合理交类型理论

Mariangiola Dezani-Ciancaglini
计算机科学系，都灵大学，意大利
dezani@di.unito.it

Besik Dundua
库塔伊西国际大学，库塔伊西，格鲁吉亚；
VIAM，第比利斯国立大学，第比利斯，格鲁吉亚
Besik.Dundua@kiu.edu.ge

Paola Giannini*
DiSSTE，东方皮埃蒙特大学，意大利
paola.giannini@uniupo.it

Furio Honsell
DSMIF，乌迪内大学，意大利
furio.honsell@uniud.it

以交类型赋值形式呈现的有限/静态语义，已成为分析各类 λ模型精细结构的一种范式。关键步骤是构造一个与给定 λ模型同构的滤子模型。滤子 λ模型一个备受关注的性质是敏感性，即所有不可解项的解释均为最小元。交类型赋值的灵活性源于其对交类型理论的参数化。我们将交类型理论视为特殊的交半格，并证明在交半格的对偶范畴中，适当的态射能够保持所诱导的 λ模型的敏感性。有趣的是，饱和集的集合与 λ项的集合共同构成这样一个交半格，从而表明基于 Tait-Girard 可计算性的论证相当于构造一个态射。我们刻画了两类能够诱导合理滤子模型的交类型理论。第一类是非有效的，第二类是有效的，它相当于将 Mendler 判据推广到交类型与头标准化项。然而，对合理滤子模型的完整刻画仍未达成。

关键词： λ-演算、交类型、滤子模型。

献给 Stefano Berardi，最优秀的工匠

1 引言

将一篇论文献给一位杰出的同事，本已是一项颇具挑战的任务；若这位同事的非凡才华横跨逻辑与理论计算机科学两个领域，这项任务就更加艰巨。本文主题的灵感，源自对 Stefano Berardi 的回忆：在都灵求学、还是一名年轻博士生时，在逻辑框架的石器时代和类型社区的早期，他曾着手解决如何用机器形式化验证 J.-Y. Girard 关于二阶 λ-演算强规范化的证明这一问题 [29], ，当时使用的是 Coq 的首批版本之一 [20]。Stefano 并未止步于此，此后还为从经典证明和非谓词证明中提取构造性内容这一领域作出了重大贡献 [6, 12, 13, 14, 11]。

本文讨论了一个密切相关的问题，即交类型理论中的头部规范化问题。交类型理论 [16]由第一作者与 Mario Coppo 于上世纪70年代末、上一个千年的最后一个世纪，在都灵共同创立。正如 [17] 中已经指出的，交类型在 [49]的意义下是信息系统。此后，交类型得到了广泛的推广，并被用于为若干类

*本研究获得东方皮埃蒙特大学的经费支持。

T. Altenkirch、F. Barbanera、F. Damiani 和 U. de'Liguoro（编）：
《逻辑与类型论：献给 Stefano Berardi 的论文集，值其 64 岁生日》
EPTCS441，2026年，第 126–147 页，doi:10.4204/EPTCS.441.8

λ-项提供有用的刻画，尤其是弱头规范化 [24], 头规范化 [18], 规范化 [18] 及其持久版本 [24], 强规范化 [44], 可闭合 [35], 和可逆 λ-项 [52, 53]。交类型的灵活性在于，它们对应于 Scott拓扑模型中既开又闭集的 λ-演算，因此这些模型可以被理解为这样的模型：其点实际上是程序性质的滤子。交类型理论因而能够将程序的动态性表示为其静态性质的滤子 [8, 17]。这种对应关系已在 [1]中以对偶性的范畴方式得到了精妙表达。自交类型问世以来，它们已成为静态表达编程语言各种执行性质的典范 [9,第三部分]。

交类型理论具有极大的灵活性，而这恰恰是它们成功的原因；然而，它们远未拥有完备的理论。更具体地说，本文探讨如何刻画合理交类型理论，即能够生成合理滤子模型的类型理论；这类模型对不可解项只赋予平凡交类型。为此，我们将交类型理论构造为带有箭头构造子的交半格，并证明交半格对偶范畴中的适当态射能够保持所诱导的 λ-模型的敏感性。这使我们能够在滤子模型之间广泛传递敏感性结果，从而为许多模型 [24] 的现有敏感性证明提供替代方案。饱和集全体与 λ-项全体本身构成这样的交半格，因此，我们可以将所有基于 Tait-Girard 可计算性（例如 Berardi 大约三十五年前形式化的那种方法）的论证归结为一个态射的存在性问题。实际上，这是 Girard 可约性候选的推广。我们刻画了两类合理交类型理论。第一类是非有效的，适用于满足一种称为 $\rightarrow$-健全性的技术条件的特殊交类型理论。第二类是有效的，它将最初针对递归二阶 λ-演算和强规范化提出的 Mendler 判据 [40], 推广到了交类型和头部规范化。然而，对合理滤子模型的完整刻画仍遥不可及。

本文是 [23], 的后续研究， [23], 探讨了研究非敏感交类型理论这一互补问题。阅读这两篇论文会有所裨益，因为两篇论文之间有若干交叉引用，尽管数量不多。

最后，我们祝愿 Stefano Berardi——“最优秀的工匠”[1], ——在 λ 演算领域的晚年学术生涯更加硕果累累，延续 Curry、Church、Böhm、Scott、Martin-Löf、Venturini-Zilli、Ronchi Della Rocca、Plotkin 和 Barendregt 等杰出学者的传统，等等。不过，我们也希望本文能激励其他作者投身于这项引人入胜的工作，进一步阐明交类型的奥秘。因为归根结底，既然 λ 演算是一个通用的计算模型，那么这些奥秘也就是计算本身的奥秘。

概要

在第 2 节和第 3 节中，我们回顾 λ 演算以及交类型理论和滤子模型理论的基本事实。在第 4 节中，我们介绍交半格的代数框架，建立理论之间敏感性的迁移结果，并给出说明性示例。在第 5 节中，我们刻画两类合理的交类型理论。第 6 节讨论了完整刻画合理交类型理论时遇到的困难，同时也探讨合理滤子模型的 λ 理论，并提出一些开放问题。第 7 节给出结论性评述。

[1]但丁·阿利吉耶里在《炼狱篇》第二十六歌中，称阿尔诺·达尼埃尔（12世纪的奥克语游吟诗人）为“母语中最优秀的工匠”（“il miglior fabbro del parlar materno”），以赞誉他高超的诗艺。T. S. 艾略特将《荒原》的定稿献给埃兹拉·庞德，并称他为“il miglior fabbro”。

2 λ-演算

本节遵循 [7] 的第 2、3 和 8 章，回顾无类型 λ 演算的一些基本概念和性质。熟悉 λ 演算的读者可以跳过本小节。

我们首先定义 λ-项和 β-归约。

D定义 2.1（λ-项 **[7, Definition2.1.1]**）纯 λ-项的集合 Λ 定义如下：

$$M ::= x \mid \lambda x.M \mid MM.$$

我们按照通常的记法约定书写 λ-项。特别地，假设 $\vec{x} = x_1 \cdots x_n$ for $n \in \mathbb{N}$，我们将 $\lambda \vec{x}.M$ 简写为$\lambda x_1 \cdots x_n.M$。变量的自由出现和约束出现按标准方式定义。特别地，我们采用 Barendregt约定，即不同变量具有不同的名称 [7,Convention 2.1.12]。

定义 2.2（β-规则和 β-归约 **[7, Definitions 2.1.15, 3.1.3 and 3.1.5]**）

1. β规则将 $(\lambda x.M)N$ 替换为 $M[x := N]$, ，其中 $M[x :=N]$ 表示通过对 M 中的 x 进行（无捕获）N 替换而得到的 λ项。2. 单步 β归约 $\to_\beta$ 定义为 β规则的上下文闭包。3. β归约 $\to_\beta^*$ 定义为 $\to_\beta$的自反传递闭包。4. β可转换性 $=_\beta$ 定义为由 $\to_\beta^*$生成的等价关系。

对我们的论述至关重要的是 λ项的可解性与不可解性概念。

定义 2.3（可解与不可解的 λ项 **[7,**定义 2.2.**10]**）

1. 一个 λ项 M 是可解的，如果存在 n 个 λ项 $N_1, \ldots, N_n$，使得

$$(\lambda \vec{x}.M)N_1 \cdots N_n \to_\beta^* \mathbf{I},$$

其中 $\vec{x}$ 是在 M 中自由出现的变量，而 $I = \lambda x.x$ 是恒等组合子。2

. *A* λ-如果一个项不可解，那么它就是不可解的。.

正如在 [36] 我们对不可解项的研究基于头归约的概念。

定义 2.4（头范式与头部可约式 **[7,**定义 8.3.**9]**）

1. 若 $M \equiv \lambda \vec{x}.xM_1 \cdots M_m$，则 M 处于头范式，且 x 是 M 的头变量。2. 若 $M = \lambda \vec{x}.(\lambda x.N)PM_1 \cdots M_m$，则 $(\lambda x.N)P$ 是 M 的头部可约式。

每个 λ-项要么处于头范式，要么有一个头部可约式。

命题 2.5（ λ-项的形式 **[7,**推论 8.3.**8]**）每个 λ-项都是

$$\textit{either of the form } \lambda \vec{x}.xM_1 \cdots M_m \textit{ or of the form } \lambda \vec{x}.(\lambda x.N)PM_1 \cdots M_m$$

其中 $m \geq 0$。

定义 2.6（头归约 **[7,**定义 8.3.**10]**）若 N 是由 M 对其头部可约式进行归约得到的，我们记作 $M \to_h N$。M 的头归约是项 M_0、.....、M_n、.....构成的有限或无限序列，使得 $M = M_0$ 且 $M_n \to_h M_{n+1}$，其中 $n \in \mathbb{N}$。

我们用 $\to_h^*$ 表示 $\to_h$的自反传递闭包。

在我们的论述中，我们利用了通过头归约刻画不可解性这一性质。

Theorem 2.7（**[7,** 事实 2.2.**12]**）A λ-项 M 不可解，当且仅当其头归约是无限的。

3 交类型与滤子模型

本节专门介绍交类型、类型理论、类型赋值系统和滤子模型的定义。

截至定义 3.3（含），我们基本遵循 [9] 的第 13.1 节和第 13.2 节。唯一的区别是，在定义交类型和子类型关系时，我们要求常元 U，而在 [9], 中它是可选的；此外，我们的子类型关系还增加了公理 (U_{top}) 和规则 ($\to^{\sim}$)。

定义 3.1（交类型理论）

1. 给定一个常量集合 $\mathbb{A}$ 和一个指定常元 U，$\mathbb{T}_{\mathbb{A}}$ 上的交类型集合 $\mathbb{A}\cup\{\mathsf{U}\}$ 由以下文法生成：

$$A ::= \mathsf{c} \mid \mathsf{U} \mid A \to A \mid A \cap A,$$

其中 $\mathsf{c} \in \mathbb{A}$。

2. 子类型关系 $\leq$是定义在 $\mathbb{T}_{\mathbb{A}}$ 上的二元关系，它由以下公理和规则封闭：

$$A \leq A \text{ (Refl)} \qquad B \cap A \leq B \text{ (IncL)} \qquad B \cap A \leq A \text{ (IncR)} \qquad A \leq \mathsf{U} \ (\mathsf{U}_{top})$$

$$\frac{B \leq A \quad B \leq A'}{B \leq A \cap A'} \text{ (Glb)} \qquad \frac{B \leq A \quad A \leq A'}{B \leq A'} \text{ (Trans)} \qquad \frac{B' \sim B \quad A \sim A'}{B \to A \sim B' \to A'} \ (\to^{\sim})$$

其中，$\mathsf{A} \sim \mathsf{B}$ 是 $\mathsf{A} \leq \mathsf{B}$ 且 $\mathsf{B} \leq \mathsf{A}$ 的简写。

3. 交类型理论（itt） $\mathcal{T}$ 由一组类型常量 $\mathbb{A}$ 以及定义在该集合 $\mathbb{T}_{\mathbb{A}}$上的子类型关系决定，即 $\mathcal{T} = \langle \mathbb{A}, \leq_{\mathcal{T}} \rangle$。

我们约定 $\cap$ 的优先级高于 $\to$。上述规则意味着 $\cap$保持其参数关于 $\sim_{\mathcal{T}}$的同余，而且它还是幂等、交换和结合的，并以 U 为中性元素。此外，规则（$\to^{\sim}$）意味着 $\to$ 保持其参数关于 $\sim_{\mathcal{T}}$ 的同余。与图 1 中规则（$\to$）所给出的箭头的通常协变/逆变要求相比，这条规则的要求较弱。我们假设 $\bigcap_{i\in/0} \mathsf{A}_i = \mathsf{U}$。我们用一个命题概括这一点，该命题将在第 4 节中发挥作用。

命题 3.2 交类型理论 $\mathcal{T}$ 关于等价关系 $\sim_{\mathcal{T}}$ 的等价类构成一个带有二元箭头构造子的交半格。

定义 3.3（类型赋值系统）由交类型理论 $\mathcal{T} = \langle \mathbb{A}, \leq_{\mathcal{T}} \rangle$ 诱导的交类型赋值系统是一个形式系统，用于推导形式为 $\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} \mathsf{M} : \mathsf{A}$ 的判断，其中 $\mathsf{A} \in \mathbb{T}_{\mathbb{A}}$，而基 Γ 是从项变量到 $\mathbb{T}_{\mathbb{A}}$ 中类型的有限映射：

$$\Gamma ::= \emptyset \mid \Gamma, x : A.$$

类型系统的公理和规则如下，其中在书写 $\Gamma, \mathsf{x} : \mathsf{A}$ 时，我们假定 x 不出现在 Γ中。

$$\frac{}{\Gamma, x : A \vdash x : A} \text{ (Ax)} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash M : \mathsf{U}} \text{ (U)}$$

$$\frac{\Gamma, x : B \vdash M : A}{\Gamma \vdash \lambda x.M : B \to A} \text{ ($\to$I)} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : B \to A \quad \Gamma \vdash N : B}{\Gamma \vdash MN : A} \text{ ($\to$E)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : B \quad \Gamma \vdash M : A}{\Gamma \vdash M : B \cap A} \text{ ($\cap$I)} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : B \quad B \leq_{\mathcal{T}} A}{\Gamma \vdash M : A} \text{ ($\leq$)}$$

容易验证下列规则是可容许的

$$\frac{\Gamma, x : B \vdash M : A \quad C \leq_{\mathcal{T}} B}{\Gamma, x : C \vdash M : A}\ (\leq\text{-L}) \qquad \frac{\Gamma \vdash M : A \quad x \notin \Gamma}{\Gamma, x : B \vdash M : A}\ (\text{Weakening})$$

其中 $x \notin \Gamma$ 是 x 不出现在 Γ中的简写。

交类型赋值系统的主要性质是逆演引理和主体扩展，它们通过对类型推导进行归纳证明。

引理 3.4（逆演引理 **[9,**定理 14.1.**1]**）

1. 如果 $\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} x : A$ 且 $A \sim_{\mathcal{T}} U$，那么 $\Gamma(x) \leq_{\mathcal{T}} A$；2. 如果 $\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} MN : A$ 且 $A \sim_{\mathcal{T}} U$，那么存在 I 和 B_i、C_i，使得对于 $i \in I$，有 $\bigcap_{i\in I} C_i \leq_{\mathcal{T}} A$，并且$\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} M : B_i \to C_i$ 以及 $\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} N : B_i$ 对所有 $i \in I$ 均成立；3. 如果 $\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} \lambda x.M : A$，那么存在 I 和 B_i、C_i，使得对于 $i \in I$，有 $\bigcap_{i\in I} (B_i \to C_i) \leq_{\mathcal{T}} A$，并且$\Gamma, x : B_i \vdash_{\mathcal{T}} M : C_i$ 对所有 $i \in I$ 均成立。

定理 m 3.5（主体扩展 **[9,** 推论 14.2.5(ii)**]**）$M \to_\beta M'$ 且 $\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} M' : A$ 蕴 *ly*

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} M : A.$$

此外, 关键的是主体归约这一性质，不过它仅在一个附加条件下成立。

定理 3.6（主体归约 **[9,** 命题 14.2.1(ii)**]**）

$$M \to_\beta M' \text{ and } \Gamma \vdash_{\mathcal{T}} M : A \text{ imply } \Gamma \vdash_{\mathcal{T}} M' : A$$

if and only if

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} \lambda x.N : B \to C \text{ implies } \Gamma, x : B \vdash_{\mathcal{T}} N : C.$$

事实上，并非所有由交类型理论诱导的类型系统都具有主体归约。考虑 $\mathcal{T}_0 = \langle \{c_0, c_1\}, \leq_{\mathcal{T}_0} \rangle$，其中 $\mathcal{T}_0$ 仅有公理 $c_0 \to c_0 \leq c_1 \to c_0$, 则 $\vdash_{\mathcal{T}_0} \lambda x.x : c_1 \to c_0$, 但 $x : c_1 \not\vdash_{\mathcal{T}_0} x : c_0$。主体归约不成立，因为 $y : c_1 \vdash_{\mathcal{T}_0} (\lambda x.x)y : c_0$, 但 $y : c_1 \not\vdash_{\mathcal{T}_0} y : c_0$。

主体归约的一个充分但非必要条件是 β-健全性。

定义 3.7（β-健全性 **[9,** 定义 14.1.**4]**）如果一个交类型理论 $\mathcal{T}$ 满足 β-健全性，则对于 $A \sim_{\mathcal{T}} U$ 和 $\bigcap_{i\in I}(B_i \to A_i) \leq_{\mathcal{T}} B \to A$，有 $J \subseteq I$，使得 $B \leq_{\mathcal{T}} \bigcap_{j\in J} B_j$ 且 $\bigcap_{j\in J} A_j \leq_{\mathcal{T}} A$。

例如，交类型理论 $\mathcal{T}_1 = \langle \{c_0, c_1\}, \leq_{\mathcal{T}_1} \rangle$（其中 $\leq_{\mathcal{T}_1}$ 没有其他公理和规则）具有 β-健全性。相比之下，上文定义的交类型理论 $\mathcal{T}_0$ 不具有 β-健全性。通过添加公理 $c_1 \leq c_0$，可以使交类型理论 $\mathcal{T}_0$ 具有 β-健全性。[17, 4]中定义了两个不具有 β-健全性但仍满足主体归约的交类型理论。

我们考虑两个重要的交类型理论类，它们在 [23]（定义 26 和 27）中进行了定义和阐释。

定义 3.8（集合条件）若交类型理论 $\mathcal{T} = \langle \mathbb{A}, \leq_{\mathcal{T}} \rangle$ 满足集合条件，则

$$\bigcap_{i\in I} A_i \leq_{\mathcal{T}} B_1 \to \cdots \to B_n \to C \text{ with } C \nsim_{\mathcal{T}} \cup \text{ implies } A_j \sim_{\mathcal{T}} B_1 \to \cdots \to B_n \to D$$

对于某个 $j \in I$ 和某个 $D \nsim_{\mathcal{T}} U$，使得 $C \cap D \sim_{\mathcal{T}} C$。

$$\mathsf{U} \sim A \to \mathsf{U} \quad (\to \mathsf{U}) \qquad (B \to A) \cap (B \to A') \sim B \to A \cap A' \quad (\to \cap)$$

$$\frac{B' \leq B \quad A \leq A'}{B \to A \leq B' \to A'} (\to) \qquad \frac{\mathsf{U} \leq B \to A}{\mathsf{U} \leq A} (\mathsf{U} \leq)$$

图 1：交类型理论的一些公理和规则。

定义 3.9 考虑图 1 中的公理和规则。

1. 交类型理论 t 如果满足集合条件，并且至少公理 (→U) 和 (→ ∩) 成立，则称其为类集合的。

2. 如果一个交类型理论满足至少公理 (→U)、(→) 以及规则 (→ ∩)、(U →)，则称其为 ≤-可靠的。

为了讨论交类型理论上的 λ-模型，我们回顾 λ-模型的定义。在集合 $\mathscr{D}$ 上的环境是从项变量到 $\mathscr{D}$ 中元素的一个全映射。令 ρ 遍历所有环境。按照惯例，我们将环境记为 $\rho[x := d]$：将其应用于 x 时返回 d，应用于 y 时返回 ρ(y)，其中 $y \neq x$。

定义 3.10（λ-模型 **[9,**定义 16.1.**2]**） λ-模型是一个三元组 $\langle \mathscr{D}, \cdot, [\![ ]\!]^{\mathscr{D}} \rangle$，其中 $\cdot$ 是 $\mathscr{D}$ 上的二元运算（应用），$[\![ ]\!]^{\mathscr{D}}$ 是从 $\mathscr{D}$ 中的 λ-项和环境到 $\mathscr{D}$中元素的映射（项解释），并且 $[\![ ]\!]^{\mathscr{D}}$ 满足：

1. $[\![x]\!]^{\mathscr{D}}_{\rho} = \rho(x)$；2. $[\![MN]\!]^{\mathscr{D}}_{\rho} = [\![M]\!]^{\mathscr{D}}_{\rho} \cdot [\![N]\!]^{\mathscr{D}}_{\rho}$；3. $[\![\lambda x.M]\!]^{\mathscr{D}}_{\rho} = [\![\lambda y.M[x := y]]\!]^{\mathscr{D}}_{\rho}$；4. $\forall d \in \mathscr{D}. [\![M]\!]^{\mathscr{D}}_{\rho[x:=d]} = [\![N]\!]^{\mathscr{D}}_{\rho[x:=d]}$ 蕴含 $[\![\lambda x.M]\!]^{\mathscr{D}}_{\rho} = [\![\lambda x.N]\!]^{\mathscr{D}}_{\rho}$；5. 对于 M 中出现的所有自由变量 x，$\rho(x) = \rho'(x)$ 蕴含 $[\![M]\!]^{\mathscr{D}}_{\rho} = [\![M]\!]^{\mathscr{D}}_{\rho'}$；6. $[\![\lambda x.M]\!]^{\mathscr{D}}_{\rho} \cdot d = [\![M]\!]^{\mathscr{D}}_{\rho[x:=d]}$。

λ-模型的这个定义最初由 Hindley 和 Longo [31]提出。

根据以下定义，我们可以构造 λ-模型，其定义域是由类型的滤子组成的集合。

定义 3.11（滤子 **[9,** 定义 13.4.**1]**）令 $\mathcal{T} = \langle \mathbb{A}, \leq_{\mathcal{T}} \rangle$ 为一个交类型理论，且 $F \subseteq \mathbb{T}_{\mathbb{A}}$。集合 F 是一个 $\mathcal{T}$-滤子，当且仅当：

- $U \in F$；
- $A,B \in F$ 蕴含 $A \cap B \in F$；
- $A \in F$ 且 $A \leq_{\mathcal{T}} B$ 蕴含 $B \in F$。

我们用 F 和 G 作为滤子的元变量，并用 $\mathcal{F}_{\mathcal{T}}$ 表示 $\mathcal{T}$-滤子的集合。若 $X \subseteq \mathbb{T}_{\mathbb{A}}$，我们用 $\uparrow_{\mathcal{T}} X$ 表示包含 X 的最小 $\mathcal{T}$-滤子。若 $X = \{A\}$，则用 $\uparrow_{\mathcal{T}} A$ 简写 $\uparrow_{\mathcal{T}} \{A\}$。

滤子可以按如下方式赋予应用结构：

定义 3.12（滤子结构）设 $\mathbb{E}_{\mathcal{T}}$为 $\mathcal{F}_{\mathcal{T}}$上的环境集合。$\mathcal{T}$ 上的滤子结构是三元组 $\langle \mathcal{F}_{\mathcal{T}}, \cdot, [\![ ]\!]^{\mathcal{F}_{\mathcal{T}}} \rangle$，其中

• 应用，$\cdot : \mathcal{F}_{\mathcal{T}} \times \mathcal{F}_{\mathcal{T}} \to \mathcal{F}_{\mathcal{T}}$，定义为

$$F \cdot G = \{A \mid \exists B \in G.\, B \to A \in F\};$$

• 项解释，$[\![\ ]\!]^{\mathcal{F}_{\mathcal{T}}}$：$\Lambda \times \mathbb{E}_{\mathcal{T}} \to \mathcal{F}_{\mathcal{T}}$，定义为

$$[\![M]\!]^{\mathcal{F}_{\mathcal{T}}}_{\rho} = \{A \in \mathbb{T}_{\mathbb{A}} \mid \exists \Gamma \models \rho\,.\, \Gamma \vdash_{\mathcal{T}} M : A\},$$

其中 ρ 遍历 $\mathbb{E}_{\mathcal{T}}$，且若 $x : A \in \Gamma$ 蕴含 $A \in \rho(x)$，则 $\Gamma \models \rho$。

定义 3.13（滤子模型）滤子模型是满足定义 3.10 全部条件的滤子结构。

容易验证，$[\![\ ]\!]^{\mathcal{F}_{\mathcal{T}}}$ 满足成为λ模型所需的全部条件（定义 3.10），唯独最后一条除外；而当 d 是某个λ项的解释时，这一条是必不可少的。由于主体扩展依定理 3.5 成立，我们总有 $[\![M[x := N]]\!]^{\mathcal{F}_{\mathcal{T}}}_{\rho} \subseteq [\![(\lambda x.M)N]\!]^{\mathcal{F}_{\mathcal{T}}}_{\rho}$。

T定理 3.14（**[9,**命题 16.2.**4]**） $\mathcal{T}$ 上的滤子结构是滤子模型，当且仅当

$$[\![(\lambda x.M)N]\!]^{\mathcal{F}_{\mathcal{T}}}_{\rho} \subseteq [\![M[x := N]]\!]^{\mathcal{F}_{\mathcal{T}}}_{\rho}$$

对于所有 λ-项 M、$N \in \Lambda$，所有变量 x，以及所有环境 ρ in $\mathcal{F}_{\mathcal{T}}$。

条件 $[\![(\lambda x.M)N]\!]^{\mathcal{F}_{\mathcal{T}}}_{\rho} \subseteq [\![M[x := N]]\!]^{\mathcal{F}_{\mathcal{T}}}_{\rho}$ 意味着，(λx.M)N 的所有类型也都是 M[x := N], 的类型；也就是说，类型系统 $\vdash_{\mathcal{T}}$ 满足主体归约。由此自然得出以下定理，因为 β-健全性是主体归约的充分条件。

定理 3.15（**[9,**推论 16.2.9(i)]）若 $\mathcal{T}$ 是 β-健全的交类型理论，则 $\mathcal{T}$ 上的滤子结构是一个滤子模型。

所有集合型 itt 都生成滤子模型，因为很容易验证集合条件蕴含 β-健全性。

如定义 3.7 之后所述，在 [17, 4] 中，存在一些交类型理论上的滤子模型并非 β-健全。

值得注意的是，所有连续函数都可以在一个基于 β-健全交类型理论的滤子模型中表示。这推广了 [17] 中的定理 2.13(iii)。

值得注意的是，图模型 [48, 42] 与基于集合型 itt 的滤子模型同构，而逆极限模型 [47, 54] 与基于 $\to$-完备 itt 的滤子模型同构，参见 [23] 中的例 35。

我们通过给出本文中的一个关键定义来结束本节：

定义 3.16（敏感 Itt，敏感滤子模型）若一个交类型理论 $\mathcal{T}$ 中所有不可解项都只能由与 U 等价的类型赋型，则称该交类型理论是合理的。若一个滤子模型 $\mathcal{F}_{\mathcal{T}}$ 满足 $\mathcal{T}$ 合理，则称该滤子模型是合理的。否则，称该交类型理论和滤子模型为非敏感的。

显然，在合理的滤子模型中，所有不可解项都被解释为底滤子 $\uparrow_{\mathcal{T}} U$。

我们指出，我们对敏感性的定义意味着，诱导等式理论是序可感知的，正如 [10, 定义 12.1(ii)(3)]中所定义的。因此，它比对λ-模型的标准条件更严格；后者只要求所有闭不可解项都彼此等同 [7, 定义 4.1.7(ii)]。我们将在第 6.1 小节进一步讨论这一问题。

4 传递定理

据我们所知，交类型理论的头部正规化，其最初的证明无论从历史还是逻辑角度来看，都基于三种方法：证明正规化、 [45, 43, 50], 索引归约、 [39],或 Tait-Girard 可约性论证 [51, 29]。为了研究交类型理论何时是合理的，一旦证明某个给定的交类型理论是合理的，自然会尝试设计一种框架，使这一结果能够轻易推广到类似的交类型理论。为此，采用一种更抽象、较少依赖语言的视角来看待交类型理论似乎更为方便，如 [22]所示。因此，我们将在下文引入一种称为广义交类型理论（gitt）的类型结构概念，以及这类结构之间的态射概念，以便在不同类型系统之间直接传递敏感性等性质。我们认为这一扩展令人满意，因为 Tait-Girard 可约性证明本身将呈现为一种传递结果，其中可约性候选集被视为广义类型；这一点将在定理 4.6 和下一节中显现出来。

定义 4.1（广义交类型理论）广义交类型理论（简称 gitt）是一个非平凡的交半格 $\langle \Theta, \sqsubseteq_\Theta \rangle$ ，其具有顶元 $\top_\Theta$ ，并且关于箭头类型构造子 $\to_\Theta$ 封闭。我们用 $\sqcap_\Theta$ 表示交，用 $\equiv_\Theta$ 表示由 $\sqsubseteq_\Theta$诱导的等价关系，并用 α、 β表示 Θ的元素。

命题 3.2 表明，一个 itt 自然地产生一个 gitt。值得注意的是，存在并非 itt 的 gitt；例如，定理 4.6 中定义的 gitt $\langle \mathscr{S}\Lambda, \subseteq \rangle$ 就是一个例子。

我们引入 gitt 之间态射的以下概念。

定义 4.2（嵌入）设 $\langle \Theta, \sqsubseteq_\Theta \rangle$ 和 $\langle \Theta', \sqsubseteq_{\Theta'} \rangle$ 是两个 gitt，则当存在一个函数 $\kappa : \Theta \to \Theta'$ 满足以下条件时，称 $\langle \Theta, \sqsubseteq_\Theta \rangle$ 可嵌入 $\langle \Theta', \sqsubseteq_{\Theta'} \rangle$:

1. $\kappa(\alpha) = \top_{\Theta'}$ 当且仅当 $\alpha \equiv_\Theta \top_\Theta$;
2. $\kappa(\alpha \rightsquigarrow_\Theta \beta) = \kappa(\alpha) \to_{\Theta'} \kappa(\beta)$; 3. $\kappa($
$\alpha \sqcap_\Theta \beta) = \kappa(\alpha) \sqcap_{\Theta'} \kappa(\beta)$; 4. $\alpha \sqsubseteq_\Theta \beta$
蕴含 $\kappa(\alpha) \sqsubseteq_{\Theta'} \kappa(\beta)$.

我们可以自然地将类型赋值系统的概念扩展到广义交类型理论的以下 [22]。

定义 4.3（广义类型赋值系统）由一个广义交类型理论 $\langle \Theta, \sqsubseteq_\Theta \rangle$ 诱导的交类型赋值系统，是一个能够推导出形如 $\Upsilon \vdash_\Theta M : \alpha$ 的判断的形式系统，其中 $\alpha \in \Theta$，且基 Υ 是从项变量到 Θ 中元素的有限映射：

$$\Upsilon ::= \emptyset \mid \Upsilon, x : \alpha.$$

该类型系统的公理和规则如下

$$\frac{}{\Upsilon, x : \alpha \vdash x : \alpha}\ (\mathrm{Ax}) \qquad \frac{}{\Upsilon \vdash M : \top_\Theta}\ (\top)$$

$$\frac{\Upsilon, x : \beta \vdash M : \alpha}{\Upsilon \vdash \lambda x.M : \beta \rightsquigarrow_\Theta \alpha}\ (\rightsquigarrow \mathrm{I}) \qquad \frac{\Upsilon \vdash M : \beta \rightsquigarrow_\Theta \alpha \quad \Upsilon \vdash N : \beta}{\Upsilon \vdash MN : \alpha}\ (\rightsquigarrow \mathrm{E})$$

$$\frac{\Upsilon \vdash M : \beta \quad \Upsilon \vdash M : \alpha}{\Upsilon \vdash M : \beta \sqcap_\Theta \alpha}\ (\sqcap \mathrm{I}) \qquad \frac{\Upsilon \vdash M : \beta \quad \beta \sqsubseteq_\Theta \alpha}{\Upsilon \vdash M : \alpha}\ (\sqsubseteq)$$

现在，自然也要将滤子和滤子模型的概念扩展到广义交类型理论中，接着便可以直接将第 3 节中关于交类型理论的所有结果扩展到广义交类型理论中。

若任何不可解项都只有与 $\top_\Theta$等价的类型，则 gitt $\langle\Theta,\sqsubset_\Theta\rangle$ 是合理的。

下面的传递定理将在后文证明非常有用：

Theorem 4.4（传递 **[22,** 定理 **8]**）设 $\langle\Theta,\sqsubset_\Theta\rangle$ 可嵌入到 $\langle\Theta',\sqsubset_{\Theta'}\rangle$中。我们得到：

1. 若 $\langle\Theta',\sqsubset_{\Theta'}\rangle$ 是合理的，则 $\langle\Theta,\sqsubset_\Theta\rangle$ 是合理的。2. 若 $\langle\Theta,\sqsubset_\Theta\rangle$是非敏感的，则 $\langle\Theta',\sqsubset_{\Theta'}\rangle$是非敏感的。

现在我们将 Tait-Girard 可约性候选集视为 gitt。令 $\mathscr{S}$ 表示可解项的集合。

定义 4.5 若集合 $X \subseteq \mathscr{S}$在 β-转换下封闭，且对所有 x，$\overrightarrow{\ }M$，均有 $x\overrightarrow{M} \in X$，则称 X 为饱和的。

饱和集构成一个关于集合包含的完备格，其中 $\mathcal{B} = \{M \in \Lambda \mid M \to_\beta^* x\overrightarrow{M}\}$ 为底元，$\mathscr{S}$为顶元。注意，由于 β-归约具有 Church-Rosser 性质，$\mathcal{B}$ 在 β-转换下封闭。我们用 $\mathcal{SAT}$ 表示这个格，并用 $\mathcal{SAT}^{op}$ 表示带有反序、底元为 $\mathscr{S}$ 且顶元为 $\mathcal{B}$ 的 $\mathcal{SAT}$。形式化地

$$\mathcal{SAT} = \langle\{\mathcal{B} \subseteq X \subseteq \mathscr{S} \mid X \text{ is saturated}\}, \subseteq\rangle \text{ and } \mathcal{SAT}^{op} = \langle\{\mathcal{B} \subseteq X \subseteq \mathscr{S} \mid X \text{ is saturated}\}, \supseteq\rangle.$$

我们定义

$$X \Rightarrow Y = \{M \in \Lambda \mid \forall N \in X\ MN \in Y\},$$

其中 X 和 Y 取遍饱和集或 Λ。容易验证，若 Y 饱和，则 $X \Rightarrow Y$ 饱和，且 $X \Rightarrow \Lambda = \Lambda$。此外，若 X 和 Y 饱和，则 $X \cap Y$ 饱和，并且对所有 X，均有 $X \cap \Lambda = X$。

我们定义 $\mathscr{S}\Lambda = \{\mathcal{B} \subseteq X \subseteq \mathscr{S} \mid X \text{ 为饱和的}\} \cup \{\Lambda\}$。

以下结果至关重要。

定理 4.6 带有顶元 Λ、交 ∩ 和箭头 ⇒ 的广义交类型理论 $\langle\mathscr{S}\Lambda,\subseteq\rangle$ 是合理的。

证明。我们证明，$\Upsilon \vdash_{\mathscr{S}\Lambda} M : X$ 且 $X \subsetneq \Lambda$ 蕴含 $M \in X$，因此 M 可解。设 $\Upsilon = \{x_i : Y_i \mid 1 \le i \le n\}$ 且 $N_i \in Y_i$，其中 $1 \le i \le n$。通过对类型推导作归纳，我们可以证明，$\Upsilon \vdash_{\mathscr{S}\Lambda} M : X$ 且 $X \subsetneq \Lambda$ 蕴含

$$M[x_i := N_i \mid 1 \le i \le n] \in X.$$

最有趣的情况是最后应用的规则为规则 (I) 时。在这种情况下，$M = \lambda x.M'$ 且 $X = Y \Rightarrow X'$ 且 $\Upsilon, x : Y \vdash_{\mathscr{S}\Lambda} M' : X'$。令 $N \in Y$，则根据归纳假设，我们有

$$M'[x_i := N_i \mid 1 \le i \le n][x := N] \in X',$$

这意味着 $M[x_i := N_i \mid 1 \le i \le n]N \in X'$，因为饱和集在 β-转换下封闭。由于根据定义 $N \in Y$ 是任意的，我们得出

$$M[x_i := N_i \mid 1 \le i \le n] \in Y \Rightarrow X' = X. \qquad \square$$

本节余下部分将通过一些 itt 及其 gitt 的示例，说明如何应用上述定理 4.4。该定理给出了一个非常灵活的判据，因为它可以双向使用：既可将滤子模型的敏感性归约为所嵌入滤子模型的敏感性，也可将所嵌入滤子模型的非敏感性扩展到嵌入它的滤子模型。

例4.7

1. *[8],* 中定义的 itt $\mathcal{T}_{BCD}$ 可通过对类型推导进行规范化来证明其具有敏感性。*[17, 4]* 中定义的非 β-可靠 itt 具有敏感性，因为可以将它们嵌入 itt $\mathcal{T}_{BCD}$ 中，方法是以某种方式令两个特殊常元相等，使所得的子类型关系恰好等同于$\leq_{BCD}$。2. $\mathcal{T}_*$ 中定义了带有常元 c 和公理 $c \leq c \to c$ 的 $\to$-可靠 itt。同样，我们可以定义带有常元 c 和公理 $c \to c \leq c$ 的 $\to$-可靠 itt $\mathcal{T}^*$。这些 itt 具有敏感性，因为可以将它们适当地嵌入 *[19]* 中定义的敏感 itt $\mathcal{T}_{CDZ}$。itt $\mathcal{T}_{CDZ}$ 只有两个全序常元。在前一种情况下，将 c 解释为较小的常元；在后一种情况下，将 c 解释为较大的常元，即可实现该嵌入。3. 带有常元 c 和公理 $c \sim (c \to c) \cap c$ 的 $\to$-可靠 itt $\mathcal{T}^\flat$ 同样可以嵌入第 2 节中定义的敏感 itt $\mathcal{T}_{CDZ}$。该嵌入通过将 c 映射到较小的常元来实现。

下一个命题使我们能够从合理滤子模型出发构造非敏感滤子模型。

命题4.8 若 $\mathcal{T}$是一个合理的交类型理论，我们可以定义一个非敏感的交类型理论 $\mathcal{T}'$，使得 $\mathcal{T}$可嵌入$\mathcal{T}'$。

证明。令 $\mathcal{T} = \langle \mathbb{A}_{\mathcal{T}}, \leq_{\mathcal{T}} \rangle$。我们通过添加一个常元 $c \notin \mathbb{A}_{\mathcal{T}}$和公理 $c \sim c \to c$ 来定义 $\mathcal{T}'$。嵌入是恒等式。这样，$\mathcal{T}'$ 基本上是通过添加生成与 Park模型同构的滤子模型的交类型理论而从 $\mathcal{T}$得到的，Park模型 [41] 在 [35]中定义。□

这个命题使我们能够从 [17, 4]中定义的滤子模型出发，构造既不合理也非 β-可靠的滤子模型。

5 态射构造

传递定理4.4在证明交类型理论的敏感性，或更一般地证明广义交类型理论的敏感性方面的效力，源于 $\mathcal{SAT}$中存在适当的嵌入。历史上，这是通过基于 [51, 29, 19, 37, 32]中的Tait-Girard 可计算性论证定义适当的类型解释而隐式完成的。

本节讨论交类型理论或由此导出的广义交类型理论上的两个条件，这些条件确保存在能产生敏感性的适当态射。第一个条件，即定义 5.2，并不是有效的，它几乎是对上一节结果的平凡重述。其意义在于，对于包括逆极限模型在内的很大一类交类型理论，它可以逆转（定理 5.5），从而表明 $\mathcal{SAT}$在某种程度上是普遍的。第二个条件，即定义 5.7，是将Mendler条件 [40] 改写为交类型理论上的条件，从而能够构造性地证明许多交类型理论的敏感性。

由于本节中的大多数广义交类型理论都源自交类型理论，因此我们将直接基于交类型理论进行推理 's.

$\mathbb{A}$-环境是从一组类型常量 $\mathbb{A}$ 到 $\mathscr{P}\Lambda$ 的映射。我们用 $\zeta_{\mathbb{A}}$ 表示遍历$\mathbb{A}$-环境。

定义 5.1（类型解释）由 $\mathbb{A}$-环境 $\zeta_{\mathbb{A}}$ 诱导的交类型集合 $\mathbb{T}_{\mathbb{A}}$ 的类型解释，记作 $[\mathrm{A}]_{\zeta_{\mathbb{A}}}$，定义如下：

$$[\mathsf{U}]_{\zeta_{\mathbb{A}}} = \Lambda \qquad [\mathsf{c}]_{\zeta_{\mathbb{A}}} = \zeta_{\mathbb{A}}(\mathsf{c}) \qquad [A \to B]_{\zeta_{\mathbb{A}}} = [A]_{\zeta_{\mathbb{A}}} \Rightarrow [B]_{\zeta_{\mathbb{A}}} \qquad [A \cap B]_{\zeta_{\mathbb{A}}} = [A]_{\zeta_{\mathbb{A}}} \cap [B]_{\zeta_{\mathbb{A}}}.$$

注意，$[\mathrm{A}]_{\zeta_{\mathbb{A}}}$ 要么是一个饱和集，要么是 $[\mathrm{A}]_{\zeta_{\mathbb{A}}} = \Lambda$。

$$
\begin{array}{rcll}
[B \to A]_{\widehat{\zeta_{\mathbb{A}}}} & = & [B]_{\widehat{\zeta_{\mathbb{A}}}} \Rightarrow [A]_{\widehat{\zeta_{\mathbb{A}}}} & \text{by Definition 5.1} \\
& = & \{M \mid \forall N \in [B]_{\widehat{\zeta_{\mathbb{A}}}}\ MN \in [A]_{\widehat{\zeta_{\mathbb{A}}}}\} & \text{by Definition of } \Rightarrow \\
& = & \{M \mid \forall N\ \exists \Gamma\ \Gamma \vdash_{\mathcal{T}} N : B\ \Gamma \vdash_{\mathcal{T}} MN : A\} & \text{by induction} \\
& = & \{M \mid \exists \Gamma\ \Gamma, x : B \vdash_{\mathcal{T}} Mx : A\} & \text{where } x \text{ is fresh by Lemma 5.4} \\
& = & \{M \mid \exists \Gamma\ \Gamma \vdash_{\mathcal{T}} M : B_i \to A_i\ x : B \vdash_{\mathcal{T}} x : B_i\ \forall i \in I\ \bigcap_{i\in I} A_i \leq_{\mathcal{T}} A\} & \\
& & & \text{by Lemma 3.4(2)} \\
& = & \{M \mid \exists \Gamma\ \Gamma \vdash_{\mathcal{T}} M : B_i \to A_i\ B \leq_{\mathcal{T}} B_i\ \forall i \in I\ \bigcap_{i\in I} A_i \leq_{\mathcal{T}} A\} & \\
& & & \text{by Lemma 3.4(1)} \\
& = & \{M \mid \exists \Gamma\ \Gamma \vdash_{\mathcal{T}} M : B \to A_i\ \forall i \in I\ \bigcap_{i\in I} A_i \leq_{\mathcal{T}} A\} & \\
& & & \text{by Rule } (\leq) \text{ using Rule } (\to) \\
& = & \{M \mid \exists \Gamma\ \Gamma \vdash_{\mathcal{T}} M : \bigcap_{i\in I}(B \to A_i)\ \bigcap_{i\in I} A_i \leq_{\mathcal{T}} A\} & \text{by Rule } (\cap \mathrm{I}) \\
& = & \{M \mid \exists \Gamma\ \Gamma \vdash_{\mathcal{T}} M : B \to \bigcap_{i\in I} A_i\ \bigcap_{i\in I} A_i \leq_{\mathcal{T}} A\} & \\
& & & \text{by Rule } (\leq) \text{ using Axiom } (\to \cap) \\
& = & \{M \mid \exists \Gamma\ \Gamma \vdash_{\mathcal{T}} M : B \to A\} & \text{by Rule } (\leq) \text{ using Rule } (\to).
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcll}
[B \to \mathsf{U}]_{\widehat{\zeta_{\mathbb{A}}}} & = & [B]_{\widehat{\zeta_{\mathbb{A}}}} \Rightarrow [\mathsf{U}]_{\widehat{\zeta_{\mathbb{A}}}} & \text{by Definition 5.1} \\
& = & \{M \mid \forall N \in [B]_{\widehat{\zeta_{\mathbb{A}}}}\ MN \in [\mathsf{U}]_{\widehat{\zeta_{\mathbb{A}}}}\} & \text{by Definition of } \Rightarrow \\
& = & \{M \mid \forall N\ \exists \Gamma\ \Gamma \vdash_{\mathcal{T}} N : B\ \Gamma \vdash_{\mathcal{T}} MN : \mathsf{U}\} & \text{by induction} \\
& = & \Lambda & \text{by Rule } (\mathsf{U}) \\
& = & \{M \mid \vdash_{\mathcal{T}} M : \mathsf{U}\} & \text{by Rule } (\mathsf{U}) \\
& = & \{M \mid \vdash_{\mathcal{T}} M : B \to \mathsf{U}\} & \text{by Rule } (\leq) \text{ using Axiom } (\to \mathsf{U}).
\end{array}
$$

图 2：定理 5.5 的证明。

定义 5.2（饱和）如果存在一种类型解释，由此在 $\mathcal{T}$ 和 $\langle \mathscr{S}\Lambda, \subseteq \rangle$ 所诱导的广义交类型理论之间产生一个符合定义 4.2 意义的态射，则交类型理论 $\mathcal{T}$ 是饱和的。

很容易验证，类型解释满足定义 4.2 的所有条件；但条件 1 除外，该条件要求公理（$\to$U）在 $\mathcal{T}$ 中成立。于是，定理 4.4(1) 和 4.6 立即推出：

定理 5.3 饱和交类型理论是合理的。

对于 $\to$-可靠的交类型理论，定理 5.3 可以反向推导。为此，我们首先需要一个简单的辅助引理。

引理 5.4 若 $\Gamma, x : B \vdash_{\mathcal{T}} Mx : A$，其中 x 不在 M 中出现，且 $\Gamma' \vdash_{\mathcal{T}} N : B$，则对某个 Γ''，有 $\Gamma'' \vdash_{\mathcal{T}} MN : A$。

证明。定义

$$\Gamma_1 \uplus \Gamma_2 = \{y{:}\ C_1 \cap C_2 \mid y{:}\ C_1 \in \Gamma_1 y{:}\ C_2 \in \Gamma_2\} \cup \{y{:}\ C_1 \mid y{:}\ C_1 \in \Gamma_1 y \notin \Gamma_2\} \cup \{y{:}\ C_2 \mid y{:}\ C_2 \in \Gamma_2 y \notin \Gamma_1\}.$$

我们只需在 $\Gamma, x{:}\ B \vdash_{\mathcal{T}} Mx{:}\ A$ 的推导中，将公理 $\hat{}\,\Gamma, x{:}\ B \vdash_{\mathcal{T}} x{:}\ B$ 替换为 $\hat{}\,\Gamma \uplus \Gamma' \vdash_{\mathcal{T}} N{:}\ B$ 的推导，即可构造出 $\Gamma'' \vdash_{\mathcal{T}} MN{:}\ A$ 的推导。□

定理 5.5 每个 $\to$-可靠且合理的交类型理论都是饱和的。

证明。设 $\mathcal{T} = \langle \mathbb{A}, \leq_{\mathcal{T}} \rangle$ 是一个 $\to$-可靠且合理的交类型理论。定义类型解释 n

$$\widehat{\zeta_{\mathbb{A}}}(\mathsf{c}) = \{M \mid \exists \Gamma\ \ \Gamma \vdash_{\mathcal{T}} M : \mathsf{c}\}.$$

现在只需证明 $[\mathsf{A}]_{\widehat{\zeta_{\mathbb{A}}}} = \{\mathsf{M} \mid \exists \Gamma\ \ \Gamma \vdash_{\mathcal{T}} \mathsf{M} : \mathsf{A}\}$，因为定义 4.2 的所有条件均成立，尤其是 $\mathsf{A} \leq_{\mathcal{T}} \mathsf{B}$ 蕴含

$$\{M \mid \exists \Gamma\ \ \Gamma \vdash_{\mathcal{T}} M : A\} \subseteq \{M \mid \exists \Gamma\ \ \Gamma \vdash_{\mathcal{T}} M : B\}.$$

证明通过对类型解释的定义进行归纳得出。仅有的两个有趣情形在图 2 中得到证明，其中我们假设 $\mathsf{A} \nsim_{\mathcal{T}} \mathsf{U}$。□

请注意，定理 5.5 并未为 $\to$-可靠的交类型理论提供敏感性的有效刻画，因为 $\mathbb{A}$-环境的定义本身并非构造性的。

本节余下部分将证明，满足定义 5.7 中正极性条件的一类特殊交类型理论是合理的。无论如何，这类交类型理论（我们称之为自然交类型理论）基本上涵盖了文献中曾明确使用过的所有合理交类型理论。

定义 5.6（自然交互类型理论）若 $\mathcal{T} = \langle \{\mathsf{c}_i\}_{i \in I}, \leq_{\mathcal{T}} \rangle$ 满足图 1 中的公理（$\to \mathsf{U}$），由一组形式非常特殊的公理确定，即 $\mathscr{A} = \{\mathsf{c}_i \sim \mathsf{A}_i\}_{i \in I}$，并且可能还包含图 1 中的其他一些公理和规则，则称其为自然的。此外，我们假设每个类型常量在 $\mathscr{A}$ 中某个公理的左侧恰好出现一次，也可能是以恒等式的形式平凡地出现。集合 $\mathscr{A}$ 是 $\mathcal{T}$ 的特征集。

现在我们可以给出以下关键定义。

定义 5.7（正极性条件）若自然的 $\mathcal{T} = \langle \{\mathsf{c}_i\}_{i \in I}, \leq_{\mathcal{T}} \rangle$ 满足正极性条件，则对于所有可由定义 $\leq_{\mathcal{T}}$ 的公理 / 规则推导出的形如 $\mathsf{c} \sim \mathsf{A}$ 的方程，都不能从 Pos(A) 通过应用以下规则推导出 Neg(c)：

$$\frac{\mathrm{Pos}(\mathsf{A} \to \mathsf{B})}{\mathrm{Neg}(\mathsf{A})} \qquad \frac{\mathrm{Pos}(\mathsf{A} \to \mathsf{B})}{\mathrm{Pos}(\mathsf{B})} \qquad \frac{\mathrm{Neg}(\mathsf{A} \to \mathsf{B})}{\mathrm{Pos}(\mathsf{A})} \qquad \frac{\mathrm{Neg}(\mathsf{A} \to \mathsf{B})}{\mathrm{Neg}(\mathsf{B})}$$

$$\frac{\mathrm{Pos}(\mathsf{A} \cap \mathsf{B})}{\mathrm{Pos}(\mathsf{A})} \qquad \frac{\mathrm{Pos}(\mathsf{A} \cap \mathsf{B})}{\mathrm{Pos}(\mathsf{B})} \qquad \frac{\mathrm{Neg}(\mathsf{A} \cap \mathsf{B})}{\mathrm{Neg}(\mathsf{A})} \qquad \frac{\mathrm{Neg}(\mathsf{A} \cap \mathsf{B})}{\mathrm{Neg}(\mathsf{B})}$$

容易检查出，该条件本质上意味着：如果 $\mathsf{c} \sim_{\mathcal{T}} \mathsf{A}$，则常元 c 不会出现在 A 中被奇数个箭头嵌套的位置。

例 5.8 令 $\mathcal{T}_{\#} = \langle \{\mathsf{c}_0, \mathsf{c}_1, \mathsf{c}_2\}, \leq_{\mathcal{T}^{\#}} \rangle$，其中 $\leq_{\mathcal{T}^{\#}}$ 仅有公理 $\mathsf{c}_0 \sim \mathsf{c}_1 \to \mathsf{c}_2$ 和 $\mathsf{c}_1 \sim \mathsf{c}_0$。根据规则（$\to\sim$），我们可推导出 $\mathsf{c}_0 \sim \mathsf{c}_0 \to \mathsf{c}_2$，而 $\mathrm{Pos}(\mathsf{c}_0 \to \mathsf{c}_2)$ 蕴含 $\mathrm{Neg}(\mathsf{c}_0)$。因此，$\mathcal{T}_{\#}$ 不满足正极性条件。

从现在起直到本节结束，除非另有说明，我们假设交类型理论是自然的，并满足定义 5.7 中的正极性条件。此外，为简单起见，我们只考虑公理具有以下三种形式的特征集：$\mathsf{c} \sim \mathsf{c}$、或 $\mathsf{c} \sim \mathsf{c}' \to \mathsf{c}''$、或 $\mathsf{c} \sim \mathsf{c}' \cap \mathsf{c}''$。事实上，我们总能通过移除重命名，并添加新的常元和公理来简化原公理的右侧，从而将公理集转换为这种形式。

为了证明 $\mathcal{T} = \langle \{\mathsf{c}_i\}_{i \in I}, \leq_{\mathcal{T}} \rangle$ 是饱和的，我们必须找到一个 $\mathbb{A}$-环境 $\zeta_{\mathbb{A}}$，它能够诱导一个态射。由于饱和集上的 $\Rightarrow$ 在定义域上是逆变的，在陪域上是协变的，因此集合条件无关紧要，因为它只允许比每种类型解释中都成立的集合包含关系更少的集合包含关系。此外，我们还有以下命题。

命题 5.9 每个类型解释都满足图 1 中的公理和规则。

证明。我们只考虑两个有意思的情况。规则 $(\to)$ 源于 $\Rightarrow$ 的逆变性/协变性。规则 $(\mathrm{U}\ \leq)$ 源于这样一个事实：$\mathrm{X}\ \Rightarrow \mathrm{Y}\ = \Lambda$ 意味着 $\mathrm{Y}\ = \Lambda$。□

对于 $\mathcal{SAT}$ 中的自然交类型理论，寻找类型解释的自然思路是：从特征集中定义一个单调算子，并利用 $\mathcal{SAT}$ 是完备格这一事实；因此，根据克纳斯特-塔斯基定理，每个单调算子都有一个由不动点构成的完备格。然而，正极性条件（定义 5.7）仅对每个类型常量分别提出约束，无法将其统一扩展。正如以下例子中的交类型理论所示，相互冲突的极性会自然地产生。

例 5.10 设 $\mathscr{A} = \mathscr{A}' \cup \mathscr{A}''$，其中 $\mathscr{A}' = \{\mathrm{c}_1 \sim \mathrm{c}_2 \to \mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2 \sim \mathrm{c}_1 \to \mathrm{c}_2\}$，且 $\mathscr{A}'' = \{\mathrm{c}_3 \sim \mathrm{c}_4 \cap \mathrm{c}_5, \mathrm{c}_4 \sim \mathrm{c}_1 \to \mathrm{c}_3, \mathrm{c}_5 \sim \mathrm{c}_2 \to \mathrm{c}_3\}$。$\mathscr{A}'$ 中的公理要求 c_1 和 c_2 具有相反极性，而 $\mathscr{A}''$ 中的公理要求 c_1 和 c_2 具有相同极性。此例将在例5.14中进一步讨论。

因此，为了能够定义适当的类型解释，我们需要在特征集中出现的常元上引入适当的序，以便逐步处理它们。为此，我们需要给出若干定义。

定义 5.11（完备化、闭包、等价类）考虑一个交类型理论 $\mathcal{T} = \langle \{\mathrm{c}_j\}_{j\in J}, \leq_{\mathcal{T}} \rangle$ 以及其特征集的一个子集 $\mathscr{A} = \{\mathrm{c}_i \sim \mathrm{A}_i\}_{i\in I}$。

1. 我们称公理 $\mathrm{c}\ \sim \mathrm{A}$ 定义了常元 c。因此，在 $\mathscr{A}$ 中定义的常元集，记作 $\mathscr{C}(\mathscr{A})$，为 $\{\mathrm{c}_i\}_{i\in I}$。
2. 一个完整公理集 $\mathscr{A}$ 的完备化为 $\mathscr{A} \cup \{\mathrm{c}\ \sim \mathrm{c}\ \mid \mathrm{c}' \sim \mathrm{A}\ \in \mathscr{A}\ \&\ \mathrm{c}$ 出现在 A 中 $\&\ \mathrm{c}\ \notin \mathscr{C}(\mathscr{A})\}$。与其完备化相同的公理集称为完备的。

3. 设 $\mathscr{A}$ 为完备的，且 $\mathrm{c}\ \in \mathscr{C}(\mathscr{A})$。
   (a) c 关于 $\mathscr{A}$ 的闭包，记作 $\gamma(\mathrm{c}\ \mathscr{A})$，是 $\mathscr{C}(\mathscr{A}')$，其中 $\mathscr{A}'$ 是 $\mathscr{A}$ 的最小完备子集，且满足 $\mathrm{c}\ \in \mathscr{C}(\mathscr{A}')$。(b) c 关于 $\mathscr{A}$ 的等价类，记作 $[\mathrm{c}]^{\mathscr{A}}$，定义为

$$\{\mathrm{c}' \in \mathscr{C}(\mathscr{A}) \mid \gamma(\mathrm{c}, \mathscr{A}) = \gamma(\mathrm{c}', \mathscr{A})\}.$$

第 2 条看似同义反复，其目的在于将 $\mathscr{A}$ 变成一个特征集。

例5.12 设 $\mathcal{T}_{\#} = \langle \{\mathrm{c}_0, \mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2\}, \leq_{\mathcal{T}_{\#}} \rangle$ 且 $\mathscr{A}_{\#} = \{\mathrm{c}_0 \sim \mathrm{c}_2 \to \mathrm{c}_0, \mathrm{c}_1 \sim \mathrm{c}_2 \to \mathrm{c}_1\}$。则 $\mathscr{C}(\mathscr{A}_{\#}) = \{\mathrm{c}_0, \mathrm{c}_1\}$，且 $\mathscr{A}_{\#}$ 的完备化为 $\{\mathrm{c}_0 \sim \mathrm{c}_2 \to \mathrm{c}_0, \mathrm{c}_1 \sim \mathrm{c}_2 \to \mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2 \sim \mathrm{c}_2\}$。

显然，完备 $\mathscr{A}$ 的等价类在常量上诱导出一个以 $\mathscr{A}$ 为参数的等价关系，即，当且仅当 $[\mathrm{c}]^{\mathscr{A}} = [\mathrm{c}']^{\mathscr{A}}$ 时，$\mathrm{c} \equiv_{\mathscr{A}} \mathrm{c}'$。因此，我们可以定义以下关系，它是一个良定义的偏序。

定义 5.13（偏序）设 $\mathscr{A}$ 是完备的，且 $\mathrm{c}, \mathrm{c}' \in \mathscr{C}(\mathscr{A})$。$\mathscr{A}$ 的等价类之间的偏序定义为：$[\mathrm{c}]^{\mathscr{A}} \preceq_{\mathscr{A}} [\mathrm{c}']^{\mathscr{A}}$ 当且仅当 $\gamma(\mathrm{c}', \mathscr{A}) \cap [\mathrm{c}]^{\mathscr{A}} \neq /0$。

例5.14 设 $\mathscr{A}$、$\mathscr{A}'$ 和 $\mathscr{A}''$ 如例 5.10 所示。$\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{A}'$ 都是完备的，而 $\mathscr{A}''$ 不是。此外，$\gamma(\mathrm{c}_1, \mathscr{A}) = \gamma(\mathrm{c}_2, \mathscr{A}) = \mathscr{C}(\mathscr{A}')$，且 $\gamma(\mathrm{c}_3, \mathscr{A}) = \gamma(\mathrm{c}_4, \mathscr{A}) = \gamma(\mathrm{c}_5, \mathscr{A}) = \mathscr{C}(\mathscr{A})$。因此，$\mathscr{A}$ 中的公理定义了两个等价类：$[\mathrm{c}_1]^{\mathscr{A}} = \mathscr{C}(\mathscr{A}')$ 和 $[\mathrm{c}_3]^{\mathscr{A}} = \{\mathrm{c}_3, \mathrm{c}_4, \mathrm{c}_5\}$，它们按 $[\mathrm{c}_1]^{\mathscr{A}} \preceq_{\mathscr{A}} [\mathrm{c}_3]^{\mathscr{A}}$ 排序。

现在我们可以证明主要结果，即定理 5.19：满足定义 5.7 中正极性条件的自然交类型理论，其公理的特征集无法为不可解项定型。证明分三步进行。

1. 我们将研究范围限制在有限的自然类型理论上。Mendler [40], 最先注意到，这类紧致性结果足以处理无限公理集，因为在任何类型推导中，实际用到的常量只有有限多个。此外，若某个常元的定义方程未用于包含该常元的推导，那么可以安全地将该常元视为仅与自身相等。

2. 我们说明如何为一个完备公理集 $\mathscr{A}$ 给出类型解释，使得 $\mathscr{C}(\mathscr{A})$ 对于 $\mathscr{A}$ 仅由一个等价类构成，见命题 5.17。

3. 我们说明如何将给定的完备公理集 $\mathscr{A}$ 的类型解释扩展为更大的完备公理集 $\mathscr{A}'$ 的类型解释，使得新增常量在 $\mathscr{A}'$ 中都具有恒等公理，见命题 5.18。

命题 5.17 和 5.18 的证明都利用了这样一个事实：$\mathscr{A}$ 的完备子集在完备格 $\Pi_{i\in I}\mathcal{X}_i$ 上定义了适当的单调算子，其中 $\mathcal{X}_i$ 可以是 $\mathcal{SAT}$，也可以是 $\mathcal{SAT}_{op}$。随后，这些算子的任一不动点（我们知道其必定存在）都会给出一个饱和集元组，从而产生我们所需的 $\zeta_{\mathbb{A}}$-环境。

为了定义这些算子，我们首先需要为公理 $\mathscr{A}=\{\mathsf{c}_i \sim \mathsf{A}_i\}_{i\in I}$ 中的常元加上极性 $\mathsf{p}\in\{+,-,\pm\}$。直观地说，与常元 c^+ 关联的公理应定义一个算子，该算子关于对应于该常元的变量是单调的；而与常元 c^- 关联的公理应定义一个算子，该算子关于对应于该常元的变量是单调的。装饰 $\pm$ 用于公理为恒等式的常元。常元的极性可以自然地扩展到使用这些常元构造的所有类型。

定义 5.15（极性）定义如下：带有极性常元的类型上的谓词 Pos 和 Neg：

$$\mathrm{Pos}(\mathsf{c}^+)\quad \mathrm{Pos}(\mathsf{c}^\pm) \qquad\qquad \mathrm{Neg}(\mathsf{c}^-)\quad \mathrm{Neg}(\mathsf{c}^\pm)$$

$$\frac{\mathrm{Neg(A)}\ \mathrm{Pos(B)}}{\mathrm{Pos(A}\to\mathrm{B)}} \qquad \frac{\mathrm{Pos(A)}\ \mathrm{Neg(B)}}{\mathrm{Neg(A}\to\mathrm{B)}} \qquad\qquad \frac{\mathrm{Pos(A)}\ \mathrm{Pos(B)}}{\mathrm{Pos(A}\cap\mathrm{B)}} \qquad \frac{\mathrm{Neg(A)}\ \mathrm{Neg(B)}}{\mathrm{Neg(A}\cap\mathrm{B)}}$$

定义 5.16 常量装饰 $\{\mathsf{c}^{p_i}\mathsf{i}\}_{i\in I}$ 与公理集 $\mathscr{A}=\{\mathsf{c}_i\sim\mathsf{A}_i\}_{i\in I}$ 一致，当且仅当 $\mathsf{c}_i^+\sim\mathsf{A}_i$ 蕴含 $\mathrm{Pos}(\mathsf{A}_i)$、$\mathsf{c}_i^-\sim\mathsf{A}_i$ 蕴含 $\mathrm{Neg}(\mathsf{A}_i)$，且 $\mathsf{c}_i^\pm\sim\mathsf{A}_i$ 蕴含 $\mathsf{A}_i=\mathsf{c}_i$。

设 $\mathscr{B}=\{\tilde{\mathsf{c}}_i\sim\mathsf{A}_i\}_{i\in I}$ 是一个完备公理集，其类型常量对于 $\mathscr{B}$ 全部属于同一个等价类；设 $\{\tilde{\mathsf{c}}^{p_i}\mathsf{i}\}_{i\in I}$ 是与 $\mathscr{B}$ 一致的常量装饰。令 $\subseteq$ 表示 $\subseteq$ 对于 $\mathcal{SAT}$，而 $\supseteq$ 表示 $\mathcal{SAT}$ 对于 op。容易看出，根据定义 5.7 中的正极性条件，存在一种装饰，且没有常量被装饰为 $\pm$。考虑格 $(\Pi_{i\in I}\mathcal{X}_i, \subseteq)$，其中 $\mathcal{X}_i=\mathcal{SAT}$ 若 $\mathsf{p}_i=+$，且 $\mathcal{X}_i=\mathcal{SAT}$ 若 $\mathsf{p}_i=-$；其上的序是笛卡尔积各分量上的序所诱导的序。也就是说，若对所有 $\mathsf{i}\in\mathrm{I}$，X_i 和 X_i' 都是饱和集，且 $\mathrm{X}_i\subseteq\mathrm{X}'\mathsf{i}$，则有 $\mathrm{X}\langle\mathrm{X}_i\mid\mathsf{i}\in\mathrm{I}\rangle\subseteq\langle\mathrm{X}_i'\mid\mathsf{i}\in\mathrm{I}\rangle$。令 $\mathbb{X}$ 遍历变量。定义与 $\mathscr{B}, \mathscr{O}_{\mathscr{B}}$ 相关联的算子 $\Pi_{i\in I}\mathcal{X}_i\to\Pi_{i\in I}\mathcal{X}_i$，如下：

$$\mathscr{O}_{\mathscr{B}}(\langle\mathbb{X}_i\mid i\in I\rangle)=\langle A_i^\star\mid i\in I\rangle$$

其中映射 $_^\star$ 定义如下：

$$A^\star=\begin{cases}\mathbb{X}_i & \text{if } A=\tilde{\mathsf{c}}_i^p\\ \mathbb{X}_j\Rightarrow\mathbb{X}_k & \text{if } A=\tilde{\mathsf{c}}_j^p\to\tilde{\mathsf{c}}_k^{p'}\\ \mathbb{X}_j\cap\mathbb{X}_k & \text{if } A=\tilde{\mathsf{c}}_j^p\cap\tilde{\mathsf{c}}_k^{p'}.\end{cases}$$

那么我们可以轻松证明

命题 5.17 设 $\mathscr{B} = \{\tilde{\mathrm{c}}_i \sim \mathrm{A}_i\}_{i\in I}$ 是一个完备公理集，其类型常量在 $\mathscr{B}$ 下都属于同一个等价类，那么上文定义的算子 $\mathscr{O}_{\mathscr{B}}$ 是单调的。

令 $\mathscr{B} = \{\tilde{\mathrm{c}}_i \sim \mathrm{A}_i\}_{i\in I} \subseteq \mathscr{A}$，并令 $\mathscr{C}(\mathscr{B})$ 为 $\mathscr{A}$ 的一个等价类，使得 $\mathscr{B}$ 中的常量要么在 $\mathscr{B}$ 中定义（即属于 $\{\tilde{\mathrm{c}}_i\}_{i\in I}$），要么属于 $\{\tilde{\mathrm{c}}\,\mathrm{j}\}\mathrm{j}_{\in}\mathrm{J}$，其中 $\mathrm{I} \cap \mathrm{J} = /0$，并且我们已经在 $\mathcal{SAT}$ 中为它们给出了类型解释 $\mathrm{X}\,\mathrm{j}$，其中 $\mathrm{j} \in \mathrm{J}$。定义 $\mathscr{B}^{\mathscr{A}} = \mathscr{B} \cup \{\tilde{\mathrm{c}}\,\mathrm{j} \sim \tilde{\mathrm{c}}\,\mathrm{j}\}\mathrm{j}_{\in}\mathrm{J}$。容易看出，根据定义 5.7 中的正极性条件，存在一个装饰 $\{\tilde{\mathrm{c}}^{p_h}\mathrm{h}\ \}_{h\in I\cup J}$，作用于 $\mathscr{C}(\mathscr{B}^{\mathscr{A}})$ 中的常量并与 $\mathscr{B}^{\mathscr{A}}$一致，从而将极性 $\pm$赋予 $\{\tilde{\mathrm{c}}\,\mathrm{j}\}\mathrm{j}_{\in}\mathrm{J}$ 中的所有常量。考虑格 $(\Pi_{h\in I\cup J}\mathcal{X}_h, \supseteq)$，其中若 $\mathrm{p}_h = +$则 $\mathcal{X}_h = \mathcal{SAT}$，若 $\mathrm{p}_h = \pm$则 $\mathcal{X}_h = \mathcal{SAT}\mathrm{op}$。令 $\langle \mathrm{X}_h \,|\, \mathrm{h} \in \mathrm{I} \cup \mathrm{J}\rangle \supseteq \langle \mathrm{X}'_h \,|\, \mathrm{h} \in \mathrm{I} \cup \mathrm{J}\rangle$ 和 $\mathbb{X}$ 与前一种情况相同。定义与 $\mathscr{B}^{\mathscr{A}}$,$\mathscr{O}_{\mathscr{B}^{\mathscr{A}}}$: $\Pi_{h\in I\cup J}\mathcal{X}_h \to \Pi_{h\in I\cup J}\mathcal{X}_h$ 关联的算子如下：

$$\mathscr{O}_{\mathscr{B}^{\mathscr{A}}}(\langle \mathbb{X}_h \mid h \in I \cup J\rangle) = \langle A^{\star}_h \mid h \in I \cup J\rangle$$

其中映射 $_^{\star}$定义如下：若 $\mathrm{A} = \tilde{\mathrm{c}}^{\pm}_j$，则 X_j为 $\tilde{\mathrm{c}}j$的解，其中 $\mathrm{j} \in \mathrm{J}$；否则与前一种情况相同。我们很容易得到

命题 5.18 设 $\mathscr{B} = \{\tilde{\mathrm{c}}_i \sim \mathrm{A}_i\}_{I\in I} \subseteq \mathscr{A}$，且 $\mathscr{C}(\mathscr{B})$ 是 $\mathscr{A}$的一个等价类，并满足以下条件： $\mathscr{B}$ 中出现的所有常元，要么属于 $\mathscr{C}(\mathscr{B})$，要么我们已经为其提供了类型解释。那么，上文定义的算子 $\mathscr{O}_{\mathscr{B}^{\mathscr{A}}}$ 是单调的。

现在我们可以证明主要结果，它推广了 [22]中的定理 18。

定理 5.19 满足定义 5.7 中正极性条件、特征集可能无限的自然交类型理论是合理的。

证明。考虑自然交类型理论 $\mathcal{T}$中的一个有限推导。不失一般性，我们可以将范围限制在有限自然交类型理论 $\mathcal{T}'$ 上，其特征集仅包含该推导中实际用到的常元；对于定义公理未在推导中用到的常元，可以将其恒等映射赋给它们。现在，根据定义 5.13 中常元上的偏序，对某个极小等价类应用命题 5.17，从而得到这些常元的第一个部分类型解释。请注意，定义极小等价类中常元的公理集是完备的。应用命题 5.18，将这样的类型解释扩展到 $\mathcal{T}'$ 中的所有常元，逐步添加一个等价类，使得不属于该等价类的常元的解都已找到。由于 $\mathcal{T}'$ 是有限的，我们总能找到这样的等价类，即尚未处理的等价类所构成的偏序中的某个极小类。最后，应用定理 5.3 得证。□

我们以几个例子结束本节。第一个理论的合理性可直接通过应用命题 5.17 和 5.18 得出。第二个例子讨论一种类型论，它是在 [23] 中引入的。其合理性既可以利用定理 5.19 证明，也可以直接取定义在由 $\mathcal{SAT}$ 和 $\mathcal{SAT}_{op}$ 构成的可数序列上的单调算子的不动点来证明。最后，第三个例子讨论一种理论；据我们目前所知，只能通过其有限近似，利用定理 5.19 证明该理论的合理性。这有些令人费解，因为一旦我们知道该理论是合理的，根据定理 5.5，原则上就可以在 $\mathcal{SAT}$ 中定义一种类型解释。

例 5.20

1. 考虑例 5.10 的公理 $\mathscr{A}$，并令 $\mathbb{A} = \mathscr{C}(\mathscr{A})$。

• 我们从 $\mathbb{A}' = [c_1]^{\mathscr{A}}$ 开始，它是 $\mathscr{A}$ 的最小类。令 $\langle X_1, X_2\rangle$ 为算子的一个不动点

$$\mathscr{O}_{\mathbb{A}'} : \mathcal{SAT} \otimes \mathcal{SAT}^{op} \to \mathcal{SAT} \otimes \mathcal{SAT}^{op}$$

定义为

$$\mathscr{O}_{\mathbb{A}'}(\langle \mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2\rangle) = \langle \mathbb{X}_2 \Rightarrow \mathbb{X}_1, \mathbb{X}_1 \Rightarrow \mathbb{X}_2\rangle.$$

• 然后，我们利用已经计算出的 c_1、c_2 的解来分析类 $[c_3]^{\mathscr{A}}$。我们将 $\langle X_1$、X_2、X_3、X_4、$X_5\rangle$ 取为该算子的不动点

$$\mathscr{O}_{\mathbb{A}} : \mathcal{SAT} \otimes \mathcal{SAT} \otimes \mathcal{SAT} \otimes \mathcal{SAT} \otimes \mathcal{SAT} \to \mathcal{SAT} \otimes \mathcal{SAT} \otimes \mathcal{SAT} \otimes \mathcal{SAT} \otimes \mathcal{SAT}$$

定义为

$$\mathscr{O}_{\mathbb{A}}(\langle \mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \mathbb{X}_3, \mathbb{X}_4, \mathbb{X}_5\rangle) = (\langle \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbb{X}_4 \cap \mathbb{X}_5, \mathbb{X}_1 \Rightarrow \mathbb{X}_3, \mathbb{X}_2 \Rightarrow \mathbb{X}_3\rangle).$$

具有特征集 $\mathscr{A}$ 的自然交类型理论的敏感性可以通过取 $\zeta_{\mathbb{A}}(c_i) = X_i$（对于 $1 \le i \le 5$）来证明，其中 $\langle X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\rangle$ 是 $\mathscr{O}_{\mathbb{A}}$ 的一个不动点。

2. 考虑公理 $\mathscr{A}_\infty = \{c \sim c\} \cup \{c_n \sim c_{n+1} \to c \mid n \in N\}$ 以及 $\mathbb{A}_\infty = \mathscr{C}(\mathscr{A}_\infty)$。$\mathscr{A}_\infty$ 的最小类是 $[c]^{\mathscr{A}_\infty}$，我们可以为 $\zeta_{\mathscr{A}_\infty}(c)$ 取任意饱和集，例如 $\mathcal{B}$。但这样一来，就不存在有限的最小等价类，使我们能够由此开始在 $\mathcal{SAT}$ 中定义类型解释的过程。我们可以考虑这样一个理论的有限近似，但我们也可以通过直接定义该算子来证明：具有特征集 $\mathscr{A}_\infty$ 的自然交类型理论是合理的

$$\mathscr{O}_{\mathbb{A}_\infty} : \mathcal{SAT} \otimes (\mathcal{SAT} \otimes \mathcal{SAT}^{op})^{\mathbb{N}} \to \mathcal{SAT} \otimes (\mathcal{SAT} \otimes \mathcal{SAT}^{op})^{\mathbb{N}}$$

by

$$\mathscr{O}_{\mathbb{A}_\infty}(\langle \mathbb{X}\rangle \cdot \langle \mathbb{X}_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle) = \langle \mathcal{B}\rangle \cdot \langle \mathbb{X}_{n+1} \Rightarrow \mathbb{X} \mid n \in \mathbb{N}\rangle.$$

由于 $\mathscr{O}_{\mathbb{A}_\infty}$ 是单调的，它存在不动点。令 $\langle \mathcal{B}\rangle \cdot \langle X_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle$ 为这样一个不动点，那么 $\zeta_{\mathbb{A}_\infty}(c) = \mathcal{B}$ 和 $\zeta_{\mathbb{A}_\infty}(c_n) = X_n$ 对于 $n \in \mathbb{N}$ 是我们所要寻找的 $\mathbb{A}_\infty$-环境。

3. 考虑由公理集 $\{c_{0,n} \sim c_{1,n} \to c_{0,n+1},\ c_{1,n} \sim c_{0,n} \to c_{1,n+1} \mid n \in N\}$ 给出的交类型理论。该理论可以视为 $\to$-可靠的，并且可以证明是 β-可靠的。此外，可以利用该理论的有限近似，借助定理 5.5 证明其敏感性。我们不讨论如何归纳地定义该理论到 $\mathcal{SAT}$ 的嵌入。

6 迈向对合理 Itt 的完整刻画

Mendler 在 [40] 中研究了带有最小与最大不动点类型方程的二阶 λ-演算。他证明了，当且仅当不动点方程基本上满足定义 5.7 中的正极性条件时，该系统才是强规范化的。定理 5.3 和 5.5 是 Mendler的结果对于 $\to$-健全交类型系统和可解项的类似结论，尽管它们并非有效的。交类型理论中的正极性条件只是敏感性的充分条件。事实上，对于特征集满足正极性条件的自然交类型理论，我们可以构造一个类型解释，使其成为嵌入到 $\mathscr{P}\Lambda$ 中的嵌入，或对这样的嵌入进行有限逼近；但这并非必要条件，而在 [40]中则是必要条件。事实上，交算子 ∩可以消除箭头构造子的逆变行为，正如下面的例子所示。这些例子中考虑的所有交类型理论都假设是 $\to$-健全的，并且还可以通过对其子类型关系进行归纳证明它们是 β-健全的。

例6.1（消除负出现）

1. 令 $\mathcal{T}_2$ 为具有常量 $\{c_0,c_1\}$ 和公理的交类型理论

$$c_0 \sim c_0 \cap c_1 \to c_0.$$

显然， $\mathcal{T}_2$ 的特征集不满足定义 5.7 中的正极性条件。

然而，可以通过将 $\mathcal{T}_2$ 嵌入交类型理论 $\mathcal{T}_2'$ 中证明它是合理的，其中 $\mathcal{T}_2'$ 是通过添加公理 $c_1 \leq c_0$，得到的，该公理给出

$$c_0 \sim_{\mathcal{T}_2'} c_1 \to c_0$$

由定理 5.19 生成一个合理的滤子模型。或者，不添加公理 $c_1 \leq c_0$，而是通过添加公理，也可以根据定理 5.19 得到一个合理的滤子模型。

$$c_1 \sim U \to c_0$$

因为根据规则（$\to$），该公理蕴含 $c_1 \leq c_0$。

另一方面请注意，若我们向 $\mathcal{T}_2$ 添加公理 $c_0 \leq c_1$，便得到 $c_0 \sim_{\mathcal{T}_2} c_0 \to c_0$。根据命题4.4(2)，由此得到的交类型理论是非敏感的，因为生成与 Park模型 *[41]* 同构的滤子模型、且在 *[35]* 中定义的非敏感交类型理论可嵌入其中。

2. 令 $\mathcal{T}_3$ 为具有常量 $\{c_0,c_1,c_2\}$ 以及以下公理的交类型理论：

$$c_0 \sim c_0 \cap (c_1 \to c_2) \to c_1.$$

例4.7(2)中考虑的交类型理论 $\mathcal{T}_{CDZ}$ 具有常量 $\{c_3,c_4\}$ 和以下公理：

$$c_3 \sim c_4 \to c_3 \quad c_4 \sim c_3 \to c_4 \quad c_3 \leq c_4.$$

我们可以通过将 $\mathcal{T}_3$ 嵌入 $\mathcal{T}_{CDZ}$ 来证明它是合理的，其中 $\mathcal{T}_{CDZ}$ 是通过 ι 的结构扩张 $\hat{\iota}$ 定义的：

$$\iota(c_0) = c_4 \quad \iota(c_1) = c_4 \quad \iota(c_2) = c_3.$$

现在，由于 $\iota(c_0) = c_4$，并且

$$\hat{\iota}(c_0 \cap (c_1 \to c_2)) = \iota(c_0) \cap (\iota(c_1) \to \iota(c_2)) = c_4 \cap (c_4 \to c_3) \sim_{\mathcal{T}_{CDZ}} c_4 \cap c_3 \sim_{\mathcal{T}_{CDZ}} c_3$$

这意味着 $\hat{\iota}(c_0 \cap (c_1 \to c_2) \to c_1) = \hat{\iota}(c_0 \cap (c_1 \to c_2)) \to \iota(c_1) \sim_{\mathcal{T}_{CDZ}} c_3 \to c_4 \sim_{\mathcal{T}_{CDZ}} c_4$，因此我们得到了所需的结论：

$$\iota(c_0) \sim_{\mathcal{T}_{CDZ}} \hat{\iota}(c_0 \cap (c_1 \to c_2) \to c_1).$$

即使对于自然交类型和可解项，实现有效的 Mendler 式完备性结果似乎也至关重要，因为有些情况下，交算子无法阻止箭头构造子的逆变行为占据上风，正如下例所示。

E例 6.2 设 $\mathcal{T}_4$ 为一个 $\to$-可靠的交类型理论，具有常量 $\{c_0,c_1,c_2,c_3\}$ 以及公理 m

$$c_0 \sim c_0 \cap (c_1 \cap (c_1 \to c_2) \to c_2) \to c_3.$$

我们可以将 $\Omega_2\Omega_2$ 与 c_3 归类，因为 $\vdash_{\mathcal{T}_4} \Omega_2 : c_0$ 且 $\vdash_{\mathcal{T}_4} \Omega_2 : c_1 \cap (c_1 \to c_2) \to c_2$。可以通过对 $\leq_{\mathcal{T}_4}$ 进行归纳证明 $\mathcal{T}_4$ 的 β- 可靠性，因此 $\mathcal{T}_4$ 生成一个滤子模型。

6.1 合理滤子模型的理论

模型赋予语义。但什么是语义？在莱布尼茨所开创的哲学传统中，只有当我们能够区分本体实体时，它们才会出现。因此，语义本质上就是同余。鉴于合理滤子模型种类繁多，我们可以设想它们能够为 λ-演算（即 λ-理论）提供相应丰富的语义。但事实似乎并非如此。形式上， λ-理论只是 λ-项上的一个非平凡同余，并且对 β-转换封闭。

本文考察的所有合理滤子模型的 λ-理论，似乎都将具有相同 Böhm 树的所有 λ-项等同起来，也就是说，它们的 λ-理论至少是 $\mathscr{B}$。有关 λ-理论和 Böhm 树的更多细节，请参阅 [7, 第 16] 章。以下情况均是如此：与 Scott 逆极限模型 [17], 同构的滤子模型，其理论是极大可感知理论 $\mathscr{H}^*$ [7,定义 16.2。1],在 $\mathcal{T}_{CDZ}$ 上的滤子模型（定义于例4.7(2)），其理论较弱，为 $\mathscr{H}^+$ [10, 定义 3.11(iii)], ；当然还有在 $\mathcal{T}_{BCD}$ 上的滤子模型（定义于例4.7(1)），其理论为 $\mathscr{B}$ [7,定义 16.4。1]值得注意的是， [22] 讨论了一个能够区分一个开放的 Barendregt 不动点组合子与 Curry 不动点组合子的合理滤子模型。因此，该滤子模型的理论弱于 $\mathscr{B}$。

最小可感知理论是 $\mathscr{H}$ [7,定义 4.1.6(ii)]。一个引人入胜的未决问题是：该理论是否恰好是某个滤子模型的理论，抑或滤子模型是否具有迄今未知的语义蕴涵。我们希望本文能促使读者着手研究这一引人入胜的未决问题；就合理理论而言，它平行于 [34] 中针对一般 λ-理论所讨论的那个未决问题。

我们以讨论敏感性这一概念来结束本小节。
格模型可被视为合理的，有两种概念。较为一般的概念要求所有闭不可解项被等同 [7, 定义 4.1.7(ii)], ，而更为严格的概念则要求所有不可解项与模型的底元素等同 [10,定义 12.1(ii)(3)]。在本文中，我们聚焦于更为具体的敏感性概念。我们猜想，通过再增加一个全称常量和一条平凡规则，可以定义出不可解项不与底元素等同的滤子模型。然而，此类模型的理论在 [10, 定义 12.1(ii)(3)]的意义上仍是序可感知的。一个困难得多的问题是找到一般意义上非序可感知的敏感滤子模型。鉴于不可解项具有非递归可枚举的性质，这很可能需要类型赋值系统中的非有限规则。

7 相关工作与结论

自七十年代末交类型的发明以来，交类型从多个方面彻底改变了函数式编程语言语义的研究方法。首先，交类型颠覆了人们对规范与程序之间关系的传统理解，为以正确性为导向的程序构造方法提供了依据。也就是说，我们应当利用规范本身来构造满足这些规范的程序，而不是试图证明一个现成程序是正确的。这种观点被范畴化地表述为一种对偶性，见 Abramsky [1], ；也可以通过无点拓扑来表述 [46]。其次，交类型明确揭示了静态语义与动态语义之间的联系，即前者为后者提供了有限的近似。第三，交类型使得对大量有趣的 λ 项类进行静态规范成为可能 [24]。更广泛地说，在过去半个世纪中，交类型为表达和研究各种编程语言语义提供了范式，涵盖从定量语义 [27, 26, 15, 2, 21, 5] 到定性语义 [17, 1], 、从博弈 [33, 25, 28] 到幂级数 [30], , 以及各种定义域。

在当今为数众多的交类型理论论述中，本文以近期一篇全面探讨滤子模型与不可解项的论文为基础，该文见于 [23]。事实上，本文与那篇论文相对应：我们讨论交类型视角下的合理滤子模型，或者说，与之句法对应的头标准化项。

交类型理论非常灵活，因而表达能力很强，但这也使得它们很难被彻底分类。例如，Mendler [40], 给出的一个漂亮刻画，说明哪些递归二阶类型理论只为强规范化项赋型，却无法推广到交类型理论和头规范化项的语境中。有大量交类型理论不满足任何简单明了的极性判据，却仍然只为头规范化项赋予非平凡类型。在 [22] 中，我们论证了即使对于无交公理，情况也是如此，这明显与 Mendler条件的简单直观类比相矛盾。例如，一个仅含单条公理 $c \sim (((c \to c_0) \to c_1) \to c_2$、其中 c_0,c_1,c_2是泛型常元的自然理论，可以用不等价于 U 的类型，只为头规范化项赋型。

本文将交类型理论构造为特殊的交半格，并证明交半格对偶范畴中的态射保持敏感性，见定理4.4(1)。此外，我们证明交半格 $\mathcal{SAT}$ 具有普适性：一个 $\to$-可靠的交类型理论只为头规范化项赋予非平凡类型，当且仅当它可以作为交半格嵌入其中，见定理 5.3 和 5.5。我们给出若干种运用这一结果的技巧，并提供多个例子。一个直接推论是，敏感性在对偶范畴中具有传递性。因此，一旦我们拥有一个合理的交类型理论，它就可以充当 $\mathcal{SAT}$，并且可以轻易地将敏感性传递给所有嵌入其中的交类型理论。若缺少合适的合理交类型理论，我们就需要定义交类型理论与 $\mathcal{SAT}$ 之间的直接态射。对于一大类自然交类型理论，这可以做到；这些理论的特征公理满足正极性条件。这个条件实质上等同于 Mendler 在 [40] 中为二阶 λ-演算引入的条件。因此，通过在 $\mathcal{SAT}$ 中反复求解不动点方程（它是一个完备格），我们可以证明定理 5.19，其内容相当于 Mendler的结果中的“如果”部分。

然而，由于交集甚至在自然交类型理论中也可能产生相当出人意料的后果，要提供一种语法上的有效判据来确定某个交类型理论是否合理，似乎并不可行。参见例6.1中的示例。我们尚未研究其公理不是等价关系，或公理两侧并非都是类型的交类型理论。

总而言之，我们探讨了一个久经考验的问题领域，并在猜想和结果两个方面都取得了一些进展。

最后，我们要向 Stefano Berardi 致意，并将本文献给他，以庆祝他的生日。我们认为，Stefano Berardi 不仅是他那一代最杰出、最深刻的意大利逻辑学家之一，能够以令人叹为观止的才华在逻辑与理论计算机科学之间自由往来，揭示二者之间深刻的联系；我们也十分欣赏他在当今时代所持有的道德态度。他大胆抵制追求数量而非质量、追求引用而非成果的风气。他的每一部作品都是原创的，且极具价值，犹如高贵而谦卑的人类科学研究事业所创造的马赛克中的一块，而他正是这一事业的倡导者。受到他对研究的态度的启发，我们将本文作为那幅宏伟马赛克中的一小块，也作为我们友谊的象征，献给他。

致谢 本文当前版本相较于最初投稿有了显著改进，这得益于审稿人细致的审稿报告。审稿人出色地指出了许多技术细节出现却缺少必要解释之处。两个版本之间的差别在于若干附有启发性示例的说明性讨论。

参考文献

[1] Samson Abramsky. 逻辑形式中的域论. 《纯粹与应用逻辑年刊》, 51(1-2):1–77, 1991年. doi:10.1016/0168-0072(91)90065-T.[2] Beniamino Accattoli、Stéphane Graham-Lengrand 与 Delia Kesner. 紧致类型赋值与分割界限. PACMPL, 2(ICFP):94:1–94:30, 2018年. doi:10.1145/3236789.[3]Fabio Alessi. 一个非规则滤子模型. 理论计算机科学, 398(1-3):129–149, 2008年. doi:10.1016/J.TCS.2008.01.047.[4] Fabio Alessi、Franco Barbanera 与 Mariangiola Dezani-Ciancaglini. 定制滤子模型. 载于 Stefano Berardi、Mario Coppo 与 Ferruccio Damiani 编, TYPES, LNCS 第3085卷, 第17–33页. 施普林格, 2003年. doi:10.1007/978-3-540-24849-1_2.[5]Sandra Alves、Delia Kesner 与 Miguel Ramos. 扩展定量模式匹配范式. 载于 Oleg Kiselyov 编, APLAS, LNCS 第15194卷, 第84–105页. 施普林格, 2024年. doi:10.1007/978-981-97-8943-6_5.[6] Franco Barbanera 与 Stefano Berardi. 经典逻辑的一个强正规化结果. 《纯粹与应用逻辑年刊》, 76(2):99–116, 1995年. doi:10.1016/0168-0072(95)00004-Z.[7] Henk Barendregt. λ演算——其句法与语义, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics 第103卷. North-Holland, 1985年.[8] Henk Barendregt、Mario Coppo 与 Mariangiola Dezani-Ciancaglini. 滤子 λ 模型与类型赋值的完备性. Journal of Symbolic Logic, 48(4):931–940, 1983年. doi:10.2307/2273659.[9] Henk Barendregt、Wil Dekkers 与 Richard Statman. 带类型的 λ 演算. 剑桥大学出版社, 2013年. doi:10.1017/CBO9781139032636.[10] Henk Barendregt 与 Giulio Manzonetto. λ演算卫星. College Publications, 2022年. URL: https://www.collegepublications.co.uk/logic/mlf/?00035.[11]Adriano Barile、Stefano Berardi 与 Luca Roversi. 可逆布尔电路上重写的终止性作为自由 3-范畴问题. 理论计算机科学, 1028:115031, 2025年. doi:10.1016/J.TCS.2024.115031.[12] Stefano Berardi. 二次公式经典原理的若干直觉主义等价式. 《纯粹与应用逻辑年刊》, 139(1-3):185–200, 2006年. doi:10.1016/J.APAL.2005.04.006.[13] Stefano Berardi 与 Silvia Steila. 数对与 k 种颜色的拉姆齐定理作为算术的次经典原理. Journal of Symbolic Logic, 82(2):737–753, 2017年. doi:10.1017/JSL.2016.41.[14] Stefano Berardi 与 Makoto Tatsuta. Martin-Löf 归纳定义的经典系统不等价于循环证明. 计算机科学中的逻辑方法, 15(3), 2019年. doi:10.23638/LMCS-15(3:10)2019.[15] Antonio Bucciarelli、Delia Kesner 与 Daniel Ventura. λ演算的非幂等交类型. IGPL逻辑杂志, 25:433–464, 2017年. doi:10.1093/jigpal/jzx018.[16] Mario Coppo 与 Mariangiola Dezani-Ciancaglini. λ演算的基本函数性理论的一个扩展. 圣母大学形式逻辑杂志, 21(4):685–693, 1980年. doi:10.1305/ndjfl/1093883253.[17] Mario Coppo、Mariangiola Dezani-Ciancaglini、Furio Honsell 与 Giuseppe Longo. 扩展类型结构与滤子 λ 模型. 载于 G. Lolli、G. Longo 与 A. Marcja 编, 逻辑研讨会 ’82, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics 第112卷, 第241–262页. 爱思唯尔, 1984年. doi:10.1016/S0049-237X(08)71819-6.[18] Mario Coppo、Mariangiola Dezani-Ciancaglini 与 Betti Venneri. 可解项的函数特征. Mathematical Logic Quarterly, 27(2-6):45–58, 1981年. doi:10.1002/malq.19810270205.[19]Mario Coppo、Mariangiola Dezani-Ciancaglini 与 Maddalena Zacchi. 类型理论、范式与 D_∞-λ模型. Information and Computation, 72(2):85–116, 1987年. doi:10.1016/0890-5401(87)90042-3.

[20] Thierry Coquand与Gérard P. Huet. 构造演算. Information and Computation, 76(2/3):95–120, 1988年. doi:10.1016/0890-5401(88)90005-3.[21] Daniel de Carvalho. 通过指称语义与交类型研究 λ项的执行时间. 计算机科学中的数学结构, 28(7):1169–1203, 2018年. doi:10.1017/S0960129516000396.[22] Mariangiola Dezani-Ciancaglini、Besik Dundua与Furio Honsell. Lambda galore. 载于Nathalie Bertrand与Stefan Milius编, FoSSaCS, LNCS. 施普林格, 2026年. 即将出版.[23] Mariangiola Dezani-Ciancaglini、Paola Giannini与Furio Honsell. 滤子模型中的不可解项. 载于Maribel Fernández编, FSCD, LIPIcs第337卷, 第3:1–3:24页. Schloss Dagstuhl, 2025年. doi:10.4230/LIPICS.FSCD.2025.3.[24]Mariangiola Dezani-Ciancaglini、Furio Honsell与Yoko Motohama. 利用交类型对λ项作组合刻画. 理论计算机科学, 340(3):459–495, 2005年. doi:10.1016/J.TCS.2005.03.011.[25] Pietro Di Gianantonio、Furio Honsell与Marina Lenisa. 面向博弈语义的类型赋值系统. 理论计算机科学, 398(1):150–169, 2008年. doi:10.1016/j.tcs.2008.01.023.[26] Philippa Gardner. 利用类型论发现必要归约. 载于Masami Hagiya与John C. Mitchell编, TACS, LNCS第789卷, 第555–574页. 施普林格, 1994年. doi:10.1007/3-540-57887-0_115.[27] Pietro Di Gianantonio与Furio Honsell. 抽象应用概念. 载于Marc Bezem与Jan Friso Groote编, TLCA, LNCS第664卷, 第124–138页. 施普林格, 1993年. doi:10.1007/BFB0037102.[28] Pietro Di Gianantonio与Marina Lenisa. 经由交类型赋值系统的无辜博弈语义. 载于Simona Ronchi Della Rocca编, CSL, LIPIcs第23卷, 第231–247页. Schloss Dagstuhl, 2013年. doi:10.4230/LIPICS.CSL.2013.231.[29] Jean-Yves Girard. Gödel解释向分析的一种扩展，及其在分析与类型论中对割消去的应用. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 63:63–92, 1971年. doi:10.1016/S0049-237X(08)70843-7.[30] Giulio Guerrieri与Federico Olimpieri. 范畴化非幂等交类型. 载于Christel Baier与Jean Goubault-Larrecq编, CSL, LIPIcs第183卷, 第25:1–25:24页. Schloss Dagstuhl, 2021年. doi:10.4230/LIPICS.CSL.2021.25.[31] Roger Hindley与Giuseppe Longo. λ演算模型与外延性. Mathematical Logic Quarterly, 26(19-21):289–310, 1980年. doi:10.1002/malq.19800261902.[32] Furio Honsell与Marina Lenisa. λ演算中永续策略的语义分析. 理论计算机科学, 212(1-2):183–209, 1999年. doi:10.1016/S0304-3975(98)00140-6.[33] Furio Honsell与Marina Lenisa. Rel中的“波式”交互几何模型是图状λ模型. 载于Stefano Berardi、Mario Coppo与Ferruccio Damiani编, TYPES, LNCS第3085卷, 第242–258页. 施普林格, 2003年. doi:10.1007/978-3-540-24849-1_16.[34] Furio Honsell与Gordon Plotkin. 论 λ演算序论模型的完备性. Information and Computation, 207, 2009年5月. doi:10.1016/j.ic.2008.03.027.[35] Furio Honsell与Simona Ronchi Della Rocca. 拓扑 λ 模型的逼近定理与λ演算的拓扑不完备性. Journal of Computer and System Sciences, 45(1):49–75, 1992年. doi:10.1016/0022-0000(92)90040-P.[36] Rainer Kerth. 无类型 λ演算模型中不可解λ项的解释. Journal of Symbolic Logic, 63(4):1529–1548, 1998年. doi:10.2307/2586665.[37] Jean-Louis Krivine. Lambda-calcul Types et modèles. Masson, 1990年. 英译本 [38].[38] Jean-Louis Krivine. λ演算、类型与模型. Ellis Horwood, 1993年. 由René Cori译自1990年法文原著.[39] Jean-Jacques Lévy. λ-β-K 演算的代数解释与带标记 λ 演算. 载于Corrado Böhm编, Lambda-Calculus and Computer Science Theory, LNCS第37卷, 第147–165页. 施普林格, 1975年. doi:10.1007/BFB0029523.

[40] Nax Paul Mendler. 二阶λ演算中的归纳类型与类型约束. 《纯粹与应用逻辑年刊》, 51(1-2):159–172, 1991年. doi:10.1016/0168-0072(91)90069-X.[41] David Park. Scott的λ演算模型中的Y组合子. 《计算理论报告》, 华威大学计算机科学系, 1976年. 网址: http://wrap.warwick.ac.uk/46310/.[42] Gordon D. Plotkin. λ演算的集合论模型及其他初等模型. 理论计算机科学, 121(1&2):351–409, 1993年. doi:10.1016/0304-3975(93)90094-A.[43] Garrel Pottinger. 作为割消去之同态像的规范化. 《数学逻辑年刊》, 12:323–357, 1977年. doi:10.1016/S0003-4843(77)80004-1.[44] Garrel Pottinger. 强可规范化λ项的类型赋值. 载于《致H. B. Curry：组合子逻辑、λ演算与形式主义论文集》, 第561–578页. 学术出版社, 1980年. 网址: https://www.doc.ic.ac.uk/~svb/Research/pottinger.pdf.[45] Dag Prawitz. 自然演绎：证明论研究. Almqvist & Wiksell, 1965年.[46]Giovanni Sambin、Silvio Valentini与Paolo Virgili. 作为直觉主义无点拓扑一个分支的构造性域理论. 理论计算机科学, 159(2):319–341, 1996年. doi:10.1016/0304-3975(95)00169-7.[47] Dana S. Scott. 连续格. 载于Francis William Lawvere编, 《托扑斯、代数几何与逻辑》, 《数学讲义》第274卷, 第97–136页. 施普林格, 1972年. doi:10.1007/BFb0073967.[48]Dana S. Scott. 作为格的数据类型. 《SIAM计算杂志》, 5(3):522–587, 1976年. doi:10.1137/0205037.[49] Dana S. Scott. 指称语义的域. 载于Mogens Nielsen与Erik Meineche Schmidt编, ICALP, LNCS第140卷, 第577–613页. 施普林格, 1982年. doi:10.1007/BFB0012801.[50] Manfred E. Szabo. 证明代数, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics第88卷. North-Holland, 1978年.[51] William W. Tait. 有限类型泛函的内涵解释 I. 《符号逻辑杂志》, 32:198–212, 1967年. doi:10.2307/2271658.[52]Makoto Tatsuta. 遗传头规范化项的类型. 载于Jacques Garrigue与Manuel V. Hermenegildo编, FLOPS, LNCS第4989卷, 第195–209页. 施普林格, 2008年. doi:10.1007/978-3-540-78969-7_15.[53] Pierre Vial. 遗传置换子的序列类型. 载于Herman Geuvers编, FSCD, LIPIcs第131卷, 第33:1–33:15页. Schloss Dagstuhl, 2019年. doi:10.4230/LIPICS.FSCD.2019.33.[54]Christopher P. Wadsworth. Scott的λ演算 $\mathscr{D}_\infty$模型之计算性质与指称性质之间的关系. 《SIAM计算杂志》, 5(3):488–521, 1976年. doi:10.1137/0205036.