arXiv:2603.03994v1 [math.LO] 4 Mar 2026

罗宾逊分裂定理与 Σ_1 归纳

Yong Liu、Cheng Peng 和 Mengzhou Sun

摘要。罗宾逊分裂定理指出，任意可计算可枚举度 $\boldsymbol{b}$ 都可在任意低可计算可枚举度 $\boldsymbol{c}<\boldsymbol{b}$ 上分裂。我们证明，该定理的一个较弱版本在 $\mathrm{P}^-+\mathrm{I}\Sigma_1$ 的模型中成立，其中低性由超低性取代。

1. 引言

弗里德伯格–穆奇尼克定理 [5, 8] 和萨克斯分裂定理 [13] 是递归论中的基础结果，它们通过有限伤害优先级论证得到证明。从损伤界的角度来看，萨克斯分裂定理与弗里德伯格–穆奇尼克定理有所不同。如果损伤次数可以有效地界定，这种论证就称为有界型有限损伤论证。就此而言，弗里德伯格–穆奇尼克构造属于有界型，而萨克斯分裂构造则属于无界型。逆向递归论也证实了这一区别。Chong 和 Mourad [2] 证明，弗里德伯格–穆奇尼克定理可在 $\mathrm{P}^-+\mathrm{I}\Sigma_0+\mathrm{B}\Sigma_1+\mathrm{Exp}$ 的模型中证明。相比之下，萨克斯分裂定理等价于基理论 $\mathrm{P}^-+\mathrm{I}\Sigma_0+\mathrm{B}\Sigma_1+\mathrm{Exp}$ 上的 $\mathrm{I}\Sigma_1$ [9, 16]。我们指出，有界型有限损伤论证并非总能在 $\mathrm{P}^-+\mathrm{I}\Sigma_0+\mathrm{B}\Sigma_1+\mathrm{Exp}$ 的模型中实施；Chong 和 Yang [4] 证明了，不可计算的低可计算可枚举度的存在性等价于 $\mathrm{P}^-+\mathrm{I}\Sigma_0+\mathrm{B}\Sigma_1+\mathrm{Exp}$ 上的 $\mathrm{I}\Sigma_1$。

在 [9], Mytilinaios 利用了 Shore [14],引入的 α-递归论中的阻塞技术，并证明了：

定理 1.1 (萨克斯分裂定理 [13, 9])。以下结论在$\mathrm{P}^-+\mathrm{I}\Sigma_1$的模型中成立：设 $\boldsymbol{b}$ 为一个可计算可枚举度，则存在两个不可比较的可计算可枚举度 $\boldsymbol{a_0}$ 和 $\boldsymbol{a_1}$，使得 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a_0}\vee\boldsymbol{a_1}$。

罗宾逊证明了萨克斯分裂定理的以下加强形式：

定理 1.2 (罗宾逊分裂定理 [12])。设 $\boldsymbol{b}>\boldsymbol{c}$ 为可计算可枚举度，且 $\boldsymbol{c}$ 为一个低可计算可枚举度。则存在两个不可比较的可计算可枚举度 $\boldsymbol{a_0}$ 和 $\boldsymbol{a_1}$，使得 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a_0}\vee\boldsymbol{a_1}$，且对 $i<2$有 $\boldsymbol{a_i}>\boldsymbol{c}$。

在构造中，罗宾逊引入了一种方法，如今通常称为罗宾逊技巧，用来近似计算出关于 $\mathbf{0}'$ 的答案。该方法只允许出现有限次错误猜测，这使得构造成为可能。（拉克兰不可分裂定理 [7] 断言，存在一个可计算可枚举度，它不能在任何严格小于它的

2020 数学学科分类。 03F30,03D25,03H15。关键词与短语。 罗宾逊分裂定理、逆向递归论、归纳强度。Liu 的研究部分获南京晓庄学院资助（编号：2022NXY39）。Peng 的研究部分获国家自然科学基金委员会资助（编号：12271264）。

可计算可枚举度之上分裂。）这除了萨克斯分裂定理中的有限伤害行为之外，还引入了另一个有限性问题。这种额外的有限性可以在 $\mathrm{I}\Sigma_1$ 的模型中处理吗？尽管人们通常认为有限伤害优先级论证可以在 $\mathrm{I}\Sigma_1$ 的模型中进行，但对于罗宾逊分裂定理而言，这并非显而易见。我们在 $\mathrm{I}\Sigma_1$ 的模型中证明了罗宾逊定理的一个较弱版本，将 $\boldsymbol{c}$ 的低性替换为超低性（更多讨论见第5节）。回顾一下，集合 C 是低的，当且仅当$C' \leq_T \varnothing'$；若 $C' \leq_{wtt} \varnothing'$，则它是超低的。在 $\mathrm{P}^- + \mathrm{I}\Sigma_1$ 的模型中，我们还有 $A \leq_{wtt} \varnothing'$ 当且仅当 A 是 ω-可计算可枚举的。回顾一下，若存在可计算函数 f 和 g，使得 A 是 ω-可计算可枚举的，并且满足 $A(x) = \lim_s f(x,s)$、 $f(x,0) = 0$，以及 $|\{s \mid f(x,s+1) \neq f(x,s)\}| < g(x)$。因此，若 C 是超低的，则 C' 是 ω-可计算可枚举的，进而可推出 C 是超正则的（见引理 2.6）。ω-可计算可枚举和超正则这两项性质是我们证明中的两个关键要素（尤其是对于引理 4.4）。

我们的主要结果如下：

定理1.3。 在皮$^-$+算Σ_1的模型中，以下结论成立：给定满足$\boldsymbol{c}$超低性质的可计算可枚举度 $\boldsymbol{b}$、 $\boldsymbol{c}$、 $\boldsymbol{d}$以及 $\boldsymbol{d} \not\leq \boldsymbol{c}$，存在不可比的可计算可枚举度 $\boldsymbol{a_0}$、 $\boldsymbol{a_1}$，使得 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a_0} \vee \boldsymbol{a_1}$，且对 $i < 2$有 $\boldsymbol{d} \not\leq \boldsymbol{a_i} \vee \boldsymbol{c}$。

取 $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{b} > \boldsymbol{c}$ 即可得到罗宾逊分裂定理。

推论1.4。 在皮$^-$ +算Σ_1的模型中，以下结论成立：设 $\boldsymbol{b} > \boldsymbol{c}$ 为满足 $\boldsymbol{c}$超低性质的可计算可枚举度。则存在不可比的可计算可枚举度 $\boldsymbol{a_0}$、 $\boldsymbol{a_1}$，使得 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a_0} \vee \boldsymbol{a_1}$，且对 $i < 2$有 $\boldsymbol{a_i} > \boldsymbol{c}$。

在第2节中，我们回顾逆向递归论和归纳层级的基本背景；更多背景信息请参见Chong、Li和Yang [1]。在第3节中，我们给出皮$^-$+算Σ_1模型中萨克斯分裂定理的证明。读者也可参阅Mytilinaios的原论文 [9]；我们的论述与原文略有不同。基于这一框架，我们在第4节中作出必要的修改，以证明主要结果定理1.3。更具体地说，阻塞和动态优先级分配的思路保持不变。主要困难在于引理4.4的证明，它是引理3.2的类似结果。

2. 预备知识

我们在基理论 $\mathrm{P}^- + \mathrm{I}\Sigma_1$ 中工作。这里，P^- 表示去掉归纳模式后的皮亚诺算术公理。此外，$\mathrm{I}\Sigma_n$ （分别为 $\mathrm{I}\Pi_n$）表示适用于 Σ_n（分别为 Π_n）公式的归纳模式，而 $\mathrm{B}\Sigma_n$ （分别为 $\mathrm{B}\Pi_n$）表示适用于 Σ_n （分别为Π_n）公式的收集模式。$\mathrm{L}\Sigma_1$ （分别为 $\mathrm{L}\Pi_1$）表示每个非空的 Σ_1 （分别为 Π_1）子集都有最小元。最后，Exp 表示公理 $\forall x \exists y (y = \exp(x))$，其中 $\exp : x \mapsto 2^x$ 是指数函数。

我们采用标准的配对函数，在该函数下，数对 $(a,\ b)$ 的编码记为 $\langle a,\ b \rangle$。设 M 是 $\mathrm{P}^- + \mathrm{I}\Sigma_1$ 的一个模型。对于任意 $c \in M$，我们将 c 视为 M 的一个子集，定义 $x \in c$ 表示 c 的二进制展开中第 x 位为 1。我们称 M 的子集 A 是 M有限的，如果它由某个 $c \in M$ 编码。特别地， A 在 M 中有界。

众所周知：

定理 2.1. *(Paris 和 Kirby [11])* 在 $\mathrm{P}^- + \mathrm{I}\Sigma_0$ 中工作。对所有 $n \geq 1$,

(1)$\mathsf{I}\Sigma_1 \iff \mathsf{I}\Pi_1 \iff \mathsf{L}\Sigma_1 \iff \mathsf{L}\Pi_1$。*(2)* $\mathsf{B}\Sigma_{n+1}$,$\mathsf{B}\Pi_n$。
(3) $\mathsf{I}\Sigma_{n+1} \Rightarrow \mathsf{B}\Sigma_{n+1} \Rightarrow \mathsf{I}\Sigma_n$，且这些蕴含关系都是严格的。
(Slaman [15]*)* 在 $\mathsf{P}^- + \mathsf{I}\Sigma_0 + \mathrm{Exp}$ 中工作。对所有 $n \geq 1$，*(4)* $\mathsf{B}\Sigma_n$,$\mathsf{I}\Delta_n$。

在第5节中，我们将看到 $\mathsf{B}\Sigma_2$ 证明了原始的罗宾逊分裂定理。由于 $\mathsf{B}\Sigma_2$ 严格强于 $\mathsf{I}\Sigma_1$，定理1.3的证明需要格外谨慎。尽管我们不假设 $\mathsf{B}\Sigma_2$，以下引理仍然可用，并使证明成为可能。

第一个引理是一个众所周知的结果。

引理 2.2 (H. Friedman)。对于 $\mathsf{P}^- + \mathsf{I}\Sigma_1$ 的每个模型 M，每个部分可计算函数都将 M 的有界子集映射为 M 的有界子集。

我们还需要一个关于预言机计算的引理 2.2 的类似结果。

定义 2.3。如果对于 $\mathsf{P}^- + \mathsf{I}\Sigma_0 + \mathrm{Exp}$ 的每个模型 M，每个部分 A-可计算函数都将 M 的有界子集映射为 M 的有界子集，则集合 A 称为超正则 。

超正则集可以用多种方式刻画。

引理 2.4 ([10])**.** 设 M 是 $\mathsf{P}^- + \mathsf{I}\Sigma_0 + \mathrm{Exp}$的一个模型，且 $A \subseteq M$ 是正则的。则以下条件等价:

(1) A 是超正则的。*(2)* $\mathsf{I}\Sigma_1^A$ 成立；也就是说，$\mathsf{I}\Sigma_1$ 相对于 A 成立。*(3)* 对每个 e，W_e^A都是正则的。

这里，如果对每个 $n \in M$，限制 $A\restriction n := \{x \in A \mid x < n\}$ 是 M-有限的，则称 $A \subseteq M$是正则的。众所周知，在 $\mathsf{P}^- + \mathsf{I}\Sigma_1$的模型中，每个可计算可枚举集都是正则的。事实上，这个性质对 ω-可计算可枚举集也成立:

L引理 2.5. 设 M 是 $\mathsf{P}^- + \mathsf{I}\Sigma_1$ 的一个模型，且 $A \subseteq M$ 是 ω-可计算可枚举的。则 A 是正则的 $r.$

证明。假设 A 是 ω-可计算可枚举的。设 f 和 b 是满足以下条件的可计算函数

$$A(x) = \lim_{s \to \infty} f(x, s)$$

其中，对每个 $x \in M$，$f(x, 0) = 0$，且 $|\{s \mid f(x, s+1) \neq f(x, s)\}| < b(x)$。

设 C 是 f 的变更集，即当 $f(x, s+1) \neq f(x, s)$ 第 i 次成立时，我们就在阶段 s 将 $\langle x, i-1\rangle$ 枚举进 C。因此 C 是一个可计算可枚举集，故为正则集。

由 A 的假设，$\langle x, i\rangle \in C$ 蕴含 $i < b(x)$。对任意 $n \in M$，令 $d =$ 为 $\{b(x)$ 的最大值 $\mid x < n\}$，其存在性由 $\mathsf{I}\Sigma_1$ 得出。现在，将 C 编码至 $\langle n, d\rangle$。现在，$x \in A$ 当且仅当 $|\{i \mid \langle x, i\rangle \in C\}|$ 为奇数。因此，对任意 $x < n$,

$$x \in A \iff \exists i < d\,(\langle x, i\rangle \in t \wedge \langle x, i+1\rangle \notin t \wedge i \text{ is odd})$$

因此，对于任意 $n \in M$，$A\restriction n$都编码在 M中，所以 A是正则的。 □

引理 2.6. 如果 C 是超低可计算可枚举集，那么 C 是超正则的。

证明。由于 C 是超低的，C' 是 ω-可计算可枚举的，因此根据引理 2.5，它是正则的。对于每个 e，$W_e^C \leq_1 C'$意味着 W_e^C是正则的。根据引理 2.4，C是超正则的。□

在 [3, 6] 中已经证明，假设 BΣ_2，每个不完全递归可枚举集都是超正则的。因此，这个问题只会出现在 IΣ_1的模型中。

最后，我们引入一些记号：如果 σ 是集合 X 的初始片段，我们记作 $X \in [\sigma]$。如果 W 是有限字符串组成的集合，当且仅当存在某个 $\sigma \in W$ 使得 $X \in [\sigma]$ 时，我们记作 $X \in [W]$。

3. 定理 1.1 的证明

我们将证明一个稍强的命题。设 M 是 $\mathrm{P}^- + \mathrm{I}\Sigma_1$ 的一个模型。给定 B，$D \subseteq M$ 个可计算可枚举集，其中 D 不可计算，我们构造可计算可枚举集 A_0，$A_1 \subseteq M$，使得 $B = A_0 \sqcup A_1$ 且对 $i < 2$ 有 $D \not\leq_T A_i$。取 $D = B$ 即得原定理。取 $D <_T B$ 则得到其他有趣的推论。

我们有一个全局要求 $B = A_0 \sqcup A_1$，由此可推出 $B \equiv_T A_0 \oplus A_1$。其他要求如下：

$$P_e : D = \Phi_e^{A_0} \to D = \Delta_e;$$
$$Q_e : D = \Psi_e^{A_1} \to D = \Gamma_e.$$

其中 Δ_e 和 Γ_e 是将在构造过程中建立的局部泛函。鉴于 D 是不可计算的，一旦对所有 $e \in M$的要求都得到满足，我们就完成了。我们指出，损伤集 $I_e = \{s \mid P_e \text{ 在 } s\}$ 受到损伤，当且仅当 Σ_1。然而，关于 I_e 是有限的这一陈述是 Σ_2。下面的归纳仅适用于 IΣ_2：

$$(\forall k < e, I_k \text{ is finite}) \to I_e \text{ is finite}$$

为了解决这个问题，与 Mytilinaios 的论文 [14], 一样，有两种思路：第一种是分块方法，第二种是使用动态优先级分配。我们先回顾萨克斯分裂定理的基本策略。

3.1. 单一要求。不失一般性，我们以 P_e-要求为例。首先介绍一些标准记号。在阶段 s，如果 P_e-要求可行动，那么 s 称为一个 P_e-阶段。令

$$\ell_s(e) = \max\{y \mid \forall x \leq y, \Phi_{e,s}^{A_0,s}(x) \downarrow = D_s(x)\}.$$

若对于所有 P_e-阶段 $t < s$，都有 $\ell_s(e) > \ell_t(e)$，则称一个 P_e-阶段为 P_e-扩张阶段。

满足此要求的基本思路如下：在一个 P_e-扩张阶段s，对于尚未定义 $\Delta_e(x)$ 的那些 $x \leq \ell_s(e)$，我们定义 $\Delta_e(x) = D_s(x)$，并将 (σ, x, k) 称为对角化三元组，其中 $\sigma = A_{0,s} \upharpoonright s$ 且 $k = \Delta_e(x)$。注意，$\Phi_e^{\sigma}(x) = D_s(x) = \Delta_e(x) = k$。我们还对 $A_0 \upharpoonright s$ 施加限制，以防止点被枚举进 $A_0 \upharpoonright s$。

对于具有对角化三元组 (σ, x, k) 的 $\Delta_e(x)$，有两种情况：第一种是 $\Delta_e(x) = D(x)$。第二种是 $\Delta_e(x) \neq D(x)$。在后一种情况下，存在某个阶段 $t > s$，使得 $D_t(x) \neq \Delta_e(x) = k$。由对 $A_0 \upharpoonright s$施加的成功限制可知，$A_0 \in [\sigma]$，因此 $\Phi_e^{A_0}(x) = k \neq D(x)$。只要该限制成功，我们就有 $\Phi_e^{A_0}(x) \neq D(x)$，并且我们断言 P_e-要求在 x处对角化。

回到对 P_e-要求的满足。

(1) 如果对某个 $x \in \mathrm{dom}\,\Delta_e$，$\Delta_e(x) \neq D(x)$，那么 P_e 会在 x 对角化，因此得到满足。(2) 如果对所有 $x \in \mathrm{dom}\ \Delta_e$ 和 $\mathrm{dom}\ \Delta_e \neq M$，$\Delta_e(x) = D(x)$，那么 P_e-扩张阶段必定只有有限多个。因此，P_e 得到满足。

(3) 如果对所有 $x \in \text{dom } \Delta_e$ 和 $\text{dom } \Delta_e = M$， $\Delta_e(x) = D(x)$，则此情况不会发生，因为 $D = \Delta_e$ 与 D 不可计算这一假设矛盾。

在前两种情形中，$\text{dom}\,\Delta_e$ 有界，因此施加于 A_0 上的限制也有界。

我们将上述讨论概括为以下引理:

引理3.1. 假设存在某个 s_0 ，在此之后 P_e （分别地，Q_e ）未被初始化。那么 P_e （分别地，Q_e ）得到满足。此外，施加于 A_0 （分别地，A_1）上的限制有界。

证明. 以 P_e-要求为例。根据上述讨论，$\text{dom}\,\Delta_e$ 有界，因此施加于 A_0 上的限制有界。□

3.2. **要求块**。为了在$\mathrm{I}\Sigma_1$ 模型中完成证明，Mytili- naios [14] 借鉴了 α-递归论中的分块方法。我们在此回顾这一技术。集合 $\Lambda = \{P_{e_0}, P_{e_0+1}, \cdots, P_{e_1}\}$ 称为一个 P-要求的区块 （Q-要求的情形也相同）。为方便记号，我们也将集合 Λ 与其指标集合 $\{e_0, e_0 + 1, \cdots, e_1\}$混为一谈。因此， $P_e \in \Lambda$ 和 $e \in \Lambda$ 都是有效的。

由于 P-要求只对 A_0施加限制，因此 Λ中的要求之间不会发生冲突。我们让 Λ 中的每个要求都严格遵循单个要求情形下的相同策略。正如引理3.1所指出的，对于 Λ 中的每个要求，施加在 A_0 上的限制都是有界的。但在$\mathrm{I}\Sigma_1$的模型中，施加在 A_0 上的总体限制显然并非有界。我们证明它实际上是有界的。

注意，每当 P_e 在某个 x对角化时，它就不会再有扩张阶段。令 $f: \Lambda \to M$ 由以下方式定义：若 P_e 在阶段 s对角化，则 $f(P_e) = s$ 。根据引理 2.2，由于 f 是定义域有界的部分可计算函数，$\text{ran}\, f$ 被某个 s_0 所界定。因此，在阶段 s_0之后， Λ 中的任何要求都不会再对角化。此外，若对某些 $P_e \in \Lambda$ 和 $x \in M$， $\Delta_e(x) = D_s(x)$在阶段 $s > s_0$ 有定义，则它之后始终正确；否则，P_e 会在某个阶段 $t > s$对角化，这与 s_0的选择矛盾。

反设 $\bigcup_{e\in\Lambda} \text{dom } \Delta_e = M$，则会导出矛盾。我们断言， D是可计算的。为此，给定 $x > s_0$，搜索一个 $e \in \Lambda$ 和一个阶段 $s > s_0$ ，使得$\Delta_e(x)$在阶段 s有定义。于是 $D(x) = D_s(x) = \Delta_e(x)$。因此， D 是可计算的。矛盾。故 $\bigcup_{e\in\Lambda} \text{dom}\,\Delta_e$ 由某个 b所界定。

令 $g: \Lambda \times b \to M$ 由下式定义：若 $\Delta_e(x)$在阶段 s有定义，则 $g(e, x) = s$ 。由于g 是定义域有界的部分可计算函数，根据引理 2.2，$\text{ran}\, g$ 由某个 $s_1 > s_0$ 所界定。也就是说，在阶段 s_1之后， Λ 中的任何要求都不会再有扩张阶段。因此， Λ 中的要求施加在 A_0 上的限制由 s_1所界定。

综上所述，我们得到以下引理:

引理 3.2。 假设存在某个 s_0 ，在此之后， Λ 中的要求不再被初始化。那么， Λ 中的所有要求都得到满足，并且存在某个阶段 $s_1 > s_0$，在此之后， Λ 中的要求不再进行对角化，也不再经历扩张阶段。此外，对 A_0 施加的限制被 s_1所界定。

我们指出，Robinson 情形（引理 4.4）比引理 3.2 微妙得多，其证明需要充分利用 C 的超正则性

以及 C' 是 ω-可计算可枚举这一事实。这些性质对于限制整体限制的大小至关重要。

3.3. 动态优先级分配。 我们有用于 P-要求的区块 $\Lambda(i)$，以及用于 Q-要求的区块 $\Upsilon(i)$，其中 i 是区块的指标。我们用 $\Lambda_s(i)$ 和 $\Upsilon_s(i)$ 表示阶段 s 时区块中所含要求的集合；在不会引起混淆时，有时会省略下标 s 。它们由以下 动态优先级分配 λ_s 确定：$\{P_e \mid e \in M\} \to M$ 和 μ_s： $\{Q_e \mid e \in M\} \to M$，其中

$$\Lambda_s(i) = \lambda_s^{-1}(i) \quad \text{and} \quad \Upsilon_s(i) = \mu_s^{-1}(i).$$

同一区块中的要求具有相同的优先级次序。各区块按优先级排序为 $\Lambda(0) < \Upsilon(0) < \Lambda(1) < \Upsilon(1) < \cdots$。

P_m，其中 $m = \max \Lambda_s(i)$，是阶段 s 时区块 $\Lambda(i)$ 中的末尾要求； Q_n，其中 $n = \max \Upsilon_s(i)$，是阶段 s 时区块 $\Upsilon(i)$ 中的末尾要求 。其思路是，若某个区块，例如 $\Lambda(i)$，在阶段 s 初始化，我们就会向该区块中加入更多优先级较低的 P-要求，以补偿 $\Lambda(i)$ 初始化的次数。

动态优先级分配定义如下。在阶段 s 结束时，假设该阶段没有区块被初始化；则对所有 $e \in M$，令 $\lambda_s(P_e) = \lambda_{s-1}(P_e)$ 且 $\mu_s(Q_e) = \mu_{s-1}(Q_e)$。否则，令 $\Lambda(i)$ 或 $\Upsilon(i)$ 为该阶段被初始化的优先级次序最高的要求块。若为 $\Lambda(i)$，令 P_m 为 $\Lambda(i)$ 中的末尾要求：

(1) for $j \leq m$, $\lambda_s(P_j) = \lambda_{s-1}(P_j)$;
(2) for $m < j \leq s$, $\lambda_s(P_j) = i$;
(3) for $s < j$, $\lambda_s(P_j) = \lambda_{s-1}(P_j) - (\lambda_{s-1}(P_s) - i)$.
(4) for $j \in M$, $\mu_s(Q_j) = \mu_{s-1}(Q_j)$.

条目 (3) 等价于说，对于 $j \in M$， $\lambda_s(P_{s+j}) = i + j$ ；条目 (3) 中采用的形式更直接地体现了 λ_s 的非增性质。

类似地，若为 $\Upsilon(i)$，令 Q_n 为 $\Upsilon(i)$ 中的末尾要求：

(1) for $j \leq n$, $\mu_s(Q_j) = \mu_{s-1}(Q_j)$;
(2) for $n < j \leq s$, $\mu_s(Q_j) = i$;
(3) for $s < j$, $\mu_s(Q_j) = \mu_{s-1}(Q_j) - (\mu_{s-1}(Q_s) - i)$.
(4) for $j \in M$, $\lambda_s(P_j) = \lambda_{s-1}(P_j)$.

条目 (3) 等价于说，对于 $j \in M$， $\mu_s(Q_{s+j}) = i + j$。

根据 λ_s 和 μ_s 的定义，我们有以下引理：

引理 3.3. 对于每个 $e, s \in M$ ，满足 $s \geq 1$, $\lambda_s(P_e) \leq \lambda_{s-1}(P_e)$ 以及 $\mu_s(Q_e) \leq \mu_{s-1}(Q_e)$。

引理 3.4. 对于每个 $e \in M$，$\lim_s \lambda_s(P_e)$ 和 $\lim_s \mu_s(Q_e)$ 均存在。

证明。 集合 $\{i \mid \exists s(\lambda_s(P_e) = i)\}$ 是一个 Σ_1 集合，因此根据 $\mathrm{L}\Sigma_1$，它有一个最小元素 i_0 。由于 $\lambda_{s+1}(P_e) \leq \lambda_s(P_e)$，我们有 $\lim_s \lambda_s(P_e) = i_0$。类似地，$\lim_s \mu_s(Q_e)$ 存在。□

以 P-要求为例。我们将 $i = \lim_s \lambda_s(P_e)$ 定义为 P_e 的最终优先级顺序。若存在最小阶段 s ，使得对于所有 $t > s$， $\Lambda_t(i) = \Lambda_s(i)$，则称区块 $\Lambda(i)$在阶段 s稳定。根据动态优先级分配的定义，此阶段 s 与 $\Lambda(i)$ 最后一次初始化的阶段一致。

3.4. **构造与验证**。现在我们来介绍一些术语，并给出构造。在阶段 s，由 $\Lambda_s(i)$ 施加的限制记为$\rho_s(i)$，由 $\Upsilon_s(i)$ 施加的限制记为 $\tau_s(i)$。如果没有施加限制，则令$\rho_s(i) = \tau_s(i) = -1$。对于一个数 $x \in M$，若 $x \leq \rho_s(i)$ 或 $x \leq \tau_s(i)$，则分别称 x 威胁 $\Lambda_s(i)$ 或 $\Upsilon_s(i)$。当我们初始化一个区块时，会初始化该区块中的所有要求，并初始化所有优先级较低的区块。如果某个要求被初始化，则其局部函数 Δ_e 或 Γ_e 以及所有对角化三元组都会被取消。

我们假设，对于每个 $s \in M$，如果 s 是奇数，则 $B_s \setminus B_{s-1}$ 是单元素集；如果 s 是偶数，则 $B_s \setminus B_{s-1}$ 是空集。

构造： 在阶段 s，如果 s 是奇数，我们从第一部分开始；如果 s 是偶数，我们从第二部分开始。

第一部分。枚举 A_0 和 A_1： 令 $x \in B_s \setminus B_{s-1}$。令威胁 x 的优先级次序最低的需求区块为 $\Lambda(i)$（或者分别为 $\Upsilon(i)$），若其存在。

(i.1) 如果它是 $\Lambda(i)$，那么我们将 x 枚举进 A_1。初始化区块 $\Upsilon(i)$；
(i.2) 如果它是 $\Upsilon(i)$，那么我们将 x 枚举进 A_0。初始化区块 $\Lambda(i+1)$。
如果没有要求块受到威胁，我们就将 x 枚举进 A_0。然后继续进行第三部分。

第二部分。区块策略： 令区块 $\Lambda(0)$ 可行动。设（不失一般性）区块 $\Lambda(i)$ 可行动。对于每个 $P_e \in \Lambda(i)$，我们执行以下 P_e-策略：

(ii.1) 设它已在某个 x 对角化；我们停止 P_e-策略。(ii.2) 设对于某个 $x \in \mathrm{dom}\ \Delta_e$，且 (σ, x, k) 是对角化三元组，$\Delta_e(x) = k \neq D_s(x)$，我们称 P_e 在 x 对角化。然后我们停止 P_e-策略。(ii.3) 设 s 是一个 P_e-扩张阶段；对于所有 $x \leq \ell_s(e)$，我们定义 $\Delta_e(x) = D_s(x)$。我们定义 $\rho_s(i) = s$。然后我们停止 P_e-策略。(ii.4) 设 s 不是一个 P_e-扩张阶段；我们停止 P_e-策略。
如果对于所有的 $P_e \in \Lambda(i)$，条目 (ii.3) 都没有发生，我们就令 $\rho_s(i) = \rho_t(i)$，其中 $t < s$ 是 $\Lambda(i)$ 最后一次可行动的阶段。若条目 (ii.2) 或条目 (ii.3) 发生，我们就说 P_e- 要求在阶段 s 行动 。

在 $\Lambda(i)$ 中的所有要求都停止后，如果 $\Lambda(i)$ 中的某个要求在阶段 s 行动，我们就初始化优先级较低的区块并开始第三部分；否则，我们让优先级次序中下一个优先级最高的区块可行动，直到遇到包含 P_s 要求或 Q_s 要求的区块，此时开始第三部分。

第三部分。动态优先级分配： 请读者参阅第 3.3 节中关于 λ_s 和 μ_s 的规则。

构造至此完成。现在我们利用已证明的引理3.1、引理 3.2 和引理 3.4进行验证。

引理 3.5。 假设 $\Lambda(i)$ （或分别地， $\Upsilon(i)$）在 s_0之后尚未初始化。那么存在某个阶段 $s_1 > s_0$，此后 $\Upsilon(i)$ （或分别地， $\Lambda(i+1)$）尚未初始化。

证明。 由引理 3.2，存在某个 $s^* > s_0$，使得 $\Lambda(i)$ 中的要求在 s^* 之后不再起作用，并且施加在 A_0 上的限制有界于 s^*。存在某个阶段 $s_1 > s^*$，此后没有点 $x \leq s^*$ 被枚举进 B。因此，根据构造的第一部分， $\Lambda(i)$ 在 s_1 之后不会受到威胁。于是， $\Upsilon(i)$ 在 s_1 之后不会被初始化。□

引理 3.6。 对于每个 $e \in M$， P_e 和 Q_e 都得到满足。

证明。 Q_e 的情形类似；我们以 P_e 为例。由引理 3.4，设$i = \lim_s \lambda_s(P_e)$为 P_e的最终优先级顺序，并设 s_0 是$\lambda_s(P_e) = i$的第一个阶段。对于每个 $s > s_0$， $\Lambda(i-1)$在阶段 s未被初始化，否则$\lambda_s(P_e) \leq i-1$。由引理 3.5，存在某个阶段 $s_1 > s_0$，此后 $\Upsilon(i-1)$不再被初始化。由同一引理，存在某个阶段 $s_2 > s_1$，此后 $\Lambda(i)$不再被初始化。由引理 3.2， P_e 成立。□

这就完成了定理 1.1 的证明。基于这一构造，我们将在下一节证明定理 1.3。

我们强调，在引理 3.2 的证明中（见第 3.2 节）使用 $\mathrm{I}\Sigma_1$ 至关重要，尤其是在确立施加于 A_0 的限制有界这一点上。在这一论证中， D 是可计算可枚举集这一点必不可少，它确保函数 f 保持 Σ_1，从而使推理能够在 $\mathrm{I}\Sigma_1$ 的框架内进行。如果 D 不是可计算可枚举集， f 就不会是 Σ_1，证明也就无法在 $\mathrm{I}\Sigma_1$ 中成立。不过，如果改为在标准模型中工作，$\mathbb{N}$、 D 可以是任意 Δ_2 集，而我们的构造只需稍作修改。

4. 定理1.3的证明

我们固定一个皮亚诺算术 $\mathrm{I}\Sigma_1$ 的模型 M。令 B， C， $D \subseteq M$ 为可计算可枚举集，其中 C 是超低的，且 $D \not\leq_T C$。我们构造 A_0 和 A_1，使得 $B = A_0 \sqcup A_1$，并且这些集合满足以下针对每个 $e \in M$ 的要求：

$$P_e: \quad D = \Phi_e^{A_0 \oplus C} \to D = \Delta_e^C;$$
$$Q_e: \quad D = \Psi_e^{A_1 \oplus C} \to D = \Gamma_e^C.$$

在这里，每个 P_e-要求和 Q_e-要求分别构造并维护局部泛函Δ_e^C和 Γ_e^C，以导出矛盾。

罗宾逊技巧是考虑

$$X = \{j \mid \exists \sigma \in W_j, C \in [\sigma]\}.$$

X 是 Σ_1^C，因此

$$X \leq_1 C' \leq_{wtt} \varnothing'.$$

由于 C' 是 ω-可计算可枚举的， X也如此。设 p 和 q 为可计算函数，使得

$$X(j) = \lim_s p(j,s)$$

对所有 $j \in M$， $p(j,0) = 0$且

$$|\{s \mid p(j,s+1) \neq p(j,s)\}| \leq q(j).$$

满足 P_e-要求的思路如下：假设 $\Phi_e^{A_0 \oplus C_s}(x) \downarrow = D_s(x)$。我们首先检查这个收敛计算是否经认证的。如果是，我们定义$\Delta_e^{C_s}(x) = D_s(x)$；否则，就将该计算视为发散并不采取任何操作。为了认证一个计算，我们使用一个可计算可枚举集 W_j，称为猜测集，其指标 j 由递归定理给出。这个 j 取决于 e、 x，以及相关要求被初始化或受损的次数。接下来，我们将说明如何认证一个计算——这正是罗宾逊技巧的原始思路。我们的处理方式稍显技术性，因为在模型中，我们必须谨慎处理“有限性”

$\mathrm{P}^- + \mathrm{I}\Sigma_1$；在标准模型中，验证更直观，有时甚至会被省略。

假设 $\Phi_e^{A_0 \oplus C_s}(x) \downarrow = k$ 使用 l，并令 $\theta = A_{0,s} \upharpoonright l$ 和 $\sigma = C_s \upharpoonright l$。我们将 $\Phi_e^{A_0 \oplus C_s}(x) \downarrow$ 称为一次计算，并将 (θ, σ, x, k) 称为该计算的公理。我们还有一个集合 $F_e(x)$，其中收集了经认证的计算的公理。此计算的认证过程如下：

(C.1) 如果 $C_s \notin [W_j]$，则将 σ 枚举进 W_j。(C.2) 令 $t \geq s$ 为最小阶段，使得 $C_t \notin [\sigma]$ 或 $p(j,t) = 1$。

(C.2a) 如果 $C_t \notin [\sigma]$，则此计算未经认证。跳过条目 (C.2b)。

(C.2b) 如果 $p(j,t) = 1$，则此计算已经认证。将 (θ, σ, x, k) 枚举进 $F_e(x)$。条目 (C.2) 中的阶段 t 存在，因为

$$C \in [W_j] \iff \lim_s p(j,s) = 1.$$

假设该计算在阶段 s 经认证。对于任意满足 $s \leq u \leq t$ 的 u，我们有 $C_u \in [\sigma]$。我们还希望 $A_{0,u} \in [\theta]$ 保持该计算。因此，我们对 $A_0 \upharpoonright l$ 施加限制以实现这一点。反之，如果该计算在阶段 s 未经认证（因此 $C_t \notin [\sigma]$），那么我们不对 $A_0 \upharpoonright l$ 施加任何限制，允许将点枚举进 A_0。如果对于某个满足 $s \leq u \leq t$ 的 u，我们观察到 $\Phi_e^{A_0 \oplus C_u} (x) \downarrow$，那么认证过程不会在阶段 u 对该计算进行认证，因为我们仍有 $C_t \notin [\sigma]$。因此，我们可以直接忽略阶段 u 的这项计算。

为便于讨论，我们称一项计算在经认证期间若 $A_0 \upharpoonright l$ 发生变化，则该计算受到损伤；类似地，若 $F_e(x)$ 的任何一项经认证的计算受到损伤，我们就称 $F_e(x)$ 受到损伤。一旦某项计算受到损伤，我们便无法再使用同一个猜测集认证后续计算，因为结果可能是 $C \in [\sigma]$，从而所有计算都会自动获得认证。在这种情况下，如果我们确实想进行有意义的认证，就必须更新猜测集 W_j 的指标 j，并清空集合 $F_e(x)$。最终我们将证明，除非 P_e-要求被初始化，否则 $F_e(x)$ 不会受到损伤。

$F_e(x)$ 当且仅当 P_e-要求已初始化时，才算已初始化。如果 $F_e(x)$ 受到损伤或已初始化，我们就刷新猜测集 W_j 的指标 j，并清空集合 $F_e(x)$。用 $F_e(x)$ 的术语来说，当且仅当某个计算的公理在阶段 s 被枚举进 $F_e(x)$ 时，该计算才首次在阶段 s 得到认证。

引理 4.1. 假设在 s_0 之后，$F_e(x)$ 未受到损伤或初始化。那么，$F_e(x)$ 有界。

证明。令 W_j 为猜测集。假设 $\lim_s p(j,s) = 0$，其中 s_1 是这样的阶段：对每个 $s > s_1$，都有 $p(j,s) = 0$。那么，对每个 $s \geq s_1$，都没有计算能够得到认证。因此，对每个 $s > s_1$，我们都不向 $F_e(x)$ 枚举任何公理。所以，$|F_e(x)|$ 是 M-有限的。

假设 $\lim_s p(j,s) = 1$。那么 $C \in [W_j]$。设 $\sigma \in W_j$ 满足 $C \in [\sigma]$。假设 σ 在阶段 s_1 被枚举进 W_j，其中 (θ, σ, x, k) 是计算 $\Phi_e^{A_0 \oplus C_{s_1}, s_1} (x) \downarrow = k$ 的公理。由于 $F_e(x)$ 未受到损伤，因此对所有 $s \geq s_1$，都有 $A_{0,s} \in [\theta]$。由于 $C \in [\sigma]$，该计算在所有阶段 $s \geq s_1$ 都得到认证。因此，(θ, σ, x, k) 是最后一个被枚举进 $F_e(x)$ 的公理。□

4.1. 单一要求。 不失一般性，我们以 P_e-要求为例。我们首先考虑 P_e 的如下子要求，对每个记为 $P_e(x)$

$x \in M$:

$$P_e(x): \quad D(x) = \Phi_e^{A_0 \oplus C}(x) \to D(x) = \Delta_e^C(x).$$

$P_e(x)$**-策略：** 在阶段 s，如果 $F_e(x)$ 受到损害或被初始化，我们就刷新猜测集 W_j 的指标 j，并清空集合 $F_e(x)$。如果 $\Phi^{A_0}_{e\ s\oplus C_s}(x) \uparrow$ 或 $\Phi^{A_0}_{e\ s\oplus C_s}(x) \downarrow \neq D_s(x)$，则什么也不做；否则，我们按如下步骤进行：

(Px.1) 如果 $\Delta_e^{C_s}(x)\downarrow$，我们什么也不做；(Px.2) 如果 $\Delta_e^{C_s}(x)\uparrow$ 并且 $\Phi^{A_0}_{e\ s\oplus C_s}(x) \downarrow = D_s(x) = k$ 与 $(\theta,\ \sigma,\ x,\ k)$ 构成公理，我们就对这次计算执行认证过程。(Px.2a) 如果这次计算未经认证，我们什么也不做；(Px.2b) 否则，我们定义 $\Delta_e^{\sigma}(x) = k$，将 $(\theta,\ \sigma,\ x,\ k)$ 称为对角化公理，并对 $A_0 \upharpoonright s$ 施加限制以保留这次计算。（我们假设 $s > |\theta|_0$。）我们称 $P_e(x)$ 在阶段 s行动。如果 $C_t \notin [\sigma]$，则此对角化公理会在未来阶段 t 自动取消。

注意，如果 $\Phi^{A_0}_{e\ s\oplus C_s}(x) \downarrow \neq D_s(x)$，我们不会执行条目（Px.2）中的认证过程。在将某项计算与 $D_s(x)$ 比较之前就对其进行认证，会带来问题，因为在这种情况下，我们无法对 A_0 施加限制，这就可能导致 $F_e(x)$ 受到损害。先进行比较，再执行认证过程，可以避免这个问题，并确保 $F_e(x)$ 不会受到损害。

另请注意，只有在 $P_e(x)$ 行动时，我们才会延长对 A_0 的限制。我们对 A_0 施加的限制可能强于必要程度；此外，除非 $P_e(x)$-要求被初始化，否则我们不会解除该限制。这种做法简化了论述。

我们证明事项（Px.1）。

引理 4.2。假设在 s_0 之后，$F_e(x)$ 没有受到损害或被初始化。

(1) 对于每个满足 $\Delta_e^{C_s}(x) \downarrow$ 的 $s > s_0$，$\Phi^{A_0}_{e\ s\oplus C_s}(x) \downarrow = D_s(x)$ 当且仅当 $\Delta_e^{C_s}(x) \downarrow = D_s(x)$。（*2*）假设 $\Delta_e^{C}(x)\uparrow$，那么要么 $\Phi_e^{A_0\oplus C}(x)\uparrow$，要么 $\Phi_e^{A_0\oplus C}(x)\downarrow \neq D(x)$。

证明。（*1*）：($\Rightarrow$) 反设 $\Delta_e^{\sigma}(x) \downarrow \neq D_s(x)$，且满足 $C_s \in [\sigma]$。

令 $(\theta,\ \sigma,\ x,\ k)$ 为阶段 t with$s_0 < t < s$ 时事项（Px.2b）中所声称的对角化公理。由于 $A_0 \upharpoonright t$ 得以保留且 $C_s \in [\sigma]$，我们仍有 $\Phi^{A_0}_{e\ s\oplus C_s}(x) \downarrow = \Delta_e^{\sigma}(x) = k$。由于 $D_s(x) \neq k$，我们有 $\Phi^{A_0}_{e\ s\oplus C_s}(x) \downarrow \neq D_s(x)$。矛盾。

($\Leftarrow$) 假设 $\Delta_e^{\sigma}(x) \downarrow = D_s(x)$，且满足 $C_s \in [\sigma]$。令 $(\theta,\ \sigma,\ x,\ k)$ 为阶段 t with $s_0 < t \leq s$ 时事项（Px.2b）中所声称的对角化公理。由于 $A_0 \upharpoonright t$ 得以保留且 $C_s \in [\sigma]$，我们仍有 $\Phi^{A_0}_{e\ s\oplus C_s}(x) \downarrow = k = \Delta_e^{\sigma}(x) = D_s(x)$。

(2)：假设为了导出矛盾，$\Phi_e^{A_0\oplus C}(x) \downarrow = D(x)$。存在某个阶段 $s_1 > s_0$ 和四元组 $(\theta,\ \sigma,\ x,\ k)$，使得对于每个 $s \geq s_1$，这个四元组都是计算 $\Phi^{A_0}_{e\ s\oplus C_s}(x) \downarrow = k = D_s(x) = D(x)$ 的公理。因此，我们应该在阶段 s_1 对这个计算执行认证过程。由于 $C \in [\sigma]$，这个计算在 s_1 经认证。因此，$\Delta_e^{C}(x) \downarrow = k$，这与假设 $\Delta_e^{C}(x)\uparrow$ 矛盾。□

换言之，甚至在我们运行 $P_e(x)$-策略之前，以下观察就是成立的。如果我们观察到 $\Delta_e^{C_s}(x) \downarrow \neq D_s(x)$，那么我们就知道 $\Phi^{A_0}_{e\ s\oplus C_s}(x) \downarrow \neq D_s(x)$，

因此， $P_e(x)$-要求在阶段 s得到满足。如果 $\Delta_e^{C_s}(x)\downarrow = D_s(x)$，那么我们就知道事项（Px.1）发生。

P_e-策略： 在阶段 s，从 $x=0$开始；

(1) 如果 $x=s$，我们就停止；(2) 执行 $P_e(x)$-策略。如果发生事项（Px.1）或事项（Px.2b）（对于后一种情况，回想一下，根据 $P_e(x)$-策略， $P_e(x)$在阶段 s 行动，我们也称 P_e在阶段行动），我们就继续执行 $x := x+1$；否则，我们定义 $\tau_s(e) = x$ 并停止。

对于每个 $x < \tau_s(e)$， $\Delta_e^{C_s}(x)\downarrow = D_s(x)$。

引理3.1的以下类似结果是引理 4.4的一个特例。这里给出的证明可作为热身；其中一些论证不适用于分块情形。

引理4.3。假设在 s_0之后， P_e-要求尚未初始化。那么 P_e 得到满足。此外，存在某个阶段 $s_2 > s_0$ ，在此之后 P_e 不再行动。因此，对 A_0 施加的限制有界于 s_2。

证明。 </style集合 () ()是，因为 当且仅当存在一个阶段 和一个串，使得 ,$s(x) \neq D_s(x)$ 且 $C \in [\sigma]$。这里，我们利用了 D 是可计算可枚举的这一事实，并且每当我们定义 $\Delta_e^{\sigma}(x)$ 时，都会正确地定义它；这意味着在这样的阶段 s有 $D_s(x) = D(x)$。

若 $\mathcal{A}$ 非空，令 a 为 $\mathcal{A}$ 中的任意一个元素（或按 $\mathrm{L}\Sigma_1^C$取 $\mathcal{A}$ 中的最小元素）。若$\mathcal{A}$ 为空，则 $\operatorname{dom}\Delta_e^C \neq M$ （否则， $C \geq_T D$ 会导出矛盾）；我们按 $\mathrm{L}\Pi_1^C$选择a 为满足 $\Delta_e^C(a)\uparrow$的最小元素。

对于 $x < a$，有 $\Delta_e^C(x)\downarrow$ （不一定是 $= D(x)$）。定义 C-可计算函数 $w: a \to M$，令 $w(x) = s$，当 $\Delta_{e,s}^{\sigma}(x)\downarrow$ 对某个 $C \in [\sigma]$ 成立时。利用 $\mathrm{I}\Sigma_1^C$ （事实上，$\mathrm{B}\Sigma_1^C$ 就足够），$\operatorname{ran} w$ 被某个 $s_1 > s_0$界定。也就是说，对于每个 $x < a$ 和每个$s > s_1$， $P_e(x)$ 在阶段 s不行动。

情形（*1*）： $\Delta_e^C(a)\downarrow \neq D(a)$。存在某个阶段 $s_2 \geq s_1$ 和一个串 $C \in [\sigma]$，使得 $\Delta_{e,\ s_2}^{\sigma}(a)\downarrow \neq D_{s_2}(a) = D(a)$。于是对所有 $s > s_2$，都有 $\Delta_{e,\ s}^{C_s}(a)\downarrow \neq D_s(a) = D(a)$。由引理4.2（1），有 $\Phi_{e\ s}^{A_0\ \oplus C_s}(a)\downarrow \neq D_s(a)$，因此 $\Phi_e^{A_0\oplus C}(a)\downarrow \neq D(a)$。所以，对所有 $s > s_2$， P_e-要求都得到满足。

情形（*2*）： $\Delta_e^C(a)\uparrow$。由引理 4.2（2）， $P_e(a)$-要求得到满足。令 W_j 为 $P_e(a)$-策略的猜测集。由于 $F_e(x)$ 有界，存在某个阶段 $s_2 > s_1$，使得对于每个 $s > s_2$，都没有经认证的计算，并且 $\Delta_e^{C_s}(a)\uparrow$。因此， $P_e(a)$ 在阶段 $s > s_2$ 不采取行动。□

我们指出，前述证明中情形（*2*）所用的论证不能推广到分块情形（引理 4.4）。原因在于 $F_e(x)$的有限性行为不再可控。

4.2. **要求块**。设 Λ 是一个由 P 个要求组成的区块。假设 $\Lambda = \{P_{e_0}, P_{e_0+1}, \ldots, P_{e_1}\}$。为简化记号，我们有时将 Λ 与指标集 $\{e_0, e_0+1, \ldots, e_1\}$ 等同。 Λ 中的每个要求都遵循 P_e-策略，且彼此之间没有冲突。现在我们将证明引理 3.2 的类似结果：

引理 4.4。假设存在某个 s_0，在此之后 Λ 未被初始化。那么 Λ 中的所有要求都得到满足，并且存在某个 $s_3 > s_0$，在此之后 Λ 中没有任何要求采取行动。此外，对 A_0 施加的限制不超过 s_3。

证明。我们定义 $f : \Lambda \to M$ 为

$$f(e) = s \text{ if } s > s_0 \wedge \exists x \exists \sigma \left(\Delta^{\sigma}_{e,s}(x) \downarrow \neq D_s(x) \wedge C \in [\sigma] \right),$$

其中，陈述中的 x 不一定是最小的。对于这样的 x 和 s，我们还有 $D_s(x) = D(x)$，因为 D 是可计算可枚举集。由于 f 是一个部分 C-可计算函数，$\operatorname{ran} f$由某个 s_1所界定。也就是说，对于每个 $e \in \operatorname{dom} f$ 以及每个阶段 $s > s_1$，P_e 在阶段 s不会行动。由于 $\operatorname{dom} f$是 Λ的一个 Σ^C_1子集，$\operatorname{dom} f$是 M-有限的。我们令 $\Lambda_1 = \Lambda \setminus \operatorname{dom} f$。

接下来我们断言 $\bigcup_{e \in \Lambda_1} \operatorname{dom} \Delta^C_e \neq M$。为此，反设不然。那么对于任意 $x \in M$，我们都可以搜索一个 $e \in \Lambda_1$、一个串 σ和一个阶段 $s > s_1$，使得$\Delta^{\sigma}_e(x) = D_s(x)$在阶段 s 和 $C \in [\sigma]$处有定义，并输出 $D(x) = D_s(x)$。这一过程表明 $D \leq_T C$，这与假设 $D \not\leq_T C$矛盾。因此，$\bigcup_{e \in \Lambda_1} \operatorname{dom} \Delta^C_e$由某个 b所界定。

定义 g： $\Lambda_1 \times b \to M$ 如下

$$g(e, x) = s \text{ if } s > s_1 \wedge \exists \sigma \left(\Delta^{\sigma}_{e,s}(x) \downarrow \wedge C \in [\sigma] \right).$$

因此，g 的值域被某个 s_2 所界定。这意味着，对每个 $e \in \Lambda_1$ 以及每个 $x \in$，$\operatorname{dom} \Delta^C_e$，$P_e(x)$ 在阶段 $s > s_2$ 不会行动。

接下来，对于每个 $e \in \Lambda_1$，我们尝试找出满足 $\Delta^C_e(a_e) \uparrow$的最小元素 a_e。$P_e(a_e)$ 在 s_2之后仍可能行动。

我们定义部分可计算函数 a： $\Lambda_1 \to M$ 如下

$$a(e) = x \text{ if we observe that } P_e(x) \text{ acts at some (least) stage } s > s_2.$$

注意，对于这样的 x，必有 $\Delta^C_e(x) \uparrow$，否则这会与 s_2 的选取矛盾。注意，对于 $e \in \Lambda_1 \setminus$，$\operatorname{dom} a$，$P_e$ 在阶段 $s > s_2$ 不会行动。令 $\Lambda_2 =$ 属于 $\operatorname{dom} a$。那么 Λ_2 是 M-有限的，并且 a 在 Λ_2 上是全可计算的。我们令 $a_e = a(e)$。

对于每个 $e \in \Lambda_2$，我们令 W_{j_e} 为 $P_e(a_e)$-策略的猜测集。指标 j_e 可直接针对 $e \in \Lambda_2$ 计算。由于 $\Delta^C_e(a_e) \uparrow$，我们有 $\lim_s p(j_e, s) = 0$。令 s_e 满足：对于每个 $s > s_e$，$p(j_e, s) = 0$。这意味着，对于每个 $s > s_e$，都没有计算经认证，因此 $P_e(a_e)$ 在阶段 $s > s_e$ 不会行动。现在我们将为 $\{s_e \mid e \in \Lambda_2\}$ 找到一个界。

注意，q： $\{j_e \mid e \in \Lambda_2\} \to M$ 是可计算的（回想一下，$q(j_e)$界定了 $\{s \mid p(j_e, s+1) \neq p(j_e, s)\}$的数目）。因此，$q$的值域由某个 d界定。定义 $w : \Lambda_2 \times d \to M$ 为

$$w(e, k-1) = s \text{ if } p(j_e, s+1) \neq p(j_e, s) \text{ for the } k\text{-th time.}$$

那么，w的值域由某个 s_3界定。也就是说，对每个 $s > s_3$，$p(j_e, s) = 0$，且 s_3 是 $\{s_e \mid e \in \Lambda_2\}$ 的一个界。

综合以上，对每个 $e \in \Lambda$，P_e 在任何阶段$s > s_3$都不起作用。□

动态优先级分配与第 3.3 节中相同。因此我们直接进入构造与验证，其过程类似于第 3.4 节。

4.3. **构造与验证**。 大部分内容完全保持不变。这里我们只改写第二部分。

第二部分。区块策略： 令区块 $\Lambda(0)$ 可行动。不失一般性，假设区块 $\Lambda(i)$ 可行动。对于每个 $P_e \in \Lambda(i)$，我们执行第 4.1 节中介绍的 P_e-策略。如果某个要求采取行动，我们就初始化优先级较低的区块并开始第三部分；否则，我们依次令下一个优先级最高的区块可行动，直到遇到包含 P_s-要求或Q_s-要求的区块，此时开始第三部分。

构造至此完成。

引理 3.5 和引理 3.6 仍然成立，只需将引理 3.2 替换为引理 4.4。至此验证完成。

5. 讨论

我们指出，原始的罗宾逊分裂定理可以在 $\mathsf{P}^- + \mathsf{B}\Sigma_2$ 的模型中证明。这并不令人意外，因为 $\mathsf{B}\Sigma_2$ 甚至蕴含萨克斯稠密性定理 [6]。回想一下， [3, 6] 表明，在 $\mathsf{B}\Sigma_2$ 条件下，每个不完全递归可枚举集都是超正则的。因此，我们的证明大部分适用于任意低集 C。唯一额外的问题是，我们目前形式下的引理 4.4 的证明还用到了 X 是 ω-可计算可枚举的，其中 X 是用于罗宾逊技巧的集合。然而，在 $\mathsf{B}\Sigma_2$ 条件下，这个引理的证明要简短得多：定义 $f : \Lambda \to M$ 为

$$f(e) = s \text{ if } \forall t > s\,(P_e \text{ does not act at stage } t)$$

这是一个 Π_1-可定义函数，且 $\mathsf{B}\Pi_1$ （等价于 $\mathsf{B}\Sigma_2$）蕴含 $\operatorname{ran} f$ 有界。由此得到引理 4.4。因此我们得到如下定理：

定理 5.1. 罗宾逊分裂定理（定理 *1.2*）在 $\mathsf{P}^- + \mathsf{B}\Sigma_2$ 的模型中成立。

我们将以下问题留作开放：

问题 5.2. 当集合 C为低集时，$\mathsf{I}\Sigma_1$ 是否能证明原始的罗宾逊分裂定理？或者它在 $\mathsf{P}^- + \mathsf{I}\Sigma_1$ 上是否等价于 $\mathsf{B}\Sigma_2$？

我们的论证在很大程度上依赖于 X 与 C' 均为 ω-可计算可枚举这一事实。对于一般的低集 C，图灵跳跃 C' 可能对某个可计算序数 $\alpha > \omega$是 α-可计算可枚举的，这可能给在 $\mathsf{I}\Sigma_1$ 中形式化的构造带来额外困难。这表明，在 $\mathsf{P}^- + \mathsf{I}\Sigma_1$ 上必须更谨慎地处理低性。另一方面，若有限伤害论证在 $\mathsf{I}\Sigma_1$ 中失效，仍会令人惊讶。

这个问题也可能与萨克斯稠密性定理的以下特殊情形有关：

问题 5.3. $\mathsf{I}\Sigma_1$ 是否证明了上稠密性：对于每个可计算可枚举度 $C <_T \varnothing'$，都存在一个可计算可枚举度 D，使得 $C <_T D <_T \varnothing'$？

如果在某个 $\mathsf{I}\Sigma_1$ 模型中，上稠密性对低度 C 就已失效，那将令人意外。

参考文献

[1] C. T. Chong、Wei Li 和 Yue Yang。《递归论与逆向数学中的非标准模型》。《符号逻辑通报》，20:170–200，2014。[2] C. T. Chong 和 K. J. Mourad。 Σ_n 可定义集与 Σ_n 归纳。《美国数学会汇刊》，334:349，1992。[3] C. T. Chong 和 Yue Yang。 Σ_2 归纳与无限损伤优先论证，第二部分：温和的 Σ_2 编码与跳跃算子。《纯粹与应用逻辑年刊》，87(2):103–116，1997。[4] C. T. Chong 和 Yue Yang。 Σ_n-截的跳跃。《伦敦数学会杂志》，75(3):690–704，2007。[5] Richard M. Friedberg。两个不可比较不可解度的递归可枚举集（波斯特问题的解，1944）。《美国国家科学院院刊》，43 2:236–8，1957。[6] Marcia J. Groszek、Michael E. Mytilinaios 和 Theodore A. Slaman。萨克斯稠密性定理与 Σ_2-有界性。《符号逻辑杂志》，61(2):450–467，1996。[7] Alistair H. Lachlan。一个无法在所有较小度上分裂的递归可枚举度。《数学逻辑年刊》，9(4):307–365，1976。[8] A. A. Muchnik。算法理论可约化性问题的否定答案。《苏联科学院院刊》，108:194–197，1956。[9] Michael Mytilinaios。有限损伤与 Σ_1-归纳。《符号逻辑杂志》，54(1):38–49，1989。[10] Michael E. Mytilinaios 和 Theodore A. Slaman。 Σ_2-汇集与无限损伤优先方法。《符号逻辑杂志》，53(1):212–221，1988。[11] J. B. Paris 和 L. A. S. Kirby。算术中的 Σ_n-汇集模式。载于《逻辑讨论会'77》，第199–209页。北荷兰出版社，阿姆斯特丹—纽约，1978。[12] Robert W. Robinson。递归可枚举度中的插值与嵌入。《数学年刊》，93:285–314，1971。[13] Gerald E. Sacks。小于 $\emptyset'$的度。《数学年刊》，77(2):211–231，1963。[14] Richard A. Shore。分裂一个 α-递归可枚举集。《美国数学会汇刊》，204:65–77，1975。[15] Theodore A. Slaman。 Σ_n-有界性与 Δ_n-归纳。《美国数学会会刊》，132:2449–2456，2004。[16] Theodore A. Slaman 和 W. Hugh Woodin。 Σ_1-汇集与有限损伤优先方法。载于《数理逻辑与应用》，第178–188页。施普林格柏林海德堡，1989。

(Liu)信息工程学院，南京晓庄学院，中国电子邮箱地址： liuyong@njxzc.edu.cn

(Peng)数学研究所，河北工业大学，中国
电子邮箱地址： pengcheng@hebut.edu.cn

(Sun)数学研究所，华沙大学，波兰电子邮箱地址： m.sun3@uw.edu.pl