^0$，且存在 $p,q \in [2n-1]$ 使得 $G_p \neq G_q$,，则 $\mathcal{G}$ 存在一条彩虹哈密顿路径。

证明. 不失一般性，设 $p = 1$ 且 $q = 2n-1$。由于 $G_i \cong Q_n^0$，G_i 中恰有一个度为 0 的顶点，其余顶点的度均为 $n-1$或 n，对每个 $i \in [2n-1]$均如此。设 u_1 是 G_{2n-1}中的孤立顶点。假设 $u_1 \in X$。由于 $G_1 \neq G_{2n-1}$ 且 $G_1 \cong Q_n^0$，我们得出 $d_{G_1}(u_1) \geq n-1 > 0$。接下来，我们将证明分为两种情况。

情形 1. $n = 2$。

设 $X = \{u_1, u_3\}$ 和 $Y = \{u_2, u_4\}$。注意，$d_{G_1}(u_1) \geq n-1 = 1$。于是我们假设 $u_1u_2 \in E$(图 G_1)。由于 $d_{G_3}(u_1) = 0$，$d_{G_3}(u_3) = 2$ 且 $u_2u_3, u_3u_4 \in E$(图 G_3)。若 $d_{G_2}(u_2) = 0$，则 $u_3u_4 \in E$(图 G_2)。因此，$P = u_1u_2u_3u_4$ 是图 $\mathcal{G}$ 的一条彩虹哈密顿路径，其中 $u_1u_2 \in E$(图 G_1)，$u_2u_3 \in E$(图 G_3)，且 $u_3u_4 \in E$(图 G_2)。若 $d_{G_2}(u_3) = 0$，则 $u_4u_1 \in E$(图 G_2)。因此，$P = u_4u_1u_2u_3$ 是图 $\mathcal{G}$ 的一条彩虹哈密顿路径，其中 $u_4u_1 \in E$(图 G_2)，$u_1u_2 \in E$(图 G_1)，且 $u_2u_3 \in E$(图 G_3)。若 $d_{G_2}(u_3) \neq 0$ 且 $d_{G_2}(u_2) \neq 0$，则 $u_2u_3 \in E$(图 G_2)。因此，$P = u_1u_2u_3u_4$是图 $\mathcal{G}$ 的一条彩虹哈密顿路径，其中 $u_1u_2 \in E$(图 G_1)，$u_2u_3 \in E$(图 G_2)，且 $u_3u_4 \in E$(图 G_3)。

情形2。$n \geq 3$。

由于 $d_{G_1}(u_1) \geq n-1 \geq 2$，存在一个顶点 u_2，使得 $u_1u_2 \in E(G_1)$ 且 $d_{G_2}(u_2) \geq n-1 \geq 2$。于是，我们可以找到一条边 $u_2u_3 \in E(G_2)$ 和 $u_3 \neq u_1$。不失一般性，设 $P_{r+1} = u_1u_2\cdots u_ru_{r+1}$ 是 $\mathcal{G}$ 的一条最长彩虹路径，使得对于每个 $i \in [r]$，（其中 $r \geq 2$），均有 $u_iu_{i+1} \in E(G_i)$。

情形 2.1。r 为奇数。

在此情形下，$3 \leq r \leq 2n-1$。回顾 $u_1 \in X$。由此可得，对于每个 $i \in [r_2^{+1}]$，$u_{2i-1} \in X$ 且 $u_{2i} \in Y$。由于 $u_r \in X$，我们有 $N_{G_r}(u_r) \subseteq Y$。注意到 $d_{G_r}(u_r) \geq n-1$ and $|V(P_r) \cap Y| = r_2^{-1}$。如果 $3 \leq r \leq 2n-5$，则有

$$|N_{G_r}(u_r) \setminus V(P_r)| \geq (n-1) - \frac{r-1}{2} \geq 2.$$

因此，存在一个新顶点 $u'_{r+1} \notin V(P_r)$，使得 $u_ru'_{r+1} \in E(G_r)$，且 $d_{G_{r+1}}(u'_{r+1}) \geq n-1$。令 $P'_{r+1} = u_1u_2\cdots u_ru'_{r+1}$。于是有

$$|N_{G_{r+1}}(u'_{r+1}) \setminus V(P'_{r+1})| \geq (n-1) - \frac{r+1}{2} \geq 1.$$

这意味着存在一个顶点 $u_{r+2} \notin V(P'_{r+1})$，使得 $u'_{r+1}u_{r+2} \in E(G_{r+1})$。现在我们发现，$P = u_1u_2\cdots u_ru'_{r+1}u_{r+2}$ 是 $\mathcal{G}$ 的一条更长的彩虹路径，这与 P_{r+1} 的选取矛盾。因此，$r = 2n-3$ 或 $r = 2n-1$。如果 $r = 2n-1$，则 $P_{2n} = u_1u_2\cdots u_{2n-1}u_{2n}$ 是 $\mathcal{G}$ 的一条彩虹哈密顿路。接下来考虑 $r = 2n-3$。令 u_{2n-1}、$u_{2n} \in [2n] \setminus V(P_{2n-2})$。不失一般性，我们假设 $u_{2n-1} \in X$ 且 $u_{2n} \in Y$。

断言 1. $d_{G_{2n-2}}(u_{2n-2}) = 0$ 或 $d_{G_{2n-2}}(u_{2n-1}) = 0$。

证明。若 $d_{G_{2n-2}}(u_{2n-2}) = 0$，则结论成立。接下来考虑 $d_{G_{2n-2}}(u_{2n-2}) > 0$。由引理 2.9，$N_{G_{2n-2}}(u_{2n-2}) \subset V(P_{2n-2})$。若 $d_{G_{2n-2}}(u_{2n-2}) = n$，则 $u_{2n-1} \in N_{G_{2n-2}}(u_{2n-2})$ 且 $u_{2n-1} \in V(P_{2n-2})$，矛盾。因此 $d_{G_{2n-2}}(u_{2n-2}) = n-1$。由于 $u_{2n-1} \notin V(P_{2n-2})$，我们有 $u_{2n-1} \notin N_{G_{2n-2}}(u_{2n-2})$。由图 $G_{2n-2} \cong Q_n^0$，$d_{G_{2n-2}}(u_{2n-1}) = 0$。□

由断言 1，我们有 $u_1u_{2n} \in E(\text{图 } G_{2n-2})$。回顾一下，$d_{G_{2n-1}}(u_1) = 0$ 且图 $G_{2n-1} \cong Q_n^0$。于是，$d_{G_{2n-1}}(u_{2n-2}) = n-1$，且 $u_{2n-2}u_{2n-1} \in E(\text{图 } G_{2n-1})$。因此，$P = u_{2n}u_1u_2\cdots u_{2n-3}u_{2n-2}u_{2n-1}$是 $\mathcal{G}$的一条彩虹哈密顿路径。

情形 2.2. r 为偶数。

在这种情形下，$2 \leq r \leq 2n-2$。回顾一下，$u_1 \in X$。由此可得，$u_{2i+1} \in X$ 且$u_{2i} \in Y$对每个$i \in [r_2]$均成立。若 $2 \leq r \leq 2n-6$，则我们有

$$|N_{G_r}(u_r) \setminus V(P_r)| \geq (n-1) - \frac{r}{2} \geq 2.$$

因此，存在一个顶点$u''_{r+1} \notin V(P_r)$，使得$u_ru''_{r+1} \in E(G_r)$且$d_{G_{r+1}}(u''_{r+1}) \geq n-1$。令$P''_{r+1} = u_1u_2\cdots u_ru''_{r+1}$。那么我们有

$$|N_{G_{r+1}}(u''_{r+1}) \setminus V(P''_{r+1})| \geq (n-1) - \frac{r}{2} \geq 2.$$

这意味着存在一个顶点 $u_{r+2} \notin V(P''_{r+1})$，使得 $u''_{r+1}u_{r+2} \in E(\text{图 } G_{r+1})$。因此，$P = u_1u_2\cdots u_ru''_{r+1}u_{r+2}$是一条更长的彩虹路径 $\mathcal{G}$，这与

对 P_{r+1} 的选择相矛盾。于是 $r \geq 2n-4$。假设 $r = 2n-2$。回忆一下，$u_1, u_{2n-1} \in X$ 且 $d_{G_{2n-1}}(u_1) = 0$。则 $d_{G_{2n-1}}(u_{2n-1}) = n$。因此，

$$|N_{G_{2n-1}}(u_{2n-1}) \cap V(P_{2n-1})| \leq n-1 < n.$$

这意味着 $N_{G_{2n-1}}(u_{2n-1}) \not\subseteq V(P_{2n-2})$，这与引理 2.9 矛盾。接下来考虑 $r = 2n-4$。设 $u_{2n-2}, u_{2n-1}, u_{2n} \in [2n] \setminus V(P_{2n-3})$，满足 $u_{2n-1} \in X$ 且 $u_{2n-2}, u_{2n} \in Y$。我们断言 $d_{G_{2n-3}}(u_{2n-3}) = 0$。事实上，若 $d_{G_{2n-3}}(u_{2n-3}) \geq n-1$，则有

$$|N_{G_{2n-3}}(u_{2n-3}) \cap V(P_{2n-3})| \leq n-2 < n-1.$$

由此可得 $N_{G_{2n-3}}(u_{2n-3}) \not\subseteq V(P_{2n-3})$，这与引理 2.9 矛盾。注意，图 $G_{2n-3} \cong Q_n^0$。因此存在一条边 $u_{2n-2}u_{2n-1} \in E(G_{2n-3})$。回想一下，$u_1$ 是图 G_{2n-1}的唯一孤立顶点。由 $u_{2n-3} \in X$ 和 $u_{2n-3} \neq u_1$，可得 $d_{G_{2n-1}}(u_{2n-3}) = n$。因此存在两条边 $u_{2n-3}u_{2n-2}, u_{2n-3}u_{2n} \in E(G_{2n-1})$。注意，$d_{G_{2n-2}}(u_{2n-2}) \geq n-1$ 或 $d_{G_{2n-2}}(u_{2n}) \geq n-1$。不失一般性，假设 $d_{G_{2n-2}}(u_{2n}) \geq n-1$。于是有 $u_{2n-1}u_{2n} \in E(G_{2n-2})$ 或 $u_1u_{2n} \in E(G_{2n-2})$。若 $u_{2n-1}u_{2n} \in E(G_{2n-2})$，则 $P' = u_1u_2 \cdots u_{2n-3}u_{2n-2}u_{2n-1}u_{2n}$是一条图 $\mathcal{G}$ 的彩虹哈密顿路径。若 $u_1u_{2n} \in E(G_{2n-2})$，则 $P'' = u_{2n}u_1u_2 \cdots u_{2n-3}u_{2n-2}u_{2n-1}$ 是一条图 $\mathcal{G}$的彩虹哈密顿路径。□

现在我们可以给出定理 1.3 的证明。

定理 1.3 的证明。对于 $n = 2$，由引理 2.5 可得 $\rho(Q_2^0) \leq \rho(\text{图 } G_i) \leq \sqrt{|E(\text{图 } G_i)|}$，这意味着 $2 = \rho^2(Q_2^0) \leq |E(\text{图 } G_i)| \leq 4$。如果对每个 $i \in [3]$都有 $|E(\text{图 } G_i)| = 2$，那么图 $G_i \cong Q_2^0$ 或 $K_2 \cup K_2$。注意到 $\rho(\text{图 } G_i) \geq \rho(Q_2^0) > \rho(K_2 \cup K_2)$。于是图 $G_i \cong Q_2^0$。反设图 G $\mathcal{G}$ 没有彩虹哈密顿路。由引理 3.2 可得图 $G_1 = $ 图 $G_2 = $ 图 $G_3 \cong Q_2^0$。若存在某个 $i \in [3]$ 使得 $|E(\text{图 } G_i)| \geq 3$，则不失一般性，设 $|E(\text{图 } G_1)| \geq 3$，因此 Q_2^0 是图 G_1的真子图。只需证明图 G $\mathcal{G}$ 有一条彩虹哈密顿路。注意，对每个 $i \in [3]$，Q_2^0 都是图 G_i 的子图。设图 $G_i' \cong Q_2^0$ 是图 G_i的一个子图，其中 $i = 2, 3$。由于 $|E(\text{图 } G_1)| \geq 3$，存在图 G_1 的两个子图 G_1' 和 G_1''，使得 $G_1' \cong Q_2^0, G_1'' \cong Q_2^0$ 且 $G_1' \neq G_1''$。于是图 $G_1' \neq$ 图 G_2' 或图 $G_1'' \neq$ 图 G_2'。由引理 3.2，{图 G_1'、图 G_2'、图 G_3'}或 {图 G_1''、图 G_2'、图 G_3'}有一条彩虹哈密顿路，这意味着图 $G$$\mathcal{G}$也有一条彩虹哈密顿路。

接下来我们考虑 $n \geq 3$ 的情形。假设 $\mathcal{G} = \{\text{图 } G_1, \text{图 } G_2, \ldots, \text{图 } G_{2n-1}\}$ 没有彩虹哈密顿路径。为方便起见，对每个 $i \in [2n-1]$，我们记 $S_i = S(\text{图 } G_i)$。根据引理 2.3，双移位族 $\{S_1, S_2, \ldots, S_{2n-1}\}$ 没有彩虹哈密顿路径。由引理 2.1 以及 $\rho(\text{图 } G_i) \geq \rho(Q_n^0)$，我们有

$$\rho(S_i) \geq \rho(G_i) \geq \rho(Q_n^0). \tag{1}$$

我们首先证明 $S_i \cong Q_n^0$ 对每个 $i \in [2n-1]$成立。不失一般性，我们假设 $X = [n]$ 且 $Y = [2n] \setminus [n]$。定义 $e_j = \{j, 2n-j+1\}$，其中 $1 \leq j \leq n$。

断言 2. $\{e_2, e_3, \ldots, e_{n-1}\} \subseteq E(S_i)$ 对每个 $i \in [2n-1]$。

证明。假设断言 2 不成立。那么存在某个 $2 \leq p \leq n-1$ 以及某个 $q \in [2n-1]$，使得 $e_p = \{p, 2n-p+1\} \notin E(S_q)$。注意，$S_q$是双移位的。根据观察 2.1，对于每条边 $\{i, j\} \in E(S_q)$，都有 $1 \leq i < p$ 或 $n+1 \leq j < 2n-p+1$。

因此 S_q 是 Q_n^{p-1}的子图，这意味着 $\rho(S_q) \le \rho(Q_n^{p-1})$。 根据引理2.7，有

$$\rho(S_q) \le \rho(Q_n^{p-1}) < \rho(Q_n^0),$$

这与（1）矛盾。 □

若对每个 i ∈ [2n − 1]，均有 $d_{S_i}(n) = 0$，则 S i 是 Q_n^0 的子图。由 (1) 和引理 2.8 可知，对 i ∈ [2n − 1]，S i ≅ Q_n^0。类似地，若对每个 i ∈ [2n − 1]，均有 $d_{S_i}(2n) = 0$，则 S i ≅ Q_n^0。接下来考虑存在 p、q ∈ [2n − 1]，使得 $d_{S_p}(n) > 0$且 $d_{S_q}(2n) > 0$的情形。回顾一下，S p 和 S q 是双移位的。根据观察 2.1，我们可以推知 $e_n = \{n, n+1\} \in E(S\ p)$，且 $e_1 = \{1, 2n\} \in E(S_q)$。接下来将证明分为两种情形。

情形 1. $p \neq q$。

不失一般性，假设 p = n 且 q = 1。那么 $e_1 \in E(S_1)$ 且 $e_n \in E(S\ n)$。根据断言 2，对于 2 ≤ j ≤ n − 1，我们可以选取 $e_j \in E(S\ j)$。注意，$e_2 = \{2, 2n-1\} \in E(S\ n_{+1})$，且对于 2 ≤ j ≤ n−1，$e_j = \{j, 2n-j+1\} \in E(S\ n_{+}j)$。根据观察 2.1，$\{1, 2n-1\} \in E(S\ n_{+1})$，且对于 2 ≤ j ≤ n − 1，{j, 2n − j} ∈ E(S n+j)。因此，{S 1, S 2, . . . , S $2n_{-1}$}有一条彩虹哈密顿路径，矛盾。

情形2. $p = q$。

不失一般性，我们假设 p = q = 1。我们声称，对于每个 2 ≤ i ≤ 2n − 1，都有 $d_{S_i}(n) = d_{S}$ i(2n) =0。事实上，如果存在某个 2 ≤ j ≤ 2n − 1，使得 d_Sj(n) > 0 或 d_Sj(2n) > 0，那么我们就有 $d_{S_1}(n) > 0$ 且 d_Sj(2n) > 0，或者 $d_{S_1}(2n) > 0$ 且 d_Sj(n) > 0。根据情形 1，{S 1, S_2, . . . , S $2n_{-1}$} 有一条彩虹哈密顿路径，矛盾。因此，对于每个 2 ≤ i ≤ 2n − 1，都有 $\rho(S_i) \le \rho(K_{n-1,n-1}) < \rho(Q_n^0)$，这与 (1) 矛盾。

因此，对于每个 i ∈ [2n − 1]，S i ≅ Q_n^0。结合 (1)，我们得到 $\rho(S_i) = \rho$(图 G_i) =ρ (Q_n^0)。由推论 3.1 可知，图 $G_i \cong Q_n^0$。假设存在 p, q ∈ [2n − 1]，使得图 $G_p \neq$ 图 G_q。根据引理 3.2，$\mathcal{G}$ 有一条彩虹哈密顿路径，矛盾。因此，图 G_1 = 图 $G_2 = \cdots =$ 图 $G_{2n-1} \cong Q_n^0$。 □

4 定理1.4的证明

回顾一下，$T_n^0 = K_{n-1,\ n-1} \cup K_1$。 本节将给出定理 1.4 的证明。

引理 4.1. 设图 G 是一个顶点集为 $[2n-1]$ 的近乎平衡二部图，其二部划分为 (X, Y)。 设 $\{u, v\} \subseteq X$ 或 $\{u, v\} \subseteq Y$，且 $u < v$。 若 $\rho(G) \ge \rho(T_n^0)$且 $S_{uv}(G) \cong T^0{}_n$，则图 $G \cong T_n^0$。

证明。注意，S uv(G) ≅ T_n^0。设 w 是 S uv(G) 中度为 0 的顶点。不失一般性，设 w ∈ X。记 X_1 = X \ {w}。若 {u, v} ⊆ X_1, ，则有 G =S uv(G) ≅ T_n^0。若 u =w 或 v =w，则可得 u ∈X_1，且 v =w ∈X for u < v。我们断言，d_G(u) = 0 或 d_G(v) = 0。否则，有 d_G(u) > 0 且 d_G(v) > 0。于是 G 是连通的，且 G ≇S uv(G)。由引理 2.2，ρ(S uv(G)) > ρ(G)。回顾 S uv(G) ≅ T_n^0。于是有

$$\rho(T_n^0) = \rho(S_{uv}(G)) > \rho(G) \ge \rho(T_n^0),$$

矛盾。因此，$d_G(u) = 0$ 或 $d_G(v) = 0$，这意味着 G 是 T_n^0 的子图。注意，$\rho(G) \geq \rho(T^0 n)$。由引理 2.8，$G \cong T^0 n$。若 $\{u, v\} \subseteq Y$，则可推出 $G = S uv(G) \cong T_n^0$。□

根据引理 2.1 和 4.1，可直接得到以下结果。

推论 4.1. 设 G 为顶点集 $[2n-1]$ 上的近乎平衡二部图，其二部划分为 (X, Y). 若 $\rho(G) \geq \rho(T^0 n)$ 且 $S(G) \cong T^0 n$, 则 $G \cong T_n^0$。

接下来，我们将证明一个在主要结果中起关键作用的技术引理。

引理 4.2. 设 $\mathcal{G} = \{G_1, G_2, \ldots, G_{2n-2}\}$ 是顶点集 $[2n-1]$ 上、二部划分为 (X, Y). 的一族近乎平衡二部图。若对于每个 $i \in [2n-2]$, 均有 $G_i \cong T_n^0$，且存在 $p, q \in [2n-2]$ 使得 $G_p \neq G_q$, 则 $\mathcal{G}$ 存在一条彩虹哈密顿路径。

证明。不失一般性，我们假设 $p = 1$，$q = 2n-2$，并且 $|X| = n$。由于图 $G_i \cong T_n^0$ 且 $|X| = n$，X 中存在唯一的孤立顶点，并且所有其他顶点的度为 $n-1$，在图 G_i 中，对于 $i \in [2n-2]$。设 u_1 为图 G_{2n-2}的孤立顶点。显然，$u_1 \in X$。由于图 $G_1 \neq$ 图 G_{2n-2} 且图 $G_1 \cong T_n^0$，我们可以得到 $d_{G_1}(u_1) = n-1 > 0$。接下来我们将以下证明分为两种情形。

情形 1. $n = 2$。

假设 $X = \{u_1, u_3\}$ 且 $Y = \{u_2\}$。注意到 $d_{G_1}(u_1) = n-1 = 1$。则我们有 $u_1u_2 \in E$(图 G_1)。由于 $d_{G_2}(u_1) = 0$，我们推出 $d_{G_2}(u_3) = 1$，因此 $u_2u_3 \in E$(图 G_2)。于是 $P = u_1u_2u_3$ 是 $\mathcal{G}$ 的一条彩虹哈密顿路，其中 $u_1u_2 \in E$(图 G_1) 且 $u_2u_3 \in E$(图 G_2)。

情形2. $n \geq 3$.

由于 $d_{G_1}(u_1) = n-1 \geq 2$，存在一个顶点 u_2，使得 $u_1u_2 \in E(G_1)$ 且 $d_{G_2}(u_2) = n-1 \geq 2$。于是，我们可以找到一条边 $u_2u_3 \in E(G_2)$，使得 $u_3 \neq u_1$。不失一般性，设 $P_{r+1} = u_1u_2 \cdots u_ru_{r+1}$ 是图 $\mathcal{G}$ 中的一条最长彩虹路径，且对每个 $i \in [r]$,，都有 $u_iu_{i+1} \in E(G_i)$，其中 $r \geq 2$。

情形 2.1. r 为奇数。

在这种情况下，$3 \leq r \leq 2n-3$。由 $u_1 \in X$ 可知，对于 $i \in [r_2^{+1}]$，有 $u_{2i-1} \in X$ 且 $u_{2i} \in Y$。因此，$N_{G_r}(u_r) \subseteq Y$。注意，$d_{G_r}(u_r) = n-1$，且 $|V(P_r) \cap Y| = r_2^{-1}$。如果 $3 \leq r \leq 2n-5$，那么我们有

$$|N_{G_r}(u_r) \setminus V(P_r)| = (n-1) - \frac{r-1}{2} \geq 2.$$

因此，存在某个顶点 $u'_{r+1} \notin V(P_r)$，使得 $u_ru'_{r+1} \in E$(图 G_r)，且 $d_{G_{r+1}}(u'_{r+1}) = n-1$。类似地，我们有

$$|N_{G_{r+1}}(u'_{r+1}) \setminus V(P_r)| \geq (n-1) - \frac{r+1}{2} \geq 1.$$

于是存在某个顶点 $u_{r+2} \notin V(P_r)$，使得 $u'_{r+1}u_{r+2} \in E$(图 G_{r+1})。因此，$P = u_1u_2 \cdots u_ru'_{r+1}u_{r+2}$ 是 $\mathcal{G}$的一条更长的彩虹路径，这与对 P_{r+1} 的选取相矛盾。于是我们得出 $r = 2n-3$，这意味着 $|V(P_{2n-2})| = 2n-2$。设

$u_{2n-1} \in X$ 使得 $u_{2n-1} \notin V(P_{2n-2})$。由于 图 $G_{2n-2} \cong T_n^0$ 且 $d_{G_{2n-2}}(u_1) = 0$，我们有$d_{G_{2n-2}}(u_{2n-2}) = n - 1$。由此可得

$$|N_{G_{2n-2}}(u_{2n-2}) \cap V(P_{2n-2})| \leq n - 2 < n - 1.$$

由此可推出 $N_{G_{2n-2}}(u_{2n-2}) \not\subseteq V(P_{2n-2})$，这与引理 2.9矛盾。

情形 2.2。 r 为偶数。

在这种情况下， $2 \leq r \leq 2n-2$。根据$u_1 \in X$，对于每个$i \in [\frac{r}{2}]$，我们有$u_{2i+1} \in X$以及$u_{2i} \in Y$。若 $2 \leq r \leq 2n-6$，则有

$$|N_{G_r}(u_r) \setminus V(P_r)| \geq (n-1) - \frac{r}{2} \geq 2.$$

因此，存在某个顶点u''_{r+1}，使得$u_r u''_{r+1} \in E$(图 G_r)，且$d_{G_{r+1}}(u''_{r+1}) = n - 1$。类似地，我们有

$$|N_{G_{r+1}}(u''_{r+1}) \setminus V(P_r)| \geq (n-1) - \frac{r}{2} \geq 2.$$

于是存在某个顶点 $u_{r+2} \notin V(P_{r+1})$，使得 $u''_{r+1}u_{r+2} \in E(G_{r+1})$。此外，我们可以得到，$P = u_1u_2 \cdots u_r u''_{r+1}u_{r+2}$是 $\mathcal{G}$的一条更长的彩虹路径，这与 P_{r+1}的选取矛盾。于是 $r \geq 2n-4$。若 $r = 2n-2$，则 $P_{2n-2} = u_1u_2 \cdots u_{2n-2}u_{2n-1}$是 $\mathcal{G}$的一条彩虹哈密顿路径。若 $r = 2n-4$，则 $|V(P_{2n-3})| = 2n-3$。令 u_{2n-2}、$u_{2n-1} \in [2n-1] \setminus V(P_{2n-3})$。不失一般性，设 $u_{2n-1} \in$ 属于 X 且 $u_{2n-2} \in$ 属于 Y。我们声称 $d_{G_{2n-3}}(u_{2n-3}) = 0$。否则，有 $d_{G_{2n-3}}(u_{2n-3}) = n-1$。由于 $u_{2n-3} \in$ 属于 X，我们可以得到

$$|N_{G_{2n-3}}(u_{2n-3}) \cap V(P_{2n-3})| \leq |Y \cap V(P_{2n-3})| = n - 2 < n - 1.$$

这表明 $N_{G_{2n-3}}(u_{2n-3}) \not\subseteq V(P_{2n-3})$，与引理 2.9 矛盾。于是存在一条边 $u_{2n-2}u_{2n-1} \in E(G_{2n-3})$。由于 $d_{G_{2n-2}}(u_1) = 0$且 $G_{2n-2} \cong T_n^0$，存在一条边 $u_{2n-3}u_{2n-2} \in E(G_{2n-2})$。因此 $P = u_1u_2 \cdots u_{2n-3}u_{2n-2}u_{2n-1}$是 $\mathcal{G}$ 的一条彩虹哈密顿路径。□

现在我们可以给出定理 1.4的证明。

定理 1.4 的证明。对于 $n = 2$和 $i \in [2]$，若 $\rho(G_i) \geq \rho(T_2^0)$，则有 $G_i \cong K_2 \cup K_1 = T_2^0$或 $G_i \cong K_{2,1}$。因此 T 0 2 是 G_i 的一个子图。不失一般性，设 $X = \{u_1, u_3\}$，$Y = \{u_2\}$ 且 $|E(G_1)| \geq |E(G_2)|$。若 $|E(G_1)| = 1$，则 $G_1 \cong G_2 \cong T_2^0$。假设 $\mathcal{G}$没有彩虹哈密顿路径。由引理 4.2，$G_1 = G_2 \cong$T 0 2 。若 $|E(G_1)| = 2$，则 $G_1 \cong K_{2,1}$。我们任意选取一条边，例如 G_2 中的 u_1u_2, 。由于 $u_2u_3 \in E(G_1)$，$P = u_1u_2u_3$ 是 $\mathcal{G}$ 的一条彩虹哈密顿路径。

对于 $n \geq 3$，反设 $\mathcal{G} = \{G_1, G_2, \ldots, G_{2n-2}\}$没有彩虹哈密顿路径。为方便起见，对于每个 $i \in [2n-2]$，记 $S_i = S(G_i)$。由引理 2.3 可知，双移位图族 $\{S_1, S_2, \ldots, S_{2n-2}\}$没有彩虹哈密顿路径。由引理 2.1 以及 $\rho(G_i) \geq \rho(T_n^0)$，我们有

$$\rho(S_i) \geq \rho(G_i) \geq \rho(T_n^0). \tag{2}$$

接下来我们证明，对每个$i \cong T_n^0$，$i \in [2n-2]$均成立。不失一般性，我们假设$X = [n-1]$且$Y = [2n-1] \setminus [n-1]$。定义$e_j = \{j, 2n-j\}$，其中 $1 \leq j \leq n-1$。

断言3。 $\{e_2, e_3, \ldots\ldots, e_{n-1}\} \subseteq E(S_i)$ 对于每个 $i \in [2n-2]$。

证明。假设断言3不成立。那么存在某个 $2 \le p \le n-1$ 以及某个 $q \in [2n-1]$，使得 $e_p = \{p, 2n-p\} \notin E(S_q)$。由于 S_q 是双移位的，根据观察 2.1，对于 S_q 中的每条边 $\{i, j\} \in E$，都有 $1 \le i < p$ 或 $n \le j < 2n-p$。这说明 S_q 是 T_n^{p-1} 的子图。因此 $\rho(S_q) \le \rho(T_n^{p-1})$。由引理 2.7，得到

$$\rho(S_q) \le \rho(T_n^{p-1}) < \rho(T_n^0),$$

这与（2）相矛盾。 □

若对于每个 $i \in [2n-2]$，均有 $d_{S_i}(2n-1) = 0$，则 S_i 是 T_n^0 的子图。由（2）和引理 2.8，得到 $S_i \cong T_n^0$。现在假设存在某个 $p \in [2n-2]$，使得 $d_{S_p}(2n-1) > 0$。回顾一下，S_p 是双移位的。根据观察 2.1，可得 $e_1 = \{1, 2n-1\} \in E(S_p)$。不失一般性，假设 $p = 1$。由断言 3 可知，对于 $2 \le j \le n-1$，有 $e_j \in E(S_j)$。注意，$e_2 = \{2, 2n-2\} \in E(S_n)$，且对于 $2 \le j \le n-1$，有 $e_j = \{j, 2n-j\} \in E(S_{n+j-1})$。根据观察 2.1，$\{1, 2n-2\} \in E(S_n)$，且 $\{j, 2n-j-1\} \in E(S_{n+j-1})$。于是，$\{S_1, S_2, \ldots, S_{2n-2}\}$ 有一条彩虹哈密顿路，矛盾。因此，对于 $i \in [2n-2]$，有 $S_i \cong T_n^0$。

根据（2），我们有 $\rho(S_i) = \rho(G_i) = \rho(T_n^0)$。根据推论 4.1，我们可以得到 $G_i \cong T_n^0$。假设存在 p、$q \in [2n-1]$ 使得 $G_p \ne G_q$。由引理 4.2，$\mathcal{G}$ 有一条彩虹哈密顿路径，矛盾。因此 $G_1 = G_2 = \cdots = G_{2n-2}$ 且 $G_1 \cong T_n^0$。□

定理1.6的证明

回顾 ，$B_n^1 = K_{1,\,n-1} \sqcup \widehat{K}_{n-1,\,1}$。本节中，我们给出定理 1.6的证明。

引理 5.1。 设 G 是一个顶点集为 $[2n]$ 的平衡二部图，其二部划分为(X, Y)，其中 $n \ge 4$。假设 $\{u, v\} \subseteq X$ 或 $\{u, v\} \subseteq Y$，且 $u < v$。 若 $\rho(G) \ge \rho(B_n^1)$ 且 $S_{uv}(G) \cong B_n^1$，则 $G \cong B_n^1$。

证明。注意 S_{uv}(图 G) $\cong B_n^1$。记 w 为 S_{uv}(图 G) 中度为 1 的顶点。不失一般性，我们假设 $w \in X$。令 $X_1 = X \setminus \{w\}$。若 $\{u,v\} \subseteq X_1$, 则有图 $G = S_{uv}$(图 G) $\cong B_n^1$。若 $u = w$ 或 $v = w$，则由 $u < v$，我们有 $u \in X_1$ 且 $v = w$。接下来我们证明 $d_G(u) > 0$ 且 $d_G(v) > 0$。反设 $d_G(u) = 0$ 或 $d_G(v) = 0$。则 $d_{S_{uv}}$(图 G)$(u) = 0$或 $d_{S_{uv}}$(图 G)$(v) = 0$，这与 S_{uv}(图 G) $\cong B_n^1$ 矛盾。于是 $d_G(u) > 0$且 $d_G(v) > 0$，从而图 G 是连通的。注意

$$\rho(G) \ge \rho(B_n^1) = \rho(S_{uv}(G)).$$

由引理 2.2，可得 ρ(图 G) $= \rho(S_{uv}$(图 G)$)$，且 图 $G \cong S_{uv}$(图 G) $\cong B_n^1$。若 $\{u、v\} \subseteq Y$，则可得 图 $G = S_{uv}$(图 G) $\cong B_n^1$。□

结合引理 2.1 和 5.1，可得以下结果。

推论 5.1. 设图 G 是一个顶点集为 $[2n]$ 、二部划分为(X, Y), 的平衡二部图，其中 $n \ge 4$. 若 $\rho(G) \ge \rho(B_n^1)$ 且 $S(G) \cong B_n^1$, 则 $G \cong B_n^1$.

引理 5.2. 设 $\mathcal{G} = \{G_1, G_2, \ldots, G_{2n}\}$ 是一个平衡二部图族，其顶点集为 $[2n]$，二部划分为 (X,Y), 其中 $n \geq 2$. 若对每个 $i \in [2n]$, ，都有 $G_i \cong B_n^1$，且存在 $p,q \in [2n]$，使得 $G_p \neq G_q$, 则 $\mathcal{G}$ 存在一个彩虹哈密顿圈。

证明。假设 $p = 2n$。由于 Q_n^0 是 B_n^1的子图，我们有 $\rho(Q_n^0) \leq \rho(B_n^1)$。由定理 1.3，{图 $G_1, G_2, ..., G_{2n-1}$}存在一条彩虹哈密顿路径，记为 $P = u_1u_2 \cdots u_{2n-1}u_{2n}$。假设对每个 $i \in [n]$, $u_{2i-1} \in X$ 且 $u_{2i} \in Y$。通过必要时重新排列图 $G_1, G_2, ..., G_{2n-1}$，使得对 $i \in [2n-1]$, $u_iu_{i+1} \in E$(图 G_i)。若 $u_1u_{2n} \in E$(图 G_{2n})，则 $C = u_1u_2 \cdots u_{2n-1}u_{2n}u_1$ 是 $\mathcal{G}$的一条彩虹哈密顿圈。接下来假设 $u_1u_{2n} \notin E$(图 G_{2n})。

对于 $n = 2$，我们有 $u_iu_{i+1} \in E$(图 G_4)，其中 $i \in [3]$。由于 $G_q \neq G_4$, ，显然 $u_1u_4 \in E$(图 G_q)。我们选取 $u_qu_{q+1} \in E$(图 G_4)。于是，$C = u_1u_2u_3u_4u_1$ 是图 $\mathcal{G}$ 的一个彩虹哈密顿圈。

对于 $n \geq 3$，由于图 $G_{2n} \cong B_n^1$ 且 $u_1u_{2n} \notin E$(图 G_{2n})，我们有 $d_{G_{2n}}(u_1) = 1$ 或 $d_{G_{2n}}(u_{2n}) = 1$。不失一般性，设 $d_{G_{2n}}(u_1) = 1$ 且 $u_1u_s \in E$(图 G_{2n})，其中 $2 \leq s \leq 2n-2$。接下来，我们根据 s 的不同取值讨论两种情形。

情形 1。$s = 2$。

断言 4。如果存在某个 $j \in [2n-1]$ 使得 $u_1u_{2n} \in E$(图 G_j)，则 $\mathcal{G}$ 包含一个彩虹哈密顿圈。

证明。由于图 $G_{2n} \cong B_n^1$且$u_1u_2 \in E$(图 G_{2n})，所以$u_ju_{j+1} \in E$(图 G_{2n})。注意到$u_1u_{2n} \in E$(图 G_j)。于是$C = u_1u_2 \cdots u_{2n-1}u_{2n}u_1$ 是 $\mathcal{G}$的一个彩虹哈密顿圈。□

根据断言 4，我们只考虑对每个 $u_1u_{2n} \notin E$(图 G_i) 的情形，其中 $i \in [2n]$。这意味着 $d_{G_i}(u_1) = 1$或$d_{G_i}(u_{2n}) = 1$。

情形1.1。$d_{G_i}(u_1) = 1$ 对每个 $i \in [2n-1]$。

回顾一下，$G_{2n} \neq G_q$。假设 $u_1u_k \in E(G_q)$ 且 $u_k \neq u_2$。令 G_i' 为 $G_i \setminus \{u_1\}$ 在 G_i中诱导的子图。于是我们有 $G_1' = G_2' = \cdots = G_2'n \cong K_{n.n-1}$。因此，我们可以在 {$G_1, G_2, ...$、$G_{q-1}$、$G_{q+1}$.....$G_{2n-1}$}中找到一条彩虹 (u_2, u_k)-路径 P'，其含有 $2n-1$ 个顶点，且 $u_1 \notin V(P')$。选择 G_{2n} 中的边 u_1u_2 以及 G_q中的边 u_1u_k，即可在 $\mathcal{G}$中得到一个彩虹哈密顿圈。

情形1.2。$d_{G_j}(u_1) \neq 1$ 对某个 $j \in [2n-1]$。

注意，图 $G_j \neq G_{2n}$。不失一般性，假设 $j = q$。于是，$d_{G_q}(u_1) = n-1$ 且 $d_{G_q}(u_{2n}) = 1$。现在证明 $C = u_1u_2u_3u_{2n}u_{2n-1} \cdots u_4u_1$ 是图 G $\mathcal{G}$的彩虹哈密顿圈。回顾一下，对每个 $i \in [2n]$, 都有 $d_{G_i}(u_1) = 1$ 或 $d_{G_i}(u_{2n}) = 1$。若 $2 \leq q \leq 2n-2$，则 $u_qu_{q+1} \in E$(图 G_3)。注意，$u_1u_4 \in E$(图 G_q)且 $u_3u_{2n} \in E$(图 G_{2n})。因此，C 是图 G $\mathcal{G}$的彩虹哈密顿圈。假设 $q = 1$ 或 $q = 2n-1$。根据上述证明，我们只需考虑对 $2 \leq i \leq 2n-2$，$d_{G_i}(u_1) = 1$的情形。我们选取 $u_3u_{2n} \in E$(图 G_3)、$u_1u_4 \in E$(图 G_q)和 $u_qu_{q+1} \in E$(图 G_{2n})。因此，C 是图 G $\mathcal{G}$的彩虹哈密顿圈。

情形2。$4 \leq s \leq 2n-2$。

回顾一下，对于每个 $i \in [2n]$, $d_{G_{2n}}(u_1) = 1$ and $G_i \cong B_n^1$。于是我们有 $u_{s-1}u_s \in E$(图 G_{2n})。若 $u_1u_{2n} \in E$(图 G_{s-1})，则 $C = u_1u_2 \cdots u_{2n-1}u_{2n}u_1$ 是$\mathcal{G}$的一个彩虹哈密顿圈。因此，我们假设 $u_1u_{2n} \notin E$(图 G_{s-1})，这意味着 $d_{G_{s-1}}(u_1) = 1$ or $d_{G_{s-1}}(u_{2n}) = 1$。接下来我们证明，圈 $C = u_1u_2 \cdots u_{s-1}u_{2n}u_{2n-1} \cdots u_su_1$ 是一个彩虹

哈密顿圈 $\mathcal{G}$。若 $u_{s-1}u_{2n} \in E(\text{图 } G_{s-1})$，则我们选取 $u_1u_s \in E(\text{图 } G_{2n})$，因此 C 是 $\mathcal{G}$的一个彩虹哈密顿圈。若 $u_{s-1}u_{2n} \notin E(\text{图 } G_{s-1})$，则 $d_{G_{s-1}}(u_{2n}) = 1$，这意味着 $u_1u_s \in E(\text{图 } G_{s-1})$。可以选取 $u_{s-1}u_{2n} \in E(\text{图 } G_{2n})$。于是 C 是 $\mathcal{G}$的一个彩虹哈密顿圈。□

现在我们可以给出定理 1.6 的证明。

定理 1.6 的证明。注意，Q_n^0 是 B_n^1 的真子图，且 B_n^1 连通。因此我们有 $\rho(B_n^1) > \rho(Q_n^0)$。当 $n = 2$时，由引理 2.5 可得 $\rho(G_i) \leq \sqrt{|E(G_i)|}$。于是$|E(G_i)| \geq \rho^2(B_2^1) > \rho^2(Q_2^0) = 2$，这意味着 $|E(G_i)| \geq 3$。因此 $G_i \cong B_2^1$ 或 $G_i \cong K_{2,2}$。于是 B_2^1 是 G_i的子图。若对每个 $i \in [4]$都有 $|E(G_i)| = 3$，则 $G_i \cong B_2^1$。假设 $\mathcal{G}$ 没有彩虹哈密顿圈。由引理 5.2，$G_1 = G_2 = G_3 = G_4 \cong B_2^1$。若存在某个 $j \in [4]$使得$|E(G\ j)| = 4$，则 $G_j \cong K_{2,2}$。不失一般性，假设 $j = 1$。注意，对每个 $i \in [4]$，B_2^1 都是 G_i 的子图。令 $G_i' \cong B_2^1$ 为 G_i 的一个子图，且$2 \leq i \leq 4$。由于 $G_1 \cong K_{2,2}$，，存在 G_1 的两个子图 G_1' 和 G_1''，使得 $G_1' \cong B_2^1, G_1'' \cong B_2^1$ 且 $G_1' \neq G_1''$。于是 $G_1' \neq G_2'$ 或 $G_1'' \neq G_2'$。由引理 5.2，$\{G_1'、G_2'、G_3'、G_4'\}$ 或$\{G_1''、G_2'、G_3'、G_4'\}$ 有彩虹哈密顿圈，这意味着 $\mathcal{G}$也有彩虹哈密顿圈。

对于 $n = 3$，由引理 2.5 可得，对每个 $i \in [6]$，都有 $|E(G_i)| \geq 7$。我们断言，B_3^1 是 G_i的子图。设 H 为从 $K_{3,3}$ 中删去两条边后得到的图，且 $H \ncong B_3^1$。若 $|E(G_i)| = 7$，则 $G_i \cong B_3^1$ 或 H。注意到 H 是连通的，且 $S(H) \cong B_3^1$。由引理 2.2 和 $H \ncong B_3^1$，，可得 $\rho(B_3^1) = \rho(S(H)) > \rho(H)$。由 $\rho(G_i) \geq \rho(B_3^1)$ 可知 $G_i \ncong H$，这意味着 $G_i \cong B_3^1$。若 $|E(G_i)| \geq 8$，则 B_3^1 是 G_i的真子图。因此，B_3^1 是 G_i的子图。使用与 $n = 2$的情形相同的论证，也可得出 $\mathcal{G}$ 存在彩虹哈密顿圈，除非 $G_1 = G_2 =$。..... $= G_6 \cong B_3^1$。

对于 $n \geq 4$，假设 $\mathcal{G} = \{G_1, G_2, \ldots\ldots, G_{2n}\}$ 没有彩虹哈密顿圈。为方便起见，对于 $1 \leq i \leq 2n$，我们将 $S_i = S(G_i)$ 记作。根据引理 2.4，双移位图族 $\{S_1, S_2, \ldots\ldots, S_{2n}\}$ 没有彩虹哈密顿圈。由引理 2.1 及$\rho(G_i) \geq \rho(B_n^1)$，可得

$$\rho(S_i) \geq \rho(G_i) \geq \rho(B_n^1). \tag{3}$$

断言 5. 对于每个 $i \in [2n]$, S_i，它是连通的。

证明。反设 S_i 不连通。那么

$$\rho(S_i) \leq \rho(K_{n,n-1}) = \rho(Q_n^0) < \rho(B_n^1),$$

这与（3）矛盾。□

接下来证明，对于每个$i \in [2n]$，$S_i \cong B_n^1$。不失一般性，设$X = [n]$ 且$Y = [2n] \setminus [n]$。定义$e_j = \{j,$ 其中 $2n - j + 2\}$，且 $2 \leq j \leq n$。

断言 6. $\{e_3, e_4, \cdots, e_{n-1}\} \subseteq E(S_i)$ 对每个 $i \in [2n]$。

证明。若断言 6 不成立，则存在某个 $3 \leq p \leq n - 1$ 以及某个 $q \in [2n]$，使得 $e_p = \{p, 2n - p + 2\} \notin E(S_q)$。注意，$S_q$ 是双移位的。由观察 2.1 可知，对于每条边 $\{i, j\} \in E(S_q)$，有 $1 \leq i < p$ 或 $n + 1 \leq j < 2n + 2 - p$。于是 S_q 是 B_n^{p-1} 的子图，这意味着 $\rho(S_q) \leq \rho(B_n^{p-1})$。由引理 2.7，

$$\rho(S_q) \leq \rho(B_n^{p-1}) < \rho(B_n^1),$$

这与（3）相矛盾。□

根据断言 5，我们有 $\delta(S\,i) \geq 1$。若对每个 $i \in [2n]$,，$d_{S_i}(2n) = 1$，则 $S\,i$ 是 B_n^1 的子图。由（3）可知，$\rho(S_i) = \rho(B_n^1)$。由于 B_n^1 连通，因此对每个 $i \in [2n]$，都有 $S\,i \cong B_n^1$。类似地，若对每个 $i \in [2n]$,，$d_{S_i}(n) = 1$，则有 $S\,i \cong B_n^1$。接下来，我们假设存在 $p, q \in [2n]$，使得 $d_{S_p}(n) > 1$ 且 $d_{S_q}(2n) > 1$。回忆一下，$S\,p$ 和 S_q 是双移位的。根据观察 2.1，我们可以得到 $e_n = \{n, n+2\} \in E(S\,p)$ 以及 $e_2 = \{2, 2n\} \in E(S_q)$。我们将以下证明分为两种情况。

情形 1. $p \neq q$.

不失一般性，假设 $p = n$ 且 $q = 2$。那么 $e_n \in E(S_n)$ 且 $e_2 \in E(S\,2)$。根据 $\delta(S_i) \geq 1$ 以及观察 2.1，我们有 $\{1, n+1\} \in E(S\,1)$、$\{1, 2n\} \in E(S\,n_{+1})$ 以及 $\{n, n+1\} \in E(S\,2n)$。由断言 6，选取 $e_j \in E(S\,j)$，其中 $3 \leq j \leq n-1$。注意，对于 $3 \leq j \leq n-1$，$e\,j = \{j, 2n-j+2\} \in E(S\,n_{+}j)$。于是我们还得到，对于 $3 \leq j \leq n-1$，$\{j, 2n-j+1\} \in E(S\,n_{+}j)$。如果 $\{2, 2n-1\} \in E(S\,n_{+2})$，那么 $\{S\,1, S\,2, \ldots, S\,2n\}$ 含有一个彩虹哈密顿圈，矛盾。如果 $\{2, 2n-1\} \notin E(S_{n+2})$，那么根据观察 2.1，我们有 $d_{S_{n+2}}(2n-1) = d_{S\,n_{+2}}(2n) = 1$。因此 $S\,n_{+2}$ 是 B_n^1 的真子图。由于 B_n^1 连通，我们有 $\rho(S_{n+2}) < \rho(B_n^1)$，这与 (3) 矛盾。

情形2. $p = q$.

不失一般性，假设 $p = q = 1$。我们首先证明，对于每个 $2 \leq i \leq 2n$，都有 $d_{S_i}(n) = 1 \text{and } d_{S_i}(2n) = 1$。事实上，若存在某个 $2 \leq j \leq 2n$，使得 $d_S\,j(n) > 1 \text{ or } d_S\,j(2n) > 1$，则可得 $d_{S_1}(n) > 1 \text{ and } d_S\,j(2n) > 1$，或 $d_{S_1}(2n) > 1 \text{and } d_S\,j(n) > 1$。根据情形 1，$\{S\,1, S\,2, \ldots, S\,2n\}$ 有一个彩虹哈密顿圈，矛盾。因此，$S\,i$ 是 B_n^1 的真子图。由于 B_n^1 连通，我们有 $\rho(S_i) < \rho(B_n^1)$，这与 (3) 矛盾。

因此，对于每个 $i \in [2n]$，$S\,i \cong B_n^1$。结合 (3)，可得 $\rho(S_i) = \rho(G_i) = \rho(B_n^1)$。根据推论 5.1，$G_i \cong B_n^1$。若存在 p、$q \in [2n]$ 使得 $G_p \neq G_q$，则根据引理 5.2，$\mathcal{G}$ 存在一个彩虹哈密顿圈，矛盾。因此，$G_1 = G_2 = \cdots = G_{2n}$，且 $G_1 \cong B_n^1$。□

利益冲突声明

作者声明，他们不存在已知的竞争性经济利益或可能影响本文所报告研究的个人关系。

数据可用性

本文所述研究未使用任何数据。

参考文献

[1] A. Bhattacharya、S. Friedland、U.N. Peled，关于二部图的第一特征值，电子组合学杂志**15**（2008）R144。[2] A.E. Brouwer、W.H. Haemers，《图的谱》，施普林格，柏林，2011年。[3] P. Bradshaw，二部图族中的横截与二部泛圈性，电子组合学杂志**28**（2021）P4.25。

[4] P. Csikv´ari，关于 V. Nikiforov 的一个猜想，离散数学**309**（2009）4522-4526。[5]P. Frankl，极值集合论中的移位技术，载于：《组合学综述》，载于：伦敦数学会讲义，第123卷，剑桥大学出版社，1987，第81-110页。[6]P. Frankl，极值集合系统，载于：《组合学手册》，爱思唯尔，阿姆斯特丹，1995。[7] C. Godsil、G. Royle，《代数图论》，《数学研究生教材》第207卷，施普林格出版社，纽约，2001。[8] M.Y. Guo、H.L. Lu、X.X. Ma、X. Ma，图的谱半径与彩虹匹配，线性代数及其应用**679**（2023）30-37。[9] J. Hu、L.Y. Li、X.L. Li、N.Y. Xu，二部图集中的顶点二部泛圈性，离散数学**347**（2024）113980。[10] X.C. He、Y.T. Li、L.H. Feng，图的谱半径与彩虹哈密顿路，离散数学**347**（2024）114128。[11] F. Joos、J. Kim，关于狄拉克定理的彩虹版本，伦敦数学会会报**52**（2020）498-504。[12] B.L. Li、B. Ning，关于哈密顿圈的 Erd˝os 定理与 Moon-Moser 定理的谱类比，线性与多重线性代数**64**（2016）1152-1169。[13] B.L. Li、B. Ning，关于二部图中哈密顿路的 Moon-Moser 定理的谱类比，线性代数及其应用**515**（2017）180-195。[14] E. Nosal，图的特征值，硕士论文，卡尔加里大学，1970。[15] C. Shi、X.Q. Li、M.F. Chen，二部图彩虹匹配的谱条件，电子线性代数期刊**40**（2024）692-696。[16] L.W. Zhang、Z.Y. Zhang，图的谱半径与彩虹k-因子，线性代数及其应用**735**（2026）307-318。[17] Y.K. Zhang、E.R. van Dam，彩虹哈密顿性与谱半径，离散数学**348**（2025）114600。