一致可实现性解释

Ulrich Berger PauloOliva斯旺西大学 伦敦玛丽
女王大学

本文提出了一种新颖的一致可实现性框架，统一并推广了逻辑的各种可实现性解释，尤其关注原子公式和量词的处理。传统的可实现性解释（例如 Kleene 数可实现性）要求为存在量词提供明确的见证。相比之下，较新的方法——例如第一作者提出的一致海廷算术、非标准算术的赫布兰实现，或算术的“经典”可实现性——对（某些）量词进行一致处理。本文提出的一致可实现性概念抽象了这些差异，通过给定的原子公式处理方式对解释进行参数化，从而兼顾经典变体和现代变体。本文通过海廷算术的若干种可实现性解释说明了这一方法。

谨以此文献给 Stefano Berardi，祝贺他 64 岁生日

1 引言

自 1945 年 Kleene 提出海廷算术的可实现性解释以来，人们提出了可实现性的若干变体。其中包括 Kreisel 修正可实现性 [12, 13], “经典”可实现性 [5, 6], van den Berg 等人对非标准算术的“Herbrand”可实现性 [3], 以及 Aschieri-Berardi 的“学习”可实现性 [1]。

在这些变体中的大多数里，一个公式的实现子携带了足够的信息，可以完整或部分地为该公式的正存在量词提供见证。实现子通常还以全称量词化的数据作为输入。例如，在 Kleene 的自然数可实现性中， ∃nA(n) 和∀nA(n) 的定义条款如下：

$$\begin{aligned} k\, r\, \exists nA(n) &:\equiv k_1\, r A(k_0) \\ k\, r\, \forall nA(n) &:\equiv \forall n(\{k\}(n)\downarrow \wedge \{k\}(n)\, r A(n)). \end{aligned}$$

因此，公式 ∃nA(n) 由一个数 k 实现，当把 k 看作一对 $\langle k_0,k_1\rangle$ 时，我们有 k_0 见证 n，且 k_1 是 $A(k_0)$ 的一个实现子。对于全称量词，我们将 k 看作一个函数，它对每个 n 生成 A(n) 的一个实现子。

然而，在某些情况下，量词是按一致方式处理的，即， ∃nA(n) 的实现子不会明确提供关于 n 的信息，而 ∀nA(n) 的实现子必须对所有 n 一致地实现 A(n)（同一个实现子必须适用于所有 n）。例如，非标准算术的赫布兰实现中内部量词的解释 [3] 如下：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}\, hr\, \exists nA(n) &:\equiv \exists n(\boldsymbol{a}\, hr A(n)) \\ \boldsymbol{a}\, hr\, \forall nA(n) &:\equiv \forall n(\boldsymbol{a}\, hr A(n)). \end{aligned}$$

一致海廷算术 [4]中非计算量词的可实现性解释也是如此。

T. Altenkirch、F. Barbanera、F. Damiani 和 U. de’Liguoro（编）：
《逻辑与类型理论：献给 Stefano Berardi 64 岁生日的论文集》
EPTCS441，2026 年，第 46–61 页，doi:10.4204/EPTCS.441.3

© U. Berger & P. Oliva 本作品采用
知识共享署名许可协议授权。

在其他较新版本的可实现性理论中，情况更加有趣，例如 Aschieri-Berardi 学习可实现性 [1], ，其解释由一个「知识状态」 s 参数化，而实现子只需对状态进行一次更新 —— 证明被视为状态更新变换器。

我们将引入一致可实现性的概念，以捕捉一致量词这一思想。这个新概念以（潜在）实现子的空间和原子谓词的解释为参数，并将上述例子纳入其中，从而厘清它们相同与不同之处。

下文中，我们将区分无约束（或无类型，或一致）量词，即

$$\exists x A(x) \qquad \text{and} \qquad \forall x A(x), \tag{1}$$

以及受限（或有类型）量词

$$\exists^B x A(x) \qquad \text{and} \qquad \forall^B x A(x), \tag{2}$$

其中 B 是一个谓词。

我们主张，形式为 (1) 的无约束量词应始终采用一致可实现性解释，而受限存在量化和全称量化 (2) 则应视为以下表达式的缩写：

$$\exists x(B(x) \wedge A(x)) \qquad \text{and} \qquad \forall x(B(x) \to A(x)), \tag{3}$$

分别如此，因此，它们的解释可由无修饰量词的（一致）解释以及对 B(x) 的解释推出。特别是，在海廷算术海廷算术中，我们将 $\exists^{\mathbb{N}}$nA(n) 和 $\forall^{\mathbb{N}}$nA(n) 作为以下表达式的缩写

$$\exists n(\mathbb{N}(n) \wedge A(n)) \qquad \text{and} \qquad \forall n(\mathbb{N}(n) \to A(n)), \tag{4}$$

因此，我们只需关注谓词 $\mathbb{N}$(n) 的解释。

本文介绍的一致可实现性解释，补充了第二作者近期关于一阶逻辑 [15] 的一致函数解释（ Diller-Nahm 变体）研究。

1.1 海廷算术海廷算术

考虑用三个谓词符号表述的海廷（直觉主义）算术海廷算术：假 $\bot$（零元）、自然数 $\mathbb{N}$ （一元）和等号 $=$ （二元）。这意味着在海廷算术中，我们有三类原子公式：

$$\bot \qquad \text{falsity} \tag{5}$$

$$\mathbb{N}(n) \qquad n \text{ is a number} \tag{6}$$

$$n = m \qquad \text{equality}. \tag{7}$$

我们还假设有两个函数符号：零 0（零元）和后继 succ（一元）。因此，该语言的项是数字：0、succ(0).....，通常将 $\text{succ}^{(n)}(0)$ 记作 $\underline{n}$。

逻辑公理和规则如图1所示（量词规则附有通常的侧条件），它们对应于海廷算术的极小逻辑片段。我们将以下内容视为海廷算术理论的非逻辑公理。对于谓词 $\bot$，我们假设爆炸原理公理模式：

$$\bot \vdash A. \tag{8}$$

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A}\ (\text{logical axiom})$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\ (\wedge\text{-intro}) \qquad \frac{\Gamma \vdash A_1 \wedge A_2}{\Gamma \vdash A_i}\ (\wedge\text{-elim}_i)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}\ (\to\text{-intro}) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \to B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}\ (\to\text{-elim})$$

$$\frac{\Gamma \vdash A(s)}{\Gamma \vdash \exists n A(n)}\ (\exists\text{-intro}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \exists n A(n) \quad \Gamma, A(n) \vdash B}{\Gamma \vdash B}\ (\exists\text{-elim})$$

$$\frac{\Gamma \vdash A(n)}{\Gamma \vdash \forall n A(n)}\ (\forall\text{-intro}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \forall n A(n)}{\Gamma \vdash A(s)}\ (\forall\text{-elim})$$

表1：海廷算术的逻辑公理及规则

等号和 $\mathbb{N}$(n) 假定满足：

$$\forall n(n = n) \qquad \text{（自反性）} \tag{9}$$

$$\forall n, m(n = m \to m = n) \qquad \text{(symmetry)} \tag{10}$$

$$\forall n, i, m(n = i \wedge i = m \to n = m) \qquad \text{(transitivity)} \tag{11}$$

$$\forall n, m(\mathbb{N}(n) \wedge n = m \to \mathbb{N}(m)) \qquad \text{（在等号下对 } \mathbb{N} \text{ 封闭）} \tag{12}$$

算术（皮亚诺）公理如下：

$$\mathbb{N}(0) \qquad (0 \text{ is in } \mathbb{N}) \tag{13}$$

$$\forall n(\mathbb{N}(n) \to \mathbb{N}(\mathsf{succ}(n)) \qquad (\mathbb{N} \text{ closed under successor}) \tag{14}$$

$$\forall^{\mathbb{N}} n, m(\mathsf{succ}(n) = \mathsf{succ}(m) \to n = m) \qquad (\text{successor injective on } \mathbb{N}) \tag{15}$$

$$\forall^{\mathbb{N}} n(\mathsf{succ}(n) \neq 0) \qquad \text{（0 不是 } \mathbb{N} \text{ 中 n 的后继）} \tag{16}$$

其中 $\forall^{\mathbb{N}}$nA 是 $\forall$n($\mathbb{N}$(n) $\to$A) 的缩写。

归纳方案有两种选择，取决于归纳步骤是否受到限制 $\mathbb{N}$：

$$A(0) \wedge \forall^{\mathbb{N}} n(A(n) \to A(\mathsf{succ}(n)) \to \forall^{\mathbb{N}} n A(n). \tag{17}$$

$$A(0) \wedge \forall n(A(n) \to A(\mathsf{succ}(n)) \to \forall^{\mathbb{N}} n A(n). \tag{18}$$

后者看起来比前者弱，但可以将（18）用于 A(n) $\wedge \mathbb{N}$(n)，从而由（18）得到（17）。如果 $\mathbb{N}$(n) 按标准方式解释，那么（17）由通常的原始递归算子实现，而（18）的实现子是一个纯迭代器，无法访问递归参数。（18）表达的是，$\mathbb{N}$ 是包含 0 且对后继运算封闭的最小集合；这正是在形式化处理一般严格正归纳定义时自然得到的归纳方案（例如参见 [7]）。在第2.3节中，我们将讨论在 $\mathbb{N}$(n) 不按标准方式解释时归纳的可实现性。

2 一致可实现性解释

接下来，我们将介绍任意源理论 S 的一般（带参数）可实现性解释。之后，我们会考虑 S 为海廷算术理论或其某种变体的情形。S 的可实现性解释将映入某个目标理论 T。除了要求 T 在直觉主义逻辑的推理规则下封闭，并且具有一个用于（潜在）实现子的类型外，我们不会对 T 提出形式条件；该类型支持函数应用 f(aaa)——其中 aaa 是实现子的元组，结果可能未定义——以及 λ-抽象。也就是说，对于任意项 t[aaa]，都有一个项 λaaa.t[aaa]，使得 T 可以证明

$$(\lambda \boldsymbol{a}.t[\boldsymbol{a}])(\boldsymbol{s}) = t[\boldsymbol{s}] \tag{19}$$

我们用 a↓ 表示 a 不发散。我们不明确规定这些 λ-项是有类型还是无类型，因为两种情况我们都会考虑。除了实现子的类别和自然数的类别（两者可能相同，也可能不同）之外，T 还可能有其他类别和类型；不过，除非它们能提高可读性（例如第 3.2 节和第 3.3 节中的修正可实现性和 Herbrand 可实现性），我们通常会将其省略不写。

定义 2.1（将 $\mathscr{L}$(S) 解释为 $\mathscr{L}$(T) 的基础解释）将 $\mathscr{L}$(S) 解释为 $\mathscr{L}$(T) 的基础解释，为 S 的语言中的每个 n 元谓词符号 P 关联 T 的语言中的一个 (n +m) 元关系 xxx $\lhd_P$ aaa，该关系定义在元组 xxx（元数为 n）与 aaa（元数为 m，其中 m 为某个数）之间。我们称 xxx 被 aaa 对 P 有界。

我们将元组 aaa 视为 P(xxx) 的实现子或见证。xxx 或 aaa 都可以是空（零元）元组。每当需要明确写出空元组时，我们将使用符号 $\langle\rangle$。

记号。若 fff 是一个 m 元组 f1, . .. , f_m，我们用 fff (aaa) 表示 m 元组 f_1(aaa) . . . , f_m(aaa)，用 fff (aaa)↓表示合取 f_1(aaa)↓∧ . . . ∧f_m(aaa)↓。

定义 2.2（一致可实现性解释）给定从 $\mathscr{L}$(S) 到 $\mathscr{L}$(T) 的一个基础解释。对于 S 的每个公式 A（可以含自由变量），关联一个公式（aaa 一致地实现 A）

$$\boldsymbol{a}\ ur A \tag{20}$$

T 的公式，按 A 进行归纳定义。对于原子公式 P(xxx)，解释与基础解释中的定义相同：

$$\boldsymbol{a}\ ur P(\boldsymbol{x}) \ :\equiv\ \boldsymbol{x} \lhd_P \boldsymbol{a}. \tag{21}$$

因此，若 xxx 被 aaa 对 P 有界，则 aaa 一致地实现 P(xxx)。对于复合公式，解释定义如下：

$$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\ ur A \wedge B \ :\equiv\ (\boldsymbol{a}\ ur A) \wedge (\boldsymbol{b}\ ur B) \tag{22}$$

$$\boldsymbol{f}\ ur A \to B \ :\equiv\ \forall \boldsymbol{a}((\boldsymbol{a}\ ur A) \to (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\downarrow) \wedge (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\ ur B)) \tag{23}$$

$$\boldsymbol{a}\ ur \exists x A(x) \ :\equiv\ \exists x(\boldsymbol{a}\ ur A(x)) \tag{24}$$

$$\boldsymbol{a}\ ur \forall x A(x) \ :\equiv\ \forall x(\boldsymbol{a}\ ur A(x)). \tag{25}$$

B通过公式归纳，很容易看出可实现性与代入可交换，*.e.*

$$\boldsymbol{a}\ ur (A[t/x]) \ \equiv\ (\boldsymbol{a}\ ur A)[t/x] \tag{26}$$

前提是 x 不出现在 aaa 中。

注 2.3（全实现子）若实现子是全的（a↓ 始终成立），则蕴含的子句可简化为

$$\boldsymbol{f}\ ur A \to B \ :\equiv\ \forall \boldsymbol{a}((\boldsymbol{a}\ ur A) \to (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\ ur B)). \tag{27}$$

注 2.4（实现受限量词）回顾一下，对于源理论 S 中的任意基本谓词 P(·)，我们引入了受限量词

$$\forall^P \boldsymbol{x} A(\boldsymbol{x}) \ :\equiv \forall \boldsymbol{x}(P(\boldsymbol{x}) \to A(\boldsymbol{x})) \tag{28}$$
$$\exists^P \boldsymbol{x} A(\boldsymbol{x}) \ :\equiv \exists \boldsymbol{x}(P(\boldsymbol{x}) \wedge A(\boldsymbol{x})) \tag{29}$$

如果我们在目标理论 T 中引入以下缩写

$$\forall \boldsymbol{x} \lhd_P \boldsymbol{b}\, \phi(\boldsymbol{b},\boldsymbol{x}) \ :\equiv \forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{x} \lhd_P \boldsymbol{b} \to \phi(\boldsymbol{b},\boldsymbol{x})) \tag{30}$$
$$\exists \boldsymbol{x} \lhd_P \boldsymbol{b}\, \phi(\boldsymbol{b},\vec{x}) \ :\equiv \exists \boldsymbol{x}(\boldsymbol{x} \lhd_P \boldsymbol{b} \wedge \phi(\boldsymbol{b},\boldsymbol{x})), \tag{31}$$

那么我们有

$$\boldsymbol{f}\ ur \forall^P \boldsymbol{x} A(\boldsymbol{x}) \ \Leftrightarrow\ \forall \boldsymbol{b} \forall \boldsymbol{x} \lhd_P \boldsymbol{b}\, (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})\downarrow \wedge \boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})\ ur A(\boldsymbol{x})) \tag{32}$$
$$\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\ ur \exists^P \boldsymbol{x} A(\boldsymbol{x}) \ \Leftrightarrow\ \exists \boldsymbol{x} \lhd_P \boldsymbol{b}\, (\boldsymbol{a}\ ur A(\boldsymbol{x})). \tag{33}$$

在 等号 $\lhd_P$ 的特殊情形下，也就是说 $(\mathrm{xxx} \lhd_P \mathrm{bbb}) \Leftrightarrow (\mathrm{xxx} = \mathrm{bbb})$，这可以简化为（使用 (26)）))

$$\boldsymbol{f}\ ur \forall^P \boldsymbol{x} A(\boldsymbol{x}) \ \Leftrightarrow\ \forall \boldsymbol{b}\, (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})\downarrow \wedge \boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})\ ur A(\boldsymbol{b})) \tag{34}$$
$$\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\ ur \exists^P \boldsymbol{x} A(\boldsymbol{x}) \ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{a}\ ur A(\boldsymbol{b}). \tag{35}$$

注 2.5（一致谓词和公式）如果谓词 P 满足 $\mathrm{xxx} \lhd_P \langle\rangle \equiv \mathrm{P(xxx)}$，就称 P 为一致解释的，或简称一致；如果公式 A 只包含一致谓词，就称 A 为一致公式。由此容易看出，若 A 是一致公式，则公式 $\langle\rangle$ ur A 与 A 在语法上相同（由于 fff 将是空元组，因此可以省略 (bbb)↓）。

定义 2.6（可实现的序列式和公式）对于固定的 $\mathscr{L}$(S) 基础解释，如果存在一个 λ-项 $\mathrm{ttt}[\boldsymbol{\gamma}]$ 属于 T，且 $\boldsymbol{\gamma}$ 是唯一的自由变量，使得序列式 $\Gamma \vdash$ A 可实现，

$$(\boldsymbol{\gamma}\downarrow), (\boldsymbol{\gamma}\ ur \Gamma) \vdash_{\mathbf{T}} (\boldsymbol{t}[\boldsymbol{\gamma}]\downarrow) \wedge (\boldsymbol{t}[\boldsymbol{\gamma}]\ ur A). \tag{36}$$

闭公式 A 可实现，当且仅当序列式 $\vdash_{\mathbf{T}}$ A 可实现。

定理 2.7（可靠性）给定 $\mathscr{L}$(S) 的一个基础解释，若 S 的所有非逻辑公理均可实现，则 S 的所有定理均可实现。

证明。通过对推导进行归纳，可以证明所有可推导的序列式都是可实现的。根据假设，非逻辑公理都是可实现的。由于量词采用一致的处理方式，其解释很直接——利用观察（26）即可。例如：

∃-引言。假设

$$(\boldsymbol{\gamma}\downarrow), (\boldsymbol{\gamma}\ ur \Gamma) \vdash (\boldsymbol{t}[\boldsymbol{\gamma}]\downarrow) \wedge (\boldsymbol{t}[\boldsymbol{\gamma}]\ ur A(s)),$$

由于 (ttt[$\boldsymbol{\gamma}$] ur A(s)) $\equiv$ (ttt[$\boldsymbol{\gamma}$] ur A(x))[s/x], ，我们有

$$(\boldsymbol{\gamma}\downarrow),(\boldsymbol{\gamma}\ ur\Gamma)\vdash(\boldsymbol{t}[\boldsymbol{\gamma}]\downarrow)\wedge\exists x(\boldsymbol{t}[\boldsymbol{\gamma}]\ urA(x))$$

因此

$$(\boldsymbol{\gamma}\downarrow),(\boldsymbol{\gamma}\ ur\Gamma)\vdash(\boldsymbol{t}[\boldsymbol{\gamma}]\downarrow)\wedge(\boldsymbol{t}[\boldsymbol{\gamma}]\ ur\exists xA(x)).$$

逻辑公理。由于我们有:

$$(\boldsymbol{a}\downarrow),(\boldsymbol{a}\ urA)\vdash(\boldsymbol{a}\downarrow)\wedge(\boldsymbol{a}\ urA).$$

$\rightarrow$-引入。假设

$$(\boldsymbol{\gamma}\downarrow),(\boldsymbol{\gamma}\ ur\Gamma),(\boldsymbol{a}\ urA)\vdash(\boldsymbol{t}[\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{a}]\downarrow)\wedge(\boldsymbol{t}[\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{a}]\ urB).$$

我们有

$$(\boldsymbol{\gamma}\downarrow),(\boldsymbol{\gamma}\ ur\Gamma)\vdash(\lambda\boldsymbol{a}.\boldsymbol{t}[\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{a}]\downarrow)\wedge(\lambda\boldsymbol{a}.\boldsymbol{t}[\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{a}]\ urA\rightarrow B)$$

使用 (λaaa.ttt[$\boldsymbol{\gamma}$,aaa])(aaa) $=$ ttt[$\boldsymbol{\gamma}$,aaa]。

$\rightarrow$-消去。假设

$$(\boldsymbol{\gamma}\downarrow),(\boldsymbol{\gamma}\ ur\Gamma)\vdash(\boldsymbol{t}[\boldsymbol{\gamma}]\downarrow)\wedge\forall\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\ urA\rightarrow\boldsymbol{t}[\boldsymbol{\gamma}](\boldsymbol{a})\downarrow\wedge(\boldsymbol{t}[\boldsymbol{\gamma}](\boldsymbol{a})\ urB))$$

and

$$(\boldsymbol{\gamma}\downarrow),(\boldsymbol{\gamma}\ ur\Gamma)\vdash\boldsymbol{s}[\boldsymbol{\gamma}]\downarrow\wedge(\boldsymbol{s}[\boldsymbol{\gamma}]\ urA).$$

Then

$$(\boldsymbol{\gamma}\downarrow),(\boldsymbol{\gamma}\ ur\Gamma)\vdash\boldsymbol{t}[\boldsymbol{\gamma}](\boldsymbol{s}[\boldsymbol{\gamma}])\downarrow\wedge(\boldsymbol{t}[\boldsymbol{\gamma}](\boldsymbol{s}[\boldsymbol{\gamma}])\ urB).$$

其他情形的处理类似。 □

定义 2.2 描述了如何将给定的基础解释扩展为完整解释。在下一节中，我们将考察海廷算术的一些特定基础解释，并展示由此得到的完整解释与海廷算术的各种著名可实现性解释相同（或非常接近）。不过，首先让我们考虑一些关于 n =m、 $\perp$ 和 $\mathbb{N}$(n) 的一般（抽象）基础解释。

2.1 等式的解释 n = m

首先让我们考虑（二元）等号谓词 n = m 的一般解释。在大多数实例中，我们将假设 n =m 被一致地解释。然而，对于 Aschieri-Berardi 学习可实现性，则使用如下形式的非平凡等号解释:

$$(n,m)\lhd_{=}a \quad :\equiv \quad \phi(a)\rightarrow n=m, \tag{37}$$

对于某个公式 ϕ(a)，要使等号公理中的对称性和传递性可实现，就需要存在项 s 和 t，使得

$$\phi(s(a))\vdash_{\mathbf{T}}\phi(a) \qquad \text{(symmetry)} \tag{38}$$

$$\phi(t(a_1,a_2))\vdash_{\mathbf{T}}\phi(a_1)\wedge\phi(a_2) \qquad \text{(transitivity)} \tag{39}$$

而自反性公理可由自反性本身通过弱化推出。关于这一点的更多内容，请参见第 3.5 节（参见命题 3.12 的证明）。

2.2 对假⊥的解释 ⊥

与上文讨论的等号谓词一样，在我们的大多数实例中，都会假设假 ⊥ 是一致解释的。然而，对于经典可实现性（第 3.4 节）和学习可实现性（第 3.5 节），则假设 ⊥ 具有非平凡的解释。考虑一种相当一般的情形，其中 ⊥ 由一元谓词 ψ(a) 作为见证：

$$\langle\rangle \lhd_{\bot} a \quad :\equiv \quad \psi(a). \tag{40}$$

考虑爆炸原理公理模式：

$$\bot \vdash A.$$

我们需要有项 ttt[aaa]（依赖于 A），使得

$$\psi(a) \vdash_{\mathbf{T}} \boldsymbol{t}[a]\ urA. \tag{41}$$

Friedman 的 [10] 和 Dragalin 的 [8] 想法是，也用同一个一元谓词来解释所有原子公式（包括等号），例如：

$$(n,m) \lhd_{=} a \quad :\equiv \quad (n = m) \vee \psi(a). \tag{42}$$

这样，就可以轻松地为每个公式 A 定义 ttt[aaa]。

2.3 解释 ℕ(n)

下文中，我们将考察原子公式 ℕ(n) 的不同解释 $n \lhd_{\mathbb{N}} a$。它们可分类如下：

- 一致解释：在这种情况下，a 是空元组，且 ℕ(n) 总是可实现的 ：

  $$n \lhd_{\mathbb{N}} \langle\rangle \quad :\equiv \quad \text{true},$$

  这相当于将 $\forall^{\mathbb{N}}$nA(n) 和 $\exists^{\mathbb{N}}$nA(n) 分别简单地视为 ∀nA(n) 和 ∃nA(n)（一致量化）。第 3.3 节（Herbrand 可实现性）将采用这种做法，为内部量词赋予一致解释。

- 近似解释：在这种情况下，a 提供了关于 n 的某些部分信息。例如，a 可以是一个包含 n 的有限数集

  $$n \lhd_{\mathbb{N}} a \quad :\equiv \quad n \in a.$$

  Lifschitz可实现性 [17] 就是一个例子。此外，在 Herbrand 可实现性（第 3.3 节）中，对标准自然数 st(n) 的量化（即所谓的外部量词）也采用了这种方法，将 st(n) 解释为

  $$n \lhd_{\mathsf{st}} a \quad :\equiv \quad n \in a.$$

  近似解释的另一个例子是将 ℕ(n) 的实现子视为 n 的上界：

  $$n \lhd_{\mathbb{N}} a \quad :\equiv \quad n \leq a.$$

  这用于有界修正可实现性解释 [9]。

- 精确解释：在这种情况下，a 恰好等于 n。因此，存在一个数 a，使得 n =a，这就构成了 n 是自然数的见证。形式化地：

$$n \lhd_{\mathbb{N}} a \quad :\equiv \quad n = a.$$

这方面的例子包括 Kleene 可实现性解释和 Kreisel 可实现性解释（第 3.1 节和第 3.2 节）。在所有情况下，都必须选择一种解释，使得涉及谓词 $\mathbb{N}$(n) 的所有非逻辑公理都可实现。例如，考虑归纳模式的解释，其中 $n \lhd_{\mathbb{N}} m :\equiv n \leq m$：给定 A(0) 的实现子 ttt，即，

$$\boldsymbol{t}\ urA(0), \tag{43}$$

以及归纳步骤的实现子 $\boldsymbol{\phi}$，

$$\forall m \forall n \leq m \forall \boldsymbol{a}((\boldsymbol{a}\ urA(n)) \to (\boldsymbol{\phi}(m,\boldsymbol{a})\ urA(n+1))), \tag{44}$$

我们必须计算出 $\forall^{\mathbb{N}}$nA(n) 的实现子 $\boldsymbol{\psi}$，即。

$$\forall m \forall n \leq m(\boldsymbol{\psi}(m)\ urA(n)). \tag{45}$$

请注意，实现子 $\boldsymbol{\psi}$(m) 必须对所有 $n \leq m$ 一致地适用。这表明，我们应假定存在一种偏序，使实现子在该偏序下向上封闭

$$\boldsymbol{a} \preceq \boldsymbol{b} \ \to\ \boldsymbol{a}\ urA \ \to\ \boldsymbol{b}\ urA \tag{46}$$

以及一个运算 aaa ∪bbb，它相对于 $\preceq$ 计算 aaa 与 bbb 的上界。然后我们可以用原始递归构造满足 (45) 的 $\boldsymbol{\psi}$：

$$\boldsymbol{\psi}(m) = \begin{cases} \boldsymbol{t} & m = 0 \\ \boldsymbol{\psi}(m-1) \cup \boldsymbol{\phi}(m-1, \boldsymbol{\psi}(m-1)) & m > 0. \end{cases} \tag{47}$$

现在，使用缩写

$$\beta(m) \equiv \forall n \leq m(\boldsymbol{\psi}(m)\ urA(n)), \tag{48}$$

我们看到 (43) 等价于 β(0)，而 (44) 蕴含（取 aaa $=\boldsymbol{\psi}$(m) 并使用 (46)），

$$\forall m(\beta(m) \to \beta(m+1)).$$

因此，由归纳法，$\forall$mβ(m)，即 (45) 成立。

在有限集解释的情形下（$n \lhd_{\mathbb{N}} a \equiv n \in a$，其中 a 遍历自然数的有限集），归纳的实现是类似的，但稍为复杂一些（见第 3.3 节）。

对于精确解释（$n \lhd_{\mathbb{N}} a \equiv n = a$），归纳的实现与 (47) 类似，但不使用并运算：

$$\boldsymbol{\psi}(m) = \begin{cases} \boldsymbol{t} & m = 0 \\ \boldsymbol{\phi}(m-1, \boldsymbol{\psi}(m-1)) & m > 0, \end{cases} \tag{49}$$

其中，对于 ϕ而言，实现该步骤现在意味着

$$\forall m \forall \boldsymbol{a}((\boldsymbol{a}\ urA(m)) \to (\boldsymbol{\phi}(m,\boldsymbol{a})\ urA(m+1))). \tag{50}$$

3 个实例

在本节中，我们考虑基础解释的若干具体选择。

3.1 Kleene 可实现性

我们先来考察 Kleene 最初的可实现性概念，它基于部分组合代数 $\mathscr{K}_1$。在这种情况下，所有实现子都是自然数，我们将部分应用运算 e(aaa) 写作 {e}(aaa)。此时的目标理论是海廷算术，但采用传统表述，即不含谓词 $\mathbb{N}$。

定义 3.1（Kleene 基础解释）我们考虑海廷算术的三个谓词符号的如下基础解释：

$$\begin{aligned} \langle\rangle \lhd_{\perp} \langle\rangle \quad &:\equiv \ \perp \\ n \lhd_{\mathbb{N}} m \quad &:\equiv \ n = m \\ (n,m) \lhd_{=} \langle\rangle \quad &:\equiv \ n = m. \end{aligned} \tag{51}$$

接下来，我们将“aaa r A”记作由 Kleene 第一代数及基础解释 (51) 得到的一致可实现性解释实例“aaa ur A”（定义 2.2）。

下面的命题表明，上述实例化实质上给出了克莱尼实现解释[1]：

命题 3.2（Kleene 可实现性 **[11]**）以下等价关系成立：

$$\begin{aligned} \langle\rangle \, r\,(n=m) &\ \Leftrightarrow\ n=m \\ \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\, r A\wedge B &\ \Leftrightarrow\ (\boldsymbol{a}\, r A)\wedge(\boldsymbol{b}\, r B) \\ \boldsymbol{b}\, r A\to B &\ \Leftrightarrow\ \forall \boldsymbol{a}((\boldsymbol{a}\, r A)\to(\{\boldsymbol{b}\}(\boldsymbol{a})\downarrow\wedge\{\boldsymbol{b}\}(\boldsymbol{a})\, r B)) \\ m,\boldsymbol{a}\, r \exists^{\mathbb{N}} n A(n) &\ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{a}\, r A(m) \\ \boldsymbol{a}\, r \forall^{\mathbb{N}} n A(n) &\ \Leftrightarrow\ \forall n(\{\boldsymbol{a}\}(n)\downarrow\wedge\{\boldsymbol{a}\}(n)\, r A(n)). \end{aligned}$$

证明。显然。受限量词 $\exists^{\mathbb{N}}$nA(n)和 $\forall^{\mathbb{N}}$nA(n)的等价关系由注释（2.4）推出。□

命题 3.3（Kleene 可实现性的可靠性）所有
海廷算术的定理都是 Kleene 可实现
的。
证明。可以通过元组的可计算编码转用 Kleene 的原始证明，也可以使用一般的可靠性定理（定理 2.7），将问题归结为证明海廷算术的非逻辑公理是可实现的。等号的自反性、对称性和传递性公理不包含谓词 $\mathbb{N}$，因此其解释就是它们自身。归纳方案的可实现性将在第2.3节讨论。其余皮亚诺公理要么被翻译为自身，要么由恒等函数实现，正如备注 2.4 所示。□

[1]区别（无关紧要）在于，Kleene 将实现子的元组编码为一个单独的数。

3.2 Kreisel 修正可实现性

我们也可以不用 Kleene 第一代数 $\mathscr{K}_1$，而改用哥德尔有限类型原始递归泛函，并在哥德尔系统 $\mathscr{T}$ 中将其形式化。在这种情况下，实现子是系统 $\mathscr{T}$ 的项，而应用 t(s) 就是通常的函数应用 t(s)，其中 $t:\rho\to\tau$，$s:\rho$。与 Kleene 可实现性的关键区别在于，现在所有实现子都是全函数，且应用是全函数运算。修正可实现性的基础解释仍为（51），与 Kleene 的情形相同。目标系统 T 现在是有限类型海廷算术 HA^ω [19]（或者是它的某个版本，具体取决于源系统 S 的确切选择；S 可以是海廷算术理论 HA 或其某个版本 $^\omega$）。

对于由基础解释（51）得到的原始递归泛函所构成的可实现性解释“aaa ur A”（定义 2.2），我们将其记作“aaa mr A”。

定义 3.4 对于海廷算术的每个公式 A，我们按如下方式归纳地关联一个类型元组 $\boldsymbol{\tau}_A$：对于原子公式，有

$$\boldsymbol{\tau}_\bot := \langle\rangle \qquad \boldsymbol{\tau}_{n=m} := \langle\rangle \qquad \boldsymbol{\tau}_{\mathbb{N}(n)} := \mathbf{nat}$$

并且归纳地

$$\boldsymbol{\tau}_{A\wedge B} := \boldsymbol{\tau}_A,\boldsymbol{\tau}_B \qquad \boldsymbol{\tau}_{A\to B} := \boldsymbol{\tau}_A\to\boldsymbol{\tau}_B$$
$$\boldsymbol{\tau}_{\exists nA} := \boldsymbol{\tau}_A \qquad \boldsymbol{\tau}_{\forall nA} := \boldsymbol{\tau}_A.$$

其中，对于类型元组 $\boldsymbol{\sigma}=\sigma_1,\ldots,\sigma_n$ 和 $\boldsymbol{\rho}=\rho_1,\ldots,\rho_m$，我们定义

$$\boldsymbol{\sigma}\to\boldsymbol{\rho} := \sigma_1\to\ldots\to\sigma_n\to\rho_1,\ldots,\sigma_1\to\ldots\to\sigma_n\to\rho_m.$$

显然，若 aaa mr A，则 aaa 的类型为 $\boldsymbol{\tau}_A$，我们有时将其写作 $\mathrm{aaa}^{\boldsymbol{\tau}_A}$ mr A。

命题 3.5（Kreisel 修正可实现性 **[12, 13]**）以下等价关系成立：

$$\langle\rangle\ mr\,(n=m) \ \Leftrightarrow\ n=m$$
$$\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{\tau}_A},\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{\tau}_B}\ mr A\wedge B \ \Leftrightarrow\ (\boldsymbol{a}\ mr A)\wedge(\boldsymbol{b}\ mr B)$$
$$\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{\tau}_A\to\boldsymbol{\tau}_B}\ mr A\to B \ \Leftrightarrow\ \forall\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{\tau}_A}((\boldsymbol{a}\ mr A)\to(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\ mr B))$$
$$m^{\mathbf{nat}},\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{\tau}_A}\ mr\exists n^{\mathbb{N}}A(n) \ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{a}\ mr A(m)$$
$$\boldsymbol{f}^{\mathbf{nat}\to\boldsymbol{\tau}_A}\ mr\forall^{\mathbb{N}}nA(n) \ \Leftrightarrow\ \forall n^{\mathbf{nat}}(\boldsymbol{f}(n)\ mr A(n)).$$

证明。此证明与命题 3.2 的证明非常相似，只是现在实现子都是全定义的，因此可以省略定义性陈述。□

注 3.6（前提独立性）Kreisel 引入修正可实现性的原因之一，是它能实现以下前提独立性模式

$$(A\to\exists^{\mathbb{N}}xB(x))\to\exists^{\mathbb{N}}x(A\to B(x)) \tag{52}$$

其中 A 是一个不含自由变元 x 的否定公式。若在 (52) 中删去相对于 $\mathbb{N}$ 的相对化，那么只要接受目标系统中的同一模式，所得模式仍然是修正可实现的。这是因为

$$\boldsymbol{f}\ mr\,(A\to\exists xB(x))\to\exists x(A\to B(x))$$

等价于

$$\forall\boldsymbol{b}\,((\langle\rangle\ mr A\to\exists x(\boldsymbol{b}\ mr B(x)))\to\exists x(\langle\rangle\ mr A\to\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})\ mr B(x)))$$

它在.....时 为 fff 选择恒等函数，可由同一模式的另一实例推出 .

3.3 Herbrand 可实现性

对于 Herbrand（非标准）可实现性解释 [3]，我们考虑海廷算术的一个扩展，并增加一个额外的谓词符号 st(·)。直观上，$\mathbb{N}$(n) 表示任意自然数，无论标准或非标准，而 st(n) 表示标准自然数。然后，我们取全体原始递归泛函$\mathscr{T}^*$，并用星类型加以扩展，τ^*表示非空有限集，以及如下对海廷算术原子公式的基础解释：

$$\begin{array}{rcl} \langle\rangle \lhd_\bot \langle\rangle & :\equiv & \bot \\ n \lhd_{\mathbb{N}} \langle\rangle & :\equiv & \mathsf{true} \\ n \lhd_{\mathsf{st}} S & :\equiv & n \in S \\ (n,m) \lhd_= \langle\rangle & :\equiv & n = m. \end{array} \tag{53}$$

我们用“aaa hr A”表示从 $\mathscr{T}^*$ 使用基础解释 (53) 得到的可实现性解释“aaa ur A”（定义 2.2）。

命题 3.7（Herbrand 可实现性 **[3]** – 变体）成立以下等价关系：

$$\begin{array}{rcl} \langle\rangle\, hr\,(n=m) & \Leftrightarrow & n=m \\ \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{\tau}_A}, \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{\tau}_B}\, hr\, A \wedge B & \Leftrightarrow & (\boldsymbol{a}\, hr\, A) \wedge (\boldsymbol{b}\, hr\, B) \\ \boldsymbol{f}^{\boldsymbol{\tau}_A \to \boldsymbol{\tau}_B}\, hr\, A \to B & \Leftrightarrow & \forall \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{\tau}_A}((\boldsymbol{a}\, hr\, A) \to (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\, hr\, B)) \\ \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{\tau}_A}\, hr\, \exists^{\mathbb{N}} n A(n) & \Leftrightarrow & \exists n(\boldsymbol{a}\, hr\, A(n)) \\ \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{\tau}_A}\, hr\, \forall^{\mathbb{N}} n A(n) & \Leftrightarrow & \forall n(\boldsymbol{a}\, hr\, A(n)) \\ S^{\mathbb{N}^*}, \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{\tau}_A}\, hr\, \exists^{\mathsf{st}} n A(n) & \Leftrightarrow & \exists n \in S(\boldsymbol{a}\, hr\, A(n)) \\ \boldsymbol{f}^{\mathbb{N}^* \to \boldsymbol{\tau}_A}\, hr\, \forall^{\mathsf{st}} n A(n) & \Leftrightarrow & \forall S \forall n \in S(\boldsymbol{f}(S)\, hr\, A(n)). \end{array}$$

注意，上述解释在两方面不同于原始的 Herbrand 解释 [3]。首先，我们的目标理论中没有标准谓词 st(x)，因为它在解释为 n ∈ S 时被消去了。因此，我们不要求对 A → B 和 $\forall^{\mathsf{st}}$ nA(n) 的解释中的量化如 [3] 中那样遍及标准对象。

其次，[3] 中定义的 Herbrand 可实现性里的全称量化 $\forall^{\mathsf{st}}$nA(n) 并未按上述方式解释，而是解释为

$$\boldsymbol{g}^{\mathbb{N} \to \boldsymbol{\tau}_A}\, hr\, \forall^{\mathsf{st}} n A(n) \;\Leftrightarrow\; \forall n(\boldsymbol{g}(n)\, hr\, A(n)).$$

然而，人们可以很容易地从满足 $\mathrm{fff}^{\mathbb{N}^* \to \boldsymbol{\tau}_A}$

$$\forall S \forall n \in S(\boldsymbol{f}(S)\, hr\, A(n)) \tag{54}$$

转到满足 $\mathrm{ggg}^{\mathbb{N} \to \boldsymbol{\tau}_A}$

$$\forall n(\boldsymbol{g}(n)\, hr\, A(n)) \tag{55}$$

反之亦然，即 ggg(n) := fff ({n}) 且 fff (S) := $\bigcup_{n \in S}$ ggg(n)，利用 Herbrand 可实现性的单调性（详情请见 [16]）。

注 3.8（析取）定义

$$A \vee B \quad :\equiv \quad \exists n\,((n = 0 \to A) \wedge (n \neq 0 \to B)) \tag{56}$$

有

$$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\; hr A \vee B \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{a}\; hr A \vee \boldsymbol{b}\; hr B \tag{57}$$

这与 *[3]* 中对析取的非构造性解释一致。

3.4 经典可实现性

在之前所有示例中，假（⊥）的解释都使得否定公式 ¬A（即 A → ⊥ 的缩写）不需要任何实现子。不过，我们可以通过赋予 ⊥ 某种计算含义，从否定公式中提取计算内容；这可以看作是修正可实现性与 Friedman 和 Dragalin 的 A-翻译 [8, 10] 的结合。例如，考虑以下对海廷算术（HA）原子公式的基础解释，其中 P(a$^\tau$) 是一个新的（一元）谓词符号：

$$\begin{aligned} \langle\rangle \lhd_\perp a^\tau \quad &:\equiv \quad P(a) \\ n \lhd_{\mathbb{N}} m^{\mathbb{N}} \quad &:\equiv \quad n = m \\ (n,m) \lhd_= a^\tau \quad &:\equiv \quad (n = m) \vee P(a). \end{aligned} \tag{58}$$

如果经典可实现性仅在双重否定翻译之后应用，那么实际上我们处于极小逻辑中（也就不再需要处理由矛盾可推出任意命题 ⊥ →A）；此时，原子公式 n =m 可以得到一种更简单的解释

$$(n,m) \lhd_= \langle\rangle \quad :\equiv \quad n = m. \tag{59}$$

我们将通过基础解释 (58) 从原始递归泛函得到的可实现性解释“aaa ur A”（定义 2.2）记作“aaa mr$_\perp$A”。

定义 3.9 对于海廷算术的每个公式 A，我们按如下方式归纳地关联一个类型元组 $\boldsymbol{\tau}_A$：对于原子公式，有

$$\boldsymbol{\tau}_\perp := \tau \qquad \boldsymbol{\tau}_{n=m} := \tau \qquad \boldsymbol{\tau}_{\mathbb{N}(n)} := \mathbb{N}$$

并且归纳地

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_{A\wedge B} &:= \boldsymbol{\tau}_A,\boldsymbol{\tau}_B & \qquad \boldsymbol{\tau}_{A\to B} &:= \boldsymbol{\tau}_A \to \boldsymbol{\tau}_B \\ \boldsymbol{\tau}_{\exists nA} &:= \boldsymbol{\tau}_A & \qquad \boldsymbol{\tau}_{\forall nA} &:= \boldsymbol{\tau}_A. \end{aligned}$$

命题 3.10（经典修正可实现性 **[5, 6]**）以下等价关系成立：

$$\begin{aligned} a\; mr_\perp \perp \;&\Leftrightarrow\; P(a) \\ a\; mr_\perp (n = m) \;&\Leftrightarrow\; (n = m) \vee P(a) \\ \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{\tau}_A},\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{\tau}_B}\; mr_\perp A \wedge B \;&\Leftrightarrow\; (\boldsymbol{a}\; mr_\perp A) \wedge (\boldsymbol{b}\; mr_\perp B) \\ \boldsymbol{f}^{\boldsymbol{\tau}_A\to\boldsymbol{\tau}_B}\; mr_\perp A \to B \;&\Leftrightarrow\; \forall \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{\tau}_A}((\boldsymbol{a}\; mr_\perp A) \to (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\; mr_\perp B)) \\ m^{\mathbb{N}},\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{\tau}_A}\; mr_\perp \exists^{\mathbb{N}} nA(n) \;&\Leftrightarrow\; \boldsymbol{a}\; mr_\perp A(m) \\ \boldsymbol{f}^{\mathbb{N}\to\boldsymbol{\tau}_A}\; mr_\perp \forall^{\mathbb{N}} nA(n) \;&\Leftrightarrow\; \forall^{\mathbb{N}} n(\boldsymbol{f}(n)\; mr_\perp A(n)). \end{aligned}$$

赋予假（⊥）计算内容的主要动机是，现在否定公式¬¬∃aτP(a)需要一个实现子 ϕ，即：

$$\phi \; mr_{\bot} \neg\neg\exists a^{\tau} P(a) \;\equiv\; \forall f^{\tau\to\tau}(\forall a(P(a)\to P(f(a)))\to P(\phi(f))). \tag{60}$$

因此，如果 ϕ $mr_{\bot}$ ¬¬∃aτP(a)，那么 P(ϕ(λa.a))。

3.5 Aschieri-Berardi 学习可实现性

现在假设哥德尔的系统 $\mathcal{T}$ 扩展了一个新的基类型 S，表示“状态”。我们将这个扩展称为 $\mathcal{T}$[S]。对于状态 s 下的学习可实现性，我们取 $\mathcal{T}$[S] 的项作为实现子；对于某个固定状态 s ∈S，原子公式的基础解释如下：

$$\begin{aligned} \langle\rangle \lhd^{s}_{\bot} \gamma \quad &:\equiv\; \gamma(s)\neq s \\ n \lhd^{s}_{\mathbb{N}} \alpha \quad &:\equiv\; \alpha(s)=n \\ (n,m) \lhd^{s}_{=} \gamma \quad &:\equiv\; (\gamma(s)=s)\to(n=m), \end{aligned} \tag{61}$$

其中 α: S $\to\mathbb{N}$，而 γ: S → S。因此，如果 s 不是 γ 的不动点，那么假（⊥）由状态变换器 γ 实现。换句话说，如果 γ 能从中学到东西，那么到达一个收缩完全没有问题（γ(s) 是改进后的知识状态）。类似地，只要 s 不是 γ 的不动点，n =m 就可能为假。

直观地说，状态 s 将记录三元组 ⟨P ¯m,n⟩，其中 n 是 ∃nP(¯m,n) 的见证。我们从空状态（什么都不知道）开始，而从证明中提取出的状态变换器 γ 会用新信息更新给定状态，或者返回同一状态（不需要新信息）；在后一种情况下，便到达一个不动点。这使得可实现性能够解释关于 Σ^0_1 的任意排中律实例，即形如 ∃nP(¯m,n) 的公式。

对于由 $\mathcal{T}$[S] 和基础解释 (61)（其中 s ∈ S 是某个固定状态）得到的一致可实现性解释“aaa ur A”（定义 2.2）的实例，我们记作“aaa $\Vdash_s$ A”。

定义 3.11 对于海廷算术 HA 的每个公式 A，我们按照以下方式归纳地关联一个类型元组 $\boldsymbol{\tau}_A$：对于原子公式，我们有

$$\boldsymbol{\tau}_{\bot} := \mathbf{S}\to\mathbf{S} \qquad \boldsymbol{\tau}_{n=m} := \mathbf{S}\to\mathbf{S} \qquad \boldsymbol{\tau}_{\mathbb{N}(n)} := \mathbf{S}\to\mathbb{N}$$

并以归纳方式

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_{A\wedge B} &:= \boldsymbol{\tau}_A,\boldsymbol{\tau}_B & \boldsymbol{\tau}_{A\to B} &:= \boldsymbol{\tau}_A\to\boldsymbol{\tau}_B \\ \boldsymbol{\tau}_{\exists nA} &:= \boldsymbol{\tau}_A & \boldsymbol{\tau}_{\forall nA} &:= \boldsymbol{\tau}_A. \end{aligned}$$

命题 3.12（Aschieri-Berardi 学习可实现性）以下等价关系成立：

$$\begin{aligned} \gamma^{\mathbf{S}\to\mathbf{S}} \Vdash_s (n=m) &\;\Leftrightarrow\; (\gamma(s)=s)\to(n=m) \\ \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{\tau}_A},\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{\tau}_B} \Vdash_s A\wedge B &\;\Leftrightarrow\; (\boldsymbol{a}\Vdash_s A)\wedge(\boldsymbol{b}\Vdash_s B) \\ \boldsymbol{f}^{\boldsymbol{\tau}_A\to\boldsymbol{\tau}_B} \Vdash_s A\to B &\;\Leftrightarrow\; \forall\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{\tau}_A}((\boldsymbol{a}\Vdash_s A)\to(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\Vdash_s B)) \\ \alpha^{\mathbf{S}\to\mathbb{N}},\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{\tau}_A} \Vdash_s \exists^{\mathbb{N}} nA(n) &\;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{a}\Vdash A(\alpha(s)) \\ \boldsymbol{f}^{(\mathbf{S}\to\mathbb{N})\to\boldsymbol{\tau}_A} \Vdash_s \forall^{\mathbb{N}} nA(n) &\;\Leftrightarrow\; \forall\alpha^{\mathbf{S}\to\mathbb{N}}\forall^{\mathbb{N}} n(\alpha(s)=n\to\boldsymbol{f}(\alpha)\Vdash_s A(n)). \end{aligned}$$

证明。我们来看一些非平凡的情形。例如，等号的等式传递公理要求存在一个项 $t[\gamma_1,\gamma_2]$，使得

$$(\gamma_1(s)=s\to n=i)\wedge(\gamma_2(s)=s\to i=m)\to(t[\gamma_1,\gamma_2](s)=s\to n=m).$$

Berardi-Aschieri 已证明，[1]存在一种状态的“并集” $\cup$，使得 $t[\gamma_1,\gamma_2](s):=\gamma_1(s)\cup\gamma_2(s)$ 满足

$$t[\gamma_1,\gamma_2](s)=s\to\gamma_1(s)=s\wedge\gamma_2(s)=s.$$

我们来看 $\forall^{\mathbb{N}}nA(n)$ 的情形。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}^{\mathbb{N}\to\boldsymbol{\tau}_A}\Vdash_s\forall^{\mathbb{N}}nA(n) &\equiv \boldsymbol{f}\,ur\forall n(\mathbb{N}(n)\to A(n))\\ &\overset{\mathrm{D}}{\equiv}\overset{2.2}{} \forall n(\forall\alpha((n\lhd^s_{\mathbb{N}}\alpha)\to(\boldsymbol{f}(\alpha)\downarrow\wedge\boldsymbol{f}(\alpha)\,urA(n))))\\ &\overset{(51)}{\equiv} \forall n(\forall\alpha(\mathbb{N}(n)\wedge(\alpha(s)=n)\to(\boldsymbol{f}(\alpha)\,urA(n))))\\ &\Leftrightarrow\ \forall\alpha^{\mathbf{S}\to\mathbb{N}}\forall^{\mathbb{N}}n((\alpha(s)=n)\to\boldsymbol{f}(\alpha)\Vdash_s A(n)).\end{aligned}$$

其他情形都很直接。 □

注 3.13 学习可实现性中的全称量化 $\forall^{\mathbb{N}}nA(n)$ 并非按上述方式解释，而是解释为

$$\boldsymbol{g}^{\mathbb{N}\to\boldsymbol{\tau}_A}\Vdash_s\forall^{\mathbb{N}}nA(n)\ \Leftrightarrow\ \forall^{\mathbb{N}}n(\boldsymbol{g}(n)\Vdash_s A(n)).$$

然而，很容易看出，可以轻松地从满足 $\mathrm{fff}^{(\mathbf{S}\to\mathbb{N})\to\boldsymbol{\tau}_A}$ 得到

$$\forall\alpha^{\mathbf{S}\to\mathbb{N}}\forall^{\mathbb{N}}n((\alpha(s)=n)\to\boldsymbol{f}(\alpha)\Vdash_s A(n)) \tag{62}$$

满足 $\mathrm{ggg}^{\mathbb{N}\to\boldsymbol{\tau}_A}$

$$\forall^{\mathbb{N}}n(\boldsymbol{g}(n)\Vdash_s A(n)) \tag{63}$$

反之亦然，即 $\mathrm{ggg}(n):=\mathrm{fff}(\lambda s.n)$，且 $\mathrm{fff}(\alpha):=\mathrm{ggg}(\alpha(s))$。

4 结论

我们引入了一致可实现性，将其定义为一族可实现性解释：其中，计算内容完全由对理论基本谓词的解释产生，而量词则以一致的方式解释。

一致表述的一个优点是，可以建立一般形式的可靠性（定理 2.7），因此，只需证明涉及原始谓词的非逻辑公理是可实现的，即可得到特定实例的可靠性。另一个优点是，只要任意经典有效公式仅包含以一致方式解释的原始谓词，就可以将其作为公理加入，因为这类公式由其自身解释（注 2.5）。

我们讨论了五种可以用这种方式建模的具体可实现性解释：Kleene 数可实现性、Kreisel 修正可实现性、非标准算术的一种 Herbrand 可实现性变体、基于 Friedman-Dragalin 翻译的“经典”可实现性，以及 Aschieri 和 Berardi 提出的有状态“学习”可实现性。为简化起见，我们只考虑了这些

针对一阶源理论 S 的解释，但其中大多数都可以轻松扩展到所有有限类型。

一致量词的思想也出现在二阶海廷算术 [19]的可实现性中，以及 Krivine 的经典可实现性 [14]中。不过，Krivine 的解释并不完全符合我们的框架，因为它对逻辑常项的处理方式有所不同。Schwichtenberg 的方法 [18] 则将一致性的思想推得更远，其中也考虑了命题联结词的一致版本。在类型论方面，一致性的思想通过交类型 [2]体现出来。

进一步的工作。我们讨论过的一些一致可实现性实例，例如 Herbrand 可实现性和“学习”可实现性，并不完全等同于其原始表述。因此，必须仔细验证它们的可靠性。另一个重要问题是保守性：将某种解释表达为一致可实现性的一个实例，通常需要更丰富的语言，其中包含带限定和无约束量词。如上所述，这种扩展后的语言允许加入新的公理，这些公理本身可以是可实现的，也可以是在经典意义下有效且等价于其可实现性解释的，但无法在原理论中表述。例如，一致公式的双重否定消去，以及一种前提独立模式 (52) 的变体，其中带限定存在量词被无约束量词取代。这引出了一个问题：扩展后的理论是否仍然是原理论的保守扩张。

参考文献

[1] F. Aschieri & S. Berardi（2010）：基于交互式学习的可实现性：带 EM 的海廷算术。LogicalMethodsinComputerScience6（第 3 期，论文 19），第 1–22 页，doi:10.2168/LMCS-6(3:19)2010。[2] H. Barendregt, , M. Coppo & M. Dezani-Ciancaglini（1983）：滤子λ模型与类型赋值完备性。TheJournalofSymbolicLogic48(4)，第 931–940 页，doi:10.2307/2273659。可在 http://www.di.unito.it/~dezani/papers/bcd.pdf 获取。[3] B. van den Berg, E. Briseid & B. Safarik（2012）：非标准算术的函数解释。AnnalsofPureandAppliedLogic163(12)，第 1962–1994 页，doi:10.1016/j.apal.2012.07.003。[4] U. Berger（2005）：一致海廷算术。AnnalsofPureandAppliedLogic133，第 125–148 页，doi:10.1016/j.apal.2004.10.006。[5] U. Berger & P. Oliva（2002）：修正巴递归。BRICS Report Series RS-02-14（23 页），BRICS – Basic Research in Computer Science。可在 http://www.brics.dk/RS/02/14/BRICS-RS-02-14. ps.gz 获取。[6] U. Berger & P. Oliva（2005）：修正巴递归与经典依赖选择。LectureNotesinLogic 20，第 89–107 页，doi:10.1017/9781316755860.004。[7] U. Berger & H. Tsuiki（2021）：直觉主义不动点逻辑。AnnalsofPureandAppliedLogic172(3)，第 1–56 页，doi:10.1016/j.apal.2020.102903。可在 https://arxiv.org/abs/2002.00188 获取。[8] A. G. Dragalin（1980）：新型可实现性与马尔可夫规则。Dokl.Akad.Nauk.SSSR（俄文）251，第 534–537 页。英文译文：Soviet Math. Dokl. 21，第 461-464 页（1980）。[9] F. Ferreira & A. Nunes（2006）：有界修正可实现性。《符号逻辑杂志》71，第 329–346 页，doi:10.2178/jsl/1140641178。[10] H. Friedman（1978）：经典与直觉主义可证明递归函数。载于 D. Scott & G. Müller 编：《HigherSetTheory》，LectureNotesinMathematics669，施普林格，柏林，第 21–28 页。[11] S. C. Kleene（1945）：直觉主义数论的解释。《符号逻辑杂志》10，第 109–124 页。

[12] G. Kreisel（1959）：通过有限类型构造泛函解释分析。载于 A. Heyt- ing 编：《ConstructivityinMathematics》，North Holland，阿姆斯特丹，第 101–128 页。[13]G. Kreisel（1962）：关于直觉主义谓词逻辑的弱完备性。《符号逻辑杂志》27，第 139–158 页，doi:10.2307/2964110。[14]J. Krivine（2009）：经典逻辑中的可实现性。载于：Interactive models of computation and program be- haviour，27，Panoramas et synthèses，法国数学会。[15]P. Oliva（2025）：一致泛函解释。载于：Crossroadsof Computabilityand Logic: Insights, Inspirations,andInnovations，第 88–103 页，doi:10.1007/978-3-031-95908-0。[16] P. Oliva & C. Xu（2020）：关于赫布兰德泛函解释。MathematicalLogicQuarterly66，第 91–98 页，doi:10.1002/malq.201900067。[17]J. van Oosten（1990）：Lifschitz可实现性。《符号逻辑杂志》55(2)，第 805–821 页，doi:10. 2307/2274666。[18] H. Schwichtenberg & S. S. Wainer（2012）：证明与计算。剑桥大学出版社，doi:10. 1017/CBO9781139031905。[19] A. S. Troelstra（1973）：直觉主义算术与分析的元数学研究。Lecture NotesinMathematics344，施普林格，柏林，doi:10.1007/BFb0066739。