arXiv:2603.03997v1 [econ.EM] 4 Mar 2026

空间HAC标准误的带宽选择

Alexander Lehner*

2026-03-03

回归模型中的空间自相关可能导致标准误向下偏误，进而造成推断错误。应用经济学中最常见的修正方法，是 Conley（1999）提出的空间异方差和自相关一致（HAC）标准误估计量。其关键输入是核带宽，即允许残差相关的距离范围。然而，这一问题至今尚未解决，文献中也没有正式的指导。本文首先指出，带宽与空间 HAC 标准误大小之间呈倒U形关系。这意味着带宽过窄或过宽都会导致标准误被低估，这与“带宽越宽，推断越保守”的传统观点相矛盾。随后，我提出一种简单、非参数且由数据驱动的带宽选择器，其依据是回归残差的经验协变异函数。在针对美国本土具有经验相关性的空间相关结构进行校准的大量蒙特卡洛实验中，我表明，所提出的方法在各种空间相关强度和样本配置下，都能将假阳性率控制在名义5%水平或接近该水平。我比较了六种核函数，发现巴特利特核和 Epanechnikov核的检验尺寸控制效果最佳。基于美国县级数据的实证应用展示了该方法的实际价值。R 软件包 `SpatialInference`实现了所提出的带宽选择方法。

关键词： 空间自相关、Conley标准误、HAC推断、带宽选择、协方差函数、核函数估计、蒙特卡洛模拟

JEL分类： C14,C21, C52

*世界银行集团成果部，华盛顿特区 H 街 1818 号。电子邮箱：alehner@worldbank.org。感谢芝加哥大学的听众提出宝贵意见并参与讨论。Alex Gordon 提供了出色的研究协助。相关计算在芝加哥大学的 Akropolis集群上完成。本文所述的研究结果、解读和结论完全代表作者个人观点，并不一定代表世界银行集团、其执行董事或其所代表国家的观点。

1 引言

几十年来，空间自相关的概念一直是空间统计学的组织原则，其历史至少可以追溯到 Student [1914]关于“消除由时间和空间位置造成的虚假相关”的文章。 Student [1914] 指出，将传统统计方法应用于自相关观测值“会导致完全误导性的结果”（第179页），并通过给出经过调整的推断，说明此类修正的重要性。在现代计量经济学文献中，至少自 Anselin and Griffith [1988], 展示空间效应会显著扭曲基于回归的推断以来，人们便已认识到空间自相关会给统计推断带来问题。鉴于几乎所有经济数据都具有空间结构，而且地理参考数据日益普及，这已成为应用研究中愈发值得关注的问题。在许多情境下，推断时考虑依赖关系的重要性都已得到强调： Bertrand et al. [2004] 展示了具有时间相关性的面板数据中这一问题的严重性，而经验观察表明，应用研究者如今已充分意识到潜在的扭曲风险。然而，对于空间相关性，尚未出现关于如何落实修正的同等实用指南。

经济学及许多其他社会科学的回归分析中，处理空间自相关最常见的方法是采用空间异方差与自相关稳健（HAC）标准误，这一方法由Conley [1999]在其开创性研究中提出。Conley 将Newey 和 West [1987] 的方法从时间序列推广到二维空间域，并以Andrews [1991]的 HAC 框架为基础。该技术的核心是一个用于估计方差-协方差矩阵的非参数估计量，它使用残差交叉乘积的核加权平均值，其中核函数根据观测值之间的距离对观测值对赋予递减权重。实现这一估计量的一项关键输入是选择截断带宽——即假定残差不相关的距离阈值。在时间序列领域，关于自动带宽选择和经验法则带宽选择已有大量研究 [，例如 Newey 和 West，1987年，Andrews，1991年，Sun， 2014]。然而，对于空间情形，还没有广泛采用的对应方法。因此，研究者通常凭直觉或领域知识任意选择带宽，这造成了Gelman and Loken [2013] 所说的“研究者自由度”。

本文有三项贡献。首先，我记录了一条对空间HAC估计具有重要意义的经验规律：带宽与空间 HAC 标准误的大小之间的关系

呈倒*U*形。这意味着，带宽过窄或过宽都会导致标准误被低估，进而过度拒绝真实的原假设。这一发现与应用研究中的主流传统观点相悖；该观点认为，选择更宽的带宽能够确保保守推断。

其次，我提出一种简单、非参数且由数据驱动的方法，用于选择合适的带宽。该方法基于回归残差的经验协变图：估计的带宽对应于残差协变首次降至零时的距离。第三，我进行了大量蒙特卡洛模拟来评估该方法。基于按美国本土地理特征校准的空间相关结构，我表明，所提出的带宽选择器在广泛的空间自相关强度、样本量和空间配置下，都能将假阳性率控制在名义5%水平或接近该水平。模拟还对空间HAC估计中六种常用核函数——巴特利特、均匀、Epanechnikov、高斯、Parzen和四次双权——进行了系统比较，发现巴特利特核和Epanechnikov核的检验尺寸控制效果最佳。

相关文献。 与本文最为相关的研究是 Kim和Sun [2011], ，他们推导了空间HAC估计的均方误差最优带宽，并提出了一种参数插入估计量。其最优带宽是样本量（n^{α} 对于某些 $\alpha > 0$）的函数，这与本文提出的方法形成对比。 Kim和Sun [2011] 提出的插入估计量依赖于对未知量的参数初步估计量，而本文提出的协变图范围法完全非参数，不需要此类假设。 Kelejian和Prucha [2007] 详细论述了空间HAC估计量的性质，并推导了一致性结果；本文以其理论框架为基础。

近期的研究提出了另一种思路：提出完全绕开 Conley HAC框架的推断方法。 Müller 和 Watson [2022]以及 Müller 和 Watson [2023]开发了空间相关主成分（SCPC）置信区间，无需进行带宽选择即可稳健应对任意空间相关性。 Müller 和 Watson [2024] 指出，即使使用空间 HAC 或聚类稳健标准误，空间 I(1) 过程也可能导致回归结果出现虚假的显著性，并提出了空间差分方法。 Conley 和 Kelly [2025] 提出将空间基函数回归与安慰剂检验相结合，用于持续性研究。 DellaVigna 等人 [2025] 使用多个结果变量来估计横截面依赖，从而完全避开带宽问题。尽管这些方法各有优点，但它们也

要求偏离应用研究者所熟悉的回归框架。本文证明，只要恰当选择带宽，就可以在标准 Conley HAC框架内实现有效推断。该方法直观透明，且计算效率高。

在时间序列HAC文献中，Kolokotrones等人 [2024] 表明，Bartlett（Newey–West）核在一阶核中具有最高的检验功效。本文将核函数的比较扩展到空间域，而此前尚未对空间域进行此类系统评估。

本文其余部分的安排如下。第2 节介绍计量经济学框架和空间HAC估计量。第3 节在给出形式化假设和一致性结果的基础上，介绍所提出的带宽选择方法。第4 节说明生成空间相关数据的模拟设计。第5 节记录倒 U 型关系。第7 节给出蒙特卡洛结果。第8 节提供一个实证应用。第9 节总结全文。第11节补充介绍空间HAC估计、核函数以及地统计模拟程序的详细信息。

2 计量经济学框架

2.1 具有空间相关误差的线性模型

设 $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^2$ 为二维欧几里得空间的一个子集，$\mathbf{s}_i = (s_{1i}, s_{2i})' \in \mathcal{S}$ 表示观测值 i的空间位置，其中 s_{1i} 和 s_{2i} 表示两个空间坐标。[1]考虑线性回归模型

$$y_i = \mathbf{x}_i'\beta + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n, \tag{1}$$

其中 $y_i \equiv y(\mathbf{s}_i)$ 是位置$\mathbf{s}_i$处的结果变量，$\mathbf{x}_i$ 是一个 $p \times 1$ 回归变量向量，β 是所关注的参数向量，而 $\varepsilon_i \equiv \varepsilon(\mathbf{s}_i)$ 是具有 $E[\varepsilon_i] = 0$的误差项。这些误差项未能满足独立性假设：$\mathrm{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \neq 0$ 适用于邻近位置$\mathbf{s}_i$ 和$\mathbf{s}_j$。直观上，这源于

[1]对于未投影的地理数据，这些坐标对应于球面上的经度和纬度 $\mathbb{S}^2$。对于投影数据，它们是平面坐标系中的坐标。本文在不失一般性的前提下，将位置称为 $\mathbb{R}^2$ ，并默认假设数据已投影。

因为结果变量在空间上并非随机分布；邻近的事物往往比相距较远的事物更为相关。[2]

由于大数定律适用于弱依赖的空间数据，OLS估计量 $\hat{\beta}$仍然是一致的。因此，处理空间自相关时需要关注的是推断：标准异方差稳健方差估计量

$$\hat{V}_{\mathrm{HC}} = \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i'\right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{n} \hat{\varepsilon}_i^2 \, \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i'\right) \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i'\right)^{-1}$$

忽略了 $i \neq j$ 的交叉乘积 $\hat{\varepsilon}_i \hat{\varepsilon}_j$，因此在存在正空间自相关时会低估 β 的真实方差。这会导致 t统计量偏大，拒绝率高于名义水平。

2.2 空间HAC估计量

Conley [1999] 提出了一种非参数估计量，用于估计能够考虑空间相关性的方差-协方差矩阵。空间HAC估计量的形式为

$$\hat{V}_{\mathrm{SHAC}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \hat{} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}, \tag{2}$$

其中

$$\hat{} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} K\left(\frac{d_{ij}}{\varsigma}\right) \hat{\varepsilon}_i \hat{\varepsilon}_j \, \mathbf{x}_i \mathbf{x}_j'. \tag{3}$$

这里，$d_{ij} = d(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j)$ 是观测值 i 和 j之间的距离，$\varsigma > 0$ 是带宽（截断距离），$K(\cdot)$ 是满足 $K(0) = 1$、$K(u) = 0$ （当 $|u| > 1$时）以及 $K(u) = K(-u)$的核函数。核函数根据距离对交叉乘积的贡献进行降权，并对间距超过 ς的观测对赋予零权重。当 $\varsigma = 0$时，该估计量便退化为标准异方差一致（HC）估计量。

带宽的选择 ς 是本文关注的核心问题。它决定了残差允许发生相关性的距离范围，因此会直接影响估计标准误的大小。

[2]这是对 Tobler 的 [1970]地理学第一定律的转述。

2.3 核函数

本研究考察了六种核函数：

$$
\begin{aligned}
&\text{Uniform:} && K(u) = \mathbf{1}(0 \le u \le 1) \\
&\text{Bartlett:} && K(u) = (1-u)\cdot \mathbf{1}(0 \le u \le 1) \\
&\text{Epanechnikov:} && K(u) = (1-u^2)\cdot \mathbf{1}(0 \le u \le 1) \\
&\text{Parzen:} && K(u) = \begin{cases} 1 - 6u^2 + 6u^3 & 0 \le u < 1/2 \\ 2(1-u)^3 & 1/2 \le u \le 1 \end{cases} \\
&\text{Quartic Biweight:} && K(u) = (1-u^2)^2 \cdot \mathbf{1}(0 \le u \le 1) \\
&\text{Gaussian:} && K(u) = \exp(-u^2/2)\cdot \mathbf{1}(0 < u < 1)
\end{aligned}
$$

其中 $u = d_{ij}/\varsigma$ 是归一化距离。均匀核为带宽范围内的所有配对赋予相同权重，而其他核函数赋予的权重则逐渐降低。巴特利特核对应于 Newey 和 West [1987] 估计量的空间类比。此处使用的高斯核在带宽处截断，与标准高斯密度不同，它省略了归一化常数；这确保了 $K(0) = 1$ 且 $K(u) = 0$ 对于 $u > 1$成立，与空间HAC框架一致。

2.4 测量空间自相关

在实践中，上述空间关系通常通过连通矩阵来体现，这种矩阵常被称为权重矩阵——这一概念至少可追溯到 莫兰 [1948]。设 $\mathbf{W}$ 为描述所有位置 $\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_n$之间关系的 $n \times n$ 矩阵，其中第(i, j)个元素 $w_{ij} \equiv [\mathbf{W}]_{ij}$表示单元 i 与单元 j之间的距离。一般而言，这种距离不一定是空间距离，也可以指经济距离或社会距离等。如果 $w_{ij} \neq 0$，则单元 i 与单元 j 互为邻居。在实践中，$\mathbf{W}$ 在大多数实证应用中会是一个稀疏矩阵，这意味着大多数配对 i 与 j 不会被归类为邻居，即 $w_{ij} = 0$。

为说明空间滞后变量的构造方式，考虑连通矩阵的第 i 行以及 x_i，即单元 i 的标量变量 $\mathbf{x}$ 的取值。x_i 的空间滞后可写作

as

$$[\mathbf{W}\mathbf{x}]_i = w_{i1}x_1 + w_{i2}x_2 + \cdots + w_{in}x_n = \sum_{j=1}^{n} w_{ij}x_j,$$

它是该变量在所有邻居中的取值的加权和。实际应用中，$\mathbf{W}$ 的各项通常会进行行标准化，使得对于所有行 i，$\sum_{j=1}^{n} w_{ij} = 1$。还要注意，主对角线设为零，$w_{ii} = 0$，这意味着一个单元不是自己的邻居。换句话说，$\mathbf{W}$ 通过矩阵乘积 $\mathbf{W}\mathbf{x}$实现时，可视为空间滞后算子。

为了检验每种回归设定是否存在残差自相关，我采用莫兰指数 [莫兰， 1950]。其基本形式可写为

$$I = \frac{n}{\sum_i \sum_j w_{ij}} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_{ij}(\hat{\varepsilon}_i - \bar{\hat{\varepsilon}})(\hat{\varepsilon}_j - \bar{\hat{\varepsilon}})}{\sum_{i=1}^{n}(\hat{\varepsilon}_i - \bar{\hat{\varepsilon}})^2},$$

其中，n 是单元的数量，$\sum_i \sum_j w_{ij}$ 是所有空间权重之和。分母$\sum_{i=1}^{n}(\hat{\varepsilon}_i - \bar{\hat{\varepsilon}})^2$ 是方差，分子则涉及上文讨论的空间滞后。请注意，它与皮尔逊相关系数有着惊人的相似之处：莫兰指数衡量 $\hat{\varepsilon}_i$ 与其空间滞后邻居之间的相关程度。在空间随机性假设下，其期望值为 $E[I] = -1/(n-1)$，推断则基于标准化统计量 $Z = (I - E[I])/\sqrt{\text{方差}(I)}$。应用于回归残差时，计算会考虑Anselin [1988] 和 Cliff 和 Ord [1981]提出的线性投影。所有莫兰指数检验均使用 `spdep` 软件包[Bivand 等人， 2020]。

使用连通矩阵的一个缺点是，通常必须由研究者事先定义该矩阵。对于本研究而言，这不太构成问题，因为该矩阵仅用于检验，而非估计。所有模拟中均采用同一个权重矩阵——基于200千米的距离带——以便比较不同情景下报告的莫兰指数。实践中，定义连通矩阵的方法有很多；本研究采用距离带和 k最近邻设定。

3 协变图范围法

3.1 经验协变图

所提出的带宽选择方法的关键是回归残差的经验协变图 。对于一组估计残差 $\hat{\varepsilon}_i$, $i = 1, ..., n$，滞后距离h 处的经验协变图为

$$\hat{C}(h) = \frac{1}{|N(h)|} \sum_{(i,j)\in N(h)} \hat{\varepsilon}_i \, \hat{\varepsilon}_j, \tag{4}$$

其中， $N(h) = \{(i, j) : h - \delta \leq d(\mathbf{s}_i、\ \mathbf{s}_j) < h + \delta\}$ 是所有位置对的集合，这些位置对之间的距离落在以 h 为中心、半宽为 δ的分箱内； $|N(h)|$ 是该集合的基数。分箱宽度 2δ 必须足够大，以确保每个分箱中有足够的观测值。实际操作中，这意味着要指定数量相同、间距相等且互不重叠的距离类别。

^协方差函数 $C(h)$ 估计残差之间的协方差与其间距离^的关系。存在正向空间自相关时，对于较小的 h， $C(h)$ 为正值；随着 h 增大， $C(h)$ 逐渐趋近于零。超过某一距离后，残差近似^不相关，且 $C(h)$ 围绕零波动。

3.2 提出的带宽选择器

我建议使用经验协变图来估计回归残差中空间依赖的范围 。这一估计范围随后用作计算空间 HAC 标准误的带宽。

命题 1 (协变图范围估计量)。 令 $\{h_b\}_{b=1}^{B}$ 表示计算^经验协变图 $C(\cdot)$ 时所用的分箱中心。将协变图范围估计量定义为

$$\hat{\varsigma} = \min\{h_b : |\hat{C}(h_b)| \leq \eta\}, \tag{5}$$

其中， $\eta \geq 0$ 是一个较小的容差，用于考虑抽样噪声。估计量 $\hat{\varsigma}$用于确定估计残差协方差的绝对值低于容差带的最短距离。^在实践中， $C(h)$ 在一组固定的、等间距且互不重叠的距离分箱上进行评估。令$\eta = 0$，估计量将选择经验协变图穿过零点时对应的第一个分箱中心。对于

对于逐渐衰减而非恰好降至零的协方差函数（见下文注释 4），可以使用较小的正值 η；在蒙特卡洛实验中，默认的 $\eta = 0$ 表现良好，因为分箱协方差图的噪声足够大，使其在有效变程附近穿过零点。

备注 1。协方差函数与半变异函数之间的关系为 $C(h) = C(0) - \gamma(h)$，其中 $C(0)$是距离为零时的方差（按地统计学术语，即“块金效应”加“基台”），而 $\gamma(h)$ 是半变异函数。二者传达的空间相关结构信息等价。本文使用协方差函数，是因为其范围——即 $C(h)$ 穿过零点时对应的距离——可直接解释为残差彼此不相关时的带宽上限。

3.3 形式假设与一致性

本节给出充分条件，在这些条件下，协变图范围估计量 $\hat{\varsigma}$ 对于真实相关范围是一致的，由此得到的插件空间HAC估计量对于方差也一致 $\hat{\beta}$。这些条件的表述旨在清楚说明所需条件；在增长域渐近框架下给出完整详细的证明超出了本文的范围。第 7 节的蒙特卡洛证据为该方法在针对经验上相关的空间配置进行校准的有限样本情形下有效提供了主要验证。

假设1（平稳性与混合）。误差过程 $\{\varepsilon(\mathbf{s}) : \mathbf{s} \in \mathcal{S}\}$ 是二阶平稳的：$E[\varepsilon(\mathbf{s})] = 0$ 对所有$\mathbf{s}$均成立，且 $\mathrm{Cov}(\varepsilon(\mathbf{s}_i), \varepsilon(\mathbf{s}_j)) = C(\|\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j\|)$ 仅取决于距离 $\|\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j\|$（各向同性）。该过程满足空间 α-混合条件，混合系数 $\alpha(k)$满足 $\sum_{k=1}^{\infty} k^{d-1}\alpha(k)^{\delta/(4+\delta)} < \infty$，其中维数为 $d = 2$。此外，$E[|\varepsilon(\mathbf{s})|^{4+\delta}] < \infty$ 对某个$\delta > 0$成立。

之所以需要混合条件和矩条件，是因为共享位置的残差乘积对 $\hat{\varepsilon}_i\hat{\varepsilon}_j$ 彼此相关；这些条件确保分箱协方差图平均值满足大数定律，而这并不能仅凭配对数量 $|N(h)|$ 的增加而推出。

假设 2 (紧支撑与识别**)**。存在有限的 $\varsigma_0 > 0$，使得$C(h) = 0$ 对所有 $h > \varsigma_0$均成立。协方差函数满足分离条件：

$$\textit{for every } \delta > 0, \quad \inf_{h \le \varsigma_0 - \delta} |C(h)| > 0 \quad \textit{and} \quad \sup_{h \ge \varsigma_0 + \delta} |C(h)| = 0. \tag{6}$$

此外， $C(h)$ 在 ς_0处连续。

分离条件确保真实范围 ς_0 能够被准确识别：范围内的协方差有严格正的下界，而范围外的协方差恰好为零。这排除了$C(h)$ 在 ς_0附近“平坦”的病态情形，因为这会导致阈值穿越在微小估计误差下变得不稳定。注意， $C(h)$ 不必对所有 $h < \varsigma_0$都为正——它在某些距离上可能为负（例如，由于振荡行为或残差化所致）——但必须非零。

假设3 (递增域抽样)。 观测位置 $\{\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n\}$ 是在递增域框架下抽样的：随着 $n \to \infty$，空间区域 $\mathcal{S}_n$ 不断扩展，且最小点间距下界大于零。对于某个 $c > 0$，每个距离分箱中的配对数 $|N(h)|$ 在所有 $h \le \varsigma_0 + c$ 下都趋于无穷大。

这与 Conley [1999]和 Kelejian和Prucha [2007],的渐近框架一致；他们在递增域渐近下确立了空间HAC一致性。相关距离范围内的条件 $|N(h)| \to \infty$ 确保分箱协变图平均值收敛。

假设4 (正则性)。 回归变量 $\mathbf{x}_i$ 有界，并且满足 *@Conley1999* 和 *@KelejianPrucha2007* 中关于空间*HAC*估计量一致性的条件，带宽为 ς_0。核函数 $K(\cdot)$ 连续且具有紧支撑（即，它是 *@sec-kernels-main* 中定义的光滑核函数之一，例如巴特利特核或*Epanechnikov*核）。

核函数连续性要求确保从带宽到 SHAC 方差^估计量 $\varsigma \mapsto V_{\mathrm{SHAC}}(\varsigma)$ 的映射是连续的：由于这些点对的核权重接近于零，在截断边界附近添加或移除点对只会使估计量发生可忽略的变化。

命题2 （协变图范围估计量的一致性）。 在假设 *1–4*成立时，协变图范围估计量 $\hat{\varsigma}$ 依概率收敛于 ς_0 ，当 $n \to \infty$时。因此，采用带宽 ^ ^计算的空间 V_{SHAC} 异方差和自相关一致估计量 $\hat{\varsigma}$ 是真实方差的一致估计量，其对应于 β。

论证概要。 令 $\{h_b\}_{b=1}^{B}$ <style id='6}>为覆盖 $[0, \varsigma_0 + c]$的固定分箱中心。在假设 1和 3下，混合条件和矩条件确保相依成对

ˆ每个分箱内的平均值，从而对每个 b得到 $C(h_b) \to_p C(h_b)$ 。由于 B 是有限的，联合收敛成立，并且各分箱中的最大值收敛：

$$\max_{b \le B} |\hat{C}(h_b) - C(h_b)| \to_p 0.$$

ˆ由于 $C(h)$ 在各分箱上定义为分段常数函数，因此这等价于在整个区间上一致收敛。由此以及假设 2 中的分离条件可知，ˆ估计量 $\hat{\varsigma}$ 收敛到 ς_0：对于任意 $\delta > 0$，最终对所有分箱 $h_b \le \varsigma_0 - \delta$， $|C(h_b)|$ 都与零保持正距离（因而ˆ大于 η）；而对所有ˆ分箱 $h_b \ge \varsigma_0 + \delta$， $|C(h_b)|$ 都接近零（因而小于 η）。因此， $|C(h_b)| \le \eta$ 首次落入 $(\varsigma_0 - \delta, \varsigma_0 + \delta)$的分箱必然是该分箱，从而得到$\hat{\varsigma} \to_p \varsigma_0$。第二个结论由假设4中的核连续性推出——它保证。 ˆ $V_{\mathrm{SHAC}}(\hat{\varsigma}) - V_{\mathrm{SHAC}}(\varsigma_0) \to_p 0$。具体而言，在递增域抽样下，薄边界壳层 $(\varsigma_0 - \epsilon, \varsigma_0 + \epsilon)$ 中的观测对数量至多与 ϵ成比例增长，因此，对于连续的紧支撑核函数，这些观测对对 ˆ 的边际贡献会随着 $\epsilon \downarrow 0$趋于零。ˆ结合 Kelejian 和 Prucha [2007], 所确立的 $V_{\mathrm{SHAC}}(\varsigma_0)$ 一致性，即可得到该结论。

注 2。平稳性假设排除了空间趋势和非平稳空间过程。在实践中，可以通过纳入位置控制变量（例如，将坐标作为回归变量），或在应用协变图法之前进行去趋势来处理非平稳性。
@sec-montecarlo 中的蒙特卡洛实验包含了有位置控制变量和没有位置控制变量的设定。

备注 3。 紧支撑假设（假设 *2*）是一种建模近似。球状协方差模型严格满足该假设，但指数模型或 *Matérn* 模型并不满足，因为它们的协方差会渐近衰减至零，却不会在有限距离内达到零。实际上，这些模型都有一个“有效变程”——协方差降至其基台值约 *5%* 时对应的距离——而协方差图估计量的目标就是这个有效变程。形式上，可以将 ς_0 替换为伪真参数 $\varsigma_0 := \sup\{h : |C(h)| > \eta\}$ ，其中阈值 $\eta > 0$较小；此时，上述论证仍然成立，只需将分离条件表述为相对于该阈值而言。在紧支撑条件下，*SHAC*估计量在真实截断点 ς_0处是一致的，协方差图范围则能对该截断点给出一致估计。在没有紧支撑的衰减协方差情形下，协方差图范围的目标是一个固定的有效变程，可将其用作实用带宽；该情形下的形式化速率最优性留待未来研究。

3.4 实现

所提出的方法计算效率高。经验协变图使用 `variogram()` 函数计算，该函数来自 `gstat` [Pebesma, 2004]并采用 `covariogram = TRUE` 选项。距离分箱由两个参数决定： `width` （分箱宽度 2δ）和 `cutoff` （最大距离）。默认情况下，分箱宽度的设定会使最大点间距离的三分之二范围内约有 100–200 个距离分箱。随后，将经验协变图首次穿过零点时对应的距离提取为范围。对于包含数千个观测值的典型数据集，整个过程只需不到一秒。

图 2 展示了该方法在四组模拟数据集上的应用，这些数据集的空间自相关程度依次递增。

3.5 与固定-b 渐近框架的联系

协变图范围带宽选择器与固定-b 渐近框架之间存在有益的概念联系。在经典时间序列设定中，两种渐近框架决定了异方差和自相关一致标准误的行为。在 Andrews [1991] 和 Newey 和 West [1987], 提出的传统小-b 渐近框架下，带宽 M 随样本量 T 增大，但满足 $M/T \to 0$，因此异方差和自相关一致估计量是一致的，且 t统计量收敛于标准正态分布。在 Kiefer 等人 [2000] 和 Sun 等人 [2008], 提出的固定-b渐近框架下，带宽满足 $M/T \to b \in (0, 1]$，因此异方差和自相关一致估计量是不一致的，但由此得到的检验统计量收敛于一种非标准分布，能够更准确地控制有限样本检验水平。Sun [2014] 指出，固定-b推断通常更可取，因为它考虑了异方差和自相关一致估计量本身的估计不确定性。Bester 等人 [2016] 将固定-b 理论拓展到空间情形：当 Conley 带宽与空间域的直径成比例增长，即 $\varsigma/\mathrm{diam}(S_n) \to b > 0$时，SHAC估计量收敛于一个非退化随机矩阵，而非真实方差； t统计量则具有非标准的枢轴极限分布，其临界值必须通过模拟获得。

虽然协变图范围选择器并未实现空间固定-b 推断，但它与固定-b 文献的核心实用理念一致：平滑应以依赖尺度为基准，而不是随着样本增大而缩小。估计量 $\hat{\varsigma}$ 的目标是一个固定的物理量——相关范围 ς_0——它完全由空间依赖决定

数据生成过程的结构。与均方误差最优规则 [（例如Andrews） 1991], 不同，在这些规则中，带宽会随 T 增长，但满足 $M/T \to 0$，并且在有限样本中趋于过度平滑；协变图范围带宽则不依赖于 n，而是由依赖尺度决定。这种固定跨度的特性——以物理量而非样本量为基准——减少了通常的平滑权衡，而这种权衡正是Sun [2014]所指出的 HAC 推断中检验尺寸扭曲的主要来源。

不过，从形式上看，协变图范围法采用的是不同的渐近框架。在本文全文使用的递增域渐近下，固定的物理带宽意味着$\varsigma_0/\mathrm{diam}(S_n) \to 0$，因此协变图范围选择器属于$b$ 的小Bester 等人[2016], 框架，而非固定b 框架。此外，在紧支撑条件下（假设2），超过 ς_0后协方差便严格为零，因此不存在需要截断的“缺失尾部”——这与b设定中的空间固定Bester 等人 [2016], 不同；在后者中，带宽会截断依赖结构中不可忽略的一部分，SHAC估计量收敛到非退化随机极限。在真实截断点 ς_0处，SHAC估计量能够捕捉完整的协方差结构，不会产生截断偏差，因此具有一致性。代入带宽 $\hat{\varsigma}$ 收敛于 ς_0，从而获得标准的 SHAC 一致性，无需使用非标准临界值或模拟参考分布。第7 节所记录的有限样本检验大小改善，并非源于通过接纳估计量随机性实现的固定b 机制，而是因为直接针对正确的依赖尺度——避免了均方误差最优带宽选择器所带来的欠平滑。尽管如此，在任何有限空间样本中，带宽与域的比率都是不可忽略的常数，因此产生的平滑效果可能类似于促使人们采用固定b 修正的大幅平滑行为。

4 模拟设计

为了评估所提出的带宽选择器，我需要相关范围得到精确控制的空间相关随机变量。我使用 `gstat` 软件包[Pebesma， 2004]生成这些变量；有关地统计框架的全面介绍，请参见 Cressie [1993] 。模拟过程的完整细节——包括克里金系统、半变异函数设定和实现——见第 11.3节。

4.1 空间样本

整个研究使用了四个空间样本，均覆盖美国本土的边界框：

1. **县($n = 3{,}108$)**：美国本土连续的48个州中所有县的质心。这是一个观测值间距极不均匀的样本。2. **粗网格($n \approx 2{,}600$)**：单元格大小为70公里的规则方形网格。3. **中等网格($n \approx 5{,}096$)**：单元格大小为50公里的规则方形网格。4. **细网格($n \approx 10{,}320$)**：单元格大小为35公里的规则方形网格。

三个格点样本提供了对样本密度的可控变化，而县质心样本则用于检验在间距极不规则情况下的表现。

4.2 蒙特卡罗设计

在每次模拟迭代中：

1. 使用上述及第11.3节所述的程序，抽取两个相互独立且具有空间相关性的随机场，二者具有相同的变程参数。第一个随机场提供因变量 y_i （标记为 `noise1`），第二个随机场提供回归变量 x_i （标记为`noise2`）。

2. 每个观测值均被赋予其所在位置的底层随机场取值。3. 对 y_i 和 x_i 进行单变量回归。由于两个随机场是独立抽取的，真实系数为零（$\beta = 0$）。记录使用 HC1 标准误，以及使用不同核函数和带宽组合计算的 Conley 标准误时的 t 统计量。4. 假阳性率定义为：在使用 1.96 的临界值时，以 5% 的显著性水平拒绝原假设 $H_0 : \beta = 0$ 的模拟次数占总模拟次数的比例。

该过程针对噪声范围参数重复进行，从 0（无空间相关性）开始，按 15 次连续增量递增，直至达到极端程度的空间相关性，每种配置进行 5,000 次迭代。噪声范围参数控制半变异函数的输入；实现的相关范围在各次抽取中随机变化。计算在芝加哥大学的 Akropolis 集群上使用 `Rmpi` 进行并行处理 [R Core Team， 2025]。为

确保精确可复现性，伪随机数种子使用 `clusterSetRNGStream()`并结合 Pierre L'Ecuyer 的 `RngStreams` [L'Ecuyer, 1999] 进行设置（种子：1908）。

每次模拟都会计算以下标准误：

- **HC1**：标准的异方差稳健估计量（基准）。
- **Conley，协变图范围带宽 (**ς**)**：采用六种不同核函数计算的所提方法。

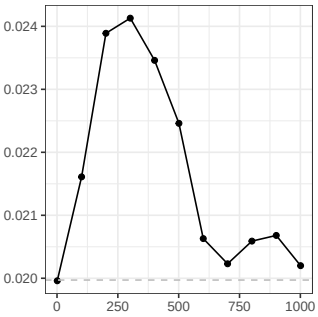
- **Conley，固定窄带宽** (25 km)：刻意设定的较小带宽。
- **Conley，固定宽带宽** (2,500 km)：刻意设定的较大带宽，体现了"保守地采用宽带宽"的建议。

5 倒 U 型关系

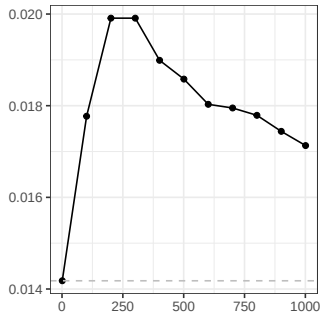
图 1 展示了四个空间样本中空间相关随机场的单次实现下，核带宽与Conley标准误大小之间的关系。这一模式鲜明且一致：标准误首先上升，随着带宽从零开始增大（此时Conley 标准误等于HC1标准误），在真实相关范围附近达到最大值，然后稳步下降。本文提出的方法始终选取这条倒 U 型曲线的峰值作为标准误。

这种倒U形具有直接的实际影响。从较窄的带宽出发，扩大允许残差相关的范围，起初会导致更大的标准误——这符合预期，因为正的残差相关会增加估计方差。然而，一旦超出实际相关范围，纳入核函数的额外观测值对方差估计只贡献噪声：它们的交叉乘积$\hat{\varepsilon}_i\hat{\varepsilon}_j$ 期望为零，但会稀释真正相关配对所带来的正贡献。随着带宽继续增大，这种稀释效应占据主导，标准误随之下降。

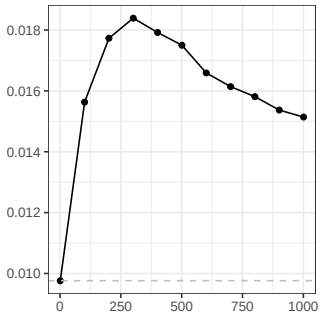
对于非常宽的带宽，标准误可能低于HC1 水平。这直接违背了关于更宽带宽能够确保保守推断的传统观点。事实上，选择远大于真实相关范围的带宽，可能导致标准误小于仅考虑异方差的估计量，所造成的过度拒绝甚至超过完全忽略空间相关性时的过度拒绝。



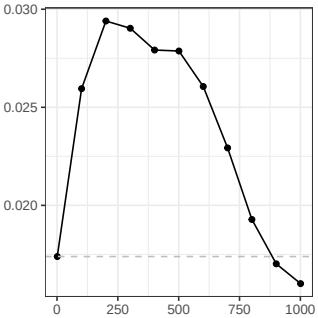
(a) 粗网格 ($n \approx$ 2,600)。



(b) 中等网格 ($n \approx$ 5,096)。



(c) 细网格 ($n \approx 10{,}320$)。

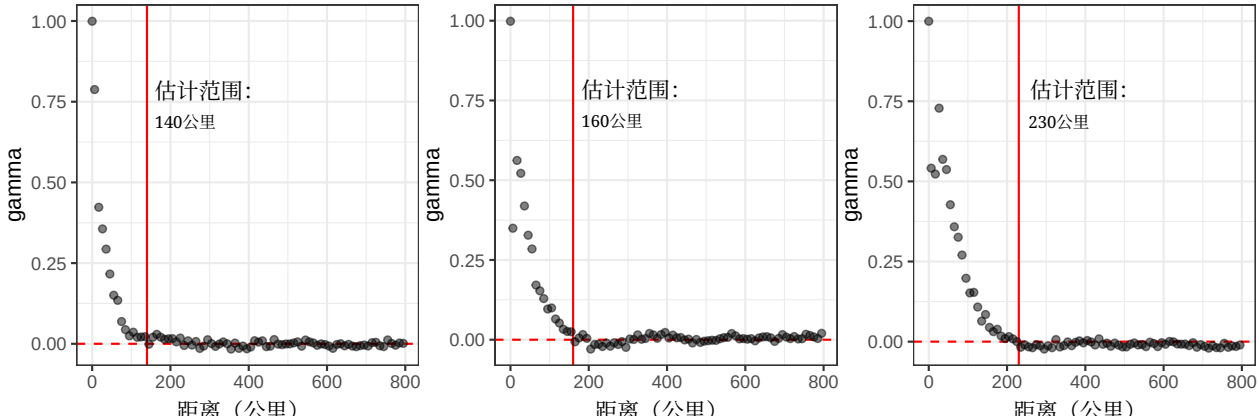


(d) 县质心（$n =$ 3,108)。

图 1：四个样本中，空间 HAC 标准误的大小与核带宽之间的倒 U 型关系。每个面板均使用空间相关随机场的一次实现（Matérn，范围为 50 km）。灰色虚线表示相应的 HC1 标准误。可以看出，过宽的带宽会使 Conley 标准误的检验大小降至 HC1 标准误的水平，同时导致 t 统计量严重膨胀。

实际意义很明确：带宽应与残差中空间相关性的实际范围相匹配。这正是第3节提出的协变图范围法所实现的。

6 协变图范围法示例



（a）低空间自相关 (b) 中等空间自相关 (c) 高空间自相关

图2：对两个独立抽取的空间噪声场分别进行单变量回归后得到的回归残差的经验协方差图，基于3,108 个县质心估计。红色竖线表示估计的相关范围 $\hat{\varsigma}$。这对应于前文所示倒 U 型曲线的峰值。红色虚线标示零协方差。

图 2 展示了协方差图范围法在三个空间自相关程度逐渐增强的回归残差序列上的应用。在每个面板中，经验协方差图从短距离处的正值开始下降，并在估计范围 $\hat{\varsigma}$（由红色竖线标示）处穿过零点。在 $\hat{\varsigma}$之外，协方差图围绕零值波动，表明不存在残差相关。随着空间自相关程度从面板 (a) 增至 (c)，估计范围向右移动，准确反映了空间依赖范围的扩大。

7 蒙特卡洛结果

7.1 主要结果：检验尺寸控制

表 1 展示了三个规则格点样本的主要结果。使用 Epanechnikov核的协变图范围法在所有

[!h]

	$n = 2{,}600$（70 千米网格）			$n = 5{,}096$（50 千米网格）			$n = 10{,}320$（35 千米网格）		
噪声 #	范围	HC1	Epan.	范围	HC1	Epan.	范围	HC1	Epan.
0	143	5.2	**5.2**	109	4.9	**5.1**	83	4.8	**4.9**
1	141	4.6	**4.7**	98	4.5	**4.5**	83	4.7	**4.7**
2	131	4.9	**4.9**	140	5.0	**4.8**	150	7.1	**5.3**
3	178	6.1	**5.7**	209	7.2	**5.5**	226	13.6	**6.1**
4	231	7.1	**5.6**	267	12.3	**6.1**	295	21.5	**5.8**
5	284	9.2	**5.5**	324	17.0	**6.0**	355	29.9	**6.3**
6	335	13.7	**6.4**	370	23.2	**6.4**	406	38.9	**6.5**
7	382	17.7	**6.5**	421	29.6	**6.4**	451	46.3	**6.6**
8	429	22.0	**6.9**	468	36.2	**6.9**	500	50.8	**6.7**
9	472	25.6	**6.6**	509	40.4	**6.8**	537	54.8	**7.2**
10	510	30.6	**7.4**	551	45.5	**7.8**	581	60.0	**7.5**
11	540	35.5	**7.9**	579	49.1	**8.4**	604	62.8	**8.3**
12	576	38.8	**8.0**	619	51.4	**8.5**	647	65.5	**8.4**
13	614	42.0	**8.7**	654	55.7	**8.7**	678	68.0	**8.5**
14	639	45.2	**9.1**	679	57.9	**9.0**	702	69.4	**8.9**
15	660	47.7	**8.5**	701	60.0	**8.8**	722	71.6	**9.2**

表 1：使用三个规则格点样本进行线性回归的名义 5% 水平检验的零假设拒绝频率（%）。该表将 HC1 标准误与采用所引入的协变图范围带宽和 Epanechnikov 核的空间 HAC 标准误进行对比。每个范围—样本组合均基于 5,000 次蒙特卡洛模拟。范围列展示了随着模拟空间场的范围增大，空间相关性程度不断增强的情况。从明显过高的 HC1 拒绝率可以看出，表格最后几行展示了不切实际的高空间相关性情形。尽管如此，所提出的方法仍将超过 70% 的拒绝率降至约 9%。

[!h]

			固定带宽		协方差图范围		
噪声 #	范围（千米）	HC1	固定 25 千米	固定 2500 千米	巴特利特	均匀	Epan.
0	49	4.8	4.7	24.4	**4.8**	**5.1**	**4.9**
1	72	5.1	5.0	23.6	**4.9**	**5.0**	**4.9**
2	130	6.7	6.3	24.6	**5.6**	**5.5**	**5.4**
3	189	11.6	10.5	25.5	**6.4**	**6.5**	**6.1**
4	243	18.1	16.3	26.8	**7.8**	**7.5**	**7.2**
5	287	25.2	23.0	27.8	**8.3**	**7.9**	**6.9**
6	324	32.8	30.4	29.4	**9.3**	**9.0**	**7.7**
7	360	37.1	34.7	30.2	**9.6**	**9.3**	**8.2**
8	386	43.5	40.5	30.1	**10.8**	**10.1**	**9.1**
9	418	47.3	44.4	30.1	**11.3**	**11.2**	**9.5**
10	445	52.7	49.8	30.4	**11.5**	**11.0**	**9.7**
11	464	56.6	54.2	31.9	**13.0**	**12.3**	**11.0**
12	484	58.0	55.5	30.7	**13.2**	**13.0**	**11.5**
13	506	61.2	59.0	31.6	**14.2**	**13.2**	**12.0**
14	523	64.5	62.2	31.9	**14.9**	**14.6**	**12.8**
15	529	64.4	62.0	32.1	**14.6**	**14.2**	**12.1**

表2：县质心样本（$n = 3{,}108$）中线性回归名义5%水平检验的零假设拒绝频率（%）。本表将 HC1 标准误与采用所引入的协变图范围带宽计算的空间 HAC 标准误并列展示（并排呈现巴特利特、均匀和 Epanechnikov 核函数的拒绝频率）。固定带宽各列说明，按照 Conley（1999）计算空间 HAC 标准误估计时，截断带宽过窄或过宽都会导致失效。每种噪声范围分组均基于5,000次蒙特卡洛模拟。范围列展示了随着模拟空间场的范围增大，空间相关性程度也随之增强。正如 HC1 拒绝率过度膨胀所示，表格最后几行展示了空间相关性高得不切实际的情形。

样本量和空间配置，而 HC1 拒绝率则随着空间自相关的增强而急剧上升。较大的样本（$n = 10{,}320$）往往能实现略为准确的检验尺寸控制，这与命题2中的一致性结果相符。

表2 展示了县质心样本（$n = 3{,}108$）的详细结果。有几项发现值得注意。

首先，随着空间自相关增强，HC1标准误会导致严重的过度拒绝。在噪声范围最高时，假阳性率超过60%，远高于名义5%。

其次，当真实相关范围超过带宽时，固定窄带宽 25 km 并不比 HC1 有所改进。相反，固定宽带宽 2,500 km—— 本意是 “ 保守 ” 的选择 —— 同样无法控制检验大小，这证实了倒 U 形预测：当带宽非常宽时

标准误会低于 HC1 水平，即被低估。

第三，所提出的采用巴特利特、均匀或Epanechnikov核函数的协变图范围法对拒绝率的控制极为出色。在所有噪声范围配置下，假阳性率均保持接近名义5%。在空间自相关程度最为极端时（噪声范围远高于经验上现实的水平），拒绝率上升至约8–10%，这反映了当相关范围接近空间域相当大比例时，空间HAC估计固有的困难。

综合来看，结果表明协变异范围带宽选择器在经验上相关的空间依赖谱范围内提供了有效的检验尺寸控制。对于应用研究中最常见的相关范围——此时HC1拒绝率已超过15–30%——所提出的方法将假阳性率维持在5–8%的范围内，接近名义水平。在极端相关范围下观察到的适度过度拒绝，反映的是一种远超典型地理参照数据集所呈现情形的状态；即便在那里，协变图范围法的表现也显著优于所有固定带宽替代方法。

7.2 核函数比较

表 3 报告了全部六种核函数的拒绝频率。巴特利特核和Epanechnikov核的拒绝率始终最接近名义5%水平。均匀核在空间自相关程度适中时表现良好，但在高水平下往往略微过度拒绝。高斯、Parzen和四次双权核的表现则更为多变，在噪声范围较高时更容易出现过度拒绝。基于这些结果，我建议在应用研究中使用**巴特利特** 或 **Epanechnikov** 核函数，这与Kolokotrones等人 [2024]关于巴特利特核在一阶核中具有最优性的时间序列研究发现一致。

7.3 可视化总结

图 3 直观总结了表 1 和表 2中呈现的结果，绘出了每次模拟运行的结果，并说明错误拒绝率如何随空间相关性程度的增加而上升。每一列对应四个空间样本之一，每一行对应一种不同的标准误类型。顶行（HC1）显示，当结果变量和回归变量都存在空间相关性时， t统计量会随相关范围增大而增大，从而产生

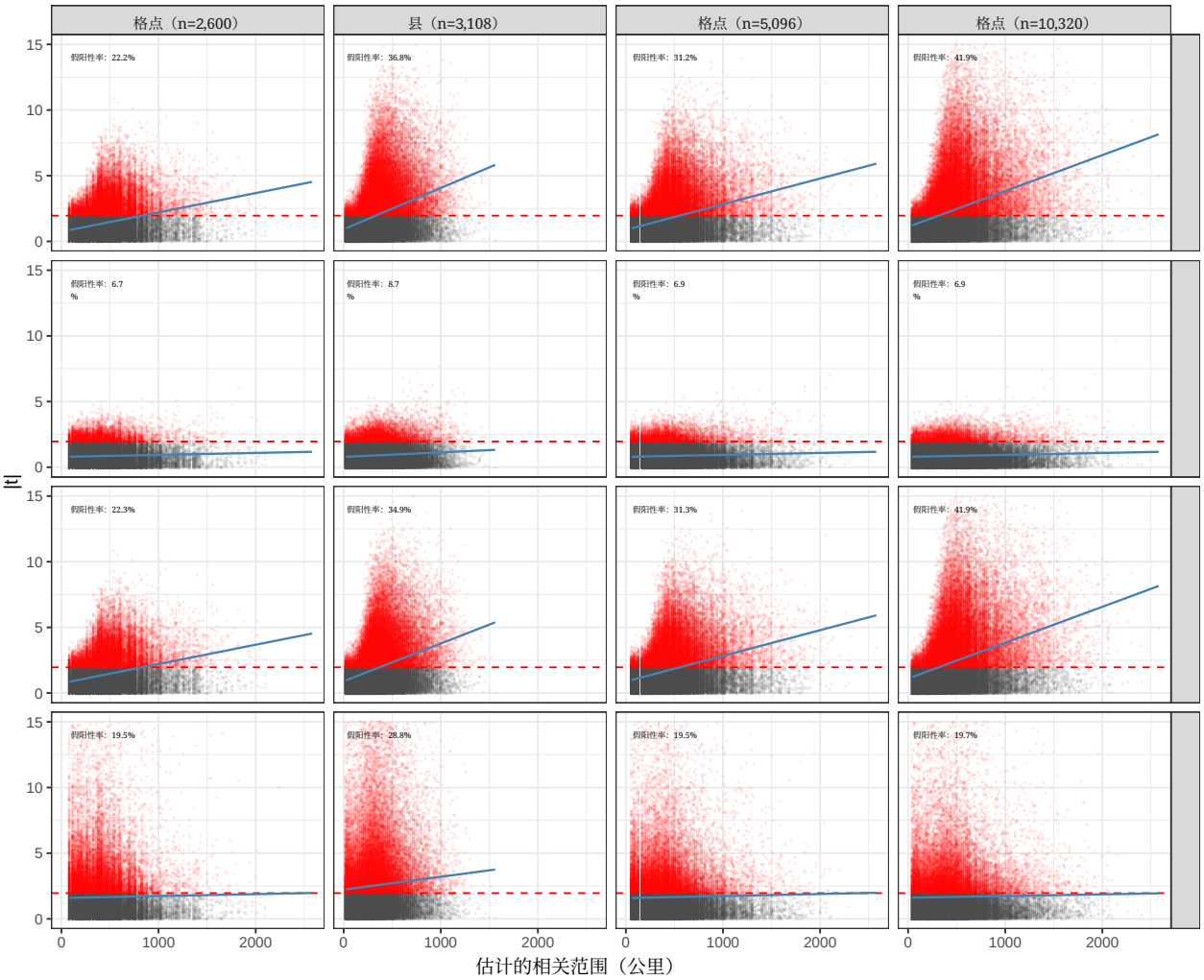


图3：表1和表2中模拟结果的可视化摘要。将5,000次蒙特卡洛模拟得出的绝对 t统计量与估计的相关范围作图。每个点代表一次模拟。红点表示拒绝（$|t| > 1.96$）。注释显示整个样本的假阳性率（假阳性率）。各列对应四个空间样本；各行依次比较HC1、采用所提出的协变图范围带宽估计量（Epanechnikov核）的空间HAC误差、固定窄带宽（25公里）和固定宽带宽（2,500公里）。蓝线表示回归线，显示随着空间相关程度增加，常规误差的表现不断下降。从图中可以直观看出，即使空间相关程度极高，所提出的方法仍能合理控制检验大小

[!h]

噪声 #	巴特利特	均匀	Epan.	高斯	Parzen	双权
0	4.9	5.0	5.1	5.0	4.8	5.0
1	4.5	4.8	4.5	4.7	4.5	4.5
2	4.9	5.1	4.8	5.0	4.9	4.9
3	5.9	5.6	5.5	5.6	5.9	5.6
4	6.8	6.2	6.1	6.2	7.0	6.3
5	7.2	6.0	6.0	6.0	7.5	6.4
6	7.6	6.7	6.4	6.6	7.8	6.6
7	8.0	7.0	6.4	6.6	8.4	6.7
8	8.7	7.3	6.9	7.1	8.7	7.5
9	8.5	7.3	6.8	7.1	8.5	7.2
10	9.4	8.2	7.8	7.9	9.6	7.9
11	10.2	9.0	8.4	8.6	10.5	8.6
12	10.4	9.2	8.5	8.7	10.7	8.7
13	10.8	9.8	8.7	9.4	10.9	8.9
14	10.8	10.3	9.0	9.9	10.8	8.9
15	10.9	10.0	8.8	9.7	11.3	9.1

表3：使用协变图范围带宽时按核函数划分的零假设拒绝频率（%）。规则格点样本（$n = 5{,}096$，50公里网格）。结果基于每种配置的5,000次模拟。

表中记录了显著的过度拒绝。第二行展示了协变图范围方法：无论相关范围如何，t统计量都保持集中在临界值以下，约有5%的点超过该阈值。第三行和第四行显示了固定带宽的失效模式：当真实范围超过25公里时，较窄的带宽（25公里）表现类似于HC1；而较宽的带宽（2,500公里）会压低标准误，并全面产生较高的拒绝率。

8 实证应用

为说明所提出方法的实际意义，我将其应用于一项使用美国县级数据的回归。结果变量为各县黑人人口占比，回归变量为西班牙裔人口占比——这两个变量在美国呈现出众所周知的空间聚集模式。数据来自最新的美国人口普查，通过IPUMS获取[Ruggles等人， 2025]。

表4 展示了结果。HC1 标准误最小，因此产生了最大的 t统计量。Conley标准误随带宽的选择而显著变化。在估计的协方-

表4：实证应用：对3,108个美国县的黑人口占比与西班牙裔人口占比进行回归。括号内为标准误。Conley标准误使用 Epanechnikov核计算。

[!h]

标准误类型	系数	SE	t统计量
HC1	-0.1168	0.0101	-11.51
Conley（25 千米）	-0.1168	0.0105	-11.10
Conley（980 千米， ς**）**	**-0.1168**	**0.0884**	**-1.32**
Conley（500 千米）	-0.1168	0.0766	-1.53
Conley（2500 千米）	-0.1168	0.0561	-2.08

变异函数范围约为 980 千米时，标准误在所有展示的选项中最大，这与倒U形模式一致。这是该回归的适当带宽：估计范围反映了这些人口统计变量中残差相关的空间范围。带宽为 500 千米和 2,500 千米时——应用研究者或许会觉得这样的选择“更稳妥”——标准误实际上更小，这恰恰说明了第 5 节所记载的误导性效应。

这个例子展示了应用空间研究中常见的一种情形：广泛使用的变量具有强烈的空间聚集模式，且这种模式延伸到很远的距离。协变异函数范围法能够正确识别这一范围，并得出大小适当的标准误。

9 结论

本文探讨了空间 HAC 标准误带宽选择这一尚未解决的问题。我作出了三项主要贡献。

首先，我记录了核带宽与空间 HAC 标准误大小之间的关系呈倒U形。这意味着带宽过窄或过宽都会导致标准误被低估。这一发现与“带宽越宽越保守”的常见建议相矛盾，并表明带宽选择并非只是把截断距离设得“宽松”一些。

其次，我提出一种简单的非参数带宽选择器，该选择器基于回归残差的经验协变图。该估计量识别残差协变首次

穿过零点的位置——即相关范围——并将其用作空间HAC估计量的带宽。

在标准正则条件下，该估计量对真实相关范围具有一致性。第三，我通过大量蒙特卡洛模拟表明，所提出的方法在各种空间自相关强度和样本配置下，都能将假阳性率控制在名义5%水平或接近该水平。对六种核函数进行系统比较后发现，巴特利特核和Epanechnikov核的检验尺寸控制效果最佳，这将 Kolokotrones等人 [2024] 在时间序列领域的发现拓展到了空间域。在空间相关性极强、相关范围接近空间域相当大一部分的极端情况下，拒绝率会上升至约8–10%。这种残余的过度拒绝应被视为强依赖条件下空间推断的根本局限，而非所提出的选择器失效：当有效自由度变小时，无论是基于固定带宽、聚类稳健方法还是数据驱动选择的HAC型估计量，表现都不理想。关键结果在于比较：在所考察的所有配置下，协变图范围法相较于HC1、固定窄带宽和固定宽带宽，均显著改善了检验尺寸控制。

所提出的方法已在 R 软件包 `SpatialInference`中实现。

9.1 在稿件准备过程中使用生成式人工智能和人工智能辅助技术的声明

在准备本文的过程中，作者使用 Claude（Anthropic）协助起草稿件。使用该工具后，作者根据需要审阅并编辑了内容，并对已发表文章的内容承担全部责任。

10 参考文献

Donald W. K. Andrews。异方差与自相关一致协方差矩阵估计。*Econometrica*，59(3):817–858，1991年。doi：10.2307/2938229。

Luc Anselin。《空间计量经济学：方法与模型》。Springer Science & Business Media，1988年8月。ISBN 978-90-247-3735-2。

Luc Anselin 和 Daniel A. Griffith。空间效应在回归分析中真的重要吗？《区域科学论文》，65(1):11–34，1988年。ISSN 1435-5957。doi: 10.1111/j.1435-5597.1988.tb01155.x。网址 https://rsaiconnect.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/j.1435-5597.1988.tb01155.x。

Marianne Bertrand、Esther Duflo 和 Sendhil Mullainathan。《我们应该在多大程度上信任双重差分估计？》《经济学季刊》，119(1):249–275，2004年2月。doi: 10.1162/003355304772839588。

C. Alan Bester、Timothy G. Conley 和 Christian B. Hansen。使用聚类协方差估计量对相依数据进行推断。计量经济学杂志，165(2):137–151，2011年。doi: 10.1016/j.jeconom.2011.01.007。

C. Alan Bester、Timothy G. Conley、Christian B. Hansen 和 Timothy J. Vogelsang。空间相依情形下稳健非参数协方差矩阵估计量的固定 b 渐近理论。《计量经济学理论》，32(1):154–186，2016年。doi: 10.1017/S0266466614000814。

Roger Bivand、Micah Altman、Luc Anselin、Renato Assunção、Olaf Berke、Andrew Bernat、Guillaume Blanchet、Eric Blankmeyer、Marilia Carvalho、Bjarke Christensen、Yongwan Chun、Carsten Dormann、Stéphane Dray、Virgilio Gómez-Rubio、Martin Gubri、Rein Halbersma、Elias Krainski、Pierre Legendre、Nicholas Lewin-Koh、Angela Li、Hongfei Li、Jielai Ma、Abhirup Mallik、Giovanni Millo、Werner Mueller、Hisaji Ono、Pedro Peres-Neto、Gianfranco Piras、Markus Reder、Michael Tiefelsdorf、René Westerholt 和 Danlin Yu。Spdep：空间依赖：加权方案，统计学，2020年6月。网址 https://CRAN.R-project.org/package=spdep。

A. D. Cliff 和 J. K. Ord。空间过程：模型与应用。Pion Limited，伦敦，英国，1981年。

Timothy G. Conley. 存在横截面相依时的GMM估计。计量经济学杂志，92(1):1–45，1999年9月。ISSN 0304-4076。doi: 10.1016/S0304-4076(98)00084-0。URLhttp://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304407698000840。

Timothy G. Conley 和 Morgan Kelly。持久性的标准误。《国际经济学杂志》，153:103986，2025年。doi: 10.1016/j.jinteco.2024.103986。

Noel Cressie。《空间数据统计学》。Wiley-Interscience，纽约，修订版，1993年9月。ISBN 978-0-471-00255-0。

Stefano DellaVigna、Guido Imbens、Woojin Kim 和 David Ritzwoller。利用多个结果变量调整空间相关性的标准误。工作论文 33716，美国国家经济研究局，2025年4月。

Friedhelm Eicker。《线性回归族的最小二乘估计量的渐近正态性与一致性》。《数理统计年鉴》，34(2):447–456，1963年6月。ISSN 0003-4851, 2168-8990。doi: 10.1214/aoms/1177704156。网址 https://projecteuclid.org/journals/annals-of-mathematical-statistics/volume-34/issue-2/Asymptotic-Normality-and-Consistency-of-the-Least-Squares-Estimators-for/10.1214/aoms/1177704156.full。

Andrew Gelman 和 Eric Loken。《分叉路径的花园：为什么即使不存在“钓鱼式探索”或“p值操纵”，且研究假设事先已经提出，多重比较仍可能成为问题。》哥伦比亚大学未正式发表稿，2013年。

Peter J. Huber。《非标准条件下最大似然估计的行为》。载于《第五届伯克利数理统计与概率研讨会论文集》第1卷：统计学，第5.1卷，第221–234页。加利福尼亚大学出版社，1967年1月。网址：https://projecteuclid.org/ebooks/berkeley-symposium-on-mathematical-statistics-and-probability/Proceedings-of-the-Fifth-Berkeley-Symposium-on-Mathematical-Statistics-and/chapter/The-behavior-of-maximum-likelihood-estimates-under-nonstandard-conditions/bsmsp/1200512988。

Harry H. Kelejian和Ingmar R. Prucha。空间框架下的HAC估计。计量经济学杂志，140(1)：131–154，2007年9月。ISSN 0304-4076。doi：10.1016/j.jeconom.2006.0 9.005。网址：http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304407606002260。

Nicholas M. Kiefer、Timothy J. Vogelsang 和 Helle Bunzel。回归假设的简单稳健检验。*Econometrica*，68(3):695–714，2000年。doi: 10.1111/1468-0262.00128。

Min Seong Kim 和 Yixiao Sun。空间异方差和自相关一致的协方差矩阵估计。计量经济学杂志，160(2):349–371，2011年2月。ISSN 0304-4076。doi: 10.1016/j.jeconom.2010.10.002。URLhttp://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304407610002034。

Thomas Kolokotrones、James H. Stock 和 Christopher D. Walker。Newey–West 是否在一阶核函数中最优？计量经济学杂志，240(2):105696，2024。doi: 10.1016/j.jeconom.2023.105696。

Pierre L'Ecuyer。用于组合多重递归随机数生成器的优良参数与实现。运筹学，47(1):159–164，1999年2月。ISSN 0030-364X，1526- 5463。doi: 10.1287/opre.47.1.159。URLhttps://pubsonline.informs.org/doi/10.1287/opre.47.1.159。

Kung-Yee Liang 和 Scott L. Zeger。使用广义线性模型进行纵向数据分析。*Biometrika*，73(1):13–22，1986年4月。ISSN 0006-3444。doi: 10.1093/biomet/73.1.13。URLhttps://doi.org/10.1093/biomet/73.1.13。

P. A. P. Moran。《统计地图的解读》。皇家统计学会会刊。*B*辑（方法论），10(2):243–251，1948年。ISSN 0035-9246。URL https://www.jstor.org/stable/2983777。

P. A. P. Moran。《连续随机现象札记》。*Biometrika*，37(1/2):17–23，1950年。ISSN 0006-3444。doi: 10.2307/2332142。URLhttps://www.jstor.org/stable/2332142。

Brent R. Moulton。随机组效应与回归估计值的精度。计量经济学杂志，32(3):385–397，1986年。doi: 10.1016/0304-4076(86)90021-7。

Ulrich K. Müller 和 Mark W. Watson。空间相关稳健推断。*Econometrica*，90 (6):2901–2935，2022年。ISSN 0012-9682。doi: 10.3982/ECTA19465。URL https://www.econometricsociety.org/doi/10.3982/ECTA19465。

Ulrich K. Müller 和 Mark W. Watson。线性回归和面板模型中的空间相关稳健推断。《商业与经济统计杂志》，41(4):1050–1064，2023年10月。ISSN 0735-0015, 1537-2707。doi: 10.1080/07350015.2022.2127737。URL https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/07350015.2022.2127737。

Ulrich K. Müller 和 Mark W. Watson。《空间单位根与伪回归》。《*Econometrica*》，92(5):1661–1695，2024年9月。doi: 10.3982/ECTA21654。

Whitney Newey 和 Kenneth West。《一种简单、半正定的异方差与自相关一致协方差矩阵》。*Econometrica*，55(3):703–08，1987年。网址https://econpapers.repec.org/article/ecmemetrp/v_3a55_3ay_3a1987_3ai_3a3_3ap_3a703-08.htm。

Edzer J Pebesma。《S 语言中的多变量地统计学：gstat 软件包》。《计算机与地球科学》，30(7):683–691，2004年8月。ISSN 0098-3004。doi: 10.1016/j.cageo.2004.03.012。网址：https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0098300404000676。

R Core Team。 *R*：一种用于统计计算的语言和环境。R 统计计算基金会，奥地利维也纳，2025 年。网址：https://www.R-project.org/。

Steven Ruggles、Sarah Flood、Matthew Sobek、Daniel Backman、Grace Cooper、Julia A. Rivera Drew、Stephanie Richards、Renae Rogers、JonathanSchroeder 和 KariC.W. Williams。IPUMS 美国：版本 16。0 [数据集], 2025。

Student。消除由时间或空间位置引起的虚假相关。*Biometrika*，10(1):179–180，1914年4月。ISSN 0006-3444。doi: 10.1093/biomet/10.1.179。URL https://academic.oup.com/biomet/article/10/1/179/189945。

Yixiao Sun。让我们解决这个问题：异方差和自相关稳健推断中的固定 b 渐近理论与小 b 渐近理论。计量经济学杂志，178:659–677，2014年。doi: 10.1016/j.je conom.2013.10.006。

Yixiao Sun、Peter C. B. Phillips 和金赛男。异方差—自相关稳健检验中的最优带宽选择。*Econometrica*，76(1):175–194，2008年。doi: 10.1111/j.0012-9682.2 008.00822.x。

W. R. Tobler。模拟底特律地区城市增长的计算机动画。经济地理学，46(sup1):234–240，1970 年6月。ISSN 0013-0095。doi: 10.2307/143141。网址：https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.2307/143141。

Halbert White。《异方差一致协方差矩阵估计量及异方差的直接检验》。*Econometrica*，48(4)：817–38，1980。网址：https://econpapers.repec.org/article/ecmemetrp/v_3a48_3ay_3a1980_3ai_3a4_3ap_3a817-38.htm。

11 附录

11.1 空间HAC估计详情

方程2 中的空间HAC估计量可以更明确地写出。令 $\hat{\varepsilon}_i$ 表示观测值 i的OLS残差，并令$\mathbf{X}$ 为 $n \times p$ 回归变量矩阵。中间项的估计量为

$$\hat{} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} K\left(\frac{d_{ij}}{\varsigma}\right)\hat{\varepsilon}_i\hat{\varepsilon}_j\,\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j',$$

其中，双重求和遍历所有 n^2 对。实践中，可利用核函数的稀疏性高效计算：只有满足 $d_{ij} < \varsigma$ 的配对才会产生非零项。对于地理坐标（经度、纬度），使用哈弗辛公式计算距离矩阵；对于投影坐标，则使用欧几里得距离。

空间HAC估计量将几种常见的估计量作为特例纳入其中：

- 当 $\varsigma = 0$： $\hat{V}_{\text{SHAC}}$ 简化为 HC 估计量 [Eicker，1986年，Huber，1967，White，1980]。
- 当 $K(\cdot) = \mathbf{1}(\cdot)$ （均匀核）且 ς 定义组成员关系时： V_{SHAC} 简化为聚类稳健估计量 [Liang and Zeger，1986年，Moulton，1986]。

参见 Kelejian和Prucha [2007]，了解渐近性质的详细讨论；另请参见 Bester 等人 [2011]，了解其与聚类协方差估计量的联系。

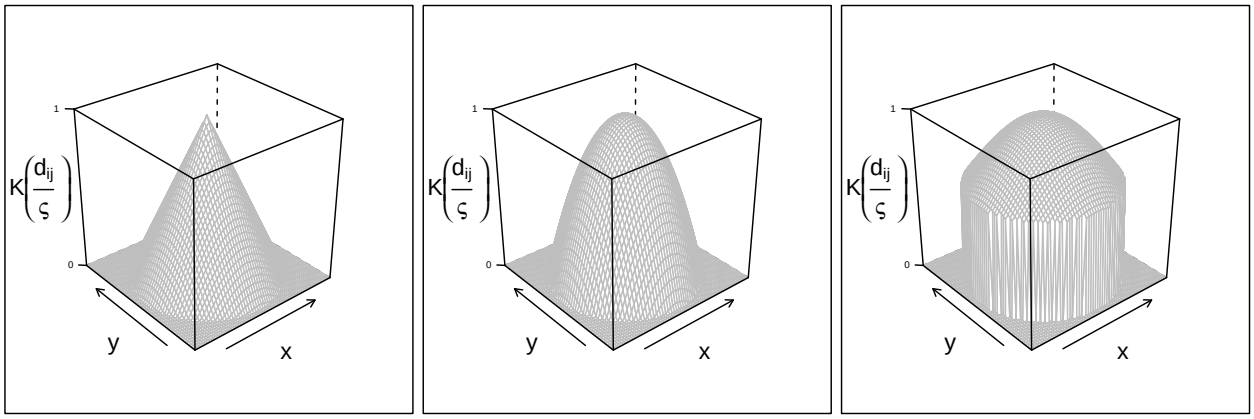
11.2 空间核函数可视化

11.3 生成空间相关随机场

假设 $\mathbf{z}(\mathbf{s}) = (z(\mathbf{s}_1), \ldots, z(\mathbf{s}_n))'$ 是在空间位置 $\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_n$处均值已知的观测值。随机过程可用经典地统计模型表示为

$$\mathbf{z}(\mathbf{s}) = \mu(\mathbf{s}) + \mathbf{e}(\mathbf{s}), \tag{7}$$

其中 $\mathbf{e}(\cdot)$ 是一个均值为零的随机误差过程，其中的空间相依成分由下文介绍的某种半变异函数形式建模，因此 $E[\mathbf{z}(\mathbf{s})] = \mu(\mathbf{s})$。对于简单克里金，均值设为零。



(a) 巴特利特（三角）　(b) Epanechnikov　(c) 高斯（截断）

(d) Parzen　(e) 四次双权　(f) 均匀（矩形）

图 4：本研究中使用的全部六种二维核函数，在规则网格上进行评估。每个面板均显示核权重随相对于中心点的位置变化的情况。

目标是预测新位置$\mathbf{s}_0$处的值，即得到$\hat{z}(\mathbf{s}_0)$的估计值。在普通克里金中，预测值是观测值的加权线性组合：

$$\hat{z}(\mathbf{s}_0) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, z(\mathbf{s}_i). \tag{8}$$

权重 λ_i 通过最小化预测误差方差 $\mathrm{Var}[\hat{z}(\mathbf{s}_0) - z(\mathbf{s}_0)]$得到。可以证明，求解以下分块矩阵系统即可得到最优权重 λ_1，…，λ_n[Cressie，1993]：

$$\begin{bmatrix} \Gamma & \mathbf{1} \\ \mathbf{1}' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{9}$$

其中，Γ 是一个 $n \times n$ 矩阵，其元素为 $[\Gamma]_{ij} = \gamma(d(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j))$；$\gamma_0$ 是一个 $n \times 1$ 向量，其元素为 $[\gamma_0]_i = \gamma(d(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_0))$。权重向量为 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)'$，而 m 是一个拉格朗日乘子，用于确保 $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$。向量$\mathbf{1}$ 的长度为 n。

这一空间过程的定义要素是半变异函数 $\gamma(\cdot)$。它决定了距离$\mathbf{s}$ $d(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j)$ 的不同观测值对之间的半方差：

$$\gamma(d(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j)) = \frac{1}{2}\mathrm{Var}[z(\mathbf{s}_i) - z(\mathbf{s}_j)]. \tag{10}$$

请注意，与协方差函数的关系为 $C(\mathbf{h}) = C(\mathbf{0}) - \gamma(\mathbf{h})$，其中 $C(\mathbf{0})$ 表示距离为零时的变异——在地质统计学文献中称为“块金效应”。当距离 h 等于范围时，点之间的协方差实际上为零。

随机空间过程的形状由选取一种有效半变异函数模型的距离衰减函数决定。在评估标准误的表现时，只考察变程参数 θ_2 的变化，其他所有因素均保持不变。为求完整起见，地质统计学中最常用的函数形式如下：

表 5：地统计模拟中使用的半变异函数模型。在所有设定中，θ_1 为偏基台值，θ_2 为变程参数。

模型	半变异函数设定
指数模型	$\gamma(h;\theta) = \theta_1\{1 - \exp(-h/\theta_2)\}$
高斯	$\gamma(h;\theta) = \theta_1\{1 - \exp(-h^2/\theta_2^2)\}$

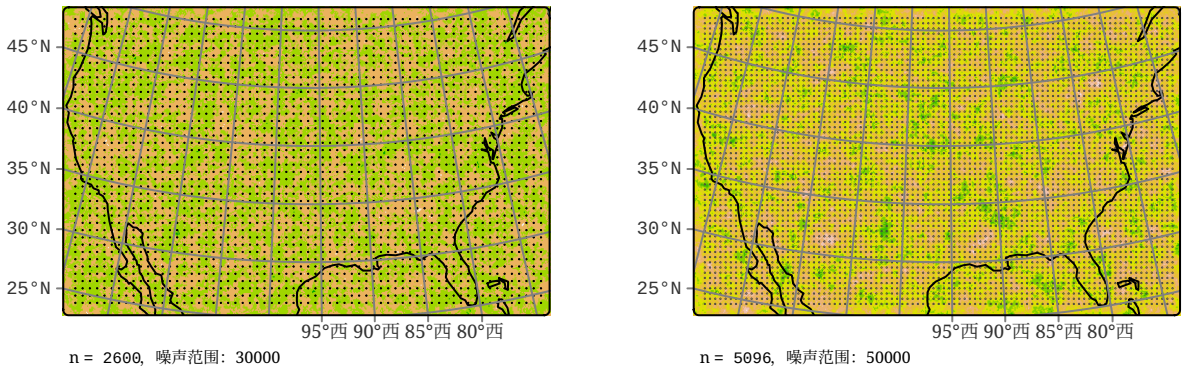
模型	半变异函数设定
Mat'{e}rn	$\gamma(h;\theta) = \theta_1 \left(1 - \frac{(h/\theta_2)^\nu K_\nu(h/\theta_2)}{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)}\right)$，其中 $K_\nu(\cdot)$ 是第二类修正贝塞尔函数 阶数为 ν，而 $\Gamma(\cdot)$ 是伽马函数
球状模型	$\gamma(h;\theta) = \begin{cases} \theta_1 \left(\frac{3h}{2\theta_2} - \frac{h^3}{2\theta_2^3}\right) & \text{适用于 } 0 \le h \le \theta_2 \\ \theta_1 & \text{适用于 } h > \theta_2 \end{cases}$

本文首选 Mat'{e}rn 半变异函数，偏基台值为 $\theta_1 = 0.025$。采用指数模型和球状模型设定时，结果在定性上完全相同。

在实践中，模拟按以下步骤进行：(i) 定义一个规则的 10 千米网格，覆盖观测位置的边界框（并向外扩展 100 千米缓冲区）；(ii) 使用 `gstat`在此网格上生成随机场的无条件实现；(iii) 提取观测位置处的值；(iv) 将其标准化为均值为零、方差为一。通过改变范围参数 θ_2，生成空间自相关程度逐渐增加的随机场。这种模拟方法的一个缺点是，无法精确控制变程，而且使用相同输入值进行多次抽样时，结果差异较大。不过，生成的随机场涵盖了完整的范围，因此该方法非常适合用于蒙特卡洛评估。图 5展示了观测值的分布和空间随机场的形态。

11.4 空间样本与随机场

图 5 展示了本研究中使用的四种空间点样本，每种样本都叠加在一个空间相关随机场的实现上，且随机场的范围参数逐渐增大。最粗疏的格点（图 a）中点与点之间的间距较大且相等，而最密集的格点（图 c）中点间距很小。县质心（图 d）的间距极不均匀：美国东部覆盖密集，而西部覆盖较稀疏。随着范围参数从 30 千米增至 90 千米，空间场明显变得更加平滑，反映出空间依赖范围的扩大。



(a) 粗网格 ($n \approx 2{,}600$)，范围 30 km。

(b) 中等网格 ($n \approx 5{,}096$)，范围 50 km。

(c) 细网格 ($n \approx 10{,}320$)，范围 70 km。

(d) 县质心 ($n = 3{,}108$)，范围 90 km。

图 5：四组空间点样本均叠加在相关范围逐渐增大的随机生成空间场上。在蒙特卡洛实验中，每个点都被赋予其所在位置对应的空间场底层值。

11.5 处理非平稳性

协变图范围法依赖于空间相关结构平稳这一假设（假设 1）。实际上，许多空间变量都呈现空间趋势——这是一种非平稳性。常见的例子包括随纬度系统变化的变量（例如温度相关结果），以及在地理特征周边聚集的变量（例如海岸或河流附近的经济活动）。

在应用协变图法之前进行去趋势，可以在所提出的框架内处理非平稳性。最简单的方法是在回归中将位置坐标作为控制变量纳入：

$$y_i = \mathbf{x}_i'\beta + f(\mathrm{lon}_i, \mathrm{lat}_i) + \varepsilon_i,$$

其中，$f(\cdot)$ 是地理坐标的灵活函数（例如经度和纬度的多项式）。随后，在这一扩展回归的残差上计算协方差函数，从而去除空间趋势，并得到一个更接近平稳的残差过程。

第 7 节中的蒙特卡洛实验包含未加入经度和纬度控制变量的设定。协变图范围法在两种情况下都表现良好，不过，当因变量呈现强烈的空间趋势时，加入位置控制变量可以改善检验尺寸控制。

对于具有极端非平稳性的变量——例如到固定地理点的距离——应将协变图范围法应用于去趋势回归的残差。在此类情况下，与原始回归相比，去趋势后的假阳性率会大幅降低。