非均匀加热辐射-传导系统中方差驱动的平均温度降低

Juntao Lu, [1] [1] [2] [3 a)] Zihan Zhang、Yongjian Xiong 和 Jie Fu, [)] [1] *Zhenhai High School of Zhejiang Ningbo 315200 China* , , [)] *School of Physical Science and Technology, Ningbo University, Ningbo 315211,China*[2)] *Institute of High-Pressure Physics, School of Physical Science and Technology, Ningbo University, Ningbo 315211,China*

（日期：2026年3月5日）

辐射-传导系统本质上具有非线性，这是由热辐射对温度的四次方依赖关系导致的。在总加热功率固定的条件下，基于凸性的论证表明，非均匀温度分布的辐射效率更高，因此其平均温度低于相应的等温状态。然而，这一结论仍停留在定性层面，温度非均匀性与平均温度降低之间明确的定量关系尚未建立。本文推导出一个基于方差的解析表达式，将非均匀加热辐射-传导系统中的面积平均温度与相应的等温平衡温度联系起来。通过对控制方程积分，并围绕环境温度进行系统的二阶展开，我们表明，相对于等温平衡温度，平均温度的降低与温度方差呈线性正比关系，且比例系数仅由环境温度决定。这一结果在微扰区域内将基于凸性的不等式转化为定量统计关系，并为描述热学非均匀系统中的非线性辐射平均提供了直观的物理框架。

arXiv:2603.03979v1 [quant-ph] 4 Mar 2026

I. 引言

辐射传热由于斯特藩-玻尔兹曼定律的温度四次方依赖关系，本质上会给热系统引入强非线性。[1,2]当辐射与传导耦合时，非均匀加热会产生空间变化的温度场，由此产生的辐射损失对温度非均匀性高度敏感。[3] 此类非等温辐射系统不仅在理论上是非线性的，而且具有实际意义，因为空间温度控制最近已被证明能够实现定向且增强的热发射。[4,5]

在总加热功率固定的条件下，由于 T^4依赖关系的凸性，非均匀温度分布比等温分布更高效地辐射。这意味着，满足相同全局功率平衡的非等温系统的面积平均温度必然低于相应的等温状态。现有关于辐射-传导耦合的研究主要关注非线性控制方程的存在性、唯一性或数值解。[1,6–9] 尽管这一定性效应在非线性辐射系统中已得到充分认识，[10] 但平均温度降低（这确实可通过实验获得）与温度非均匀性程度之间清晰而明确的定量关系尚未建立。

本文分析了受到局部体积加热和辐射交换作用的薄圆盘。通过对非线性控制方程积分，并围绕环境温度进行系统的二阶展开，我们推导出面积平均温度的降低量与温度方差之间的解析表达式。所得关系明确描述了完全由空间热非均匀性引起的非线性辐射平均，将基于凸性的不等式转化为微扰区域内的定量统计关系，并提供了一个物理含义直观的框架。

II. 模型描述与控制方程

我们考虑一块半径为 R 、厚度为 h的薄圆盘，其材料为导热系数 k的各向同性材料。该圆盘受到轴对称体积热生成 $Q(r)$（$\mathrm{W\cdot m^{-3}}$），热源局限于中心区域 $0 \le r \le a$内，如图1所示，因此

$$Q(r)=\begin{cases} Q_0, & 0 \le r \le a, \\ 0, & a < r \le R. \end{cases}$$

圆盘与温度为 T_{a}（取为环境温度）、半球发射率为 ε的大型等温周围环境进行热辐射交换。假设辐射仅发生在上表面。边缘和底面均视为绝热。为单独研究导热-辐射耦合，忽略对流。从

a)电子邮箱：fujie@nbu.edu.cn

符号说明	
R	圆盘半径
h	圆盘厚度
k	热导率
ϵ	发射率
σ	斯特藩–玻尔兹曼常数
Q_0	中心处的体积热源密度
a	热源半径
T_a	环境温度

表 I. 符号说明

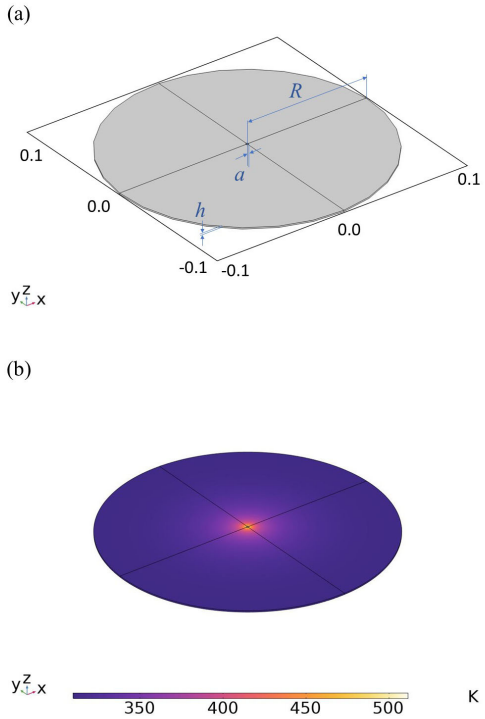


图 1. (a) 辐射–导热薄圆盘模型的几何形状。(b) 中心局部加热下具有代表性的轴对称温度分布。

傅里叶定律，[11] 体积热通量为：

$$\mathbf{q} = -k\nabla T. \tag{1}$$

我们采用轴对称性和薄板近似$h \ll R$，因此温度沿厚度方向近乎均匀，可由中面温度场 $T(r)$ 表示。[12] 沿厚度方向对体积热通量积分 h ，可得有效的面内表面热通量

$$\mathbf{q}_\mathrm{r} = -kh\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\hat{r}. \tag{2}$$

应用稳态能量守恒[13] 和斯特藩–玻尔兹曼定律可得：

$$\nabla\cdot\mathbf{q}_\mathrm{r} + \varepsilon\sigma(T^4 - T_\mathrm{a}^4) = hQ(r), \tag{3}$$

其中， $hQ(r)$表示对体积热源沿厚度积分得到的单位表面积热输入。因此，式（3）中的所有项的单位均为单位面积热通量（W m^{-2}）。因此，

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right) - \frac{\varepsilon\sigma}{kh}\left(T^4 - T_\mathrm{a}^4\right) + \frac{Q(r)}{k} = 0, \qquad 0 \leqslant r \leqslant R. \tag{4}$$

圆盘中心的正则性要求

$$\left.\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right|_{r=0} = 0, \tag{5}$$

并施加如下外边界绝热条件

$$\left.\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right|_{r=R} = 0. \tag{6}$$

为方便起见，我们引入辐射耦合参数

$$\alpha = \frac{\varepsilon\sigma}{kh}. \tag{7}$$

最终，控制方程可简洁地写为

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right) - \alpha\left(T^4 - T_\mathrm{a}^4\right) + \frac{Q(r)}{k} = 0. \tag{8}$$

III. 薄板约化的验证

为评估第 II 节所引入的薄板近似的有效性，使用 COMSOL Multiphysics 有限元模拟求解具有表面辐射边界条件的完整三维热传导问题。模型由厚度为 h 、半径为 R 的实心圆盘构成，上表面施加辐射热交换，而底面和外缘则设为绝热边界。体积热源按照第 II 节定义的分布进行设置。对于陶瓷圆盘，计算所用的具体参数列于表

参数	数值
R (m)	0.1
h (m)	0.001
k (Wm^{-1} K^{-1})	10
ϵ	0.8
Q_0 (W m^{-3})	10^9
a (m)	0.001
T_a (K)	300

表 II. 用于验证薄板约化的几何尺寸、材料属性和源参数。

将三维模拟获得的稳态温度场与由厚度积分能量平衡推导出的简化二维控制方程的解进行比较，如式（8）所示。该方程在 Matlab 中使用基于配点法的边值问题求解器 bvp4c 求解，边界条件采用式（5）和式（6）中定义的条件。

最后，我们考察中平面温度分布$T(r)$和最大温升，如图 2 所示。结果发现，二维解与从完整三维模拟中提取的中平面温度几乎无法区分。对于所考虑的参数，峰值温度的相对偏差低于 0.84%。这些结果验证了薄板简化方法，并表明二维模型能够准确捕捉导热-辐射耦合作用下的稳态热行为。

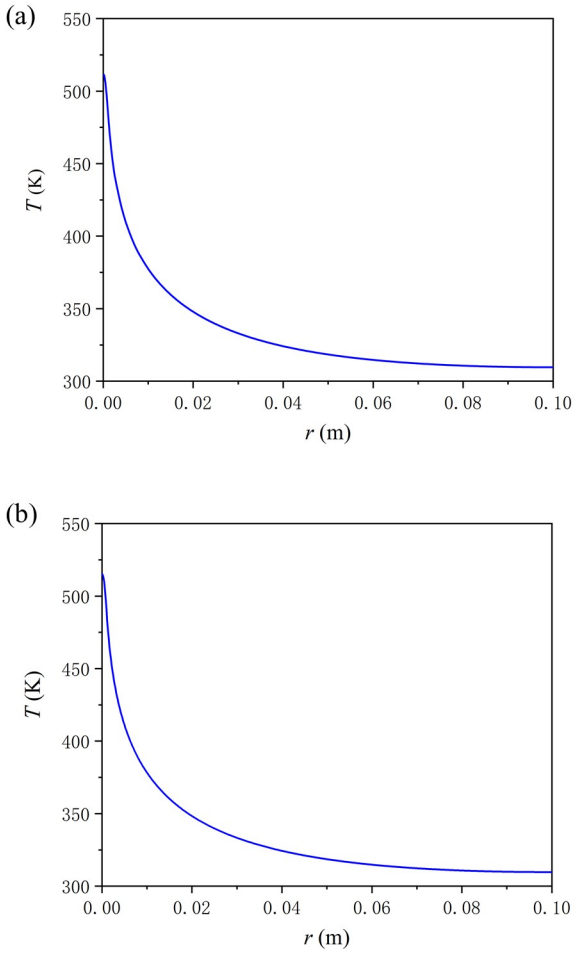


图 2. 完整三维有限元模拟与约化二维模型的比较：(a) 从三维模拟中提取的中平面温度；(b) 约化控制方程的数值解。

IV. 平均温度与温度方差之间的解析关系

我们首先定义非等温表面的面积平均温度，

$$\bar{T} = \frac{1}{A}\int_A T \,\mathrm{d}\,A = \frac{2}{R^2}\int rT(r)\,\mathrm{d}\,r, \qquad A = \pi R^2. \quad (9)$$

对于温度均匀为T_{iso}的等温表面，稳态要求总辐射热损失等于总输入功率。该条件给出

$$T_{\mathrm{iso}} = \left(T_{\mathrm{a}}^4 + \frac{a^2 h Q_0}{\sigma\epsilon R^2}\right)^{1/4}. \quad (10)$$

图 3 展示了在径向温度分布为 $T\,(r)$ 的条件下，通过数值求解约化二维控制方程（8）所得的 T与 T_{iso} 之间的数值比较。非等温圆盘的平均温度 T 低于等温圆盘的平均温度 T_{iso}，这与辐射热损失项的凸性一致。

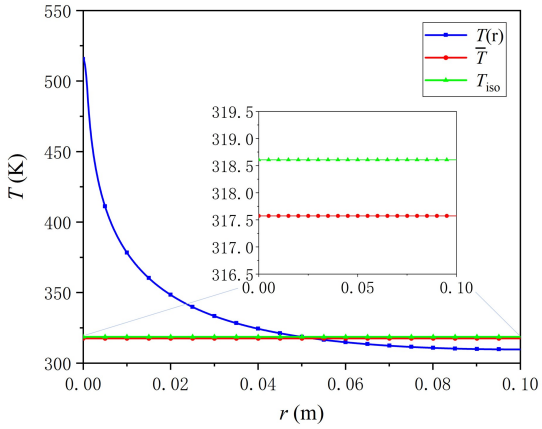


图 3. 局部加热下的径向温度分布 $T\,(r)$。水平线表示面积平均温度 T 以及相应的等温平衡温度 T_{iso}。插图为 $\bar{T}$与 T_{iso}之间的放大比较，展示了非等温情况下平均温度的降低。

相反，我们的目标是通过解析方法找出 T_{iso} 与 T之间的定量差异。我们在圆盘面积 A上对稳态控制方程进行积分：

$$\int_A \left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,r}\left(r\frac{\mathrm{d}\,T}{\mathrm{d}\,r}\right) - \frac{\varepsilon\sigma}{kh}\left(T^4 - T_{\mathrm{a}}^4\right) + \frac{Q(r)}{k}\right]\mathrm{d}\,A = 0.$$

在边缘采用绝热边界条件后，散度项消失，从而得到全局功率平衡

$$\varepsilon\sigma\int_A \left(T^4 - T_{\mathrm{a}}^4\right)\,\mathrm{d}\,A = \int_A h\,Q(r)\,\mathrm{d}\,A \equiv P_{\mathrm{in}}, \quad (11)$$

其中 P_{in} 是热输入功率。定义面积平均值 $\langle f\rangle = \frac{1}{A}\int_A f\,dA$，可得

$$\varepsilon\sigma A\left(\langle T^4\rangle - T_{\mathrm{a}}^4\right) = P_{\mathrm{in}}. \tag{12}$$

等温温度 T_{iso} 满足相同的功率平衡，

$$\varepsilon\sigma A\left(T_{\mathrm{iso}}^4 - T_{\mathrm{a}}^4\right) = P_{\mathrm{in}}. \tag{13}$$

比较这两个表达式可得关键恒等式

$$\langle T^4\rangle = T_{\mathrm{iso}}^4. \tag{14}$$

该恒等式仅由全局辐射功率平衡推出，与具体的几何形状、热源分布或热导率无关。它反映的是辐射热损失的四次非线性所产生的结构性结果，而非热传导的结果。[15]

设 $T = T_{\mathrm{a}} + \theta$，其中 $|\theta| \ll T_{\mathrm{a}}$。展开至二阶，

$$(T_{\mathrm{a}} + \theta)^4 = T_{\mathrm{a}}^4 + 4T_{\mathrm{a}}^3\theta + 6T_{\mathrm{a}}^2\theta^2 + O(\theta^3). \tag{15}$$

取面积平均，

$$\langle T^4\rangle = T_{\mathrm{a}}^4 + 4T_{\mathrm{a}}^3\langle\theta\rangle + 6T_{\mathrm{a}}^2\langle\theta^2\rangle + O(\theta^3). \tag{16}$$

类似地，写成 $T_{\mathrm{iso}} = T_{\mathrm{a}} + \theta_{\mathrm{iso}}$ 并展开，

$$T_{\mathrm{iso}}^4 = T_{\mathrm{a}}^4 + 4T_{\mathrm{a}}^3\theta_{\mathrm{iso}} + 6T_{\mathrm{a}}^2\theta_{\mathrm{iso}}^2 + O(\theta^3). \tag{17}$$

利用 $\langle T^4\rangle = T^4_{\text{等温}}$ 并代入方程（16），可得 (17),

$$T_{\mathrm{a}}^4 + 4T_{\mathrm{a}}^3\langle\theta\rangle + 6T_{\mathrm{a}}^2\langle\theta^2\rangle = T_{\mathrm{a}}^4 + 4T_{\mathrm{a}}^3\theta_{\mathrm{iso}} + 6T_{\mathrm{a}}^2\theta_{\mathrm{iso}}^2 + O(\theta^3). \tag{18}$$

Cancelling T_{a}^4 and dividing both sides by $4T_a^3$ yields

$$\langle\theta\rangle + \frac{3}{2T_{\mathrm{a}}}\langle\theta^2\rangle = \theta_{\mathrm{iso}} + \frac{3}{2T_{\mathrm{a}}}\theta_{\mathrm{iso}}^2 + O(\theta^3). \tag{19}$$

因此，

$$\langle\theta\rangle = \theta_{\mathrm{iso}} + O(\theta^2), \qquad \langle\theta\rangle^2 = \theta_{\mathrm{iso}}^2 + O(\theta^3). \tag{20}$$

引入方差

$$\mathrm{Var}(\theta) = \langle\theta^2\rangle - \langle\theta\rangle^2,$$

我们写作

$$\langle\theta^2\rangle = \mathrm{Var}(\theta) + \langle\theta\rangle^2.$$

代入此表达式，并注意到 $\langle\theta\rangle^2$ 和θ_{iso}^2 是二阶小量，我们仅保留至 $O(\theta^2)$ 阶的项，得到

$$\langle\theta\rangle + \frac{3}{2T_{\mathrm{a}}}\,\mathrm{Var}(\theta) = \theta_{\mathrm{iso}} + O(\theta^3). \tag{21}$$

因此，

$$\langle\theta\rangle = \theta_{\mathrm{iso}} - \frac{3}{2T_{\mathrm{a}}}\,\mathrm{Var}(\theta) + O(\theta^3). \tag{22}$$

回顾 $T = T_{\mathrm{a}} + \langle\theta\rangle$ 和 $T_{\mathrm{iso}} = T_{\mathrm{a}} + \theta_{\mathrm{iso}}$，最终得到

$$\bar{T} = T_{\mathrm{iso}} - \frac{3}{2T_{\mathrm{a}}}\,\mathrm{Var}(\theta) + O(\theta^3). \tag{23}$$

方程（23）表明，平均温度降低与温度方差成正比，比例因子为 $3/(2T_a)$，其完全源于辐射热损失对温度的四次依赖。这揭示了平均温度偏移是一种纯粹的非线性统计效应，而非由传导细节造成。图4比较了径向温度分布为 $T(r)$ 时的等温平衡温度 T_{iso} 和平均温度$\bar{T}$。图中绘出了两个温度平均值 T_{num} 和 T_{anal}：一个通过数值求解约化的二维控制方程（8）得到，另一个则分别根据方程（23）中的解析关系求得。两者均低于 T_{iso}，且解析预测T_{anal} 与数值结果T_{num}高度吻合，证实在小偏差展开的二阶近似下，平均温度降低由温度方差定量决定。

V. 基于方差的关系的适用范围

式(23)中的解析关系是在温度非均匀性相对于环境温度保持较小的假设下推导的，即，$|\theta| \ll T_{\mathrm{a}}$。为评估该二阶展开的实际适用范围，我们改变热源强度 Q_0，并量化数值平均温度 T_{num} 与基于方差的近似 T_{anal}之间的偏差。

具体而言，最大温度非均匀性$\Delta T_{\max} = T(0) - T_{\mathrm{a}}$用作控制参数。对于 Q_0的每个取值，我们根据控制方程的数值解计算精确的平均温度，并将其与式（23）给出的解析预测$\bar{T}_{\mathrm{anal}}$ 进行比较。图5展示了绝对误差 作为 $\Delta T_{\max}$的函数。

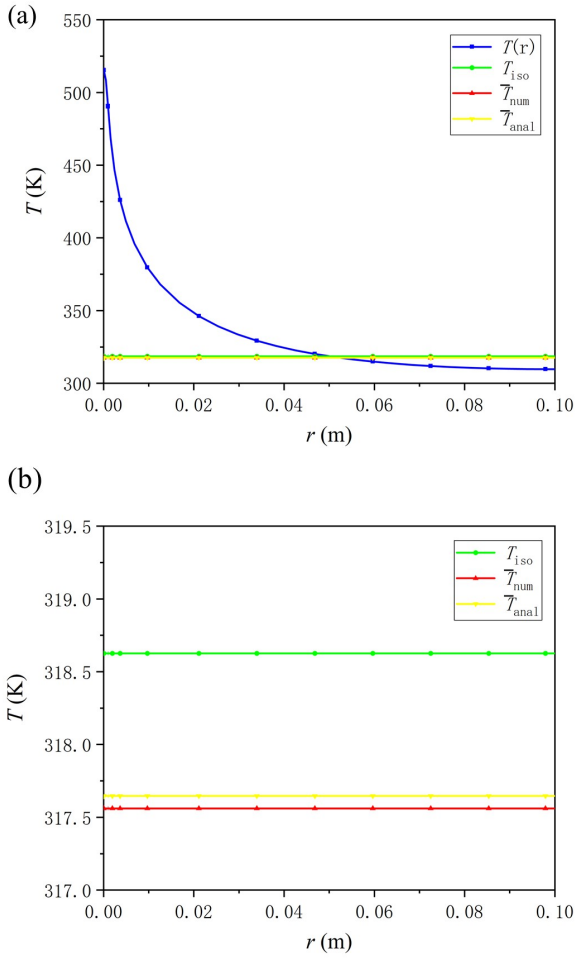


图4. 精确平均温度与基于方差的近似之间的比较。(a) 径向温度分布 $T(r)$、 T_{iso}、数值平均温度 $\bar{T}_{\mathrm{num}}$以及解析结果 $\bar{T}_{\mathrm{anal}}$。(b) 放大视图突出显示 $\bar{T}_{\mathrm{num}}$ 与 $\bar{T}_{\mathrm{anal}}$之间的定量一致性，且二者均低于 T_{iso}。

结果表明，二阶近似不仅在严格的小偏差范围内保持高度准确，即使中心温升达到高于环境温度数百开尔文时也是如此。这一现象说明，控制展开精度的相关微扰参数并非仅仅是峰值温度 $\Delta T_{\max}$ ，而是无量纲方差 $\mathrm{Var}(\theta)/T_{\mathrm{a}}^2$。这可直接从式（15）的展开结构看出，其中小参数自然以归一化形式 θ/T_a出现。即使峰值温升变大，温度分布仍可能相对平滑，因此归一化方差 $\mathrm{Var}(\theta)/T_{\mathrm{a}}^2$ 仍然较小。只要该量保持较小，基于方差的关系就能准确地定量预测平均温度降低。

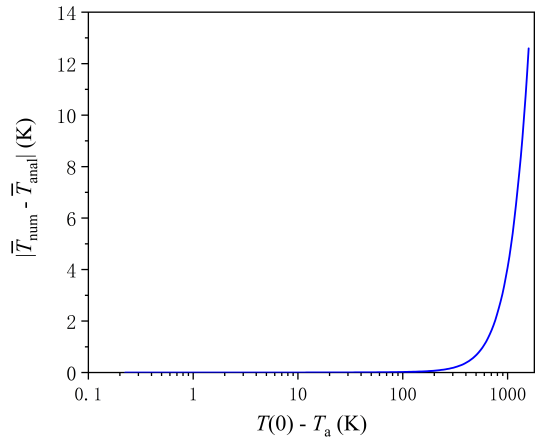


图5. 数值平均温度 $\bar{T}_{\mathrm{num}}$ 与二阶解析近似$\bar{T}_{\mathrm{anal}}$ 之间的绝对误差，作为最大温度非均匀性 $T(0) - T_{\mathrm{a}}$的函数。误差定义为 $|\bar{T}_{\mathrm{num}} - \bar{T}_{\mathrm{anal}}|$。对数横轴突出显示了二阶近似在很宽的参数范围内仍保持准确。

第六节：结论

在本工作中，我们建立了支配非均匀加热下非线性辐射–传导系统的定量统计关系。从全局能量守恒出发，我们确定了精确恒等式 $\langle T^4 \rangle = T_{\mathrm{iso}}^4$，该恒等式表明辐射传热施加了一个非线性平均约束，该约束与具体的加热分布或材料参数无关。

通过围绕环境温度进行二阶展开，我们推导出了显式关系

$$\bar{T} = T_{\mathrm{iso}} - \frac{3}{2T_{\mathrm{a}}}\,\mathrm{Var}(\theta) + O(\theta^3).$$

这表明，平均温度的降低与温度方差成正比。比例系数仅取决于辐射热损失的四次非线性，说明非均匀加热带来的冷却优势纯粹是一种非线性统计效应，而非导热重新分布的结果。

约化控制方程的数值解和完整的三维有限元模拟证实，在广泛的参数范围内，包括严格渐近区间之外，该基于方差的关系均成立。其精度并非由峰值温升本身决定，而是由无量纲方差 $\mathrm{Var}(\theta)/T_{\mathrm{a}}^2$ 控制，这凸显了非线性辐射平均固有的微扰结构。

本研究框架在微观温度非均匀性与宏观冷却性能之间搭建了一座清晰的桥梁。更广泛地说，它提——

示，在由强非线性发射定律支配的辐射系统中，空间方差是支配非线性辐射平均的基本微扰不变量。这一观点或可扩展至其他几何构型和多物理场系统，在这些系统中，非线性辐射交换发挥着主导作用。

[1]F. Asllanaj、G. Jeandel、J. R. Roche 和 D. Schmitt，《输运理论与统计物理》**32**，1（2003）。[2]R. M. S. da Gama，《国际传热传质通讯》**24**，119（1997）。[3]A. Venkatraman 和 W. D. Collins，《定量光谱学与辐射传输杂志》**58**，75（1997）。[4]F. Herz、R. Messina 和 P. Ben-Abdallah，《物理评论B》**112**，035403（2025）。[5]W. Krebs、R. Koch、B. Ganz、L. Eigenmann 和 S. Wittig，载于 *Proceedings of the Combustion Institute*，第 26 卷（1996），第 2763–2770 页。[6]M. Thompson、C. Segatto 和 M. T. de Vilhena，《输运理论与统计物理》**33**，563（2004）。[7]M. Ghattassi、J. R. Roche 和 D. Schmitt，《计算与应用数学杂志》**346**，1（2019）。[8]P. Talukdar 和 S. C. Mishra，《国际传热传质杂志》**45**，2159（2002）。[9]R. B. Guenther 和 J. W. Lee，《计算与应用数学杂志》**88**，119（1998）。[10]Y. Zhang、X. Li、J. Wang，*et al.*，**957**，，20 2023《天体物理学杂志》（）。[11]M. N. ¨Ozı¸sık，*Heat Conduction*，第 2 版（约翰·威立父子公司，纽约，1993）。[12]E.-H. Lee 和 W. Choi，《应用数学与计算》**408**，126356（2021）。[13]S. Whitaker，*Fundamental Principles of Heat Transfer*（佩加蒙出版社，纽约，1977）。[14]M. Ballan、S. Corradetti、M. Manzolaro、G. Meneghetti 和 A. Andrighetto，《材料》**15**，8358（2022）。[15]H. Kim、M.-S. Han、D. Perello 和 M. Yun，《红外物理与技术》**60**，7（2013）。