arXiv:2603.03982v1 [math.RA] 4 Mar 2026

诺丁汉代数的分类

M. AVITABILE、A. CARANTI 和 S. MATTAREI

Abstract. 素特征域上的诺丁汉群所对应的分次李代数，是诺丁汉代数这一类无限维正分次薄代数的一个基本例子。

本文完成了早期论文开启的诺丁汉代数分类，证明了存在性和唯一性结果，从而确定了所有这类代数在同构意义下的分类。

1. Introduction

本文的主要结果是对诺丁汉代数进行完整分类。这些代数是无限维正分次李代数，其中最著名的例子是与诺丁汉群 [Joh88, DdSMS99, Cam00] 在素域上的下中心列相关联的分次李代数 $\mathbb{F}_p$，其中 p 是一个奇素数。

群的结构反映在与之相关联的李代数的结构之中。诺丁汉群是一个薄群，即这样一个群：其每个非平凡正规子群都位于其下中心列的两个适当项之间，且下中心因子是阶为 p 或 p^2的初等阿贝尔群。因此，与之相关联的李代数是一个薄代数，即一个正分次李代数，其中每个齐次分量的维数为一或二，并且满足如下覆盖性质：每个非零分次理想都位于该代数的两个适当的相继李幂之间。薄代数中的二维齐次分量称为菱形，这一术语源于它们的理想格。薄代数的第一个齐次分量总是一个菱形，即该代数的第一菱形。

与诺丁汉群相关联的李代数的第二个钻石的次数为 p，这反映了该群的非循环下中心因子出现在所有模 $p-1$ 同余于 1 的次数中。与诺丁汉群相关联的李代数已在 [Car97]，中得到广泛研究，文中提出了一种自然推广：第二个钻石的次数为底域特征的幂。薄代数 $L = \bigoplus_{i=1}^{\infty} L_i$

作者均为INdAM-GNSAGA成员。由欧盟——下一代欧盟、任务4组成部分1 CUP B53D23009410006、PRIN 2022 - 2022PSTWLB——群论与应用资助。

若一个底域特征为奇素数 p 的薄代数，其第二个钻石出现在次数 q，其中 q 是 p 的幂，则称其为诺丁汉代数。

在每个诺丁汉代数中，第一菱形之后的每个菱形都可以赋予一个类型，它是底域中的一个元素，或者也可能是 ∞。第二个菱形 L_q始终具有类型 -1，而第一菱形 L_1不赋予类型。对于少数几种类型，相应的菱形是退化的，我们称之为伪钻石。菱形的类型 L_m 描述了L_1 在 L_m上的伴随作用，因此，只要知道菱形在L中出现的所有次数及其类型，就可以确定 L （在同构意义下）。我们在第2节回顾菱形类型的定义。诺丁汉代数中任意两个连续菱形的次数差已在 [AM23], 中得到研究，其中证明了该差值等于 $q-1$，但对伪菱形需作适当解释。为方便读者，我们在定理 2.5 中引述 [AM23],的结果，并将其表述为适合本文目的的形式。

已知的诺丁汉代数种类繁多。在若干情形下，菱形的类型遵循周期模式。我们将这类代数称为正则诺丁汉代数。它们源自某些 Cartan 型单李代数的循环分次。特别地，与诺丁汉群相关联的薄代数是一个正则代数，源自维特代数的循环分次。我们在定理 4.1 中作了更详细的说明；该定理给出了具有周期性菱形类型模式的诺丁汉代数的存在性结果，并概述了多篇论文的结论（[Car97], [Avi02], [AM07], [AM14]）。定理 4.1 中的代数也具有唯一性结果，即每个代数都由一个适当的有限维商唯一确定。详情请参阅定理 4.1 后的评述。

在诺丁汉代数中，正则代数只占少数。还有其他诺丁汉代数，事实上有不可数多个，它们与极大类（分次李）代数密切相关。David Young 在其博士论文 [You01] 中对它们作了描述。他的研究最初旨在分类第三个菱形为伪菱形且次数为 $2q-1$ 的诺丁汉代数。余类 2 的代数是其中一个特例。另一个特殊类别由代数 $\mathcal{T}_{q,1}(M)$ 构成；这些代数与至多具有两个不同二步中心化子的极大类代数一一对应。他完全实现了这一目标，我们将其分类结果作为定理 6.2 引用。

尽管这超出了他工作的范围，Young 还描述了第二种由极大类代数构造诺丁汉代数的方法，这些代数记为 $\mathcal{T}_{q,2}(M)$。在本文中，我们讨论这些代数的存在性与唯一性，从而完成诺丁汉代数完整分类的最后一步。在第7节中，我们证明代数 $\mathcal{T}_{q,2}(M)$ 与具有两个不同二步中心化子的极大类代数一一对应。我们在定理 8.1 中证明，这些代数由一个适当的有限维商唯一确定。一个关键作用在

我们的论证中由诺丁汉代数的一个自然 $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$-分次所承担，我们在第 3 节引入该分次。为使叙述更为简洁，最技术性的引理被推迟到结尾的第9节，并在全文中按需给出前向引用。

定理4.1和6.1合在一起，给出了诺丁汉代数的完整分类，从而解决了该分类问题。

2. Nottingham algebras and their diamonds

本节介绍诺丁汉代数的基本定义和结果，内容基本上引自 [AM23] 和 [AM22]。（请注意，这两篇文章的逻辑顺序与其时间顺序不同。）

一个薄 （李）代数是分次李代数 $L=\bigoplus_{i=1}^{\infty}L_i$，维数为$\dim L_1=2$，并满足覆盖性质：对每个 i，每个非零 $z\in L_i$ 满足$[zL_1]=L_{i+1}$。然而，在本文中我们假定 L 具有无穷维，由此可知 L 具有平凡中心。正如我们在引言中所述，我们对诺丁汉代数的定义包含对 p 和 q的限制。

定义2.1. 一个诺丁汉代数 是特征为 $p>3$的域上的薄代数，其第二个钻石为 L_q，其中 $q>5$ 是 p的幂。

定义 2.1 中对 p和 q 的限制，旨在避免小特征下各种特殊情况的出现；这些情况始于某些 Nottingham 代数符合其他薄代数族的构造规则。

本文采用迭代李乘积的左嵌套约定，因此 $[abc]$ 表示 $[[ab]c]$。我们还使用简写 $[ab^i]=[ab\cdots b]$，其中 b 出现i 次。

让我们先从更一般的情形入手，考虑一个满足 $\dim(L_3)=1$ 的薄代数 L 。那么，存在一个非零元素 y，属于 L_1，且在相差一个标量倍数的意义下唯一，使得 $[L_2y]=0$。将其扩充为 L_1 的一组基 x，y，这意味着 $[yxy]=0$。不难从这个关系推得，在这样的薄代数 L 中，任意两个相邻分量不可能都是菱形；证明见 [Mat22] 。因此，任意两个菱形之间都隔着一个或多个一维齐次分量。

在 [Mat22]中，更为精细的论证表明，任何 L 第二个菱形出现在 L_5 之后的李代数都满足 $[Lyy]=0$，这意味着 $(\operatorname{ad}y)^2=0$。根据 Kostrikin 的一个广为人知的定义，在奇特征下，这意味着 y 是 L的三明治元。这一事实的重要性将在 [Mat22]中讨论。特别地，本文定义的诺丁汉代数满足 $(\operatorname{ad}y)^2=0$。我们将 $q=5$ 排除在诺丁汉代数的定义之外的原因之一，是存在经典类型的薄代数 A_2，它属于 [CMNS96] （以及 [Mat99]），并且在除 2 以外的任意特征下，每个模 6 同余于 ±1的次数上都有一个菱形。特别地，这个薄代数以 L_5 和 L_7 作为第二个和第三个菱形，这很容易推出 $[L_5yy]\neq0$。

从现在起，设 L 是一个第二个菱形为 L_q的诺丁汉代数。于是，元素 y 中心化从 L_2 到 L_{q-2}的每个齐次分量。这个非平凡的断言在 [CJ99], 中得到证明，并且依赖于 [CMN97, CN00]中建立的极大类代数理论。因此， L_i 由$[yx^{i-1}]$ （ $2 \leq i < q$）张成。特别地， $v_1 = [yx^{q-2}]$ 张成分量 L_{q-1} ，进而 $[v_1x]$ 和 $[v_1y]$ 张成第二个菱形 L_q。 v_1 中的下标源于以某种方式为菱形编号的便利性，而事实证明，这种记法比在一些早期论文中将其记为 v_2 更为自然。

现在很容易看出，可以重新定义 x ，使得

$$[v_1xx] = 0 = [v_1yy] \quad \text{and} \quad [v_1yx] = -2[v_1xy], \tag{1}$$

参见 [AM07 第 3]节，其中对 [Car97]中的原始论证有更简洁的摘录。在本文余下部分，我们将这样的 x 和 y 称为标准生成元 。

由公式（1）立即可知，子空间 Fx 和 Fy 是唯一确定的。如下文定义2.2和2.3所引入的，菱形的类型不会受到这两个子空间生成元选取的影响。

由于 $[yx^q] = [v_1xx] = 0$，我们有 $(\operatorname{ad} x)^q = 0$。事实上，由于 $(\operatorname{ad} x)^q$是 L的一个导子，其核是一个子代数；而两个生成元 x 和 y 都属于该子代数，因此它必定等于 L 。

我们回顾 [CM04]中引入的菱形类型 定义。（注意，对于第二个菱形为 L_{2q-1}的薄代数，菱形类型的定义有所不同，见 [CM99]。）我们不给第一菱形 L_1 赋予类型。现在设L_m 是位于 L_1之后的一个菱形，也就是说，它是 L 的一个二维齐次分量，且满足 $m > 1$。由于不可能有两个连续的齐次分量都是菱形， L_{m-1} 是一维的， L_{m+1}也如此。若 w 张成 L_{m-1}，则 L_m由 $[wx]$ 和 $[wy]$张成，而 L_{m+1} 由 $[wxx]$、 $[wxy]$、 $[wyx]$和$[wyy]$张成。下面的定义刻画了后四个元素之间的特定关系。

定义 2.2。 设 L 为一个诺丁汉代数，其第二个钻石为 L_q ，标准生成元为 x 和 y。设 L_m 为 L的一个菱形，且 $m > 1$，并设 w为 L_{m-1}中的一个非零元素。

(a) 我们称 L_m 为 有限型 μ的一个菱形，其中 $\mu \in F$，如果

$$[wxx] = 0 = [wyy] \quad \text{and} \quad \mu[wyx] = (1-\mu)[wxy].$$

(b) 如果，我们称 L_m 为无限型 的一个菱形

$$[wxx] = 0 = [wyy] \quad \text{and} \quad [wyx] = -[wxy].$$

特别地，该定义适用于第二个钻石 L_q，因此其类型始终为 $\mu = -1$。

注意，情形 (a) 的关系为

$$[wyy] = 0, \quad [wzz] = [wyz] + [wzy], \quad [wzy] = \mu[wzz]$$

当用 L 的替代生成元 x 与 $z = x + y$ 表述时。这是为在 [CM04], 中对 L 进行计算而选择的生成元，其优点在于：对所有 $k > 0$， $[yz^{k-1}]$ 均为 L_k 中的非零元，从而 $[yz^k]$ 与 $[yz^{k-1}y]$ 张成 L_{k+1}。此处所采用的标准生成元 x 与 y 在后来的发展中变得更为可取，这在很大程度上是因为菱形关系关于对 x, y 是齐次的，因此诺丁汉代数获得一种双重分次，该分次将在第 3 节中引入。

在定义 2.2 中， $\mu = 0$ 和 $\mu = 1$ 这两个值实际上不可能出现。若 $\mu = 0$, 则关系式 $[wxx] = 0 = [wxy]$意味着元素 $[wx]$ 是中心的，因此根据我们对维数 $\dim(L) = \infty$所作的普遍假设，它必为零。同样，若$\mu = 1$ ，则元素 $[wy]$ 是中心的，因此也必为零。于是，严格来说，类型 0 或 1 的菱形不可能出现，至少在我们坚持菱形应为二维（如定义 2.2 所述）的前提下是如此。然而，为了统一描述诺丁汉代数中的菱形模式，方便起见，我们允许将满足定义 2.2 中关系式、且 $\mu = 0$ 为 0 或 1 的一维齐次分量 L_m 称为类型 0或 1 的菱形。由此得到以下定义。

定义 2.3。 设 L 是一个诺丁汉代数，其第二个钻石为 L_q ，标准生成元为 x 和 y。设 L_{m-1} 是由 w张成的一维分量，且 $m > 1$。

(a) 我们称 L_m 是类型为 1 的菱形，如果

$$[wxx] = 0 \quad \text{and} \quad [wy] = 0.$$

(b) 我们称 L_m 是 类型为 0 的菱形，如果

$$[wx] = 0 \quad \text{and} \quad [wyy] = 0.$$

我们将类型 0 或 1 的菱形称为伪钻石 ，以区别于二维的真正钻石 。在处理诺丁汉代数时纳入伪钻石的必要性，早在其发展初期便已出现，因为在若干值得注意的情形中，菱形以等间隔出现，其类型遵循等差数列（见第 4 节）。当这种类型的等差数列经过 0 或 1 时，便会出现伪钻石。

然而，这带有一种固有的歧义：每当 L_m 满足 1 型菱形的定义（即相当于 $[L_{m-1}y] = 0$ 与 $[L_m x] = 0$）时，下一个齐次分量 L_{m+1} 便满足 0 型菱形的定义（因为由于覆盖性质有 $[L_m y] = L_{m+1}$ ，进而由于 $[Lyy] = 0$有 $[L_{m+1}y] = 0$ ）。因此，若 w 张成 L_{m-1} ，则 $[wx]$ 张成 L_m ，且 $[wxy]$ 张成 L_{m+1}，于是我们有如下关系

$$[wy] = 0, \qquad [wxx] = 0, \qquad [wxyy] = 0. \tag{2}$$

第一个和第二个是定义 2.3 的 (a) 部分中的对象；如果在其中用 $w' = [wx]$ 替换 w ，那么第二个和第三个就是 (*b*) 部分中的对象。由于种种

原因，同时将两个连续的分量视为伪钻石并不方便，因此我们采用以下约定。定理 2.5 展示了采用这一约定的动机，而第 5.1 小节给出了一个具体例子。

约定 2.4. 每当我们遇到一个类型为 1 的菱形 L_m，且其后必然紧跟一个类型为 0 的菱形 L_{m+1} 时，我们允许自己将 L_m 和 L_{m+1}中的恰好一个称为（伪）菱形，具体取决于其类型，而不将另一个称为菱形。

任意诺丁汉代数的一个二维分量 L_m，在满足 $m > q$的情况下，是否必然满足定义 2.2 中关于某个 μ的关系，从而可以为其指定类型 μ，这并非显而易见。事实上，这是 [AM23] 的主要结论之一。更一般地，文中证明了：只要对于某个 $m > q$，有 $[L_{m-2}y] = 0$ 且 $[L_{m-1}y] \neq 0$，那么 L_m 要么是二维的，并可根据定义 2.2 为其指定类型 μ；要么是根据定义 2.3 判定的 0 型（伪）菱形 L_m。正如我们在该定义之后立即指出的，后一种情况也可以解释为 L_{m-1} 是一个 1 型菱形。

[AM23] 的结果还有一个推论：根据约定 2.4，对于任意诺丁汉代数，总可以认为任意两个相邻菱形的次数之差为 $q - 1$，但涉及伪菱形时，须作适当解释。我们引用 [AM22]中给出的表述来说明所需内容。

定理 2.5 ([AM22]中的定理 3.1)。设 L 是一个诺丁汉代数，其第二个菱形为 L_q，标准生成元为 x 和 y。设 L_m 是 L 的一个（可能是伪）菱形，且 $m \geq q$。

(a) 若 L_m 是真正的菱形，则 L_{m+q-1} 是一个菱形。(b) 若 L_m 是一个类型为 1 的菱形，则 L_{m+q-1} 或 L_{m+q} 是一个菱形。(c)若 L_m 是一个类型为 0 的菱形，且此外 L_{m-q+1} 是一个非零类型的菱形，则 L_{m+q-1} 是一个菱形。(d) 在上述每种情形中，y 中心化 L_{m+1}、...、L_{m+q-3}；若断言 ***(b)*** 中的 L_{m+q-1} 不是菱形，则也中心化 L_{m+q-2}。

有必要作一些澄清。定理 2.5 的断言 (d) 连同 (a) 和 (b) 表明，在诺丁汉代数中，y 中心化每个既非菱形、也不紧邻菱形之前的齐次分量。因此，只需给出菱形的次数和类型（仍需使用约定 2.4 处理伪菱形），便足以完整描述任意诺丁汉代数。

接下来，断言 (b) 的两个结论并非互不相交，最常见的情况是 L_{m+q-1} 为 1 型菱形，这与 L_{m+q} 为 0 型菱形含义相同。此外，断言 (b) 的假设也可以换一种方式理解为 L_{m+1} 为 0 型菱形。总而言之，我们看到连续菱形之间的

次数差总可以理解为 $q-1$，只要我们对其中涉及的任何伪菱形作出恰当解释即可。

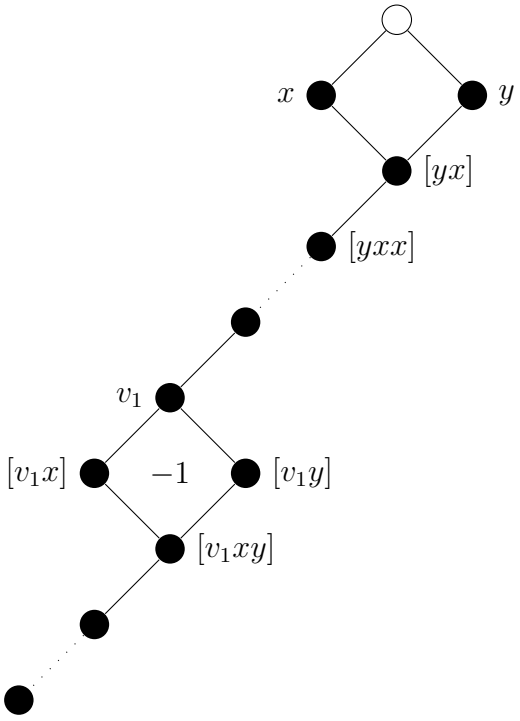
最后请注意，若将断言（c）的假设理解为 L_{m-1} 是一个 1 型菱形，那么断言 (b) 只能告诉我们 L_{m+q-2} 或 L_{m+q-1} 是菱形。事实上，要推导出断言（c）中更强的结论，需要了解 L_m 之前的菱形。

定理 2.5 的所有断言在 [AM23] 中提出时，都附带一个笼统的假设，即诺丁汉代数是无穷维的。然而，正如文中所指出的，只要这些断言提及的齐次分量都不是 L 的最后一个或倒数第二个非零齐次分量，那么这些断言对有限维诺丁汉代数 L仍然成立。

3. The double grading of a Nottingham algebra

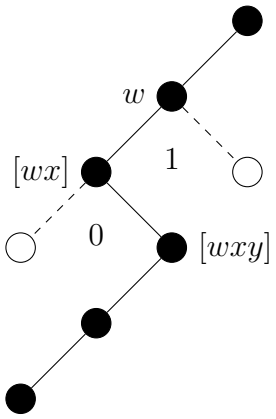
在 [AM23], 中证明的一个事实是，诺丁汉代数的每个菱形都可以被赋予一种类型（可能包括上文所述的 1 型或 0 型伪菱形）。这一事实带来了一个显著结果：诺丁汉代数是双分次的，如下所述。若 L 是一个诺丁汉代数，其标准生成元为 x 和 y，则可为 L 指定一个自然的 $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$- 分次 $\bigoplus_{r,\ s\in\mathbb{Z}} L_{(r,s)}$：规定 x 和 y 的次数分别为 (1，0) 和 (0，1)。我们有 $[L_{(r,s)},x]\subseteq L_{(r+1,s)}$ 和 $[L_{(r,s)},y]\subseteq L_{(r,s+1)}$；这个分次是良定义的，因为诺丁汉代数中成立的关系，尤其是定义菱形类型的关系。

根据这种分次绘制 L 的（部分）图示或许有助于直观理解。比如，向量 (1，0) 指向西南方，而向量 (0，1) 指向东南方。因此， L截至（或者说向下至）第二个钻石 L_q 的结构如下图所示。



图示中的每个节点都代表 L 在双重分次中的一个非零齐次分量，且除最顶部的节点外，这些分量均为一维；顶部节点仅供参考，因为它表示分量 $L_{(0,0)} = \{0\}$。术语菱形用于指称薄代数的二维分量，最初源自对理想格的描述，但不知为何也很适合这种图示。第二个钻石内部的数字 -1 表示其类型。

如定义 2.3 之后的讨论（由此引出约定 2.4）所述，原则上，紧接在一个 1 型伪菱形之后的 L 齐次分量符合类型 0 菱形的定义。下图展示了伪菱形附近的局部情形。



图中的虚线延伸至元素 $[wy]$ 和 $[wxy]$；图中画出这些元素是为了强调伪菱形的类型这一概念，但它们在 L 中实际上为零。不过，在某些自然的中心扩张中，这些元素并非零；这些扩张出现在由有限维代数构造某些诺丁汉代数的过程中，参见 [Avi02、AM07、AM14], ，这类代数有时被称为准薄。

我们将诺丁汉代数 L 的支撑 定义为使 $L_{(r,s)}$ 非零（因而为一维）的双次数 $(r,\ s)$ 的集合。这使得我们可以简化 L中的某些计算，我们称之为支撑论证：如果某个李括号计算的结果 L 已知是双重分次中的一个齐次元素（通常是因为它是对齐次元素连续施加李括号所得），且其双次数落在 L支撑之外，那么我们就可以断定结果必为零，无须详查计算过程。即使最终结果的预期双次数落在 L的支撑之内，只要计算过程中的某个中间步骤必然离开支撑，通常也能得出同样的结论。

在通过例子阐明支撑论证之前，这似乎是介绍一种通用计算工具的好时机，即广义雅可比恒等式

$$[a[bc^n]] = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} [ac^i bc^{n-i}].$$

经常出现的两个特殊情形是 $[a[bc^q]] = [abc^q] - [ac^q b]$ （这相当于 $(\operatorname{ad} c)^q$ 是一个导子），以及 $[a[bc^{q-1}]] = \sum_{i=0}^{q-1} [ac^i bc^{q-1-i}]$，这是由于 $\binom{q-1}{i} \equiv (-1)^i \pmod{p}$。更一般地，广义雅可比恒等式中涉及的二项式系数可以利用卢卡斯定理高效地模 p计算：若 q 是 p 的幂，且 $a,\ b,\ c,\ d$ 是非负整数，满足$b,\ d < q$，则 $\binom{aq+b}{cq+d} \equiv \binom{a}{c}\binom{b}{d} \pmod{p}$。

我们通过回顾诺丁汉代数的一个简单但基本事实的证明，来说明支撑论证。假设我们已知某个诺丁汉代数直到次数 q 的结构，而我们预计第二个钻石位于此处。因此，L 直到次数 q 的支撑由双次数 $(1,\ 0)$、满足$0 \le i < q$的双次数 $(i,\ 1)$，以及双次数 $(q-2,\ 2)$ 组成。于是，下面的计算证明第二个钻石必定具有类型 -1:

$$\begin{aligned} 0 = [yx^{(q-1)/2}[yx^{(q-1)/2}]] &= \sum_{i=0}^{(q-1)/2} (-1)^i \binom{(q-1)/2}{i} [yx^{(q-1)/2+i} yx^{(q-1)/2-i}] \\ &= \pm \left(\binom{(q-1)/2}{(q-3)/2} [v_1 yx] - \binom{(q-1)/2}{(q-1)/2} [v_1 xy] \right) \\ &= \pm \left(\frac{q-1}{2} [v_1 yx] - [v_1 xy] \right), \end{aligned}$$

由此得出 $[v_1yx] = -2[v_1xy]$。这里，除了最后两项之外，求和中的每一项都为零，因为迭代李括号的某个初始部分落在支撑之外。

若干族诺丁汉代数的支撑 L （即第 4 节所述的那些）可以通过一对取决于 L 的参数 q 的不等式来简单描述。令

$$S_{\leq}(q) = \{(r,s) \in \mathbb{Z}^2 : r,s > 0,\ -1 \leq (q-2)s - r \leq q-2\},$$

以及 $S_{<}(q)$，其定义类似，但采用严格不等式。若诺丁汉代数 L 的支撑包含于 $S_{\leq}(q)$，则称其为正则；否则称为非正则。

事实证明，非正则诺丁汉代数是代数 $\mathcal{N}(q,r)$、$\mathcal{T}_{q,1}(M)$ 和 $\mathcal{T}_{q,2}(M)$；它们由 David Young 在其学位论文 [You01] 中利用某些极大类代数 M 构造而成。我们将在第 5 节介绍 Young 的构造。其他任何参数为 q 的诺丁汉代数 L，其支撑都包含 $S_{<}(q)$，且包含于 $S_{\leq}(q)$。此外，若 L 没有伪菱形，则其支撑恰为 $S_{\leq}(q)$。

我们在本节最后指出，由于诺丁汉代数 L是有限生成的，导子代数 $\mathrm{Der}(L)$ 继承了来自 L的自然分次和双重分次的一个 $\mathbb{Z}$分次以及一个 $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$分次。 L 的一个非内双分次导子将在命题 7.3 中发挥作用，其中L 属于一类特殊的诺丁汉代数。

4. Regular Nottingham algebras

本节介绍经过多篇论文研究而得到的所有正则诺丁汉代数的描述，并讨论其分类的一部分。本节内容取自 [AM23]。

在各种出现伪菱形的情形中，对于称 L_m 为 1 型菱形还是称 L_{m+1} 为类型 0 菱形，有一种自然的选择，使得所有菱形（包括伪菱形）都以正则间距出现，且次数之差为 $q-1$；第 3 节将这种情形形式化为正则性。下面的存在性结果对此进行了说明，随后将在评论中通过唯一性陈述加以阐明和补充。

定理 4.1 （ [AM23]）。 存在诺丁汉代数 L，其第二个钻石为 L_q，其中（可能为伪菱形的）菱形出现在每个模 $q-1$ 同余于1 的次数上，且其类型由以下任一模式描述：

(a) 所有类型为 -1 [Car97] 的菱形；(b)所有有限型菱形，其类型沿非恒定等差数列变化 [Avi02,AM07]；(c) 所有无限型菱形，但次数 $\equiv q \pmod{p^s(q-1)}$（对某个 $s>0$）的菱形除外，它们的类型为 -1 [AM07]；

(d) 所有无限型菱形，但次数 $\equiv q \pmod{p^s(q-1)}$（对某个 $s>0$）的菱形除外，它们的类型沿非恒定等差数列变化 [AM14]；(e) 所有无限型菱形，但 L_q 除外。

请注意，定理 4.1 中的所有代数不仅在菱形距离方面呈现周期模式，其类型也呈现周期模式；这种周期性强于这些代数仅仅是正则的性质。

定理 4.1 情形 (a) 中的诺丁汉代数，即所有菱形的类型均为 -1，最初由 [Car97]，明确构造，其方法是对 Zassenhaus代数采用某种循环分次。其特殊情形中，$q=p$ 是与诺丁汉群的下中心列相关联的分次李代数，这也说明了它们名称的由来。[Car97] 还证明，这些代数由某个有限维商唯一确定。此处以及其他某些情形中，这种“唯一性”是通过为 L 的某个中心扩张给出有限表示来证明的。（在大多数情形中，L 本身并非有限表示。）

关于定理 4.1 的情形 (b)，包含伪菱形的诺丁汉代数最早见于 [CM04]）。更确切地说，文献给出了某些诺丁汉代数的中心扩张（有一种情形是二重中心扩张）的有限表示（有少数例外，这是因为存在代数 $\mathcal{L}_{1,\,q}$,$\mathcal{N}(q,\ r)$, $\mathcal{T}_{q,\,1}(M)$；我们将在第 5 节讨论这些代数）。其中，菱形出现在所有模 $q-1$ 与 1 同余的次数上，其类型构成一个非常数等差数列。如果该等差数列经过 0，也就是说，如果它遍历整个素域，那么这些菱形中就包含类型为 0 和 1 的伪钻石。[Avi02] 明确构造了此类诺丁汉代数，从而证明了它们的存在性；该情形下所有类型都属于素域。其他情形则由 [AM07] 构造。这些构造使用了某些 Cartan型有限维单模李代数，以及它们在有限循环群上的某些分次。

第三个菱形为无限型的诺丁汉代数包括情形 (c) 和 (d) 中的代数。同样，[AM07] and [AM14] 中的构造使用了某些 Cartan 型有限维单模李代数，但为了生成所需的分次，必须开发涉及导子的广义指数的特殊工具，见 [Mat05, AM15b, AM15a]。这些诺丁汉代数的唯一性已在 [AM22]中得到证明。

情形 (e) 中的代数可以通过令参数 s 趋于无穷，从情形 (c) 或 (d) 中的代数得到；这可以用标准的逆极限构造形式化。

在定理 4.1 的所有情形中，每个不是菱形、也不紧邻在菱形之前的齐次分量都由 y 中心化。结合这一信息，以及定理 4.1 各情形中所指定的所有菱形的位置和类型，便能完整描述这些诺丁汉代数。请注意

定理 4.1 中的每个诺丁汉代数，在所有模 $q-1$ 同余于 1 的次数上都有菱形。特别是，在这些特定的诺丁汉代数中，连续菱形之间的距离始终为 $q-1$，前提是我们按照约定 2.4，为每个伪菱形赋予恰当的类型 0 或 1。

5. The other families of Nottingham algebras

我们在第 4 节中提到，定理 4.1 中所有诺丁汉代数 L的唯一性都已在除两个特例之外的所有情形中得到确立，而这两个特例属于定理 4.1 的情形 (b)。回顾一下，在定理 4.1 的该情形中，L 的菱形出现在所有模 $q-1$ 同余于 1 的次数上，其类型构成一个等差数列。这个等差数列由第三个菱形 L_{2q-1} 的类型唯一确定（该类型必须是有限的，否则便会落入定理 4.1 的情形 (c) 或 (d)）。然而，当该类型为 1 或 0，因而这个菱形 L_{2q-1} 是伪菱形时，L 无法根据这些规定唯一确定为一个诺丁汉代数。

事实上，存在许多在次数 $2q-1$上没有真正的菱形的诺丁汉代数；从某种意义上说，这类代数实际上占诺丁汉代数的大多数。David Young 在其博士论文 [You01]中描述了所有这类代数，并成功证明了一个分类结果，我们将其称为定理 6.2。本节余下部分将简要介绍 Young 的代数。

5.1. 代数 $\mathcal{L}_{1,q}$ 和 $\mathcal{L}_{0,q}$。对于特征的每个幂 q，文献 [中描述了两个诺丁汉代数 $\mathcal{L}_{1,q}$ 和$\mathcal{L}_{0,q}$，它们恰有两个真正的菱形，即 L_1 和 L_q，后者必为 -1型。在它们的第二个菱形 L_q之后，每个代数在每个满足 $m \equiv -1$ （模 q）的次数 $m > q$上都有一个伪菱形；但对于$\mathcal{L}_{1,q}$，这些伪菱形全是 1 型，而对于$\mathcal{L}_{0,q}$，则全是类型 0。因此，在这两个代数中，我们会发现某些同类型（要么都是类型 0，要么都是类型 1）的伪连续菱形之间的距离为q，而非 $q-1$。不过，我们可以利用约定 2.4 中所述伪菱形解释上的模糊性。举例来说，对于$\mathcal{L}_{1,q}$（另一种情形类似），假设 L_{m-q}, L_m 和 L_{m+q} 是连续的三个 1 型伪菱形。我们可以将这三个伪菱形中的第一个重新解释为L_{m-q+1}，使其类型为 0；它与 L_m（一个 1 型伪菱形）之间的距离为 $q-1$。接着，我们可以将中间的菱形重新解释为 L_{m+1}，使其类型为 0；它与 L_{m+q}（一个 1 型伪菱形）之间的距离为$q-1$。因此，允许对中间的菱形作这种双重解释，就避免了与一般性陈述相矛盾：在诺丁汉代数中，任意两个给定的连续菱形之间的距离，在对伪菱形作适当计算时为 $q-1$。

我们还可以提到，$\mathcal{L}_{1,\ q}$ 和 $\mathcal{L}_{0,\ q}$ 是余类为二的代数。有限生成的剩余幂零李代数的余类是

$$\sup\{\dim(L/L^{k+1}) - k : k \geq 1\}.$$

按照此定义，极大类代数（详见第7节）恰好是余类为一的代数。

5.2. **诺丁汉降幂 $\mathcal{N}(q,\ r)$。** 对于一个（正）分次李代数L，可以将其降幂 $L^{\downarrow}$ 定义为由 $(\mathrm{ad}\, L_1)^p$ 和 L_p生成的代数，并将其度函数按每个次数除以 p进行缩放。这一工具由 [CMN97] 引入，用于研究极大类代数。

现在假设 L 是 $\mathcal{N}(q)$，即 [Car97]中引入的诺丁汉代数。在 $q = p$的情形下，$N(p)$只是域 $\mathbb{F}_p$上诺丁汉群的下中心列所对应的分次李代数，我们有 $N(p)^{\downarrow} \cong N(p)$。然而，若 $q > p$，则 $\mathcal{N}(q)^{\downarrow}$ 是一个第二个钻石位于次数 q/p的诺丁汉代数，Young将其记为 $\mathcal{N}(q/p, p)$；只有当 $q = p^2$时，它才与$\mathcal{N}(q/p)$同构。更一般地，对 $\mathcal{N}(qr, 1)$应用 j次降幂 $=\mathcal{N}(qr)$（其中 $r = p^j > 1$），得到代数 $\mathcal{N}(q, r)$，其第二个钻石位于次数 q。这种重复降幂也可以按照 [You01, 第 3 节.1], 中所述一次完成；它会在有限多个非同构代数之间循环，因为 $N(p, r)^{\downarrow}$与 $N(pr, 1)$同构。

现在，$\mathcal{N}(q)$ 在定理 4.1 中代表情形 (a)，其每个次数与 $q-1$ 模同余的位置上都有菱形，且类型均为 -1（除了第一个菱形，其类型按约定不作定义）。诺丁汉降胀 $\mathcal{N}(q, r)$ 的真正菱形均为 -1 型，出现在所有与 q 模 $qr-1$ 同余的次数上。不过，如果 $r > 1$，则它在每一对真正菱形之间还会出现伪菱形，且这些伪菱形的位置使其不具正则性。特别是，如果 $r > 1$，那么 $\mathcal{N}(q,\ r)$ 在次数 $2q-1$ 处有一个 1 型伪菱形。

可以将 $\mathcal{L}_{1,\ q}$ 视为 $\mathcal{N}(q,\ \infty)$ 的一个极限情形。

5.3. **由极大类代数得到的代数 $\mathcal{T}_{q,1}(M)$ 和 $\mathcal{T}_{q,2}(M)$。** 定理 4.1 中的所有诺丁汉代数，以及第5.1和5.2小节中的诺丁汉代数，都具有周期性结构。这远非诺丁汉代数普遍具有的特征，反而相当罕见。事实上，在其博士论文中，[You01] David Young 给出了两种方法，从任意给定的、至多有两个不同二步中心化子的 M 极大类代数 出发，构造出两个诺丁汉代数 $\mathcal{T}_{q,1}(M)$ 和 $\mathcal{T}_{q,2}(M)$，二者的第二个钻石均为 L_q（关于后一类，参见 [CMN97, CN00]，或第7节）。$\mathcal{T}_{q,1}(M)$ 和 $\mathcal{T}_{q,2}(M)$ 的钻石模式以两种不同方式反映了 M 的二步中心化子模式。由于在任意给定特征为 p的域上，这类代数 M 有不可数多个，而且其中大多数都不是周期性的，因此，相应的断言也适用于特征为 p 的给定域上、固定幂 q p 的诺丁汉代数类。

代数 $\mathcal{T}_{q,1}(M)$ 和 $\mathcal{T}_{q,2}(M)$ 的第二个钻石均为 L_q（如同往常，类型为 -1），其余所有钻石都是伪菱形或无限型。

我们从 $\mathcal{T}_{q,\ 2}(M)$ 开始讨论，这正是本文所关注的对象。$L = \mathcal{T}_{q,\ 2}(M)$ 中的无限型菱形以某种由 M 的结构所决定的长度序列出现，其间由伪菱形的单次出现隔开。这些序列中的无限型菱形出现于次数差为 $q-1$ 的位置。

然而，如果 L_m 是结束任意此类序列的菱形，那么 L_{m+q-1} 是一个 1 型（伪）菱形，随后 L_{m+2q-1} 开始下一列无限型菱形。因此， L_{m+q-1} 与 L_{m+2q-1} 之间的次数差等于 q，而不是我们先前讨论的定理 4.1 中那些例子里的 $q-1$。不过，如果利用伪菱形定义中固有的歧义，将 L_{m+q} 视为类型 0 的菱形，那么它与下一个菱形 L_{m+2q-1} 之间的距离就是 $q-1$。总之，$\mathcal{T}_{q,\ 2}(M)$ 的存在并不与我们的总体主张相矛盾：诺丁汉代数中两个相邻菱形之间的距离始终可以解释为等于 $q-1$，前提是按照约定 2.4，在存在伪菱形时，我们允许根据需要选择将哪个分量称为伪菱形。

我们强调，与定理 4.1 中考察的代数不同，$\mathcal{T}_{q,2}(M)$ 中的伪菱形应根据我们要测量的距离（是到前一个菱形的距离，还是到下一个菱形的距离），以两种不同的方式来解读（相应的次数偏移一位）。

为求完整起见，并支持引用 Young 的定理 6.2，我们简要描述代数 $\mathcal{T}_{q,1}(M)$。与另一类代数相比，$\mathcal{T}_{q,1}(M)$ 中的大多数菱形都是伪菱形，其间仅穿插着个别无限型菱形（必要的例外是 L_q，它一如既往地具有类型 -1）。这里，底层的极大类代数 M 以某种方式决定了无限型菱形之间这些伪菱形串的长度。

在 $\mathcal{T}_{q,1}(M)$ 中，若将两个连续的伪菱形解读为具有相同类型（因此两者均为 1 型或类型 0），则它们的次数相差 q。此外，这串伪菱形中的第一个，若视为 1 型，其次数比前一个真正的菱形高 $q-1$（等价地，若视为类型 0，则高 q）；类似地，这串伪菱形中的最后一个，若视为类型 0，其次数与后一个真正的菱形相差 $q-1$。

因此，我们遇到的情形与第 5.1 小节中已经讨论过的代数 $\mathcal{L}_{1,q}$ 类似：要满足菱形之间的次数距离为$q-1$这一通用规则，就必须对每个伪菱形作两种解读，具体取决于距离是从前一个菱形量起，还是量到下一个菱形。

值得注意的是，两个代数$\mathcal{T}_{q,\ 1}(M)$ 和 $\mathcal{T}_{q,\ 2}(M)$ 中伪菱形的位置都满足以下关于中心化子的条件；该条件曾在$\mathcal{T}_q$You中被重点讨论：

若 L_i 和 L_{i+1} 都不是真正的菱形，则

$$C_{L_1}(L_i) = \begin{cases} Fx & \text{if } d \equiv -1 \pmod{q} \\ Fy & \text{otherwise,} \end{cases}$$

其中 L_{i-d} 是先于 L_i的最近一个真正的菱形。

6. Irregular Nottingham algebras

本文的主要目标是证明以下定理，它构成了诺丁汉代数的完整分类。

定理 6.1. 设 L 是一个诺丁汉代数，其第二个菱形为 L_q。则 L同构于

(1) 定理 *4.1* 的情形 *(a)–(e)* 中所述的某个正则代数；或(2) 以下某个非正则代数：(f) 余类为2的代数 $\mathcal{L}_{1,q}$,$\mathcal{L}_{0,q}$ 之一；(g) 对于某个 p 次幂 $r > 1$，一个诺丁汉降胀 $\mathcal{N}(q, r)$；(h)$\mathcal{T}_{q,1}(M)$ 或 $\mathcal{T}_{q,2}(M)$，其中 M是具有两个不同二步中心化子的某个极大类代数。

部分分类工作已在 David Young 的学位论文 [You01],中完成，研究的是这样一种特殊情形：下一个真正的菱形 L_q 出现的次数晚于预期次数 $2q-1$。当时使用的术语早于对定理 4.1 中大多数诺丁汉代数的全面研究，并未包括伪菱形。相反，当时使用“长第二链，”这一说法，正如 [You01], 的标题所示，它指第二个钻石 L_q 与下一个真正的菱形之间的一维分量序列。如今这一表述已过时，因此在第 5 节中，我们用当前术语描述了 Young 发现的所有诺丁汉代数。

Young 对具有长第二链的薄代数的分类如下，其中各情形的编号与定理 4.1 和定理 6.1 中相应情形或其特殊情形相对应。

定理 6.2 ([You01]中的定理 5.7)。 设 L 是一个诺丁汉代数，其第二个钻石为 L_q，且钻石 L_{2q-1} 并非真正的菱形。

那么 L 同构于以下代数之一：

(b′)来自 [CM04] 且具有 $\mu_3 = 1$, $\mu_4 = 3$ 的代数（此时第三个菱形出现在次数 $3q-2$）；(b″) 来自 [CM04] 且具有 $\mu_3 = 0$, $\mu_4 = 1$, $\mu_5 = 2$ 的代数（此时第三个菱形出现在权 $4q-3$）；(f) </style}余类2的代数$\mathcal{L}_{1,q}$,$\mathcal{L}_{0,q}$ 之一；(g) 某个 p 次幂的诺丁汉降胀 $\mathcal{N}(q, r)$；

(h′) $\mathcal{T}_{q,1}(M)$ 对于某个具有两个不同二步中心化子的极大类代数 M 。

在 [CM04 第 2], 节的记号中，情形 (b′) 与 (b″) 的标记 μ_i 表示正则代数中次数为 $(i-1)(q-1)+1$ 的钻石类型。非正则代数 $\mathcal{L}_{1,q}$, $\mathcal{N}(q,r)$ 与 $\mathcal{T}_{q,1}(M)$ 可解释为在 [CM04 第 2], 节的记号中具有 $\mu_3=1$与 $\mu_4=0$ ，而 $\mathcal{L}_{0,q}$ 则具有 $\mu_3=0$与 $\mu_4=1$。

在 Young 的分类定理 6.2 之后，仍需发现并进而分类所有使 L_{2q-1} 为真正的菱形的诺丁汉代数。定理 6.1 是下述定理的直接推论。

定理 6.3. 设 L为诺丁汉代数，其第二个钻石为 L_q，使得L_{2q-1} 为真正的菱形。则

- 要么 L 与定理 *4.1* 中的某个诺丁汉代数同构，
- 要么 L 与 $\mathcal{T}_{q,2}(M)$ 同构，其中 M 是某个极大类代数。

下面说明定理 6.3 如何由定理 8.1 推出。如果 L_{2q-1} 是有限型（必然不等于 0 或 1），那么 L 属于定理 4.1 的情形 (a) 或 (b)。因此，我们可以假设 L_{2q-1} 是无限型。如果该代数的其他每个菱形都是无限型，那么 L 属于定理 4.1 的情形 (e)。

因此，我们可以假设，除了 L_q之外， L 至少还有一个有限型菱形。根据定理 2.5，在 L_q之后最早出现的有限型菱形，也就是第一簇无限型菱形之后最早出现的有限型菱形，是 L_m ，且 $m\equiv 1$ （模 $q-1$）。这里， L_m 可能是伪菱形。根据 [AM22], 的定理 1.2，对于某个 $s>0$，要么是 $m=(p^s+1)(q-1)+1$，要么是 $m=2p^s(q-1)+1$，并且 L_m是 1 型伪菱形。在前一种情形下，根据 [AM22], 的结果，代数 L 与定理 4.1 的情形 (c) 或 (d) 中的某个代数同构。在后一种情形下，我们将利用定理 8.1 证明，对于某个极大类代数 M ， L与 $\mathcal{T}_{q,2}(M)$ 同构。

定理 8.1 实际上所指的是一类$\mathcal{T}_{q,2}$ 代数；该类在定义 7.1 中引入，刻画了族 $\mathcal{T}_{q,2}(M)$ 中所有代数的显著性质。虽然 David Young 借助 M 给出了 $\mathcal{T}_{q,2}(M)$ 的一种构造，但为了应用定理 8.1，我们需要相反方向的论证，即类 $\mathcal{T}_{q,2}$中的每一个代数实际上都是某个 M 所对应的 $\mathcal{T}_{q,2}(M)$。这正是第7节的目标。

7. The class $\mathcal{T}_{q,\ 2}$ of Nottingham algebras.

在其博士论文 [You01] 中，David Young 构造了一族诺丁汉代数 $\mathcal{T}_{q,2}(M)$，其中除第二个菱形外，所有菱形均为无限型或伪菱形。这些代数中的每一个都源自恰有两个二步中心化子的极大类代数 M。为方便读者，我们在命题 7.2 中概述 Young 构造。在本节的其余部分，我们着眼于当前的分类，刻画 Young 在诺丁汉代数这一类中所构造的那些代数。

我们首先回顾作为 Young 构造之组成部分的极大类代数。

若 $\dim(M_1)=2$，对 $i>1$ 有 $\dim(M_i)\le 1$，且对 $i>1$ 有 $M_i=[M_{i-1}M_1]$，则称（分次李）代数 $M=\bigoplus_{i=1}^{\infty}M_i$ 为极大类代数。与薄代数一样，我们只关注无限维极大类代数，也就是说，此后我们假定对 $i>1$ 有 $\dim(M_i)=1$。于是，对 $i>1$ 而言，二步中心化子$C_i=C_{M_1}(M_i)$是 M_1 的一维子空间。中心化子序列 C_i 在同构意义下决定 M。我们感兴趣的是两种特殊情形。第一种情形是所有中心化子 C_i 都重合。在 C_2 中取一个元素 $Y\neq 0$，并取一个元素 $X\in M_1\setminus C_2$。令 $U_1=Y$，并对 $i>1$ 递归地令$U_i=[U_{i-1}X]$。则对 $i\ge 2$，M_i 由 U_i张成。该代数是极大类元后裔代数，因为U_i 的线性张成显然是一个阿贝尔理想，并且作为这样的理想它显然是唯一的。我们所关心的另一种情形出现在集合 $\{C_i:\ i\ge 2\}$ 恰好包含两个元素时，也就是说，M 恰好有两个（互异的）二步中心化子。设 Y为C_2中的一个非零元素，X 为另一个二步中心化子中的一个非零元素。定义 $U_1=Y$，然后对 $i>1$ 令

$$U_i=\begin{cases}[U_{i-1}X] & \text{if } C_{i-1}=FY,\\ [U_{i-1}Y] & \text{if } C_{i-1}=FX.\end{cases}$$

于是，M_i 由 U_i 张成，其中 $i\ge 2$。我们用 $\mathcal{M}$ 表示至多具有两个不同二步中心化子的极大类代数族。注意，$\mathcal{M}$ 中的代数恰好是按照第 3 节意义下的双分次极大类代数；不过，我们将在命题 7.2 的证明之后再回到这一点。

Young 构造将一个代数 $M\in\mathcal{M}$嵌入到一个更大的李代数中，并将某个诺丁汉代数 $\mathcal{T}_{q,\ 2}(M)$ 识别为后者的一个子代数。

我们来引入以下定义。

定义 7.1。令 $\mathcal{T}_{q,2}$ 表示满足以下条件的诺丁汉代数 L：第二个钻石之后的每个真正的菱形 L_q 的类型均为 ∞；并且，每当L_m 是真正的菱形时，下一个真正的菱形要么是 L_{m+q-1}，要么是 L_{m+2q-1}。

请注意，在定义 7.1 的后一种情形中，也就是说，当 L_{m+2q-1} 是继真正的菱形 L_m之后的下一个真正的菱形时，根据定理 2.5，中间必定恰有一个伪菱形，并且它只能读作L_{m+q-1} 为 1 型，或等价地， L_{m+q} 为类型 0。

每个代数 $\mathcal{T}_{q,\ 2}(M)$ 都属于类 $\mathcal{T}_{q,\ 2}$。反过来，我们将在定理 7.5 中证明，$\mathcal{T}_{q,\ 2}$ 中的每个代数都可写成 $\mathcal{T}_{q,\ 2}(M)$ 的形式，且 $M \in \mathcal{M}$ 唯一。

Young 构造 $\mathcal{T}_{q,\ 2}(M)$ 时，首先将 M 的标量扩展到除幂代数中，下面我们回顾这一过程。设 F 是特征为 p 的域，且 $q = p^n$，其中 $n \geq 1$。令 $F[\varepsilon;\ q]$ 表示以 $\{\varepsilon^{(i)}$ 为基的除幂代数：$0 \leq i \leq q-1\}$，其乘法为 $\varepsilon^{(i)} \cdot \varepsilon^{(j)} = \binom{i+j}{i}\varepsilon^{(i+j)}$，其中我们可以将 $\varepsilon^{(0)}$ 写作 1。令 ∂：$F[\varepsilon;\ q] \to F[\varepsilon;\ q]$ 为 $F[\varepsilon$ 的标准导子；$q]$，其在基元素上的定义为 ∂：当 $i > 0$ 时，$\varepsilon^{(i)} \mapsto \varepsilon^{(i-1)}$，且 $\partial 1 = 0$。

命题 7.2 （[你01]）。令 $M \in \mathcal{M}$，并令 L 为 $M \otimes F[\varepsilon$的子代数；$q] + F \cdot$（$1 \otimes \partial$）由下列元素生成

$$x = 1 \otimes \partial \quad and \quad y = X \otimes \varepsilon^{(q-2)} + Y \otimes \varepsilon^{(q-1)}.$$

则 $L \in \mathcal{T}_{q,\ 2}$。

继 [你01], 之后，我们将由此构造的诺丁汉代数 L 记为$\mathcal{T}_{q,\ 2}(M)$。

证明略。对于 $M \in \mathcal{M}$，取如前所述的生成元 X 和 Y，考虑 $M \otimes F[\varepsilon;\ q] + F \cdot$（$1 \otimes \partial$），并令 L 为由下列元素生成的子代数

$$x = -1 \otimes \partial \quad \text{and} \quad y = X \otimes \varepsilon^{(q-2)} + Y \otimes \varepsilon^{(q-1)}.$$

容易验证，对于 $1 \leq i \leq q-2$，L的每个齐次分量 L_{i+1} 都是一维的，由 $[yx^i] = X \otimes \varepsilon^{(q-2-i)} + Y \otimes \varepsilon^{(q-1-i)}$张成，并且在 $i < q-2$时被 Fy中心化。特别地，L_{q-1} 由 $v_1 = [yx^{q-2}] = X \otimes 1 + Y \otimes \varepsilon^{(1)}$张成。齐次分量 L_q 是一个菱形，由 $[v_1 x] = Y \otimes 1$ 和

$$[v_1 y] = [X \otimes 1, Y \otimes \varepsilon^{(q-1)}] + [Y \otimes \varepsilon, X \otimes \varepsilon^{(q-2)}] = -2U_2 \otimes \varepsilon^{(q-1)},$$

其中 $U_2 = [YX]$ 按照本节前面引入的记号。由于$[v_1 xx] = 0 = [v_1 yy]$ 与 $[v_1 yx] = -2U_2 \otimes \varepsilon^{(q-2)} = -2[v_1 xy]$，可以得出 L_q 是类型为 -1 的菱形。

L_{m-1} 中由形如 $v = U_i \otimes \varepsilon^{(1)}$ 的元素张成的 L 的每个一维齐次分量，都紧邻在 L 的一个菱形之前。事实上，若 $[U_i Y] = 0$，则 L_m 由 $[vx] = U_i \otimes 1$ 张成，且 $[vy] = -U_{i+1} \otimes \varepsilon^{(q-1)}$。此外，我们有 $[vxx] = 0 = [vyy]$ 和 $[vxy] = U_{i+1} \otimes \varepsilon^{(q-2)} = -[vyx]$，因此 L_m 是一个无限型菱形。若 $[U_i X] = 0$，则 L_m 是一个 1 型伪菱形，因为 $[vx] = U_i \otimes 1$ 且 $[vy] = [vxx] = 0$。注意在此情形下 $[vxy] = U_{i+1} \otimes \varepsilon^{(q-1)}$，因此下一个菱形是 L_{m+q}。于是我们处于定理 2.5 的情形 (b) 的第二种情况。菱形 L_{m+q} 必为无限型，因为在 M 的二步中心化子序列中，FX 的出现彼此孤立。

最后， L 中由形如 $U_i \otimes \varepsilon^{(j)}$ 的元素张成且满足 $1 < j < q$ 的每个齐次分量，都被 y 中心化。迄今为止列出的计算表明， L 是薄的，事实上是一个第二个钻石为 L_q 的诺丁汉代数。还请注意， L 的第一个 1 型菱形出现在次数 $2p^s$（$q-1$）$+1$，其中 $s \geq 1$。因此，以此方式构造的所有诺丁汉代数都属于类 $\mathcal{T}_{q,2}$。□

任意代数 $M \in \mathcal{M}$ 也自然地带有 $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$-分次，只需为 X 和 Y指定任意两个线性无关的双次数即可。不过，在命题 7.2 的语境下，自然的选择是分别为 X和 Y指定双次数 $(q-2,1)$ 和 $(q-1,1)$。如果将 M的这一双重分次扩展为 $M \otimes F[\varepsilon;\, q]$ 上的双重分次，并为 $\varepsilon^{(1)}$指定双次数 $(-1,0)$，那么 $M \otimes F[\varepsilon;\, q]$ 的导子 $x = -1 \otimes \partial$就具有双次数 (1,0)。此外， $y = X \otimes \varepsilon^{(q-2)} + Y \otimes \varepsilon^{(q-1)}$ 也是一个双齐次元素，其双次数为 (0,1)。因此，如命题 7.2 中那样由 M 构造的诺丁汉子代数 L，恰好继承了第 3 节定义的诺丁汉代数的标准双重分次。

L 的元素 $U_i \otimes 1$ 张成一个子代数，该子代数与 M 的包含 Y的极大理想同构（在将每个 $U_i \otimes 1$ 与 U_i等同之后）。因此，为了从 L 恢复 M，我们只需给出 L的一个双次数为$(q-2,1)$的导子，使其在 M中起到 X 的作用。在下一个结果中，我们构造这样的导子，不仅针对$L = \mathcal{T}_{q,2}(M)$，而且针对任意代数$L \in \mathcal{T}_{q,2}$。

在本节的其余部分，我们在类$\mathcal{T}_{q,2}$ 与类 $\mathcal{M}$之间建立一种自然的一一对应。在一个方向上，该对应由上述构造给出。对于相反方向，我们首先对$\mathcal{T}_{q,2}$中的每个代数构造一个适当的导子。

命题 7.3. 设 $L \in \mathcal{T}_{q,2}$。

(1) 存在唯一的导子 $D : L \to L$，使得

$$Dx = 0 \quad and \quad Dy = [yx^{q-2}y] = [v_1 y].$$

(2) 如果 L_m 和 L_{m+q-1} 是 L中的菱形，且 L_m 为无限型，而 L_{m+q-1}要么为无限型，要么是类型为1的伪菱形，那么 $D[vx] = -2[wx]$，其中 $0 \neq v \in L_{m-1}$ 和 $w = [vxyx^{q-3}] \in L_{m+q-2}$。(3) 如果 L_m 和 L_{m+q} 是 L中的菱形，且 L_m 是类型为1 的伪菱形，而 L_{m+q} 为无限型，那么 $D[vx] = 0$，其中 $0 \neq v \in L_{m-1}$。

证明。 非正式地说， D 确定了 L_1上的一个线性映射，我们通过对 k 进行归纳，将其扩展为 $\bigoplus_{i=1}^{k} L_i$ 上的线性映射，并在每一步都要求它满足莱布尼茨法则。要使这一过程成功，只需确保 D 与 L中成立的每个齐次关系 $w = 0$ 相容，即 $Dw = 0$。在证明断言（1）的同时，我们也将证明断言（2）和（3）。

用形式的语言来说，若 x 与 y 是 L 的标准生成元，则我们将 L 视为自由李代数 $\mathcal{F}$ 在 x 与 y上的商 $\mathcal{F}/R$。若 D 是 F的唯一导子

满足断言（1）中的条件，则为了证明 D 确实定义了 $L = \mathcal{F}/R$ 的一个导子，只需证明 $DR \subseteq R$。我们通过对 k 使用归纳法证明 $DR_k \subseteq R_{k+q-1}$ 来做到这一点，而这可以更方便地看作 $DR_k \equiv 0$ （模 R）。现在 $R_k = \langle w_1\rangle + \langle w_2\rangle + [R_{k-1}, x] + [R_{k-1}, y]$，其中 $w_1 = 0$ 与 $w_2 = 0$ 是在次数 k 上对 L 成立的至多两个独立齐次关系。由于在归纳过程中我们可以假定 $D[R_{k-1}, x] = [DR_{k-1}, x] \equiv 0$（模 R）与 $D[R_{k-1}, y] = [DR_{k-1}, y] + [R_{k-1}, Dy] \equiv 0$（模 R），可见只需检验 $Dw_1 \equiv 0$ （模 R）与 $Dw_2 \equiv 0$ （模 R）。为避免不断书写模 R 的同余式，为记号方便起见，我们回到上一段所用的较为非正式的写法 $Dw = 0$ 。

L 的双重分次以及第 3 节引入的支撑论证，将为我们省去若干计算。形式上，如上所述将 $L = \mathcal{F}/R$ 视为.....，关系理想 R 是关于 $\mathcal{F}$ 的 $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$-分次的分次理想，其中规定 x 和 y 的次数分别为 (1，0) 和 (0，1)。对 $\mathcal{F}$ 的齐次元素进行计算所得的结果，若属于 L 支撑之外的某个双次数分量，那么我们便可立即知道，该结果模 R 为零。在这方面，请注意 $D\mathcal{F}_{(r,s)} \subseteq \mathcal{F}_{(r+q-2,s+1)}$。

其中一个例子是 $[L_{k-1}, y] = 0$。特别是，当$2 < k < q$时便会出现这种情况。更一般地说，只要 L_{k-1} 是 L 的一个齐次分量，且它既不是菱形，也不紧邻在菱形之前，就会出现这种情况；若该菱形是伪菱形，则作显而易见的相应理解。于是 $L_{k-1} = \langle u\rangle = L_{(r,s)}$，不妨设如此；而在次数 k 上，我们有唯一的关系 $[uy] = 0$。现在 $D[uy] \in L_{(r+q-2,s+2)}$，但根据定理 2.5，我们有 $[L_{k+q-2}, y] = 0$，并且还有 $L_{k+q-2} = L_{(r+q-2,s+1)}$。因此 $L_{(r+q-2,s+2)} = 0$ ，所以我们无需实际进行（简单的）计算，便可得出 $D[uy] = 0$ 。简言之，我们根据定理 2.5 得出结论：双次数 $(r + q - 2,\ s + 2)$ 位于 L 的支撑之外。

接下来，次数 q 中没有需要检验的关系。更一般地，只要 $\dim(L_{k-1}) = 1$ 且 $\dim(L_k) = 2$，次数 k 中就没有需要检验的关系；也就是说，当 L_k 是一个真正的菱形时（包括 L_1 的情形）。

为了确定迄今为止 D 的作用，注意到由于 $Dx = 0$ ，导子 D 与内导子 $\operatorname{ad} x$ 交换。因此，对于每个正整数 i， $D[ux^i] = [Du, x^i]$ 对 $u \in L$ 成立。特别地，我们有 $D[yx^i] = [v_1yx^i]$ 和 $Dv_1 = [v_1yx^{q-2}] = -2v_2$。

在次数 $q+1$ 下，我们有关系式 $[v_1xx] = 0$、 $[v_1yy] = 0$ 和 $[v_1yx] + 2[v_1xy] = 0$。因此，根据支撑论证，在次数 $2q$ 下有 $D[v_1xx] = 0$ 和 $D[v_1yy] = 0$。事实上，根据定理 2.5，左侧的双次数等于 $[v_2xx]$ 和 $[v_2yy]$的形式双次数，而这些双次数不属于 L的支撑。至于第三个菱形关系，我们得到 $D[v_1yx] = -4[v_2yx]$，并

$$D[v_1xy] = [Dv_1, xy] + [v_1x, Dy] = -2[v_2xy] + [v_1x[v_1y]] = 2[v_2yx],$$

其中，根据引理 9.2，有 $[v_1x[v_1y]] = [v_1xv_1y] - [v_1xyv_1] = 2[v_2xy] + 2[v_2yx]$。因此，我们如愿得到 $D([v_1yx] + 2[v_1xy]) = 0$。到目前为止，我们已经证明，$D$ 与 L 中次数不超过 $q+1$的所有齐次关系一致。

现在我们按归纳法逐批推进，从一个菱形到下一个菱形。因此，我们假设断言 (1)–(3) 对截至并包括 L_m 的所有菱形均成立，并证明它们对下一个菱形 L_{m+q-1} 也成立，无论其为无限型还是 1 型伪菱形。归纳步骤分为两种情况，具体取决于归纳假设是由断言 (2) 还是断言 (3) 给出的。

首先假设 L_m 和 L_{m+q-1} 是菱形，L_m 为无限型，而 L_{m+q-1} 为无限型或 1 型伪菱形。令 $0 \neq v \in L_{m-1}$ 并设 $w = [vxyx^{q-3}] \in L_{m+q-2}$。根据断言 (2)，我们可以归纳地假设 $Dv = -2w$。于是我们有 $D[vx] = [Dv, x] = -2[wx]$，并且

$$D[vy] = [Dv, y] + [v, Dy] = -2[wy] + [v[v_1y]] = -2[wy],$$

根据引理 9.2，$[v[v_1y]] = [vv_1y] - [vyv_1] = 0$，因为 L_m 是无限型。将次数提高一级后，支撑论证可直接给出 $D[vxx] = 0$ 和 $D[vyy] = 0$。此外，$D[vyx] = -2[wyx]$ 和

$$D[vxy] = [Dv, xy] + [vx, Dy] = -2[wxy] + [vx[v_1y]] = 2[wyx],$$

根据引理 9.2，$[v_1x[vy]] = [vxvy] - [vxyv] = 2[wxy] + 2[wyx]$。因此，我们如愿得到 $D([vxy] + [vyx]) = 0$。接下来，正如我们前面所论证的，支撑论证可推出 $D[vxyx^iy] = 0$，适用于 $0 \leq i < q-3$。最后，

$$Dw = D[vxyx^{q-3}] = [D[vxy], x^{q-3}] = 2[wyx^{q-2}]$$

最后，注意 $Dw = D[vxyx^{q-3}] = 2[wyx^{q-2}]$。因此，若 L_{m+q-1} 是无限型，则有 $0 \neq Dw = -2[wxyx^{q-3}] \in L_{m+2q-3}$；若 L_{m+q-1} 是 1 型伪菱形，则有 $Dw = 0$。

现在假设 L_m 和 L_{m+q} 是相邻的菱形，其中 L_m 是 1 型伪菱形，而 L_{m+q} 是无限型。令 $0 \neq v \in L_{m-1}$，并设 $w = [vxyx^{q-2}] \in L_{m+q-1}$。根据断言 (3)，我们可以归纳地假设 $Dv = 0$。于是有 $D[vx] = [Dv, x] = 0$，并由支撑论证得到 $D[vy] = 0$。再高一个次数，我们有 $D[vxx] = [Dv, xx] = 0$，并

$$D[vxy] = [vx, Dy] = [vx[v_1y]] = [vxv_1y] - [vxyv_1] = [wy] + [wy] = 2[wy],$$

这里用到了引理 9.7。因此，我们有

$$D[vxyy] = 2[wyy] + [vxy[v_1y]] = [vxyv_1y] = -[wyy] = 0$$

接下来，支撑论证给出 $D[vxyx^iy] = 0$，其中 $0 < i \leq q-3$。最后，注意到 $0 \neq Dw = D[vxyx^{q-2}] = -2[wxyx^{q-3}] \in L_{m+2q-2}$。考虑到 $Dv_1 = -2v_2$，归纳论证便完成了证明。□

若按第 3 节所述为 $L \in \mathcal{T}_{q,2}$ 赋予 $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$-分次，使得 x 和 y 的次数分别为 (1,0) 和 $(0,1)$，那么命题 7.3 中构造的导子 D 就是 L的一个分次导子，其双次数为 $(q-1,1)$。现在，这个导子将发挥关键作用：从任意一个属于 $\mathcal{M}$的

诺丁汉代数出发，构造一个极大类代数 $\mathcal{T}_{q,2}$。这种对应关系的这一方向在 [You01]中并未明确说明。

命题 7.4。令 $L \in \mathcal{T}_{q,2}$，并令 $D \in \mathrm{Der}(L)$ 为命题 7.3 中定义的导子。令 M 为由 $X = D$ 和$Y = [yx^{q-1}]$生成的 $L + FD$ 的子代数。则 $M \in \mathcal{M}$。

证明。令 x 和 y 为 L的标准生成元。根据命题 7.3，存在一个导子 $D \in \mathrm{Der}(L)$，使得 $Dx = 0$ 和 $Dy = [v_1 y] = [yx^{q-2}y]$。

令 $U_1 = Y$，并对 $j > 0$ 递归定义

$$U_{j+1} = \begin{cases} [U_j X] & \text{if } [U_j Y] = 0, \\ [U_j Y] & \text{otherwise.} \end{cases}$$

特别地，$U_2 = [YX] = -2[v_2 x]$ 和 $[YXY] = -2[v_2 x[v_1 x]] = 0$。

现在证明 M 是一个至多有两个二步中心化子的极大类代数。

假设由归纳法可知，对某个 $j \geq 2$，U_j 位于 L的一个无限型菱形 L_m 中。则 L_{m+q-1} 是 L的下一个菱形，要么为无限型，要么为1型伪菱形。我们还可以假设对某个 $0 \neq v \in L_{m-1}$ 有 $U_j = [vx]$，至多相差一个非零乘性系数。由于 $[U_j Y] = [vx[v_1 x]] = [vxyx^{q-1}] = 0$，我们有 $U_{j+1} = [U_j X] = -2[wx]$，其中 $w = [vxyx^{q-3}]$ 张成 L_{m+q-2}。

另一方面，若 U_j 位于1型伪菱形 L_m 中，则 L_{m+q} 是 L中的下一个菱形，且为无限型。我们可以假设 $U_j = [vx]$，对 $0 \neq v \in L_{m-1}$。我们有 $[U_j X] = 0$，因此 $U_{j+1} = [U_j Y] = [wx]$，其中 $w = [vxyx^{q-2}]$ 张成L_{m+q-1}。

我们得出结论：$M \in \mathcal{M}$，即为所求。 □

我们现在可以确立本节所宣布的目标。

定理 7.5. 设 $L \in \mathcal{T}_{q,2}$，则 L 同构于一个代数 $\mathcal{T}_{q,2}(M)$，且 $M \in \mathcal{M}$ 唯一。

证明. 设 x e y 为 L 的标准生成元，并设 $X = D$ 与 $Y = [yx^{q-1}]$ 如命题 7.4 中所述。根据命题 7.4，由 X 与 Y 生成的代数 M 是一个极大类代数，恰有两个二步中心化子。

考虑 $M \otimes F[\varepsilon;\ q] + F \cdot (1 \otimes \partial)$，并设 T 为由其生成的子代数

$$\tilde{x} = -1 \otimes \partial \quad \text{and} \quad \tilde{y} = X \otimes \varepsilon^{(q-2)} + Y \otimes \varepsilon^{(q-1)} = D \otimes \varepsilon^{(q-2)} + [v_1 x] \otimes \varepsilon^{(q-1)}.$$

我们已经知道 $T \in \mathcal{T}_{q,2}$。令 $\tilde{v}_1 = [\tilde{y}\tilde{x}^{q-2}] = X \otimes 1 + Y \otimes \varepsilon^{(1)}$，则齐次分量 T_q 由 $[\tilde{v}_1 \tilde{x}] = Y \otimes 1 = [v_1 x] \otimes 1$ 与$[\tilde{v}_1 \tilde{y}] = -2U_2 \otimes \varepsilon^{(q-1)} = 4[v_2 x] \otimes \varepsilon^{(q-1)}$. 张成

T_{n-1} T 中由形如 $\tilde{v} = U_i \otimes \varepsilon^{(1)}$ 的元素张成的一维齐次分量，恰好位于 T 的菱形 T 之前。此外，U_i属于 L 的一个菱形 L_m，并且我们可以假设 $U_i = [vx]$，其中 $0 \neq v \in L_{m-1}$。

若 L_m 是无限型，则 $[U_iY]=0$ 和 T_n 是由 $[\tilde{v}\tilde{x}]=U_i\otimes 1=[vx]\otimes 1$ 和 $[\tilde{v}\tilde{y}]=-U_{i+1}\otimes\varepsilon^{(q-1)}=2[wx]\otimes\varepsilon^{(q-1)}$ 张成的无穷型菱形，其中 $w=[vxyx^{q-3}]$。若 L_m 是一个 1 型伪菱形，则 $[U_iX]=0$ 和 T_n 是一个 1 型伪菱形，因为 $[\tilde{v}\tilde{x}]=U_i\otimes 1=[vx]\otimes 1$ 和 $[\tilde{v}\tilde{y}]=[\tilde{v}\tilde{x}\tilde{x}]=0$。□

8. A membership criterion for $\mathcal{T}_{q,2}$

本节旨在证明：如果一个诺丁汉代数L 的结构与 $\mathcal{T}_{q,\ 2}$ 中的某个代数的结构直到第一个 1 型菱形为止都相同，那么 $L\in\mathcal{T}_{q,\ 2}$。以下结果对此给出了严格表述。

定理 8.1. 设 L 是一个诺丁汉代数，其第二个钻石为 L_q。假设L 在每个次数为 $k(q-1)+1$ 且满足 $2\le k<2p^s$的次数上都有无限型菱形，并且在次数为 $2p^s(q-1)+1$处有一个 *1* 型伪菱形，其中 $s\ge 1$。那么 L 的每个菱形 L_m 要么是无限型，要么是 *1* 型伪菱形。在后一种情况下，还有 $[L_{m+q-2}y]=0$。特别地，我们有$L\in\mathcal{T}_{q,\ 2}$。

我们将证明分成几个步骤。首先，AM22 第 5.2] 小节中的一个论证保证：如果诺丁汉代数的一个 1 型菱形之前有一个无穷型菱形，那么之后也会出现一个无穷型菱形，其次数差为 $q-1$ 或 q。为方便读者，我们将这一事实陈述为一个引理，并以更正式的方式引用其证明。

引理 8.2 (第 5.2 小节，见 [AM22])。 设 L 是一个诺丁汉代数，其中有L_{2q-1} 一个无穷型菱形。设 L_m 是一个 L *1* 型1菱形，其中某个m满足，且 L_{m-q+1} 是一个无穷型菱形。那么， L_{m+q-1} 或 L_{m+q} 是一个无穷型菱形。

证明。 根据定理 2.5， L_{m+q-1} 或 L_{m+q} 是一个菱形。设 u 是 L_{m-q}的一个非零元素，令 $v=[uxyx^{q-3}]\in L_{m-1}$，并且 $w=[vxyx^{q-3}]\in L_{m+q-2}$。展开

$$[ux[v_2xy]]+[ux[v_2yx]]=0$$

我们得到

$$[uxv_2xy]-2[uxyv_2x]+[uxyxv_2]+[uxv_2yx]=0.$$

利用引理 9.5 和 $\mu=1$，我们推得 $[wxxy]+[wxyx]+[wyxx]=0$。如果$[wy]\neq 0$，那么由于 $[wxx]=0$，我们有 $[wxy]+[wyx]=0$，因此 L_{m+q-1}是无穷型菱形。然而，如果 $[wy]=0$，那么 L_{m+q} 是无穷型菱形，因为对于 $z=[wx]$， $[zxy]+[zyx]=0$。□

根据引理 8.2，伪菱形 L_m 前最后一个菱形与其后第一个菱形（两者均为无限型）之间的次数差等于 $2q-2$ 或 $2q-1$。事实证明，在定理 8.1 的假设下，如果 L_m 是按出现顺序排列的第一个 1 型菱形，也就是说，当 $m=2p^s(q-1)+1$ 时，第一种可能性不成立。这就是

下一命题的内容。在此之前，我们引入另一种记号，用来描述 L 直至次数 $2p^s(q-1)+1$ 的结构。

定义 8.3. 我们递归地定义

$$v_k = [v_{k-1}xyx^{q-3}], \quad \text{for } 2 < k \leq 2p^s.$$

特别地，对于 $1 < k < 2p^s$，元素 v_k 张成紧邻无穷型菱形之前的齐次分量，因此 $[v_k yx] + [v_k xy] = 0$，而 $[v_{2p^s} y] = 0$。

命题 8.4. 若 L 如定理 *8.1* 所述，且 $m = 2p^s(q-1)+1$，则$[L_{m+q-2}y] = 0$。

证明. 反设 $[L_{m+q-2}y] \neq 0$，于是 L_{m+q-1} 是一个菱-形，且必为无穷型。令 $v_{2p^s+1} = [v_{2p^s}xyx^{q-3}]$，则 $[v_{2p^s+1}yx]$ 张成齐次分量 L_{m+q}。我们将证明 $[v_{2p^s+1}yx]$ 消失，这与 L 具有无穷维这一假设矛盾。

考虑元素 $u = [v_{p^s}xyx^{(q-3)/2}]$。我们展开

$$0 = \pm[uu] = [u[v_{p^s}xyx^{(q-3)/2}]] = \sum_{i=0}^{(q-3)/2} (-1)^i \binom{(q-3)/2}{i} [ux^i[v_{p^s}xy]x^{(q-3)/2-i}]$$

$$= \sum_{i=0}^{(q-3)/2} (-1)^i \binom{(q-3)/2}{i} [ux^i[v_{p^s}x]yx^{(q-3)/2-i}]$$

$$- \sum_{i=0}^{(q-3)/2} (-1)^i \binom{(q-3)/2}{i} [ux^i y[v_{p^s}x]x^{(q-3)/2-i}].$$

前一个和式中的所有项均为零，可能例外的是 $i = (q-5)/2$ 和 $i = (q-3)/2$。后一个和式中的所有项均为零，可能例外的是 $i = (q-3)/2$。因此，我们得到

$$\begin{aligned} 0 = &-\frac{3}{2}[v_{p^s+1}^{-1}v_{p^s}xyx] + \frac{3}{2}[v_{p^s+1}v_{p^s}yx] - [v_{p^s+1}v_{p^s}xy] + [v_{p^s+1}xv_{p^s}y] \\ &+ [v_{p^s+1}yv_{p^s}x] + [v_{p^s+1}xyv_{p^s}], \end{aligned} \tag{3}$$

其中 $v_{p^s+1}^{-1} = [v_{p^s}xyx^{q-4}]$ 依照记号 (9.1)。

我们利用引理 9.2、9.4 和 9.5 展开上述方程中的李积。首先考虑

$$[v_{p^s+1}v_{p^s}] = [v_{p^s+1}[v_2 v_1^{p^s-2}]] = \sum_{i=0}^{p^s-2} (-1)^i \binom{p^s-2}{i} [v_{p^s+1}v_1^i v_2 v_1^{p^s-2-i}].$$

和式中的李积为零，除非 $i = p^s - 2$，因此

$$[v_{p^s+1}v_{p^s}] = -[v_{2p^s-1}v_2] = 2v_{2p^s+1}.$$

类似地，我们有 $[v_{p^s+1}xv_{p^s}] = [v_{2p^s+1}x]$ 和 $[v_{p^s+1}yv_{p^s}] = [v_{2p^s+1}y]$。

现在我们计算

$$[v_{p^s+1}xyv_{p^s}] = \sum_{i=0}^{p^s-2}(-1)^i\binom{p^s-2}{i}[v_{p^s+1}xyv_1^iv_2v_1^{p^s-2-i}].$$

和式中的李乘积均为零，除非 $i = p^s-3$ 和 $i = p^s-2$。因此，我们得到

$$\begin{aligned}[v_{p^s+1}xyv_{p^s}] &= -2[v_{p^s+1}xyv_1^{p^s-3}v_2v_1] - [v_{p^s+1}xyv_1^{p^s-2}v_2]\\ &= 4[v_{2p^s+1}yx] + 2[v_{2p^s+1}xy] - [v_{2p^s+1}xy] - 3[v_{2p^s+1}yx]\\ &= [v_{2p^s+1}yx] + [v_{2p^s+1}xy].\end{aligned}$$

最后，我们有

$$[v_{p^s+1}^{-1}v_{p^s}] = -[v_{p^s+1}^{-1}v_1^{p^s-2}v_2] = -[v_{2p^s-1}^{-1}v_2] = 3v_{2p^s+1}^{-1}.$$

代入方程 (3)，得到 $0 = (1/2)[v_{2p^s+1}yx]$，如所求。 □

注记 8.5. 由此可知， L 的菱形结构在次数 $(2p^s+1)(q-1)+3$以内唯一确定。次数为 $k(q-1)+1$且满足 $1 \le k \le 2p^s$ 的每个齐次分量都是一个菱形。除 L_q 以及满足 $m = 2p^s(q-1)+1$的 L_m外，这些菱形均为无限型。第二个菱形 L_q 的类型为-1，而 L_m 是一个满足 $[L_{m+q-2}y] = 0$的 1 型伪菱形。此外，由于引理 8.2，菱形$L_{(2p^s+1)(q-1)+2}$ 为无限型。

这些事实将构成归纳论证的基础步骤，用以证明定理 8.1。我们将在以下论述中证明归纳步骤。

设 L_m 是一个任意的 1 型菱形，具有 $[L_{m+q-2}y] = 0$，其中 $m \ge 2p^s(q-1)+1$。假设对于某个 $1 < r < 2p^s$，齐次分量 L_{m+q}，L_{m+2q-1}、……、$L_{m+(r-1)(q-1)+1}$ 都是无限型菱形。定理 2.5 推出 $L_{m+r(q-1)+1}$ 是一个菱形。我们将在下一个命题中证明，它要么是无限型，要么是 1 型。此外，在后一种情况下，$L_{m+(r+1)(q-1)+1}$ 不可能是真正的菱形。

命题 8.6。设 L 如定理 *8.1* 中所述，并设 L_m 是一个 *1* 型菱形，其中某个 $m \ge 2p^s(q-1)+1$ 满足 $[L_{m+q-2}y] = 0$。设 $2 \le r < 2p^s$ 是一个整数。假设齐次分量

$$L_{m+q}, L_{m+2q-1}, \dots, L_{m+(r-1)(q-1)+1}$$

是无限型菱形。

那么在次数 $n = m + r(q-1)+1$ 中，存在一个无限型或类型为 1 的菱形。在后一种情况下，我们有 $[L_{n+q-2}y] = 0$。

证明。假设 $L_{m+r(q-1)+1}$ 是类型为 $\mu \in F \cup \{\infty\}$ 的菱形。定理 2.5 意味着 $[L_{m+r(q-1)+q-2}y] = 0$。递归定义

$$v_{b+k} = [v_{b+k-1}xyx^{q-3}], \tag{4}$$

对于 $1 < k \leq r$，以及

$$v_{b+r+1} = \begin{cases} [v_{b+r} xy x^{q-3}] & \text{if } \mu \neq 0 \\ [v_{b+r} y x^{q-2}] & \text{otherwise.} \end{cases}$$

因此，每个元素 v_{b+k}、 $0 \leq k \leq r$ 张成菱形之前的齐次分量。我们展开方程

$$\begin{aligned} 0 &= [v_b[v_{r+1}yx]] + [v_b[v_{r+1}xy]] \\ &= [v_b v_{r+1} xy] - 2[v_b x v_{r+1} y] + [v_b xy v_{r+1}], \end{aligned} \tag{5}$$

其中我们使用了 $[v_b v_{r+1} y] \in [L_{m+r(q-1)+q-2} y] = 0$。先假设 $\mu \neq 0$ 。为计算方程 (5) 的第一项，我们展开

$$\begin{aligned} [v_b v_{r+1}] &= \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i \binom{r-1}{i} [v_b v_1^i v_2 v_1^{r-1-i}] \\ &= [v_b v_2 v_1^{r-1}] + [v_b v_1^{r-1} v_2] = 2[v_{b+2}^{-1} v_1^{r-1}] + 2(-1)^{r-1} [v_{b+r-1}^{-1} v_2] \\ &= 2(1 + 2\mu^{-1} + 3(-1)^r \mu^{-1}) v_{b+r+1}^{-1}. \end{aligned}$$

类似地，我们有

$$\begin{aligned} [v_b x v_{r+1}] &= [v_b x v_2 v_1^{r-1}] + (-1)^{r-1} [v_b x v_1^{r-1} v_2] \\ &= [v_{b+2} v_1^{r-1}] + (-1)^{r-1} [v_{b+r-1} v_2] \\ &= (1 + \mu^{-1} + 2(-1)^r \mu^{-1}) v_{b+r+1}, \end{aligned}$$

and

$$[v_b xy v_{r+1}] = (-1)^{r-1} [v_b xy v_1^{r-1} v_2] = (-1)^r [v_{b+r-1} y v_2] = (-1)^{r+1} \mu^{-1} [v_{b+r+1} y].$$

代入方程 (5)，得到

$$(2 + (-1)^r) \mu^{-1} [v_{b+r+1} y] = 0,$$

由此得到 $\mu = 1$ 和 $[L_{m+(r+1)(q-1)} y] = 0$，如所求。

当 $\mu = 0$ 时，我们有

$$\begin{aligned} [v_b v_{r+1}] &= (4 + 6(-1)^r) v_{b+r+1}^{-1}, \\ [v_b x v_{r+1}] &= (1 + 2(-1)^r) v_{b+r+1}, \\ [v_b xy v_{r+1}] &= (-1)^{r+1} [v_{b+r+1} y]. \end{aligned}$$

Su代入方程 (5) 后，我们得到 $(2 + (-1)^r)[v_{b+r+1} y] = 0$，这与之矛盾 n. □

现在我们证明，在 L 中，任意两个 1 型菱形的次数之差至多为 $2p^s(q-1) + 1$，前提是这两个菱形中第一个之前有一个无穷型菱形。

命题 8.7. 令 L 如定理 *8.1* 中所述，且令 L_m 为某个 $m \geq 2p^s(q-1)+1$ 的 *1* 型菱形，其中 $[L_{m+q-2}y] = 0$。假设 L_{m-q+1} 是一个无穷型菱形。那么，次数为 $n \leq m+2p^s(q-1)+1$ 时会出现一个 *1* 型菱形。此外， $[L_{n+q-2}y] = 0$。

证明。 根据引理 8.2，菱形 L_{m+q} 是无限型。因此，命题 8.6 归纳地表明，对于 $1 < r < 2p^s$，每个齐次分量 $L_{m+r(q-1)+1}$要么是无限型菱形，要么是 1 型菱形。在后一种情况下，我们有 $[L_{m+(r+1)(q-1)}y] = 0$。

假设对于每个 $1 \leq r < 2p^s$， $L_{m+r(q-1)+1}$ 都是无限型。我们展开方程 $0 = [v_b x[v_{2p^s}y]]$，得到 $0 = [v_b x v_{2p^s}y] - [v_b xy v_{2p^s}]$。为了计算差的第一项，我们展开

$$[v_b x v_{2p^s}] = [v_b x[v_2 v_1^{2p^s-2}]] = [v_b x v_2 v_1^{2p^s-2}] + [v_b x v_1^{2p^s-2} v_2] = v_{b+2p^s},$$

这里用到了引理 9.2、9.7 和 9.4 中的结果。为了计算差的第二项，我们展开

$$[v_b xy v_{2p^s}] = [v_b xy[v_2 v_1^{2p^s-2}]] = [v_b xy v_1^{2p^s-2} v_2] = 0.$$

由此我们推出 $0 = [v_{b+2p^s}y]$，因此 $L_{m+2p^s\ (q-1)\ +1}$ 具有 1 型。为完成证明，我们证明$[L_{m+(2p^s+1)\ \ (q-1)}\ y] = 0$。令 $v_{b+2p^s+1} = [v_{b+2p^s} xyx^{q-3}] \in L_{m+(2p^s+1)\ \ (q-1)}$。由引理 9.7 可知 $2v_{2p^s+1}^{-1} = [v_2 v_1^{2p^2-1}]$。我们展开

$$0 = 2[v_b x[v_{2p^s+1}^{-1}y]] = [v_b x[v_2 v_1^{2p^s-1}]y] - [v_b xy[v_2 v_1^{2p^s-1}]].$$

为计算差中的第一项，我们展开

$$[v_b x[v_2 v_1^{2p^s-1}]y] = [v_b x v_2 v_1^{2p^s-1}] - [v_b x v_1^{2p^s-1} v_2] = 4v_{b+2p^s+1},$$

利用引理 9.7、9.2、9.4 和 9.5。类似地，我们有

$$[v_b xy[v_2 v_1^{2p^s-1}]] = -[v_b xy v_1^{2p^s-1} v_2] = -[v_{b+2p^s+1}y].$$

代入上面的方程，我们推出 $5[v_{b+2p^s+1}y] = 0$，如所需。 □

我们以证明定理 8.1 结束本节。

定理 *8.1* 的证明。 设 L 如命题所述。根据注记 8.5， L 的菱形结构在次数 $(2p^s+1)(q-1)+3$之前是唯一确定的。现在设L_m 是 L 的一个 1 型菱形，且 $[L_{m+q-2}y] = 0$ ，而 L_{m-q+1} 是一个无穷型菱形，其中 $m \geq 2p^s(q-1)+1$。由引理 8.2 可知， L_{m+q} 是一个无穷型菱形。因此，根据命题 8.6 和命题 8.7，对于每个满足 $1 < r \leq 2p^s$的齐次分量 $L_{m+r(q-1)+1}$，它要么是无穷型菱形，要么是 1 型菱形。在后一种情况下，令 $n = m + r(q-1)+1$，则 $[L_{n+q-2}y] = 0$。最后，至多在次数$m + 2p^s(q-1)+1$处便会出现一个 1 型菱形。□

9. General calculations in a Nottingham algebra

我们简要回顾一些关于任意诺丁汉代数的结果，这些结果引自 [AM22]，证明可参阅该文。

令 L 为任意一个诺丁汉代数，其标准生成元为 x 和 y。设 L_m 是 L 的一个菱形，类型任意，为 $m \geq q$ 和 $0 \neq v_k \in L_{m-1}$。假设 L_{m+q-1} 是一个菱形（只有当 L_m 是真正的菱形时，这才是定理 2.5 的推论）。那么，根据定理 2.5，元素 y 中心化 L_{m+1}、..、L_{m+q-3}。将次数为 $m+q-2$ 的元素 v_{k+1} 定义为

$$v_{k+1} = \begin{cases} [v_k x y x^{q-3}] & \text{if } \mu \neq 0, \\ [v_k y x^{q-2}] & \text{otherwise.} \end{cases}$$

我们先描述 v_1 对这一菱形附近元素的伴随作用。采用约定 $\infty^{-1} = 0$。

记号 9.1。当 $v_{h+1} = [v_h x y x^{q-3}]$ 时，我们用 v_{h+1}^{-1} 表示元素 $[v_h x y x^{q-4}]$。

引理 9.2. 设 $[v_k y x] = (\mu^{-1} - 1)[v_k x y]$ 满足 $\mu \in F^* \cup \{\infty\}$。那么我们有 e

$$\begin{aligned}
&[v_k^{-1} v_1] = (2\mu^{-1} + 1) v_{k+1}^{-1}, \\
&[v_k v_1] = (\mu^{-1} + 1) v_{k+1}, \\
&[v_k x v_1] = [v_{k+1} x], \\
&[v_k y v_1] = (1 - \mu^{-1})[v_{k+1} y], \\
&[v_k x y v_1] = -(2[v_{k+1} y x] + [v_{k+1} x y]), \\
&[v_k x y x v_1] = -(3[v_{k+1} y x^2] + 2[v_{k+1} x y x]).
\end{aligned}$$

证明。除第一个方程外，所有给定的方程均由 [AM22, 引理 4.1] 得出。直接计算可得

$$[v_k^{-1} v_1] = [v_k^{-1}[y x^{q-2}]] = 2[v_k y x^{q-3}] + 3[v_k x y x^{q-4}] = (2\mu^{-1} + 1) v_{k+1}^{-1},$$

如所需。 □

备注 9.3. 在引理 9.2 中排除的情形 $\mu = 0$ 下，类似的计算表明 $[v_k^{-1} v_1] = 2 v_{k+1}^{-1}$。

假设菱形 L_{m+q-1} 是无限型，并令 $v_{k+2} = [v_{k+1} x y x^{q-3}]$。根据定理 2.5，元素 y 中心化 L_{m+q}，……，L_{m+2q-4}，且 L_{m+2q-2}是一个菱形。我们描述 v_2 对菱形 L_m附近元素的伴随作用。

引理 9.4 ([AM22]中的引理 4.5)。 设 $[v_kyx] = (\mu^{-1} - 1)[v_kxy]$, 其中$\mu \in F^* \cup \{\infty\}$, 且 $[v_{k+1}yx] = -[v_{k+1}xy]$。那么我们有

$$\begin{aligned}
&[v_kv_2] = \mu^{-1}v_{k+2}, \quad [v_kxv_2] = 0 = [v_kyv_2],\\
&[v_kxyv_2] = [v_{k+2}yx] + [v_{k+2}xy],\\
&[v_kxyxv_2] = 2([v_{k+2}yx^2] + [v_{k+2}xyx]).
\end{aligned}$$

假设菱形 L_m 具有无限型，而菱形 L_{m+q-1} 具有有限型 μ。令 $v_{k+2} = [v_{k+1}xyx^{q-3}]$, 除非 $\mu = 0$, 此时令 $v_{k+2} = [v_{k+1}yx^{q-2}]$。根据定理 2.5，元素 y中心化 L_{m+q}、.....、 L_{m+2q-4}。假设L_{m+2q-2} 是一个菱形（只有在 $\mu \neq 1$时，这才是定理 2.5 的推论）。对于 $\mu = 1$ ，此处我们确实假设 L_{m+2q-2} 是一个菱形。我们描述 v_2 对靠近菱形 L_m 的元素的伴随作用。

引理 9.5. 假设 $[v_kxy] = -[v_kyx]$ 和 $[v_{k+1}yx] = (\mu^{-1}-1)[v_{k+1}xy]$ ，其中$\mu \in F^*$。那么我们有

$$\begin{aligned}
&[v_k^{-1}v_2] = -3\mu^{-1}v_{k+2}^{-1},\\
&[v_kv_2] = -2\mu^{-1}v_{k+2},\\
&[v_kxv_2] = -\mu^{-1}[v_{k+2}x],\\
&[v_kyv_2] = -\mu^{-1}[v_{k+2}y],\\
&[v_kxyv_2] = [v_{k+2}xy] + (2\mu^{-1} + 1)[v_{k+2}yx],\\
&[v_kxyxv_2] = 2[v_{k+2}xyx] + (3\mu^{-1} + 2)[v_{k+2}yx^2].
\end{aligned}$$

证明。 除第一个方程外，所有陈述的方程均由 [AM22，引理 4.7]推出。我们展开

$$[v_k^{-1}v_2] = [v_k^{-1}[v_1x]yx^{q-3}] + 3[v_k[v_1x]yx^{q-4}] - 3[v_ky[v_1x]x^{q-4}] - 6[v_kxy[v_1x]x^{q-5}].$$

由于$[v_k^{-1}[v_1x]] = 0 = [v_k[v_1x]]$，我们推得

$$[v_k^{-1}v_2] = -3[v_ky[v_1x]x^{q-4}] - 6[v_kxy[v_1x]x^{q-5}] = -3\mu^{-1}v_{k+2}^{-1},$$

如所需。 □

备注 9.6。 在排除的情形 $\mu = 0$ 中，我们发现 $[v_k^{-1}v_2] = -3v_{k+2}^{-1}$、 $[v_kv_2] = -2v_{k+2}$、$[v_kxv_2] = -[v_{k+2}x]$、 $[v_kyv_2] = -[v_{k+2}y]$、 $[v_kxyv_2] = 2[v_{k+2}yx]$和 $[v_kxyxv_2] = 3[v_{k+2}yx^2]$。

现在假设 L_m 是一个 1 型菱形，且满足 $[L_{m+q-2}y] = 0$。令$0 \neq v_b \in L_{m-1}$ ，并设 $v_{b+1} = [v_bxyx^{q-2}]$ 和 $v_{b+2} = [v_bxyx^{q-3}]$。由引理 9.2 和 9.4 可立即得到

引理 9.7。 在上述假设下，我们有

$$\begin{aligned}
&[v_bv_1] = 2v_{b+1}^{-1} && [v_bxv_1] = v_{b+1}\\
&[v_bxyv_1] = -[v_{b+1}y] && [v_bxyv_2] = 0
\end{aligned}$$

Al因此，当 L_{m+q} 为无限型时，我们有 $[v_b v_2] = 2v_{b+2}^{-1}$ 和 $[v_b x v_2] = v_{b+2}$。

References

[AM07] M. Avitabile 和 S. Mattarei，《Albert-Zassenhaus 代数的薄环代数》，《代数杂志》315（2007），第2期，824–851。MR 2351896 (2008h:17022)[AM14] ，《具有有限型和无限型菱形的诺丁汉李代数》，《李理论杂志》24（2014），第2期，457–473。MR 3235899[AM15a] ，《模非结合代数、李代数及相关主题中的分次切换》，Contemp. Math.，第652卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2015年，第1–14页。MR 3453046[AM15b] ，《导子的拉盖尔多项式》，Israel J. Math. 205（2015），第1期，109–126。MR 3314584[AM22] Marina Avitabile 和 Sandro Mattarei，《诺丁汉代数中最早出现的有限型菱形》，《李理论杂志》32（2022年），第3期，771–796。MR 4453421[AM23] M. Avitabile 和 S. Mattarei，《诺丁汉代数中的菱形距离》，J. Algebra Appl. 22（2023），第1期，论文编号2350032，共22页。MR 4526192[Avi02] Marina Avitabile，《哈密顿李代数的一些环代数》，Internat. J. Algebra Comput. 12（2002），第4期，535–567。MR 1919687 (2003e:17013)[Cam00] Rachel Camina，《诺丁汉群》，《群论新视野》，Progr. Math.，第184卷，Birkhäuser Boston，波士顿，马萨诸塞州，2000年，第205–221页。MR 1765121[Car97] A. Caranti，《给出诺丁汉群相关分次李代数的表示》，J. Algebra 198（1997），第1期，266–289。MR 1482983 (99b:17019)[CJ99] A. Caranti 和 G. Jurman，《薄李代数的极大类商：奇特征情形》，Comm. Algebra 27（1999），第12期，5741–5748。MR 1726275 (2001a:17042a)[CM99] A. Caranti 和 S. Mattarei，《与 Albert-Frank 代数及极大类代数相关的一些薄李代数》，J. Austral. Math. Soc. Ser. A 67（1999），第2期，157–184。MR 1717411 (2000j:17036)[CM04] ，《具有有限型菱形的诺丁汉李代数》，Internat. J. Algebra Comput. 14（2004），第1期，35–67。MR 2041537 (2004j:17027)[CMN97] A. Caranti、S. Mattarei 和 M. F. Newman，《最大类分次李代数》，Trans. Amer. Math. Soc. 349（1997），第10期，4021–4051。MR 1443190 (98a:17027)[CMNS96] A. Caranti、S. Mattarei、M. F. Newman 和 C. M. Scoppola，《素数幂阶薄群与薄李代数》，Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 47（1996），第187期，279–296。MR 1412556 (97h:20036)[CN00] A. Caranti 和 M. F. Newman，《最大类分次李代数》第二部分，J. Algebra 229（2000），第2期，750–784。MR 1769297 (2001g:17041)[DdSMS99] J. D. Dixon、M. P. F. du Sautoy、A. Mann 和 D. Segal，《解析原群》，第二版，Cambridge Studies in Advanced Mathematics，第61卷，剑桥大学出版社，剑桥，1999年。MR 1720368p Joh[D. L. Johnson，《代入运算下的形式幂级数群》，J. Austral. Math. Soc. Ser. A 45（1988），第3期，296–302。MR 95719588] Mat[Sandro Mattarei，《一些薄原群》，J. Algebra 220（1999），第1期，56–72。MR 1713453 (2000h:20049)99] Mat$p$《导子的 Artin-Hasse 指数》，J. Algebra 294（2005），第1期，1–18。MR 2171626

[Mat22] ———, 薄李代数中的三明治，爱丁堡数学学会会刊，第二辑 **65** （2022年），第1期，136–145。[You01] D. S. Young, 《具有长第二链的薄李代数》，博士论文，堪培拉，2001年3月。电子邮件地址，M. Avitabile：marina.avitabile@unimib.it
Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università degli Studi di Milano - Bicocca, via Cozzi 55, I-20125 Milano Italy电子邮件地址，A. Caranti：andrea.caranti@unitn.itDipartimento di Matematica,
Università degli Studi di Trento via Sommarive14, I-38123 Trento, Italy

电子邮件地址，S. MATTAREI：sandro.mattarei@unimib.it

Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università degli Studi di Milano - Bicocca, via Cozzi 55, I-20125 Milano, Italy