关于稀疏非厄米扰动的离群特征向量的注记

MILTIADIS GALANIS[1,3], MICHAIL LOUVARIS[2]

[1] 雅典国立卡波季斯特里亚大学信息学与电信系，希腊雅典佐格拉福 *161 22*。电子邮箱：*mgalan@di.uoa.gr*

[2] 耶鲁大学数学系，美国纽黑文。电子邮箱：*michail.louvaris@yale.edu*

[3] *Quantum Neural Technologies SA*，希腊雅典。电子邮箱：*mag@quantumtech.ai*

arXiv:2603.03972v1 [math.PR] 4 Mar 2026

Abstract. 我们考虑一个稀疏独立同分布非厄米随机矩阵模型 X_n (其稀疏度参数为 K_n)，以及一个确定性有限秩扰动 E_n。假设 E_n 满足双正交性，且 K_n满足增长条件，我们概述一种有限秩预解式约化，从而得到 Y_n 的离群特征向量与相应尖峰特征子空间之间重叠的渐近结果：$= X_n + E_n$ 特别地，对于一个离群尖峰 μ，若 $|\mu| > 1$，则相应（右）特征向量在尖峰特征子空间上的投影平方依概率收敛至 $1 - |\mu|^{-2}$。我们的结果将 [HLN26] 的定理 1.6 推广至一般有限秩情形，从而解决开放问题 5。

1. Introduction

随机矩阵理论中对离群特征值的研究历史悠久，且已发展得相当成熟。在对称和厄米情形下，加性有限秩变形往往会导致可预测且已得到充分理解的谱偏离。Baik、Ben Arous 和 P´ech´e（BBP）的一项里程碑式结果表明，对于具有高斯条目的样本协方差矩阵，一旦超过临界阈值，有限秩变形就会产生脱离主体谱的特征值；参见 [BBAP05]。随后，这种相变现象被推广到了其他模型中，见 [BS06、Pau07、CCF09、BGN11]。除了识别离群特征值外，这些[BGN11]还刻画了厄米情形下相应的特征向量重叠。

在非厄米 i.i.d. 情形下，假设具有有限四阶矩， [Tao13、BC16]确立了加性有限秩变形所产生的离群特征值的位置。然而，对相应特征向量的精确描述在很大程度上仍未解决。

近期， [HLN26], 在所有稀疏度区间以及最小矩假设下，刻画了稀疏非厄米随机矩阵的有限秩加性扰动的特征值（见 [HLN26]中的定理 1.2）。这一结果借助 [BCGZ22]所建立的收敛框架得以实现。该框架的相关应用见 [CLZ23、Cos23、HL26]。

在特定稀疏度区间并假设条目为次高斯的条件下，秩一情形下特征向量投影的渐近行为已得到确定（见 [HLN26]中的定理 1.6），所用方法是[BvH24]中的普适性结果。在该情形下，当尖峰位于 $1 - |\mu|^{-2}$ 单位圆盘之外时，离群特征向量与尖峰方向之间的平方重叠收敛至 μ。

本文旨在去除秩一限制，并确立一般有限秩确定性扰动下相应的特征向量行为。更具体地说，我们考虑稀疏

非厄米随机矩阵 X_n 和任意固定秩的确定性扰动 E_n 。我们量化了一个离群特征向量与

$$Y_n = X_n + E_n$$

以及 E_n 的相应尖峰特征子空间。我们假设 E_n 具有双正交表示。

从秩一推广到有限秩并非只是记号上的变化。在非厄米情形下，重数以及不同尖峰块之间的相互作用会带来真正的结构性困难。特别是，必须控制由预解式导出的有限维矩阵值函数的核，并将相应的核向量局部化到正确的尖峰块上。因此，该论证需要系统的有限秩预解式约化以及定量的核局部化机制。

我们的方法完全基于预解式。我们首先建立有限秩的核–特征空间双射，它将任意离群特征向量表示为 X_n 的预解式与一个低维核向量的形式。接下来的主要任务是证明该核向量集中于相应的尖峰块上，并证明压缩预解式收敛到其确定性极限。结合这些要素，可得渐近重叠公式

$$\langle \tilde{u}_{\ell,n}, F_{\ell,n} \rangle^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} 1 - \frac{1}{|\mu|^2},$$

对于尖峰 μ 满足 $|\mu| > 1$。注意，该极限与厄米情形中的极限相同；参见 [BGN11]。

加性变形非厄米矩阵自然地出现在若干应用领域中。在神经网络理论中，矩阵 Y_n 刻画神经元之间的随机相互作用 [SCS88，WT13]。在理论生态学中，稀疏相互作用矩阵描述生态系统的动态 [Bun17，ABC+24]。因此，理解离群模态的稳定性与结构对这些领域具有重要意义。

本文的组织方式使线性代数约化过程清晰明确且可重复使用。在建立有限秩约化之后，我们结合预解式估计与普适性结果，控制相关的双线性型，并完成主定理的证明。

2. Results

2.1. 记号。全文中，$\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 $\mathbb{C}^n$ 上的标准厄米内积，而 $\| \cdot \|$ 表示矩阵算子范数或向量的欧几里得范数。此外，记 $\sigma(M) = \{\lambda_1(M), \ldots, \lambda_m(M)\}$ 为矩阵 M的谱，其中 $m \times m$ 。进一步，对于随机变量序列 J_n 和随机变量 J，我们记

$$J_n \xrightarrow{\mathbb{P}} J$$

表示依概率收敛，我们写作 $J_n = o_{\mathbb{P}}(1)$ 表示 $J_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$。对于 $m \in \mathbb{N}$，令 $[m] = \varnothing$ ，若 $m = 0$，则 $[m] = \{1, \ldots\ldots, m\}$；否则。

最后回顾两个集合之间豪斯多夫距离的定义。设 $z \in \mathbb{C}$ 和 $A, B \subset \mathbb{C}$。定义$d(z, A) = \inf_{\xi \in A} |z - \xi|$。$A$和 B之间的豪斯多夫距离记为 $d_{\boldsymbol{H}}(A, B)$，其定义为

$$d_{\boldsymbol{H}}(A, B) = \max \left\{ \sup_{z \in A} d(z, B) ; \sup_{z \in B} d(z, A) \right\}.$$

2.2. 模型。设 χ 是一个复值随机变量，满足 $\mathbb{E}(\chi) = 0$ 和 $\mathbb{E}(|\chi|^2) = 1$。对于每个整数$n \geqslant 1$，令 $A_n = (\{A_n\}_{ij})_{i,\ j=1}^n \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 为随机矩阵，其元素独立同分布，分布与 χ相同。设 (K_n) 为正整数序列，满足 $K_n \leqslant n$。设 (B_n) 为一列 $n \times n$ 矩阵，其元素为独立同分布的伯努利分布元素，并满足

$$\mathbb{P}\{\{B_n\}_{1,1} = 1\} = K_n/n,$$

并假设 B_n 与 A_n 相互独立。定义 $X_n = (\{X_n\}_{ij})_{i,\ j=1}^n$ 为

$$\{X_n\}_{ij} = \frac{1}{\sqrt{K_n}} \{B_n\}_{ij} \{A_n\}_{ij}. \tag{2.1}$$

则 $\mathbb{E}\{X_n\}_{11} = 0$ 和 $\mathbb{E}|\{X_n\}_{11}|^2 = 1/n$。参数 K_n 称为 X_n的稀疏度参数。

设 $r>0$ 固定。考虑确定性向量 $u^{1,\,n},\ \ldots,\ u^{r,\,n},\ v^{1,\,n},\ \ldots,\ v^{r,\,n}\in\mathbb{C}^n$，并定义确定性有限秩扰动

$$E_n=\sum_{t=1}^{r}u^{t,n}(v^{t,n})^\star.$$

定义

$$Y_n:=X_n+E_n.$$

我们对 $E_n.$ 作如下假设

假设 1. 存在一个绝对常数 $C>0$ 使得

$$\sum_{t=1}^{r}\|u^{t,n}\|+\|v^{t,n}\|\leqslant C;$$

最近，文献 [HLN26] 证明了关于 Y_n 的如下特征值结果。

定理 2.1. *[定理 1.2 [HLN26]]* 假设

$$K_n\xrightarrow{n\to\infty}\infty$$

并且假设*1* 成立。定义

$$\sigma^+(E_n)=\sigma(E_n)\cap\{z\in\mathbb{C}:\ |z|>1\},\qquad \sigma_\varepsilon^+(Y_n)=\sigma(Y_n)\cap\{z\in\mathbb{C}:\ |z|\geqslant 1+\epsilon\},$$

并令 $m_n=|\sigma^+(E_n)|$。则

$$\mathbb{P}\Big\{|\sigma_\varepsilon^+(Y_n)|\neq m_n\Big\}\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

对于每个序列 (n')，其中 $n'\to\infty$，且对所有 n' 有 $m_{n'}>0$，

$$d_{\boldsymbol{H}}\big(\sigma_\varepsilon^+(Y^{n'}),\sigma^+(E^{n'})\big)\xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}}0,$$

约定 $d_{\boldsymbol{H}}(\varnothing,\ \sigma^+(E^{n'}))=\infty$。

假设 2. 序列 (K_n)满足

$$\frac{\log^9 n}{K_n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

并且存在绝对常数 $C>0$，使得

$$\mathbb{P}(|A_{11}|\geqslant t)\ \leqslant\ 2\exp(-Ct^2)\,.$$

即 χ服从次高斯分布。

此外，我们还有以下关于秩一扰动的特征向量的结果。

定理 2.2。 *[文献 [HLN26] 中的定理 1.6。]* 假设 $r=1$ 因此 $E_n=u_n(v_n)^\star$ 并且 $Y_n=X_n+u_n(v_n)^\star$。此外，假设

$$\liminf_{n\to\infty}|\langle v_n,u_n\rangle|\ >\ 1$$

并且假设 *2* 成立。回顾定理 *2.1*中的记号。当事件 $\{|\sigma_\varepsilon^+(Y_n)|=1\}$ 发生时，令 $\tilde{u}_n$ 为 Y_n 所对应的单位范数右特征向量 $\lambda_{\max}(Y_n)$。否则，令 $\tilde{u}_n=0_n$。则有

$$\left|\left\langle\tilde{u}_n,\frac{u_n}{\|u_n\|}\right\rangle\right|^2-\left(1-\frac{1}{|\langle u_n,v_n\rangle|^2}\right)\ \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}}\ 0\,.$$

注 2.3。 假设 2 是为了给出 $\|(X_n-\langle v_n,\ u_n\rangle I)^{-1}\|$的上界所必需的，而这是计算和比较离群特征向量的必要工具，参见例如推论 4.2。这是通过使用 [BvH24]中的普适性结果实现的。本文也将使用这些结果，参见第 4节。

我们的主要目标是将定理2.2 推广到一般秩 $r\geqslant 1$.
为实现这一点，我们需要对 E_n作出一些假设。

假设 3. 存在 $\delta > 0$ 和互不相同的复数 $\mu^{(1)}, \ldots, \mu^{(m)}$，满足 $|\mu^{(\ell)}| \geqslant 1+\delta$，使得对于所有足够大的 n，

(i) 当 n 足够大时，E_n 容许一个双正交分解

$$E_n = P_n \Lambda_n W_n^*, \qquad W_n^* P_n = I_r,$$

其中 Λ_n 为对角矩阵，其元素为 E_n的特征值。我们还假设，当 n.足够大时，P_n 与 W_n 的秩为 r

(ii) 事实上，$\sigma_n^+(E_n) := \sigma(E_n) \cap \{z : |z| > 1\} = \{\mu^{(1,n)}, \ldots\ldots, \mu^{(m_n,n)}\}$（计入几何重数）。于是

$$d_{\boldsymbol{H}}\left(\sigma_n(E^n), \left\{\mu^{(1)}, \ldots, \mu^{(m)}\right\}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

此外，对每个 $\ell \in \{1, \ldots\ldots, m_n\}$，我们假设（右）尖峰特征子空间

$$F_{\ell,n} := \ker(\mu^{(\ell,n)} I - E_n) \subset \mathbb{C}^n$$

满足

$$\lim_{n\to\infty} k_{\ell,n} = k_\ell \leqslant r.$$

其中 维数$F_{\ell,n} = k_{\ell,n}$。

注记 2.4。 在假设 3 (ii) 中，我们假设 E_n 的特征值集合收敛到集合 $\{\mu^{(1)}, \cdots \mu^{(m)}\}$。这样做主要是出于表述上的考虑。可以不采用这一假设，并将主要结果——定理2.6——表述为定理 2.2 所述的形式。此外，假设 3 (i) 使我们的计算更加简洁，例如参见引理 3.1和 (5.3)。我们认为，可以不采用这一假设，而改用 E_n 的若尔当块来重新表述结果。本文不再探讨这一方向。

接下来我们介绍一些记号和定义。

设 $Q_{\ell,n} \in \mathbb{C}^{n\times k_{\ell,n}}$ 的标准正交列张成 $F_{\ell,n}$，并令

$$P_{\ell,n} := Q_{\ell,n} Q_{\ell,n}^* = \mathrm{Proj}_{F_{\ell,n}}. \tag{2.2}$$

此外，我们有如下定义。

定义 2.5。 设 $F \subset \mathbb{C}^n$ 为一个确定性线性子空间，且 $x \in \mathbb{C}^n$。我们用 $\langle x, F\rangle$ 表示 x 在 F上的正交投影的范数，即

$$\langle x, F\rangle := \|\mathrm{Proj}_F\, x\|, \qquad \langle x, F\rangle^2 = \|\mathrm{Proj}_F\, x\|^2.$$

等价地，若 $Q \in \mathbb{C}^{n\times k}$ 具有标准正交列，且其张成 F（因此 $Q^*Q = I_k$ 且 $\mathrm{Ran}(Q) = F$），则 $\mathrm{Proj}_F = QQ^*$ 且

$$\langle x, F\rangle^2 = \|Q^* x\|^2 = \sum_{j=1}^{k} |\langle x, q_j\rangle|^2. \tag{2.3}$$

特别地，若 F =span$\{u\}$ 是一维的，则

$$\langle x, F\rangle^2 = \frac{|\langle x, u\rangle|^2}{\|u\|^2}. \tag{2.4}$$

定理 2.6. 固定 $\ell \in \{1, \ldots, m\}$，并记 $\mu := \mu^{(\ell)}$。假设条件 *2*和 *3*成立。根据定理 *2.1*，存在某个$\lambda_{\ell,n} \in \sigma(Y_n)$，使得

$$\lambda_{\ell,n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \mu.$$

此外，根据假设条件 *3*，存在某个序列 $\mu_n \in \sigma(E_n)$，使得

$$\mu_n \to \mu.$$

Set $F_n :=$ 核$(\mu_n I - E_n)$，并令 $\tilde{u}_{\ell,n}$ 表示与 $\lambda_{\ell,n}$相关联的单位右特征向量。那么

(1)

$$\langle \tilde{u}_{\ell,n}, F_n\rangle^2 = \|Q_{\ell,n}^* \tilde{u}_{\ell,n}\|^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} 1 - \frac{1}{|\mu|^2}. \tag{2.5}$$

(2) 对于任意满足以下条件的序列 $\mu'_n \in \sigma(Y_n)$

$$\mu'_n \to \mu' \neq \mu$$

若一个 令 $F_{\ell',n} = \text{核}(\mu'_n I - E_n)$，并假设对所有足够大的 n，$F_n \perp F_{\ell',n}$ 都成立 t

$$\langle \tilde{u}_{\ell,n}, F_{\ell',n} \rangle^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

注 2.7. 定理 2.6(b) 中的假设 $F_n \perp F_{\ell',n}$ 在 E_n 可对角化时显然成立。若省略这一假设，我们的结果表明，对于某个由单位向量组成的序列 $c_n \in \mathbb{C}^{k_{l,n}}$，

$$\langle \tilde{u}_{\ell,n}, F_{\ell',n} \rangle^2 - \frac{|\mu|^2 - 1}{|\mu|} \|Q^*_{\ell',n} Q_{\ell,n} c_n\|^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

这里 $Q_{\ell',n}$ 和 $Q_{\ell,n}$ 均如（2.2）中所述。

3. Tools from Linear Algebra

我们从线性代数的一些结果出发，这些结果为定理 2.6 中的投影提供了一个可用我们所能控制的量方便表示的表达式。

引理 3.1（有限秩约化：核–特征空间双射）。设 $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$，并设 U、$V \in \mathbb{C}^{n\times r}$，其秩为 $(U) = r$（等价地，U 具有满列秩）。令 $Y\colon = X + UV^*$。固定满足 $\lambda \notin \sigma(X)$ 的 $\lambda \in \mathbb{C}$，并定义

$$R(\lambda) := (X - \lambda I)^{-1}, \qquad M(\lambda) := V^* R(\lambda) U \in \mathbb{C}^{r\times r}.$$

定义 $\Phi\colon \ker(I_r + M(\lambda)) \to \ker(Y - \lambda I)$，由 $\Phi(a)\colon = R(\lambda)Ua$ 给出。于是 Φ 是一个线性双射。事实上，对每一个 $x \in \ker(Y - \lambda I)$，都有

$$\Phi^{-1}(x) = -V^* x,$$

从而 $\dim \ker(I_r + M(\lambda)) = \dim \ker(Y - \lambda I)$。

证明。**第一步：** Φ **是良定义的**。设 $a \in \ker(I_r + M(\lambda))$。利用 $Y - \lambda I = (X - \lambda I) + UV^*$ 与 $(X - \lambda I)R(\lambda) = I$，

$$\begin{aligned}
(Y - \lambda I)\Phi(a) &= \big((X - \lambda I) + UV^*\big) R(\lambda) U a \\
&= (X - \lambda I) R(\lambda) U a + UV^* R(\lambda) U a \\
&= Ua + U\big(V^* R(\lambda) U\big) a \\
&= U(I_r + M(\lambda)) a \\
&= 0.
\end{aligned}$$

步骤 2： Φ **是单射**。若 $\Phi(a) = 0$，则 $R(\lambda)Ua = 0$，从而 $Ua = 0$。由于 U 具有满列秩，$a = 0$。**步骤 3：** Φ **是满射（并计算** Φ^{-1}**）**。令 $x \in \ker(Y - \lambda I)$。于是 $(X - \lambda I)x + UV^* x = 0$，因此

$$x = -R(\lambda) U a, \qquad a := V^* x.$$

应用 V^* 得到 $a = -M(\lambda)a$，从而 $(I_r + M(\lambda))a = 0$。因此 $x = \Phi(-a)$。此外，$\Phi^{-1}(x) = -V^* x$。 □

根据前述引理，我们得到以下推论。

推论 3.2（单位异常特征向量的闭式表示）。令 $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 并令 $E = UV^*$ 满足 U，$V \in \mathbb{C}^{n\times r}$ 且 秩$(U) = r$。设 $Y\colon = X + UV^*$。固定 $\lambda \in \mathbb{C}$ 满足 $\lambda \notin \sigma(X)$ 并定义

$$R(\lambda) := (X - \lambda I)^{-1}, \qquad M(\lambda) := V^* R(\lambda) U.$$

假设 $\lambda \in \sigma(Y) \backslash \sigma(X)$，令 $\tilde{u}$ 为与 λ 相关联的 Y 的任意单位右特征向量。那么存在$a \in$ 核$(I_r + M(\lambda)) \backslash \{0\}$ 使得

$$\tilde{u} = \frac{R(\lambda)\, U a}{\|R(\lambda)\, U a\|}. \tag{3.1}$$

此外，a 在非零标量倍数意义下唯一。

证明。 由引理 3.1， $\Phi(a) = R(\lambda)Ua$ 是从 $\ker(I_r + M(\lambda))$ 到 $\ker(Y - \lambda I)$的双射。由于 $\tilde{u} \in \ker(Y - \lambda I)$且 $\tilde{u} \neq 0$，存在 $a \neq 0$ 使得 $\tilde{u} = \Phi(a)/\|\Phi(a)\|$由 Φ的单射性可知，除缩放外的唯一性成立。 □

因此我们 对（2.5）中的$\tilde{u}_{\ell、n}$ 感兴趣，其中如（3.1）所示。接下来我们给出投影的一个近似。

引理 3.3。 回顾假设 *3* 对于 E_n。固定 $\mu \in \mathbb{C}$ 并假设 Λ_n 包含一个大小为 μI_k 的块 $k \geqslant 1$，即

$$\Lambda_n = \operatorname{diag}(\mu I_k, \Lambda_{\neq,n}),$$

其中 $\Lambda_{\neq,\ n} \in \mathbb{C}^{(r-k)\times(r-k)}$ 对角。

定义尖峰适配秩分解

$$U_n := P_n, \qquad V_n := W_n\overline{\Lambda_n}, \tag{3.2}$$

使得 $E_n = U_n V_n^*$和 $V_n^* U_n = \Lambda_n$。

注意，由于假设 *3* 存在 $c_0 > 0$ 使得

$$\min_{\nu\in\sigma(\Lambda_{\neq,n})} \left|1 - \frac{\nu}{\mu}\right| \geqslant c_0. \tag{3.3}$$

对于任意 $C_n \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 和 $z \notin \sigma(C_n)$，定义

$$J_n(z) := (C_n - zI)^{-1}, \qquad N_n(z) := V_n^* J_n(z) U_n \in \mathbb{C}^{r\times r}.$$

设 $\lambda_n \in \mathbb{C}$ 满足 $\lambda_n \notin \sigma(J_n)$，并假设存在某个 $\varepsilon_n \in (0，$ 使得 $c_0/2)$，

$$\left\|\left(I_r + N_n(\lambda_n)\right) - \left(I_r - \frac{1}{\mu}\Lambda_n\right)\right\| \leqslant \varepsilon_n. \tag{3.4}$$

设 $a_n \in \ker(I_r + N_n(\lambda_n))\backslash\{0\}$，并将 $a_n = (a_{\mu,\ n}、a_{\neq,\ n})$ 按 $\mathbb{C}^r = \mathbb{C}^k \oplus \mathbb{C}^{r-k}$分解。于是：

(i) $a_{\mu,\ n} \neq 0$。

(ii) 非共振分量很小：

$$\|a_{\neq,n}\| \leqslant \frac{\varepsilon_n}{c_0 - \varepsilon_n}\|a_{\mu,n}\| \leqslant \frac{2}{c_0}\varepsilon_n\|a_{\mu,n}\|. \tag{3.5}$$

证明。设

$$K_n := I_r + N_n(\lambda_n), \qquad D_n := I_r - \frac{1}{\mu}\Lambda_n.$$

Then

$$D_n = \begin{pmatrix} 0_{k\times k} & 0 \\ 0 & D_{22,n} \end{pmatrix}, \qquad D_{22,n} := I_{r-k} - \frac{1}{\mu}\Lambda_{\neq,n}.$$

由（3.3），$D_{22,n}$ 是可逆的，并且

$$\|D_{22,n}^{-1}\| \leqslant \frac{1}{c_0}. \tag{3.6}$$

写成

$$K_n = \begin{pmatrix} K_{11,n} & K_{12,n} \\ K_{21,n} & K_{22,n} \end{pmatrix}.$$

该界（3.4）蕴含

$$\|K_{21,n}\| \leqslant \varepsilon_n, \qquad \|K_{22,n} - D_{22,n}\| \leqslant \varepsilon_n. \tag{3.7}$$

第一步：$K_{22,n}$ 是可逆的。设 $E_{22,n} := K_{22,n} - D_{22,n}$。则 $\|D_{22,n}^{-1}E_{22,n}\| \leqslant \varepsilon_n/c_0 < 1/2$。因此$K_{22,n} = D_{22,n}(I + D_{22,n}^{-1}E_{22,n})$ 是可逆的，并且

$$\|K_{22,n}^{-1}\| \leqslant \frac{1}{c_0 - \varepsilon_n}. \tag{3.8}$$

步骤 2：核局部化。 令 $a_n = \left(a_{\mu,a_{\neq}}{}_{,n}^{\ n}\right) \in$ 核$(K_n)\backslash\{0\}$。由第一个块行

，

$$K_{21,n}a_{\mu,n} + K_{22,n}a_{\neq,n} = 0,$$

so

$$a_{\neq,n} = -K_{22,n}^{-1}K_{21,n}a_{\mu,n}.$$

取范数并利用（3.7）和（3.8）可得（3.5）。如果 $a_{\mu,\ n} = 0$ 那么 $a_{\neq,\ n} = 0$，这与 $a_n \neq 0$ 矛盾。 □

4. Results on bilinear forms of the resolvent of X_n.

在下文中，对于任意一个不是 X_n 的特征值的 z，令 $R_n(z) = (X_n - zI)^{-1}$。

引理 4.1。设 u_n 和 v_n 是 $\mathbb{C}^n$ 中的两个向量序列，且存在某个 $C > 0$，使得对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有$\|u_n\|$, $\|v_n\| < C$。那么，对于任意 $|z| > 1$，令 $\mathcal{E}_{inv,\ n}(z)$ 表示事件：$(X_n - z)$ 可逆。那么

$$\mathbb{P}\big(\mathcal{E}_{inv,n}(z)\big) \to 1. \tag{4.1}$$

此外，我们有如下近似

$$1_{\mathcal{E}_{inv,n}(z)} \left(\langle R_n(z)u_n, v_n\rangle + \frac{1}{z}\langle u_n, v_n\rangle \right) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

证明。引理的第一部分（4.1）由 [HLN26]中的引理 4.2 得出。

对于第二部分，不失一般性，我们假设

$$\langle u_n, v_n\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi \in \mathbb{C},$$

因为只需证明沿 $\langle u_n$、$v_n\rangle$ 的所有子列极限依概率收敛。我们先证明 $\xi \neq 0$ 时该结论成立。在这种情况下，可以设

$$\tilde{u}_n = \frac{u_n}{|\xi|^{1/2}(1-\epsilon)} \quad \text{and} \quad \tilde{v}_n = \frac{v_n}{|\xi|^{1/2}(1-\epsilon)}$$

当 $\epsilon > 0$ 足够小时。于是，对所有足够大的 n

$$|\langle \tilde{u}_n, \tilde{v}_n\rangle| > 1.$$

显然，只需证明

$$1_{\mathcal{E}_{\mathrm{inv},n}(z)} \left(\langle R_n(z)\tilde{u}_n, \tilde{v}_n\rangle + \frac{1}{z}\langle \tilde{u}_n, \tilde{v}_n\rangle \right) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

后者可完全按照 [HLN26]中的引理 4.3 证明。

剩下需要证明 $\xi = 0$ 情形下的结论。此时，我们可以假设对所有足够大的 n，$u_n \neq 0$ 且 $v_n \neq 0$；否则结论显然成立。

对于 $\epsilon > 0$，令 $\bar{v}_n = \frac{\epsilon}{\|u_n\|^2} u_n + v_n$。于是

$$\langle u_n, \bar{v}_n\rangle = \frac{\epsilon}{\|u_n\|^2}\langle u_n, u_n\rangle + \langle u_n, v_n\rangle \xrightarrow{n\to\infty} \epsilon \neq 0.$$

但我们已经证明了

$$1_{\mathcal{E}_{\mathrm{inv},n}(z)} \left(\langle R_n(z)u_n, v_n\rangle + \frac{\epsilon}{\|u_n\|^2}\langle R_n(z)u_n, u_n\rangle + \frac{\epsilon}{z} \right) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

该结论现在可由此得出：

$$1_{\mathcal{E}_{\mathrm{inv},n}(z)} \left(\frac{\epsilon}{\|u_n\|^2}\langle R_n(z)u_n, u_n\rangle + \frac{\epsilon}{z} \right) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

□

推论 4.2. 设 C_1^n和 C_2^n是由某些 k_1、$k_2 \in \mathbb{N}$确定的 $k_1 \times n$ 和 $k_2 \times n$ 矩阵序列。假设存在某个 $C > 0$

$$\|C_1^n\|, \|C_2^n\| < C, \quad \textit{for all } n. \tag{4.2}$$

回忆事件 $\mathcal{E}_{inv,\ n}(z)$ 引理 *4.1*中的事件。于是

$$1_{\mathcal{E}_{inv,n}(z)} \left\| C_1^n R_n(z)(C_2^n)^* - \frac{1}{z} C_1^n (C_2^n)^* \right\| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

证明。 在事件 $\mathcal{E}_{\text{inv},\ n}(z)$ 上，注意到 $C_1^n R_n(z)(C_2^n)^*$ 的第 $i,\ j$ 个分量等于

$$(C_1^n)_i\, R_n(z)\, (C_2^n)_j^*,$$

其中 $(C_1^n)_i$ (分别 $(C_2^n)_j^*$) 表示 i 的第 C_1^n(分别为 j 的第 $(C_2^n)^*$ 列。因此，由于 (4.2)，我们可以逐项应用引理 4.1 ，并利用以下事实：对于任意 $k_1 \times k_2$ 矩阵 J，

$$\|J\| \leqslant k_1 k_2 \max_{i,j\in[k_1]\times[k_2]} |J_{i,j}| \tag{4.3}$$

从而得出结论。在 (4.3) 中，$J_{i,\ j}$ 表示 $(i,\ j)$是 J的第 $(i,\ j)$个元素。 □

引理 4.3。 设 $(z_n)_{n\geqslant 1}$ 满足：对所有 n 和 $z_n \to z$，均有 $|z_n| \geqslant 1+\varepsilon$，其中 $|z| \geqslant 1+\varepsilon$。存在某个绝对常数 $c>0$，使得若令 $\mathcal{E}_{bound,\ n}(z)$ 表示满足 $(X_n - z)$ 和 $(X_n - z_n)$ 可逆的事件，并且

$$\|R_n(z)\|, \|R_n(z_n)\| < c,$$

那么以下结论成立：

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}_{bound,n}(z)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

此外，在此事件上

$$1_{\mathcal{E}_{bound,n}(z)} \|R_n(z_n) - R_n(z)\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{4.4}$$

证明。 引理的第一部分由 [HLN26] 的引理 4.2 得出。第二部分由预解式恒等式得出，

$$R_n(z_n) - R_n(z) = (z - z_n) R_n(z_n) R_n(z),$$

以及引理的第一部分。 □

接下来给出以下引理。

引理 4.4。 固定 $|z|>1$ 并回顾引理 $\mathcal{E}_{bound}$ 中的事件，$_n(z)$ *4.3*。那么，对于任意确定性的向量序列 $w_n \in \mathbb{C}^n$ 满足 $\|w_n\| < C$ 其中某个 $C>0$ 且对所有 n，以下结论成立：

$$1_{\mathcal{E}_{bound,n}(z)} \left| \|R_n(z) w_n\|^2 - \frac{\|w_n\|^2}{\sqrt{|z|^2-1}} \right| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

证明。 我们不妨假设 $\|w^n\| > 0$ 对所有 n 均成立，否则结论显然成立。在这种情况下，结论由 [HLN26]中的引理 4.6 得出。 □

我们以如下推论结束本节。

推论 4.5。 固定 $z \in \mathbb{C}$: $|z|>1$ 并回顾引理 $\mathcal{E}_{bound,n}(z)$ 中的事件 *4.4*。令 C_1^n 和 C_2^n 分别为由 $k_1 \times n$ 和 $k_2 \times n$ 矩阵构成的两个序列，其中某个 $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ 满足

$$\|C_1^n\|, \|C_2^n\| < C, \quad \textit{for all } n. \tag{4.5}$$

对某个 $C>0$ 成立。则

$$1_{\mathcal{E}_{bound,n}(z)} \left\| (C_1^n)^* R_n^*(z) R_n(z) C_1^n - \frac{1}{|z|^2-1} (C_1^n)^* C_2^n \right\| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0. \tag{4.6}$$

证明。 首先注意到，根据任意确定性向量序列的极化恒等式 $x_n, y_n \in \mathbb{C}^n$

$$4\langle x_n, R_n^*(z) R_n(z) y_n\rangle = 4\langle R_n(z)x_n, R_n(z)y_n\rangle = \tag{4.7}$$

$$= \|R_n(z)(x_n+y_n)\|^2 - \|R_n(z)(x_n-y_n)\|^2 + i\|R_n(z)(x_n+iy+n)\|^2 - i\|R_n(z)(x_n-iy_n)\|^2 \tag{4.8}$$

特别地，根据引理 4.4 若 $\|x_n\|, \|y_n\| < C$ 对所有 n 均成立，则

$$\langle R_n(z)x_n, R_n(z)y_n\rangle = \frac{1}{|z|^2-1}\langle x_n, y_n\rangle + o_{\mathbb{P}}(1). \tag{4.9}$$

接下来只需将（4.9）应用于每一项，并如推论 4.2那样界定算子范数。 □

5. Proof of Theorem 2.6

我们从定理 2.6（a）的证明开始。

定理 2.6(a) 的证明。 以下，令 $M_n(z) := V_n^* R_n(z) U_n$，其中 z 不是 X_n的特征值。这里 V_n 和 U_n 与引理 3.3中的定义相同。此外，不失一般性，我们假设 Λ_n 的前$k_{\ell,n}$ 个对角元素均等于 μ_n，并且存在分解 $U_n = [U_{\mu_n,n}, U_{\neq,n}]$，其中$U_{\mu_n,n} \in \mathbb{C}^{n\times k_{\ell,n}}$ 对应于 E_n 的特征值为 μ_n的右特征向量。

用$\mathcal{E}_{\mathrm{inv},n}(\lambda_{\ell,n})$ 表示$(X_n - \lambda_{\ell,n})$ 可逆这一事件。根据推论 3.2，存在一个非零向量$a_n \in \ker\big(I_r + M_n(\lambda_{\ell,n})\big)$，使得

$$1_{\mathcal{E}_{\mathrm{inv},n}(\lambda_{\ell,n})} \|Q_{\ell,n}^* \tilde{u}_{\ell,n}\|^2 = 1_{\mathcal{E}_{\mathrm{inv},n}(\lambda_{\ell,n})} \frac{\|Q_{\ell,n}^* R_n(\lambda_{\ell,n}) U_n a_n\|^2}{\|R_n(\lambda_{\ell,n}) U_n a_n\|^2}. \tag{5.1}$$

我们还可以假设 $\|U_n a_n\| = 1$，因为 U_n 的秩为 r，因此 $U_n a_n \neq 0$ 和 a_n 可以任意缩放。此外，根据假设 3，我们可以应用引理 3.3，得出可以将 $a_n = (a_{\mu,n}, a_{\neq,n})$ 分解为

$$\|a_{\neq,n}\| \leqslant C \left\| M_n(\lambda_{\ell,n}) + \frac{1}{\mu}\Lambda_n \right\| \quad \text{on } \mathcal{E}_{\mathrm{inv},n}(\lambda_{\ell,n}) \tag{5.2}$$

其中 $C > 0$是某个绝对常数。此外，回顾引理 4.3中的事件 $\mathcal{E}_{\mathrm{bound},n}(\mu)$。在此事件上（它是$\mathcal{E}_{\mathrm{inv},n}(\lambda_{\ell,n})$ 的子集），有

$$1_{\mathcal{E}_{\mathrm{bound},n}(\mu)} \left\| M_n(\lambda_{\ell,n}) + \frac{1}{\mu}\Lambda_n \right\| \leqslant 1_{\mathcal{E}_{\mathrm{bound},n}(\mu)} \|V_n\| \|U_n\| \, \|R_n(\lambda_{\ell,n}) - R_n(\mu)\| + 1_{\mathcal{E}_{\mathrm{bound},n}(\mu)} \left\| M_n(\mu) + \frac{1}{\mu}\Lambda_n \right\|.$$

特别地，由引理 4.3 和推论4.2 可得

$$1_{\mathcal{E}_{\mathrm{bound},n}(\mu)} \left\| M_n(\lambda_{\ell,n}) + \frac{1}{\mu}\Lambda_n \right\| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0. \tag{5.3}$$

因此，利用（5.2）和（5.3），我们得出：若令 r维向量 $\tilde{a}_{\mu,n} = (a_{\mu,n}, 0)$，即令 $\tilde{a}_{\mu,n}$ 的前$k_{\ell,n}$ 个坐标等于 $a_{\mu,n}$ 的坐标，其余坐标均为 0，则

$$1_{\mathcal{E}_{\mathrm{bound},n}(\mu)} \|a_n - \tilde{a}_{\mu,n}\| = o_{\mathbb{P}}(1).$$

特别是，由于我们假设 $U_n a_n$ 是一个单位向量

$$\|U_n \tilde{a}_{\mu,n}\| = \|U_n a_n\| + o_{\mathbb{P}}(1). \quad \text{on } \mathcal{E}_{\mathrm{bound},n}(\mu).$$

此外，我们可以应用引理 4.3 得到

$$1_{\mathcal{E}_{\mathrm{bound},n}(\mu)} \left| \|Q_{\ell,n}^* R_n(\lambda_{\ell,n}) U_n a_n\|^2 - \|Q_{\ell,n}^* R_n(\mu) U_n \tilde{a}_{\mu,n}\|^2 \right| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0. \tag{5.4}$$

此外，若令 $\hat{w}_n = U_n \tilde{a}_{\mu,n}$ 则有 $\hat{w}_n \in F_{n\circ}$ 事实上，有 $U_n \tilde{a}_{\mu_n} = U_{\mu_n,n} a_{\mu,n}$ 因此

$$(E_n U_{\mu_n,n} - \mu U_{\mu_n,n}) a_{\mu,n} = 0.$$

特别是，若写作 $c_n = Q_{\ell,n}^* \hat{w}_n$，则 $c_n \in \mathbb{C}^{k_{\ell,n}}$，$\hat{w}_n = Q_{\ell,n} c_n$ 并且

$$\|c_n\| = \|\hat{w}_n\| \quad \text{on } \mathcal{E}_{\mathrm{bound},n}(\mu). \tag{5.5}$$

我们记

$$Q_{\ell,n}^* R_n(\mu) \hat{w}_n = Q_{\ell,n}^* R_n(\mu) Q_{\ell,n} c_n = A_n c_n.$$

其中 $A_n = Q_{\ell,n}^* R_n(\mu) Q_{\ell,n}$.

还需注意，根据推论4.2

$$1_{\mathcal{E}_{\mathrm{bound},n}(\mu)} \frac{1}{\|c_n\|^2} \left\| A_n c_n - \frac{c_n}{\mu} \right\| = 1_{\mathcal{E}_{\mathrm{bound},n}(\mu)} \frac{1}{\|c_n\|^2} \left\| A_n c_n - \frac{1}{\mu} Q_{\ell,n}^* Q_{\ell,n} c_n \right\| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0. \tag{5.6}$$

结合（5.6）、（5.5）和（5.4），可得

$$1_{\mathcal{E}_{\mathrm{bound},n}(\mu)} \frac{1}{\|U_n a_n\|^2} \|Q_{\ell,n}^* R_n(\lambda_{\ell,n}) U_n a_n\|^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{1}{|\mu|^2}. \tag{5.7}$$

此外，由推论 4.5 和（4.4），可得

$$1_{\mathcal{E}_{\mathrm{bound},n}(\mu)}\frac{\|R_n(\lambda_{\ell,n})U_n a_n\|^2}{\|U_n a_n\|^2}\xrightarrow{\mathbb{P}}\frac{1}{|\mu|^2-1}. \tag{5.8}$$

证明通过结合（5.7）和（5.8）完成。 □

接下来我们证明定理 2.6(b)。

定理 *2.6(b)* 的证明。 我们首先利用引理3.1 得到，

$$1_{\mathcal{E}_{\mathrm{bound},n}(\mu)}Q^*_{\nu,n}\tilde{u}_{\ell,n}=1_{\mathcal{E}_{\mathrm{bound},n}(\mu)}\frac{Q^*_{\ell',n}R_n(\lambda_{\ell,n})U_n a_n}{\|R_n(\lambda_{\ell,n})U_n a_n\|}.$$

如同定理 2.6(a) 的证明，可以得出

$$1_{\mathcal{E}_{\mathrm{bound},n}(\mu)}\|Q^*_{\ell',n}\tilde{u}_{\ell,n}\|^2=1_{\mathcal{E}_{\mathrm{bound},n}(\mu)}\frac{(|\mu|^2-1)}{\|c_n\|^2}\|Q^*_{\ell',n}R_n(\mu)Q_{\ell,n}c_n\|^2+o_{\mathbb{P}}(1),$$

对于某个序列 $c_n\in\mathbb{C}^{k_{\ell,n}}$ 使得 $\|c_n\|=\|U_n a_n\|^2+o_{\mathbb{P}}(1)$。还需注意到，根据引理 4.1

$$1_{\mathcal{E}_{\mathrm{bound},n}(\mu)}\Big|\,\|Q^*_{\ell',n}R_n(\mu)Q_{\ell,n}c_n\|^2-\frac{1}{|\mu|}\|Q^*_{\ell',n}Q_{\ell,n}c_n\|\,\Big|=o_{\mathbb{P}}(1).$$

□

References

[ABC+24] I. Akjouj、M. Barbier、M. Clenet、W. Hachem、M. Ma¨ıda、F. Massol、J. Najim 和 V. C. Tran。生态学中的复杂系统：大型洛特卡–沃尔泰拉模型与随机矩阵导览。 *Proceedings of the Royal Society A*，480(2285):20230284，2024。[BBAP05] J. Baik、G. Ben Arous 和 S. P´ech´e。非零复样本协方差矩阵最大特征值的相变。 *The Annals of Probability*，33(5):1643–1697，2005。[BC16] C. Bordenave 和 M. Capitaine。变形独立同分布随机矩阵的离群特征值。 *Communications on Pure andApplied Mathematics*，69(11):2131–2194，2016。[BCGZ22] C. Bordenave、D. Chafa¨ı 和 D. Garc´ıa-Zelada。通过特征多项式研究随机矩阵谱半径的收敛。 *Probability Theory and Related Fields*，第1–19页，2022。[BGN11] F. Benaych-Georges 和 R. R. Nadakuditi。大型随机矩阵的有限低秩扰动的特征值与特征向量。 *Advances in Mathematics*，227(1):494–521，2011。[BS06] J. Baik 和 J. W. Silverstein。尖峰总体模型的大型样本协方差矩阵的特征值。 *Journal ofmultivariate analysis*，97(6):1382–1408，2006。[Bun17] G. Bunin。具有洛特卡–沃尔泰拉动力学的生态群落。 *Physical Review E*，95(4):042414，2017。[BvH24] T. Brailovskaya 和 R. van Handel。普适性与尖锐的矩阵集中不等式。 *Geometric and FunctionalAnalysis*，34(6):1734–1838，2024。[CCF09] M. Capitaine、Donati-Martin C. 和 D. F´eral。大型 Wigner 矩阵有限秩变形的最大特征值：涨落的收敛性与非普适性。 *The Annals of Probability*，37(1):1 – 47，2009。[CLZ23] S. Coste、G. Lambert 和 Y. Zhu。随机置换之和与正则有向图的特征多项式。*International Mathematics Research Notices*，2024(3):2461–2510，2023。[Cos23] S. Coste。稀疏矩阵：从无穷远处观察特征多项式的收敛。 *Electronic Journal of Proba-bility*，28:1–40，2023。[HL26] Walid Hachem 和 Michail Louvaris。关于具有独立元素和方差剖面的随机矩阵的谱半径与特征多项式。 *The Annals of Applied Probability*，2026。[HLN26] Walid Hachem、Michail Louvaris 和 Jamal Najim。非厄米稀疏随机矩阵的有限秩加性变形的极端特征值与特征向量。 *arXiv preprint arXiv:2602.20956*，2026。[Pau07] D. Paul。高维尖峰协方差模型的样本特征结构渐近性质。 *Statistica Sinica*，第1617–1642页，2007。[SCS88] H. Sompolinsky、A. Crisanti 和 H. J. Sommers。随机神经网络中的混沌。 *Phys. Rev. Lett.*，61:259–262，1988年7月。[Tao13] T. Tao。具有有界秩扰动的独立同分布矩阵谱中的离群特征值。 *Probability Theory and RelatedFields*，155(1):231–263，2013。[WT13] G. Wainrib 和 J. Touboul。随机神经网络的拓扑与动力学复杂性。 *Phys. Rev. Lett.*，110:118101，2013年3月。