面向具有显式宇宙多态性的类型论的广义代数理论

Marc Bezem卑尔根大学
Marc.Bezem@uib.no

ThierryCoquand Peter Dybjer查尔姆斯理工大学和哥德堡大学 Thierry.Coquand@cse.gu.se
peterd@chalmers.se

Mart´ın Escard´o伯明翰大学
m.escardo@bham.ac.uk

我们提出了与论文《具有显式宇宙多态性的类型理论》中两种类型论的略作修改版本相对应的广义代数理论。首先，我们提出一种带额外结构的带族范畴的广义代数理论，它对应于具有外部宇宙塔的 Martin-L¨öf 类型论。随后，我们提出一种带额外结构的按层索引的带族范畴的广义代数理论，它对应于具有显式宇宙多态性的 Martin-L¨öf 类型论：一种包含宇宙层级判断、内部索引的宇宙以及层级索引的积的理论。由此，我们将这两种理论分别抽象刻画为其对应广义代数理论的初始模型。因此，我们得以从类型论的文法和推理规则等细节中抽象出来，并凸显其高层结构。更广泛地说，本工作可视为一个案例研究，探讨一种基于广义代数理论和带族范畴的统一范畴逻辑方法。我们还讨论了这项工作与 Voevodsky 的初始性猜想项目的相关性。

1 引言

在我们关于《具有显式宇宙多态性的类型理论》的论文 [5] 中，我们提出了 Martin-L¨of 类型论的若干扩展，使其支持宇宙多态性。我们遵循 Courant 的方法 [14]，并加入了宇宙层级判断：

$$l \text{ level} \qquad\qquad l = l'$$

将其添加到类型论通常的判断形式中。此外，所有判断都可以依赖宇宙层级变量，以及在上下文中声明的普通变量。我们强调，在我们的设定中，宇宙层级并不构成一种类型；相反，我们加入了上述判断形式[1]。为了以受控的方式恢复部分丢失的表达能力，我们在理论中加入了层级索引的积[α]A，其中 A 是类型族（α层级）。

本文为上述论文中的两个理论提供了另一种表述（略作修改）：Martin-L¨of 带外部宇宙塔的类型论 $\mathrm{TT}^{\mathrm{tower}}$，以及 Martin-L¨of 带显式宇宙多态性的类型论 $\mathrm{TT}^{\mathrm{up}}$，如上一段所述。我们给出相应的广义代数理论（gats） Σ^{tower} 和 Σ^{up}。广义代数理论由 Cartmell [10, 11]引入，是对多排序代数理论的推广，其中排序符号和算子符号可以具有依赖类型。

[1]在 Agda 中，宇宙层级构成一种类型，不过 Agda 最近在 2.6.4 版本中引入了一个选项，可以禁用宇宙层级构成类型的功能 [34]）。然而，目前尚不清楚该选项是否会产生与我们相同的理论。

T. Altenkirch、F. Barbanera、F. Damiani 和 U. de'Liguoro（编）：《逻辑与类型理论：献给 Stefano Berardi 64 岁生日的论文集》，EPTCS441，2026 年，第 62–82 页，doi:10.4204/EPTCS.441.4

© M. Bezem、Th. Coquand、P. Dybjer 和 M. Escard´o 本作品采用知识共享署名许可协议授权。

在第2节中，我们将介绍 Σ^{tower}，即带族范畴（cwfs） [16] 的无穷基广义代数理论，它具有 Martin-L¨of 类型论的小类型构造子（Π、Σ、$\mathrm{N}_0, \mathrm{N}_1, \mathrm{N}$、W、Id）所需的额外结构，以及由外部自然数 $l \in \mathbb{N}$ 索引的宇宙塔 U_l。带族范畴是依赖类型论基本规则的模型：上下文形成、上下文态射形成、类型和项中的代换、投影态射、假设。（注意，我们既用 Σ 表示 Σ-类型，也用它表示（对）广义代数理论的表述。根据上下文，应该可以清楚地判断具体指哪一种。）

在第3节中，我们将介绍 Σ^{up}，即一种有限基范畴代数理论，它描述了带有额外结构的层级索引带族范畴，用于 Martin-L¨of 类型论中的小类型构造子以及按层索引的宇宙。一个索引带族范畴由一个基范畴 $\mathscr{C}$ 和一个取值于带族范畴的预层组成

$$P : \mathscr{C}^{\text{op}} \to \mathrm{CwF}$$

通过令 $\mathscr{C}$ 为一个层级单类型带族范畴（ucwf）的上下文范畴，并为 CwF 配备小类型构造子的额外结构，我们得到一个宇宙多态性的模型。然后，我们再添加按层索引的宇宙和按层索引的类型乘积的额外结构。

通过带族范畴的广义代数理论来呈现类型论，是一种比通过文法和推理规则来呈现更高层次的概念。这是因为广义代数理论只记录重要规则，并突出范畴结构。若要用文法和推理规则构造初始模型，我们需要作出各种句法选择，并纳入许多记账规则，例如一般的相等规则。可选方案将会很多。我们希望，高层次的抽象能够使我们证明不同方案之间的等价，并主张所研究的数学理论确实存在唯一的抽象概念。

更广义地说，本研究可视为一项基于广义代数理论和上下文范畴的范畴逻辑案例研究。以更规整的数学概念取代传统演绎系统的想法，可追溯到范畴逻辑的早期，Lawvere [24]曾对此有所设想：

> 我在1963年提出的观察（Eilenberg 和 Kelly 在拉霍亚的1965年提及过）：笛卡尔闭范畴是类型论与命题逻辑的一种共同抽象。这一观察使得证明论的核心问题能够得到不变的代数处理，尽管此后证明论学者的大多数研究仍依赖于与具体表述相关的形式。
>
> ...

Voevodsky [40]也表达了类似的观点：

> 我将谈谈类型系统。对于数学家来说，这很难理解，因为类型系统并不是一个数学概念。我会花一点时间解释我如何从数学角度看待“类型系统”。.....
>
> 论题 0. 任何形式演绎系统都可以用准方程理论的形式来刻画。.....
>
> 事实 1. 任意准方程理论都有一个初始模型。...
>
> 这种对形式演绎系统的看法有许多优点。其中之一是，它提出了一种统一的方法来形式描述各种演绎系统。另一个优点是，演绎系统的“解释”与相应准方程理论的模型直接相关。

Voevodsky 认为这些问题对于发展他的数学单值基础至关重要。为了推动这一领域的发展，他提出了初始性猜想项目，其目标是定义一类一般的依赖类型论，并为这一类中的理论发展通用元理论。我们引用 Voevodsky [38]在一篇扩展摘要的引言中对其项目的阐述：

> 依赖类型论的集合论语义的各种研究方法，在最初几步上仍缺乏充分的理解。一些专注于此的作者已经针对少数特定类型系统详细完成了相关构造，而如今人们正通过类比，将这些构造推广到当前正在考察的各种类型系统。这在数学上是不可接受的。相反，对于新的类型系统，我们应当能够通过特化一般定理和构造来获得所需结果；这些定理和构造是针对抽象对象表述的，而这些对象的实例组合起来便构成给定的类型系统。
>
> ⋮
>
> 这一方法的一个关键组成部分，是如下预期结果：对于某一特定类别的推理规则，项模型是模型范畴中的初始对象。这被称为初始性猜想。对于带有“修饰”应用运算的纯构造演算，该猜想已由 Thomas Streicher 于 1988 年证明 *[32]*。为该猜想的一般版本找到适当表述并加以证明，将是未来工作的主题。

表面上看，这类初始性证明似乎直截了当，但它们依赖于文法和推理规则表述中的微妙细节。正因如此，Voevodsky 坚持在此类定理得到严格证明、并且理想情况下在证明助手中实现之前，将其称为“猜想”。

一个已实现的初始性证明实例是 Brunerie 与 de Boer 在 Agda 中的 [9, 7] 证明：带有外部宇宙塔的 Martin-L¨of 类型论的某个版本，是具有适当额外结构的初始上下文范畴[10, 11] 。

本文提出了一种基于广义代数理论和上下文范畴研究 Voevodsky 项目的方法。正如我们关于广义代数理论和上下文范畴的文章 [6] 所示，对于广义代数理论的每个有限呈示 Σ，都有一种构造项模型 $\mathscr{T}_\Sigma$ 的一般方法；该项模型是带有Σ-结构的带族范畴（上下文范畴）范畴 CwF_Σ 中的初始对象。其思路是用相应的广义代数理论 Σ 刻画逻辑理论 $\mathscr{T}$，使得（ $\mathscr{T}$的项模型）与（ $\mathscr{T}_\Sigma$的外化）同构。外化的解释见第 2.3 节。

广义代数理论与上下文范畴密切相关。上下文范畴本身可以用广义代数理论 Σ^{CwF}呈示；我们还可以为 Martin-L¨ 类型论中的类型构造子添加算子符号和方程，并为其配备外部宇宙塔，从而得到广义代数理论 Σ^{tower}。尽管该广义代数理论是无穷元的，它仍有一个初始模型$\mathscr{T}_{\Sigma^{\mathrm{tower}}}$，该模型是通过扩展有限元广义代数理论的初始模型的一般构造得到的，见第5节7]。

这概括了我们对 Voevodsky 项目的研究方法。我们将依赖类型论刻画为带有额外结构的带族范畴广义代数理论的初始模型，或者，正如下文将看到的，刻画为带族范畴变体的广义代数理论的初始模型。这样一来，我们既有了构造项模型的通用方法，也可以研究初始模型的其他构造方式。之所以聚焦于带族范畴（具有额外结构）的广义代数理论，是因为它们处于一个中间位置：一端是由文法和推理规则定义的依赖类型论，另一端是基于更主流的范畴论构造的模型概念。特别是，带族范畴的广义代数理论类似于 Martin-L¨of 为依赖类型论提出的代换演算 [28, 33]。

我们对 Voevodsky 项目的研究方法并不局限于依赖类型论。例如，通过考察简单类型带族范畴（scwf）和单一类型 cwf（ucwf），我们也可以将各种简单类型和无类型逻辑系统刻画为广义代数理论，从而拓展基于广义代数理论和带族范畴的一致范畴逻辑的适用范围，参见 Castellan、Clairambault 和 Dybjer [12]。

此外，带索引的范畴式框架的各种变体刻画了其他多种逻辑系统，并可形式化为广义代数理论。例如，无类型谓词逻辑可由带有逻辑常量额外结构的 ucwf 索引的 scwf 来刻画。有类型谓词逻辑可由以 scwf 为索引的 scwf 以及依赖

有类型谓词逻辑（Makkai [26], Gambino 与 Aczel [17], Belo [3], 以及 Palmgren [31]）由 c wf 索引的 scwf 来刻画，二者均带有适用于类型构造子和逻辑常量的适当额外结构。

宇宙多态性。关于 Martin-Löf 类型论的显式宇宙多态性推理规则的介绍，请参阅我们的论文 [5]；其中还提供了相关动机、示例以及对相关工作的讨论。这里我们仅作简要概述。

Huet [20] 引入了隐式形式的宇宙多态性，这是证明助手 Rocq (Coq) [36] 的一项重要特性。另一种做法是，Agda [35] 和 Lean [29] 采用了显式声明宇宙层级的宇宙多态性版本。

如前所述，我们遵循 Courant 的方法 [14]，采用宇宙层级判断。我们还介绍了一种扩展形式，允许声明宇宙层级之间的等式约束（[5, 第 5] 节），这是在 Voevodsky [39] 的一项提议基础上发展而来的。

献辞。我们谨以此文献给都灵大学的 Stefano Berardi 教授。Stefano 是我们的朋友、同事和合著者，他曾于 1993/94 年冬春两季在哥德堡的类型论研究组工作。他对类型论和构造性作出了基础性贡献，尤其是在经典逻辑的构造性内容以及非谓述性的构造性分析方面。

2 带有外部宇宙塔的类型论

2.1 上下文范畴的广义代数理论

上下文范畴由一个 $\mathscr{C}$ 上下文及上下文态射（代换）范畴、一个终对象、一个族值预层

$$T : \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Fam}$$

以及上下文扩张的概念组成。这里，Fam 是索引集族的范畴 (A, B)，其中 A 是索引集，而 B 是由 A 索引的集合族。预层 T 的对象部分将一个上下文映射为由一个类型索引的项族。箭头部分表示类型和项中的代换。我们通常将上下文范畴称为四元组 (Ctx, Hom, Ty, Tm)，其中 (Ctx, Hom) 是上下文 $\mathscr{C}$ 范畴的对象和箭头，而 (Ty, Tm) 指的是由类型索引、且都处于上下文中的项族 T。关于上下文范畴的完整定义及更多信息，请参阅 Dybjer [16], Hofmann [19], 以及 Castellan 等人 [12]。

带有用于 Π-类型的额外结构的上下文范畴的广义代数理论，即 Martin-L¨of 类型论中带有Π-类型的模型概念，由 Dybjer [16] 提出。自然数类型和一个宇宙所需的额外算子符号和方程可见我们的文章 [6]。我们将沿用后者论文中广义代数理论的记号。

排序符号。上下文范畴的广义代数理论有四个排序符号：

$$\begin{aligned} \vdash &\ \mathrm{ctx} \\ \Delta,\Gamma : \mathrm{ctx} \vdash &\ \mathrm{hom}(\Delta,\Gamma) \\ \Gamma : \mathrm{ctx} \vdash &\ \mathrm{ty}(\Gamma) \\ \Gamma : \mathrm{ctx}, A : \mathrm{ty}(\Gamma) \vdash &\ \mathrm{tm}(\Gamma, A) \end{aligned}$$

它们分别对应上下文范畴的对象和态射，以及在给定上下文中按类型索引的项族。因此，ctx 是一个常量排序符号，hom 是一个依赖于参数 Δ、Γ : ctx 的二元排序符号，ty 是一个依赖于参数 Γ : ctx 的一元排序符号，而 tm 是一个依赖于参数 Γ : ctx、A : ty(Γ) 的二元排序符号。

算子符号。

$$\Gamma : \text{上下文} \vdash \mathrm{id}_\Gamma : \text{态射}(\Gamma,\Gamma) \quad \Xi,\Delta,\Gamma : \text{上下文} \quad \gamma : \text{态射}(\Delta,\Gamma) \quad \delta : \text{态射}(\Xi,\Delta) \vdash \gamma \circ \delta : \text{态射}(\Xi,\Gamma) \quad \Gamma,\Delta : \text{上下文}, \ A : \text{类型}(\Gamma) \quad \gamma : \text{态射}(\Delta,\Gamma) \vdash A[\gamma] : \text{类型}(\Delta) \quad \Gamma,\Delta : \text{上下文}, \ A : \text{类型}(\Gamma) \quad \gamma : \text{态射}(\Delta,\Gamma), \ a : \mathrm{tm}(\Gamma, A) \vdash a[\gamma] : \mathrm{tm}(\Delta, A[\gamma]) \vdash 1 : \text{上下文} \quad \Gamma : \text{上下文} \vdash \langle\rangle_\Gamma : \text{态射}(\Gamma, 1) \quad \Gamma : \text{上下文}, \ A : \text{类型}(\Gamma) \vdash \Gamma.A : \text{上下文} \quad \Gamma,\Delta : \text{上下文}, \ A : \text{类型}(\Gamma) \quad \gamma : \text{态射}(\Delta, \Gamma), \ a : \mathrm{tm}(\Delta, A[\gamma]) \vdash \langle\gamma, a\rangle : \text{态射}(\Delta,\Gamma.A) \quad \Gamma : \text{上下文}, \ A : \text{类型}(\Gamma) \vdash p_{\Gamma,A} : \text{态射}(\Gamma.A\ \Gamma) \quad \Gamma : \text{上下文}, \ A : \text{类型}(\Gamma) \vdash q_{\Gamma,A} : \mathrm{tm}(\Gamma.A, A[p])$$

第一行说明，恒等是一个一元算子符号，其参数为 Γ : ctx。第二行说明，$\circ$是一个二元算子符号，有五个参数 Ξ,Δ,Γ: ctx γ: hom(Δ,Γ) δ : hom(Ξ,Δ)，结果种类为 hom(Ξ,Γ)。请注意，五个正式参数中只有两个是显式的。为简化记法，我们经常省略算子符号的参数。还要注意，我们对类型代换和项代换 A[γ] 和 a[γ]使用了重载记法。此外，我们有时还会省略更多参数，将它们写作 id $\langle\rangle$、p、q，而不写出下标位置中的参数。

方程。带族范畴的广义代数理论有 13 个方程。下面展示恒等态射的一条律，以说明这种记法:

$$\Delta,\Gamma : \mathrm{obj}, \gamma : \mathrm{hom}(\Delta,\Gamma) \ \vdash \ \mathrm{id}_\Gamma \circ \gamma = \gamma : \mathrm{hom}(\Delta,\Gamma)$$

此外，我们经常在方程中省略参数和结果类型:

$$\mathrm{id}_\Gamma \circ \gamma = \gamma$$

请注意，在某些特定情形下，明确写出上下文至关重要。假设我们为 Martin-L¨ 类型论中的恒等类型构造子 Id 添加一个算子符号:

$$\Gamma : \mathrm{ctx}, A : \mathrm{ty}(\Gamma), a, a' : \mathrm{tm}(\Gamma, A) \ \vdash \mathrm{Id}_{\Gamma,A}(a, a') : \mathrm{ty}(\Gamma)$$

在外延 Martin-L¨of 类型论 [27] 中，我们有等式反射规则。该规则可以用广义代数理论中的一个方程表示:

$$\Gamma : \mathrm{ctx}, A : \mathrm{ty}(\Gamma), a, a' : \mathrm{tm}(\Gamma, A), p : \mathrm{tm}(\Gamma, \mathrm{Id}_{\Gamma,A}(a, a')) \ \vdash \ a = a' : \mathrm{tm}(\Gamma, A)$$

请注意，变量 p 并未出现在右侧。然而，它是一个重要变量，用于表达 $=a'$ 成立的条件，不得省略。

其余的 cwf 方程请参见 [6] 。读者也可查阅附录 A，其中列出了层级索引的 cwf 的方程。

在上下文范畴中的解释。一个广义代数理论 Σ的模型，是范畴 CwF_Σ 中的一个对象；CwF_Σ 是由具有额外结构的上下文范畴构成的范畴，这些额外结构对应于 Σ 中的排序符号和算子符号，并满足方程 [6]。排序符号解释为上下文范畴类型，算子符号解释为上下文范畴项，二者都处于上下文中。例如，在用于上下文范畴的广义代数理论 Σ^{CwF} 的项模型上下文范畴中，我们有 $\mathrm{ctx} \in \mathrm{Ty}(1)$、$\mathrm{hom} \in \mathrm{Ty}(1.\mathrm{ctx}.\mathrm{ctx}[\mathrm{p}])$。此外，作为算子符号的例子，$\mathrm{id} \in \mathrm{Tm}(1.\mathrm{ctx}, \mathrm{hom}(\mathrm{q}, \mathrm{q}))$，其中 $\mathrm{hom}(\Delta,\Gamma)$是 $\mathrm{hom}[\langle\Delta,\Gamma\rangle]$, $\langle a, b\rangle$ 的的简写；abbreviates $\langle\langle a\rangle, b\rangle$, $\langle a\rangle$ abbreviates $\langle\langle\rangle, a\rangle$，等等。我们使用 id_Γ作为 $\mathrm{id}[\langle\Gamma\rangle]$等的简写。$\mathrm{CwF}_{\Sigma^{\mathrm{CwF}}}$ 中的对象是一个带有内部 cwf 的上下文范畴，更多信息请参见 [6] 。

2.2 带外部宇宙塔的上下文范畴的广义代数理论

在 [5, 节 3] 中，我们给出了带外部宇宙塔 U_l 的 Martin-L¨ 类型论的推理规则，其中 $l \in \mathbb{N}$ 是一个外部自然数。这里我们展示相应广义代数理论的算子符号和方程。

我们假设已经定义了带有标准小型类型构造子 Π、Σ、N_0,N_1,N_2,N、W 和 Id 的额外结构的上下文范畴的广义代数理论，并希望定义一个在这些构造子下封闭的宇宙塔。为节省篇幅，我们只展示在 Π-类型下封闭所需的算子符号和方程，因为为在其他小类型构造子下封闭添加类似的算子符号很直接。本文中我们将始终采用相同的约定。

算子符号。Π构造的算子符号为

$$\Gamma : \mathrm{ctx}, A : \mathrm{ty}(\Gamma), B : \mathrm{ty}(\Gamma.A) \quad \vdash \quad \Pi(A,B) : \mathrm{ty}(\Gamma)$$

关于抽象和应用的算子符号、 β规则和 η规则的方程，以及表达 Π、抽象和应用与项代换相交换的方程，请参见 [6] 。层级索引版本另请参见附录 A。

在外部索引宇宙的广义代数理论中，我们有以下算子符号族（宇宙 U_l、解码映射 T_l、 Π的编码，以及 U_l^m在 U_l 中、适用于 $\mathrm{l},\mathrm{l}',\mathrm{m} \in \mathbb{N}$ 且 $\mathrm{l} < \mathrm{m}$ 的 U_m 编码）：

$$\begin{aligned}
\Gamma : \mathrm{ctx} \quad &\vdash \quad (\mathrm{U}_l)_\Gamma : \mathrm{ty}(\Gamma) \\
\Gamma : \mathrm{ctx}, a : \mathrm{tm}(\Gamma, (\mathrm{U}_l)_\Gamma) \quad &\vdash \quad \mathrm{T}_l(a) : \mathrm{ty}(\Gamma) \\
\Gamma : \mathrm{ctx}, a : \mathrm{tm}(\Gamma, (\mathrm{U}_l)_\Gamma), b : \mathrm{tm}(\Gamma.\mathrm{T}_l(a), (\mathrm{U}_{l'})_\Gamma) \quad &\vdash \quad \Pi^{l,l'}(a,b) : \mathrm{tm}(\Gamma, (\mathrm{U}_{l\vee l'})_\Gamma) \\
\Gamma : \mathrm{ctx} \quad &\vdash \quad (\mathrm{U}_l^m)_\Gamma : \mathrm{tm}(\Gamma, (\mathrm{U}_m)_\Gamma)
\end{aligned}$$

请注意， Π的编码有两个索引，且 $\mathrm{l} \vee \mathrm{l}' = \max(\mathrm{l}, \mathrm{l}')$。我们再次省略了算子符号的一些参数。例如，解码算子 T_l 是二元算子，其正式记法为 $\mathrm{T}_l(\Gamma,\mathrm{a})$，但上文省略了 Γ ，写作 $\mathrm{T}_l(\mathrm{a})$。

方程。我们有以下解码方程:

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}_{l\vee l'}(\Pi^{l,l'}(a,b)) &= \Pi(\mathrm{T}_l(a), \mathrm{T}_{l'}(b)) \\
\mathrm{T}_m((\mathrm{U}_l^m)_\Gamma) &= (\mathrm{U}_l)_\Gamma
\end{aligned}$$

算子符号与项代换可交换：

$$\begin{aligned}(\mathsf{U}_l)_\Gamma[\gamma] &= (\mathsf{U}_l)_\Delta\\ \mathsf{T}_l(a)[\gamma] &= \mathsf{T}_l(a[\gamma])\\ \Pi^{l,l'}(a,b)[\gamma] &= \Pi^{l,l'}(a[\gamma], b[\gamma^\dagger])\\ (\mathsf{U}_l^m)_\Gamma[\gamma] &= (\mathsf{U}_l^m)_\Delta\\ \mathsf{T}_l^m(a)[\gamma] &= \mathsf{T}_l^m(a[\gamma])\end{aligned}$$

其中 $\gamma : \hom(\Delta,\Gamma)$ 且 $\gamma^\dagger = \langle \gamma \circ \mathsf{p}_{\Delta,\ \mathsf{T}_l\ (a[\gamma])},\ \mathsf{q}_{\Delta,\ \mathsf{T}_l\ (a[\gamma])} \rangle : \hom(\Delta.\mathsf{T}_l(a[\gamma])\ \Gamma.\mathsf{T}_l(a)$。

如果我们想要一个累积宇宙塔，就添加算子符号，将第 l 层宇宙中的元素提升到第 m 层宇宙，其中 $l < m$：

$$\Gamma : \mathrm{ctx}, a : \mathrm{tm}(\Gamma, (\mathsf{U}_l)_\Gamma) \quad \vdash \quad \mathsf{T}_l^m(a) : \mathrm{tm}(\Gamma, (\mathsf{U}_m)_\Gamma))$$

其解码为

$$\mathsf{T}_m(\mathsf{T}_l^m(a)) \quad = \quad \mathsf{T}_l(a)$$

它与代换交换：

$$\mathsf{T}_l^m(a)[\gamma] \quad = \quad \mathsf{T}_l^m(a[\gamma])$$

在具有累积性的情况下，Π 的编码只需一个上标，而不是两个。不过，我们在此不展示这一简化，而是参见第 3.4 节关于带层级索引的宇宙的累积性。

至此，我们完成了对具有小类型构造子和外部宇宙塔的上下文范畴的广义代数理论 Σ^{tower} 的介绍。

2.3 作为初始模型的语法和推理规则

基于显式替换的通用构造。在我们关于广义代数理论 [6] 和上下文范畴的文章中，我们定义了广义代数理论的正确呈示 Σ（由有限个排序符号、算子符号和方程组成）以及相应的模型范畴 CwF_Σ，即带有 Σ结构的上下文范畴范畴。随后，对于每个 Σ，我们在 CwF_Σ 中构造了一个初始对象 $\mathscr{T}_\Sigma$，将其定义为一个由文法和推理规则刻画的类型论。该类型论是一个显式代换演算，其中原始表达式由无类型的上下文范畴组合子和算子符号的无类型版本构成。参见 Abadi、Cardelli、Curien 和 L`evy [1]，了解简单类型环境中的显式代换演算。

在本节中，我们介绍了具有小类型构造子和宇宙塔额外结构的上下文范畴的无穷基范畴代数理论 Σ^{tower}。然而，上述初始模型构造适用于有限基范畴代数理论。尽管如此，正如 [6, 第 5.7], 节所解释的，我们可以将构造推广到某些非有限呈示的广义代数理论。如果我们有一个有限呈示的递增序列 Σ_n，就可以分阶段构造其并 Σ 的初始模型 $\mathscr{T}_\Sigma$。通过这种方式，我们可以将 Σ^{tower}的初始模型构造为 Σ_n 的并——即具有小类型构造子额外结构和截断的 n 层宇宙塔的上下文范畴广义代数理论的并。

此外，$\mathsf{CwF}_{\Sigma^{\mathrm{tower}}}$ 是带有内部 cwf 的上下文范畴的范畴，该内部 cwf 具有小类型构造子和宇宙塔的额外结构。与之相对的是 $\mathsf{CwF}_{\mathrm{tower}}$，即具有小类型构造子和宇宙塔额外结构的上下文范畴的范畴。一个带有内部 cwf 的上下文范畴

$\mathrm{CwF}_{\Sigma^{\mathrm{tower}}}$ 中的 (Ctx, Hom,Ty,Tm,ctx,hom,ty,tm) 按如下方式确定 $\mathrm{CwF}_{\mathrm{tower}}$ 中带有小类型构造子和宇宙塔额外结构的外部带族范畴 (Ctx^*, Hom^*, Ty^*, Tm^*):

$$\begin{aligned}\mathrm{Ctx}^* &= \mathrm{Tm}(1,\mathrm{ctx})\\ \mathrm{Hom}^*(\Delta,\Gamma) &= \mathrm{Tm}(1,\mathrm{hom}(\Delta,\Gamma))\\ \mathrm{Ty}^*(\Gamma) &= \mathrm{Tm}(1,\mathrm{ty}(\Gamma))\\ \mathrm{Tm}^*(\Gamma,A) &= \mathrm{Tm}(1,\mathrm{tm}(\Gamma,A))\end{aligned}$$

一种基于隐式替换的构造（初始性猜想）。我们对比采用隐式替换的类型论与采用显式替换的类型论：前者通过结构归纳定义替换，后者则将替换作为表达式的语法构造子。我们将概述一种基于 $\mathrm{TT}^{\mathrm{tower}}$ 的、构造 $\mathrm{CwF}_{\mathrm{tower}}$ 中初始对象的替代方法——$\mathrm{TT}^{\mathrm{tower}}$ 是采用隐式替换和外部宇宙塔的类型论，详见 [5,第 3]节。

如前所述，我们使用带标注表达式；例如，为应用标注类型信息。我们称之为原始语法，即不一定具有良好类型的表达式。原始语法中还包括原始上下文态射，尽管相关文献并未提及它们。这些态射是原始项的列表，其中 $\langle\rangle$ 表示空列表，而 $\langle\gamma、a\rangle$ 表示在列表 γ 末尾添加新项 a。

我们基于带隐式替换的类型论 $\mathrm{TT}^{\mathrm{tower}}$，如下构造上下文范畴$_{\mathrm{tower}}$的一个对象 (Ctx,Hom,Ty,Tm)。首先，我们依据 $\mathrm{TT}^{\mathrm{tower}}$ 的判断形式来解释排序符号，如下：

- $\Gamma \in \mathrm{Ctx}$ 定义为 $\Gamma\vdash$ 关于上下文相等这一等价关系 $\Gamma=\Gamma'\vdash$的商。后者在所引文献中并未明确陈述，但可以很容易地补充。
- $A \in \mathrm{Ty}(\Gamma)$ 定义为 $\Gamma\vdash A$ 关于等价关系 $\Gamma\vdash A=A'$ 的商。
- $a \in \mathrm{Tm}(\Gamma, A)$ 定义为 $\Gamma\vdash a:A$ 关于等价关系 $\Gamma\vdash a=a':A$ 的商。
- 所引文献中没有显式判断 $\Delta\vdash\gamma:\Gamma$ 和 $\Delta\vdash\gamma=\gamma':\Gamma$，但它们可以用 $\Delta\vdash a:A$ 和 $\Delta\vdash a=a':A$ 来定义。于是 $\gamma\in\mathrm{Hom}(\Delta,\Gamma)$ 可以定义为 $\Delta\vdash\gamma:\Gamma$ 关于等价关系 $\Delta\vdash\gamma=\gamma':\Gamma$ 的商。

接下来，我们在等价类上定义算子符号。首先是构造原始语法的算子符号：基本的上下文范畴组合子 $1,-.-,\langle\rangle,\langle-,-\rangle,\Pi,\lambda$，用于 Π-类型的 app，以及其他小类型构造子的相应算子，还有用于宇宙塔的 $\mathrm{U}_l,\mathrm{T}_l,\mathrm{U}_l^m$和 T_l^m。下面仅给出两个例子。

- 空上下文 1 是原始上下文的一个构造子，我们将项模型中的终对象定义为空上下文 $[1]\in\mathrm{Ctx}$ 的等价类。
- 上下文扩张也是原始上下文的一个构造子。我们将 $[\Gamma]\in\mathrm{Ctx}$ 与$[A]\in\mathrm{Ty}([\Gamma])$ 的扩张定义为 $[\Gamma.A]\in\mathrm{Ctx}$，并证明此运算保持等价关系，因此可扩展到等价类上。

接下来，我们考虑与通过对原始表达式的结构进行归纳而定义的运算相对应的算子符号。我们先定义模型中类型和项上的代换：

- 若 A 是一个原始类型，且 γ是一个原始代换，我们首先通过对 A 的结构进行归纳法，定义将 γ 代换进 A 所得的结果 $A[\gamma]$。我们需要证明这一操作保持等价类。
- 原始项中的代换也以类似方式定义。
- 我们还可以定义其他隐式运算 id ∘、p、q。

为了证明我们在上下文范畴$_{\text{tower}}$中构造了一个对象，需要检查广义代数理论方程。然后，我们需要证明存在一个到任意其他对象的唯一上下文范畴$_{\text{tower}}$ 态射。

我们可以比较上文概述的初始性证明与 Brunerie 和 de Boer 在 Agda 中实现的证明 [9, 7], ，因为他们证明的是一种带有外部宇宙塔的类型论版本，与我们的版本类似。一个区别在于，他们的宇宙采用 `罗素风格，而我们则同时介绍 `塔斯基风格和 `罗素风格的两个版本。此外，他们只有规则 $\mathrm{U}_l : \mathrm{U}_{l+1}$ ，且只考虑非累积情形；而我们允许 U_l^m属于任意更大的宇宙 U_l ，并同时考虑非累积情形和累积情形。在范畴论方面，上下文范畴与上下文范畴之间存在一个相对较小的区别；我们指出，初始上下文范畴（带有额外结构）是上下文的 [13, 12]。

3 层级索引类型论

3.1 层级上下文范畴

正如引言中已经提到的，在我们的论文中 [5] ，我们添加了宇宙层级判断

$$l \ \mathsf{level} \qquad\qquad l = l'$$

对应于 Martin-L¨of 类型论中常见的判断形式。此外，宇宙层级变量和普通项变量可以按任意顺序声明。为简化与广义代数理论形式化之间的对应关系，接下来我们假设上下文的形式为 n Γ，其中 n 是（de Bruijn）层级变量的数量，而 Γ 是一个依赖于这 n 个层级变量的普通上下文。我们有一个后继层级函数 $(–)^+$ 以及一个用于层级并的操作 ∨ 。不过，与 [5, Section 3,4], 中一样，首个宇宙没有层级 0。因此，所有宇宙都是多态的。关于 ∨，层级构成一个上半格；并且 $(–)^+$ 与 ∨ 可交换，且具有膨胀性，见下文。

排序符号。层级可以组织成一个层级上下文范畴。我们有以下排序符号：

$$\begin{array}{l} \vdash \ \mathrm{lctx\ m,n:\ lct} \\ \mathrm{x} \vdash \mathrm{lhom(m,n)\ m:} \\ \mathrm{lctx} \vdash \mathrm{ltm(m\}} \end{array}$$

分别表示层级上下文、层级上下文态射（代换）和层级项。由于上下文统一范畴框架只有一种类型，因此层级类型无需排序符号。

算子符号。上下文统一范畴框架的算子符号是上下文范畴算子符号的简化版本，其中移除了所有对类型的依赖：

m：上下文 lctx ⊢ 恒等态射$_m$：同态 lhom(m, m) m、n、p：上下文 lctxσ：同态 lhom(n, p) τ：同态 lhom(m, n) ⊢ σ ∘ τ：同态 lhom(m, p) m、n：上下文 lctx σ：同态 lhom(n, m)，l：项 ltm(m) ⊢ l[σ]：项 ltm(n) ⊢ 0：上下文 lctx m：上下文 lctx ⊢ ⟨⟩$_m$：同态 lhom(m, 0) m：上下文 lctx ⊢ s(m)：上下文 lctx m、n：上下文 lctxσ：同态 lhom(n, m)，l：项 ltm(n) ⊢ ⟨σ，l⟩：同态 lhom(n, s(m)) m：上下文 lctx ⊢ lp$_m$：同态 lhom(s(m), m) m：上下文 lctx ⊢ lq$_m$：项 ltm(s(m))

注意，我们不再需要用于类型中代换的算子符号，而只需在层级项中使用代换的算子符号。我们还改变了记号，以表明这是层级上的运算。例如，我们用 σ 和 τ 表示层级代换，以区别于项代换 γ 和 δ。不过，我们保留 ∘ 表示层级代换的复合，l[σ] 表示层级项中的层级代换，⟨⟩$_m$ 表示空层级上下文态射，以及 ⟨σ、l⟩ 表示层级上下文态射扩张。层级上下文的记号表明，我们有一个初始ucwf，其中 n : lctx 是一个自然数，用于记录可用层级变量的数量。因此，0 : lctx 是该ucwf中的终对象。

层的单类型上下文范畴族还具有表示下一层级和两个层级的并的算子符号：

$$\begin{aligned} m : \mathrm{lctx}, l : \mathrm{ltm}(m) &\vdash l^+ : \mathrm{ltm}(m) \\ m : \mathrm{lctx}, l, l' : \mathrm{ltm}(m) &\vdash l \vee l' : \mathrm{ltm}(m) \end{aligned}$$

方程。单位范畴带族方程是 cwf 方程（参见 Dybjer [16] 以及我们的合著论文 [5]），适用于只有一种类型的特殊情形，因此所有类型方程都是多余的：

$$\begin{aligned} \mathrm{lid}_n \circ \sigma &= \sigma \\ \sigma \circ \mathrm{lid}_n &= \sigma \\ (\sigma \circ \tau) \circ \upsilon &= \sigma \circ (\tau \circ \upsilon) \\ l[\mathrm{lid}_n] &= l \\ l[\sigma \circ \tau] &= l[\sigma][\tau] \\ \mathrm{lid}_0 &= \langle\rangle_0 \\ \langle\rangle_n \circ \sigma &= \langle\rangle_m \\ \mathrm{lp}_n \circ \langle \sigma, l \rangle &= \sigma \\ \mathrm{lq}_n[\langle \sigma, l \rangle] &= l \\ \langle \sigma, l \rangle \circ \tau &= \langle \sigma \circ \tau, l[\tau] \rangle \\ \mathrm{lid}_{\mathrm{s}(n)} &= \langle \mathrm{lp}_n, \mathrm{lq}_n \rangle \end{aligned}$$

$l \vee l'$的半格方程为：

$$\begin{aligned}(l \vee l') \vee l'' &= l \vee (l' \vee l'') \\ l \vee l' &= l' \vee l \\ l \vee l &= l\end{aligned}$$

膨胀自函数 $(-)^+$ 的方程为：

$$\begin{aligned}l \vee l^+ &= l^+ \\ (l \vee l')^+ &= l^+ \vee l'^+\end{aligned}$$

算子符号 $\vee$ 和 $+$ 与层级代换可交换：

$$\begin{aligned}(l \vee l')[\sigma] &= l[\sigma] \vee l'[\sigma] \\ l^+[\sigma] &= l[\sigma]^+\end{aligned}$$

Lawvere理论。我们指出，上下文统一范畴框架与 Lawvere理论相似，但更接近基于 n元函数的常见语法。可以证明，Lawvere理论与上下文型ucwf等价；也就是说，这类上下文统一范畴框架中的每个上下文长度都为 [13, 12]。

层级相等排序。在广义代数理论中编码类型论时，基本原则是为每种主要形式的判断引入一个种类。例如，$\mathrm{l} : \mathrm{ltm(n)}$ 表示判断 $\mathrm{n} \vdash \mathrm{l}$ 层级。相等判断则由相等式表示：$\mathrm{l} = \mathrm{l}' : \mathrm{ltm(n)}$ 表示 $\mathrm{n} \vdash \mathrm{l} = \mathrm{l}'$。

正如我们将在下一小节看到的，在为宇宙 U_l^m 的代码定型时，U_l 属于 U_m，我们需要表达约束 $\mathrm{l} < \mathrm{m}$，其定义为 $\mathrm{l}^+ \vee \mathrm{m} = \mathrm{m}$。然而，在广义代数理论中不允许将相等式用作假设。因此，我们为层级相等添加一个新的排序符号：

$$n : \mathrm{lctx}, l, l' : \mathrm{ltm}(n) \quad \vdash \quad \mathrm{leq}_n(l, l')$$

以及一个表示自反性的算子符号：

$$n : \mathrm{lctx}, l : \mathrm{ltm}(n) \quad \vdash \quad \mathrm{r}(l) : \mathrm{leq}_n(l, l)$$

现在，我们可以通过假设 $\mathrm{p} : \mathrm{leq}_n(\mathrm{l}^+ \vee \mathrm{m}, \mathrm{m})$ 来表达约束 $\mathrm{l} < \mathrm{m}$。注意，在项模型中（见第 3.6 节），如果 $\mathrm{l} = \mathrm{l}' : \mathrm{ltm(n)}$，也就是说，如果可以通过对 $\vee$ 和 $(-)^+$ 的公理进行等式推理推导出 $\mathrm{l} = \mathrm{l}'$，那么根据相等性的保持，$\mathrm{r(l)} : \mathrm{leq}_n(\mathrm{l},\mathrm{l}')$；这一原理适用于所有广义代数理论。反过来，我们有以下命题：

命题。若 $\mathrm{n} : \mathrm{lctx}, \mathrm{l}, \mathrm{l}' : \mathrm{ltm(n)}$，且初始模型中 $\mathrm{p} : \mathrm{leq}_n(\mathrm{l}, \mathrm{l}')$，则 $\mathrm{p} = \mathrm{r(l)} : \mathrm{leq(l, l')}$，且 $\mathrm{l} = \mathrm{l}' : \mathrm{ltm(n)}$。

这可以通过范式论证来证明。正如 Bezem 和 Coquand [4], 所指出的，每个层级项都有一个范式 $\alpha_1^{+p_1} \vee \cdots \vee \alpha^{+p_m}{}_m \text{for } \mathrm{p}_i \geq 0 \text{for } 1 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{m} \leq \mathrm{n}$ 和层级变量（de Bruijn指标） $\alpha_1 < \ldots < \alpha_m$。我们可以构造一个初始ucwf，其中包含 $\vee$ 和 $(-)^+$，其 ltm(n) 中的元素是范式，并且 $\mathrm{l} = \mathrm{l}' : \mathrm{ltm(n)}$ 当且仅当 l 和 l′ 是相同的范式。如果我们用一个新的种类 leq 和一个用于自反性的新算子符号 r 扩展该广义代数理论，就可以用集合 $\mathrm{leq}_n(\mathrm{l}, \mathrm{l}')$ 扩展初始ucwf：当 $\mathrm{l} = \mathrm{l}' : \mathrm{ltm(n)}$ 时，该集合包含唯一元素 r(l)，否则为空。

关于恒等类型的说明。表示层级相等的排序符号 leq 类似于 Martin-Löf 类型论中的恒等类型构造子 Id。我们将 $\mathrm{leq}_n(l, l')$ 视为命题层级相等，并将其元素 $p : \mathrm{leq}_n(l,l')$ 视为命题层级相等的证明。然而，虽然证明 $p : \mathrm{Id}_A(a, a')$ 可以运用高级逻辑推理，但层级相等的证明受到限制，且如上所示，只能通过对 $\vee$ 和 $(-)^+$ 的相关规律进行等式推理来获得。

3.2 小类型的层级索引带族范畴

现在，我们定义 ucwf 索引的带族范畴的广义代数理论，并为小类型构造子 Π、Σ、N_0,N_1,N_2,N、W、Id 添加额外结构。

令 $\mathscr{L}$ 为层的单类型上下文范畴族中的上下文范畴。我们需要为预层理论添加排序符号、算子符号和方程

$$T : \mathscr{L}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{CwF}^{\Pi,\Sigma,\mathsf{N}_0,\mathsf{N}_1,\mathsf{N}_2,\mathsf{N},\mathsf{W},\mathsf{Id}}$$

其取值于带有小类型构造子额外结构的带族范畴范畴，并且带族范畴态射严格保持带族范畴结构和小类型构造子的结构。因此

- T(n) 是一个带族范畴（具有额外结构），其中包含依赖于 n 个层级变量的上下文、代换、类型和项。

- 设 $\sigma: n \to m$ 为一个层级代换。在初始模型中，它是由 n 个层级变量中的层级项构成的 m 元组，而 $T(\sigma) : T(m) \to T(n)$ 将这 m 个层级变量分别替换为 σ 中相应的 m 个层级表达式，作用于上下文范畴 T (m) 的各个分量，从而得到一个依赖于 n 个层级变量的上下文范畴。带有小类型构造子的上下文范畴的全部结构均得以保持。

排序符号。小类型的层级索引带族范畴的广义代数理论除层级的广义代数理论的排序符号外，还具有以下排序符号：

$$\begin{array}{l} n : \mathrm{lctx} \vdash \mathrm{ctx}_n \quad n : \mathrm{lctx}\ \Delta,\Gamma : \mathrm{ctx}_n \\ \vdash \mathrm{hom}_n(\Delta,\Gamma) \quad n : \mathrm{lctx}\ \Gamma : \mathrm{ctx}_n \vdash \mathrm{ty}_n(\Gamma) \\ n : \mathrm{lctx}\ \Gamma : \mathrm{ctx}_n, A : \mathrm{ty}_n(\Gamma) \vdash \mathrm{tm}_n(\Gamma, A) \end{array}$$

这些与带族范畴的广义代数理论的排序符号相同，只是它们都由一个参数 n :lctx 索引。

算子符号。同样，算子符号与上下文范畴的相同（小类型构造子带有额外结构），但它们还以 n : lctx 为索引。方程也相应地作了修改。参见附录。

小类型的层级索引带族范畴的箭头部分公理化了层级代换。层级索引带族范畴的每个分量都对应一个算子符号。我们重载记号：

$$\begin{array}{rcl} n,n' : \mathrm{lctx}, \sigma : \mathrm{lhom}(n,n'), \Gamma : \mathrm{ctx}_{n'} & \vdash & \Gamma[\sigma] : \mathrm{ctx}_n \\ n,n' : \mathrm{lctx}, \sigma : \mathrm{lhom}(n,n'), \Delta,\Gamma : \mathrm{ctx}_{n'}, \gamma : \mathrm{hom}_{n'}(\Delta,\Gamma) & \vdash & \gamma[\sigma] : \mathrm{hom}_n(\Delta[\sigma],\Gamma[\sigma]) \\ n,n' : \mathrm{lctx}, \sigma : \mathrm{lhom}(n,n'), \Gamma : \mathrm{ctx}_{n'}, A : \mathrm{ty}_{n'}(\Gamma) & \vdash & A[\sigma] : \mathrm{ty}_n(\Gamma[\sigma]) \\ n,n' : \mathrm{lctx}, \sigma : \mathrm{lhom}(n,n'), \Gamma : \mathrm{ctx}_{n'}, A : \mathrm{ty}_{n'}(\Gamma), a : \mathrm{tm}_{n'}(A,\Gamma) & \vdash & a[\sigma] : \mathrm{tm}_n(A[\sigma],\Gamma[\sigma]) \end{array}$$

方程。函子定律给出以下方程:

$$\begin{aligned}
\Gamma[\mathrm{lid}_n] &= \Gamma \\
\Gamma[\sigma \circ \tau] &= \Gamma[\sigma][\tau] \\
\gamma[\mathrm{lid}_n] &= \gamma \\
\gamma[\sigma \circ \tau] &= \gamma[\sigma][\tau] \\
A[\mathrm{lid}_n] &= A \\
A[\sigma \circ \tau] &= A[\sigma][\tau] \\
a[\mathrm{lid}_n] &= a \\
a[\sigma \circ \tau] &= a[\sigma][\tau]
\end{aligned}$$

层级代换与小类型构造子相交换。我们给出 Π-类型的情形 :

设 n, n′: lctx σ : lhom(n, n′) Γ: $\mathrm{ctx}_{n'}$, A : $\mathrm{ty}_{n'}$(Γ), B : $\mathrm{ty}_{n'}$(Γ.A)。那么

$$\Pi(A,B)[\sigma] = \Pi(A[\sigma], B[\sigma])$$

此外，若 b : tm_n(Γ.A,B),c : tm_n(Γ,Π(A, B)), 且 a : tm_n(Γ, A)，则有

$$\begin{aligned}
\lambda(b)[\sigma] &= \lambda(b[\sigma]) \\
\mathsf{app}(c,a)[\sigma] &= \mathsf{app}(c[\sigma], a[\sigma])
\end{aligned}$$

3.3 按层索引的宇宙

算子符号与一个用于层级相等的新排序符号。最后，我们为按层索引的宇宙添加算子符号和方程。每个 T(n) 都带有按层索引的宇宙 U_l及其解码 T_l的额外结构，其中 l 是一个依赖于 n 中层级变量的层级项。这些宇宙对小类型构造子封闭，并包含更小的宇宙 $\mathrm{U}_{l'}$，其层级为 $l' < l$。

算子符号是通过将外部索引宇宙的相应规则内化而得到的。

l : ltm(n) Γ : 上下文$_n$ $\vdash$ $(\mathrm{U}_l)_\Gamma$: 类型$_n$(Γ) l : ltm(n) Γ: 上下文$_n$, a : tm_n(Γ, $(\mathrm{U}_l)_\Gamma$) $\vdash$ T_l (a) : 类型$_n$(Γ) l, l′: ltm(n) Γ: 上下文$_n$,a : tm_n(Γ,$(\mathrm{U}_l)_\Gamma$), b : tm_n(Γ · T_l(a), $(\mathrm{U}_{l'})_\Gamma$) $\vdash$ $\Pi^{l,l'}$(a, b) : tm_n(Γ, $(\mathrm{U}_{l\vee l'})_\Gamma$)

如前所述，我们仅展示了在 Π 下的封闭性。此外，我们在上述每个类型标注中省略了共同前提 n : lctx。

如第 3.1 节所述，在为处于更大宇宙 U_m 中的宇宙 U_l 标注算子符号 U_l^m 的类型时，我们使用层级相等排序:

$$n : \mathrm{lctx}, l, m : \mathrm{ltm}(n), p : l < m, \Gamma : \mathrm{ctx}_n \vdash (\mathrm{U}_l^m)_{p,\Gamma} : \mathrm{tm}_n(\Gamma, (\mathrm{U}_m)_\Gamma)$$

其中，$l < m$ 定义为 $\mathrm{leq}_n(l^+ \vee m, m)$。下文将省略作为此算子符号参数的证明 $p : l < m$，直接写作 $(\mathrm{U}_l^m)_\Gamma$。

方程。T_l 的解码方程以及算子符号与代换的交换性方程，可以通过将外部塔的相应方程直接内在化而得到。这意味着，解码方程现在不仅相对于项，也相对于内部层级上下文和层级项。例如， Π 的解码方程

$$\mathrm{T}_{l\vee l'}(\Pi^{l,l'}(a,b)) = \Pi(\mathrm{T}_l(a),\mathrm{T}_{l'}(b)) : \mathrm{tm}_n(\Gamma,\mathsf{U}_{l\vee l'})$$

现在相对于上下文

$$n : \mathrm{lctx}, l, l' : \mathrm{ltm}(n), \Gamma : \mathrm{ctx}_n, a : \mathrm{tm}_n(\Gamma,\mathsf{U}_l), b : \mathrm{tm}_n(\Gamma.\mathrm{T}_l(a),\mathsf{U}_{l'})$$

以及第 m 个宇宙中第 l 个宇宙的解码方程

$$\mathrm{T}_m((\mathsf{U}_l^m)_\Gamma) \quad = \quad (\mathsf{U}_l)_\Gamma$$

现在相对于上下文

$$n : \mathrm{lctx}, l, m : \mathrm{ltm}(n), p : l < m$$

其中 $\mathrm{l} < \mathrm{m}$ 再次定义为 $\mathrm{leq}_n(\mathrm{l}^+ \vee \mathrm{m}, \mathrm{m})$。

算子符号关于项代换 γ 的交换性方程：$\mathrm{hom}(\Delta,\Gamma)$：

$$\begin{array}{rcl}
(\mathsf{U}_l)_\Gamma[\gamma] & = & (\mathsf{U}_l)_\Delta \\
\mathrm{T}_l(a)[\gamma] & = & \mathrm{T}_l(a[\gamma]) \\
\Pi^{l,l'}(a,b)[\gamma] & = & \Pi^{l,l'}(a[\gamma], b[\gamma^\dagger]) \\
(\mathsf{U}_l^m)_\Gamma[\gamma] & = & (\mathsf{U}_l^m)_\Delta
\end{array}$$

算子符号相对于层级代换的交换性方程 σ ： $\mathrm{lhom}(\mathrm{n}, \mathrm{n}')$ ：

$$\begin{array}{rcl}
(\mathsf{U}_l)_\Gamma[\sigma] & = & (\mathsf{U}_{l[\sigma]})_{\Gamma[\sigma]} \\
\mathrm{T}_l(a)[\sigma] & = & \mathrm{T}_{l[\sigma]}(a[\sigma]) \\
\Pi^{l,l'}(a,b)[\sigma] & = & \Pi^{l[\sigma],l'[\sigma]}(a[\sigma], b[\sigma]) \\
(\mathsf{U}_l^m)_\Gamma[\sigma] & = & (\mathsf{U}_{l[\sigma]}^{m[\sigma]})_{\Gamma[\sigma]}
\end{array}$$

3.4 累积性

算子符号。累积性算子符号是通过将外部塔中的累积性算子符号内化而得到的：

$$n : \mathrm{lctx}, l, m : \mathrm{ltm}(n), p : l < m, \Gamma : \mathrm{ctx}_n, a : \mathrm{tm}_n(\Gamma,(\mathsf{U}_l)_\Gamma) \quad \vdash \quad \mathrm{T}_l^m(a) : \mathrm{tm}_n(\Gamma,(\mathsf{U}_m)_\Gamma))$$

其中 $\mathrm{l} < \mathrm{m}$ 再次定义为 $\mathrm{leq}_n(\mathrm{l}^+ \vee \mathrm{m}, \mathrm{m})$。我们有如下方程：

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{T}_m(\mathrm{T}_l^m(a)) & = & \mathrm{T}_l(a) \\
\mathrm{T}_l^m(a)[\gamma] & = & \mathrm{T}_l^m(a[\gamma])
\end{array}$$

在存在累积性的情况下，我们可以用以下单重索引版本替换 Π 的双重索引编码：

$$\Gamma : \mathrm{ctx}, a : \mathrm{tm}(\Gamma,(\mathsf{U}_l)_\Gamma), b : \mathrm{tm}(\Gamma \cdot \mathrm{T}_l(a),(\mathsf{U}_l)_\Gamma)) \quad \vdash \quad \Pi^l(a,b) : \mathrm{tm}(\Gamma,(\mathsf{U}_l)_\Gamma)$$

方程。我们有以下解码方程:

$$\mathrm{T}_l^m(\Pi^l(a,b)) = \Pi^m(\mathrm{T}_l^m(a), \mathrm{T}_l^m(b)) \quad : \quad \mathrm{tm}_n(\Gamma, (\mathsf{U}_m)_\Gamma)$$

其中 n : lctx, l、m : ltm(n), p : l $<$m Γ: ctx$_n$, a : tm$_n$(Γ, (U$_l$)$_\Gamma$), b : tm$_n$(Γ.T$_l$(a), (U$_l$)$_\Gamma$)。宇宙编码提升的解码方程如下:

$$n : \mathrm{lctx}, k, l, m : \mathrm{ltm}(n), p : k < l, q : l < m, \Gamma : \mathrm{ctx}(n) \quad \vdash \quad \mathrm{T}_l^m((\mathsf{U}_k^l)_\Gamma) = (\mathsf{U}_k^m)_\Gamma$$

提升与项代换 γ 的交换性方程: hom(Δ,Γ):

$$\mathrm{T}_l^m(a)[\gamma] \quad = \quad \mathrm{T}_l^m(a[\gamma])$$

以及层级代换 σ 的交换性方程: lhom(n, n′):

$$\mathrm{T}_l^m(a)[\sigma] \quad = \quad \mathrm{T}_{l[\sigma]}^m(a[\sigma])$$

3.5 类型的层级索引积

在 [5, 第 4] 节中，我们介绍了全称层级量化 [α]A、带有层级抽象 $\langle\alpha\rangle$a，以及将项应用于层级的操作。相应的算子符号为 $\forall_\mathrm{l}$、λ_l 和 app$_\mathrm{l}$:

$$\begin{aligned}
n : \mathrm{lctx}, \Gamma : \mathrm{ctx}_n, B : \mathrm{ty}_{\mathrm{s}(n)}(\Gamma[\mathrm{lp}]) \quad &\vdash \quad \forall_\mathrm{l}(B) : \mathrm{ty}_n(\Gamma) \\
n : \mathrm{lctx}, \Gamma : \mathrm{ctx}_n, B : \mathrm{ty}_{\mathrm{s}(n)}(\Gamma[\mathrm{lp}]), b : \mathrm{tm}_{\mathrm{s}(n)}(\Gamma[\mathrm{lp}], B) \quad &\vdash \quad \lambda_\mathrm{l}(b) : \mathrm{tm}_n(\Gamma, \forall_\mathrm{l}(B)) \\
n : \mathrm{lctx}, \Gamma : \mathrm{ctx}_n, B : \mathrm{ty}_{\mathrm{s}(n)}(\Gamma[\mathrm{lp}]), c : \mathrm{tm}_n(\Gamma, \forall_\mathrm{l}(B)), l : \mathrm{ltm}(n) \quad &\vdash \quad \mathsf{app}_\mathrm{l}(c, l) : \mathrm{tm}_n(\Gamma, B[\langle \mathrm{lid}, l\rangle])
\end{aligned}$$

方程（β 和 η分别用于层级抽象和应用）:

$$\begin{aligned}
\mathsf{app}_\mathrm{l}(\lambda_\mathrm{l}(b), l) \quad &= \quad b[\langle \mathrm{lid}, l\rangle] \\
\lambda_\mathrm{l}(\mathsf{app}_\mathrm{l}(c[\mathrm{lp}], \mathrm{lq})) \quad &= \quad c
\end{aligned}$$

Equ算子符号关于项代换和层级代换的交换性方程 n:

$$\begin{aligned}
\forall_\mathrm{l}(B)[\gamma] \quad &= \quad \forall_\mathrm{l}(B[\gamma[\mathrm{lp}]]) \\
\lambda_\mathrm{l}(B)[\gamma] \quad &= \quad \lambda_\mathrm{l}(B[\gamma[\mathrm{lp}]]) \\
\mathsf{app}_\mathrm{l}(c, l)[\gamma] \quad &= \quad \mathsf{app}_\mathrm{l}(c[\gamma], l[\gamma]) \\
\forall_\mathrm{l}(B)[\sigma] \quad &= \quad \forall_\mathrm{l}(B[\sigma^\dagger]) \\
\lambda_\mathrm{l}(B)[\sigma] \quad &= \quad \lambda_\mathrm{l}(B[\sigma^\dagger]) \\
\mathsf{app}_\mathrm{l}(c, l)[\sigma] \quad &= \quad \mathsf{app}_\mathrm{l}(c[\sigma], l[\sigma])
\end{aligned}$$

其中 γ : hom$_n$(Δ,Γ) 是项代换，而 σ : lhom(m, n) 是层级代换，且 $\sigma^\dagger = \langle\sigma \circ \mathrm{lp}, \mathrm{lq}\rangle$。为检查该方程的类型

$$\forall_\mathrm{l}(B)[\sigma] = \forall_\mathrm{l}(B[\sigma^\dagger])$$

我们假设 Γ : ctx$_n$,B : ty$^{s(n)}$(Γ[lp])。由此可得 B[$\sigma^\dagger$] : ty$^{s(m)}$(Γ[lp][$\sigma^\dagger$]) = ty$^{s(m)}$(Γ[σ][lp])。因此$\forall_\mathrm{l}$(B[$\sigma^\dagger$]) : ty$_m$(Γ[σ])。

其余关于 Σ^{up} 的规则请参见附录。

关于谓词逻辑中全称量化的说明。引言中我们提到，无类型谓词逻辑可以由 ucwf 索引的 scwf 刻画。（这给出了一种与证明相关的模型概念，类似于 Lawvere 的超教义 [25]。）我们注意到，无类型谓词逻辑中全称量化的算子符号和方程，与上文全称层级量化的算子符号和方程相同，区别仅在于 scwf 与上下文范畴的不同：谓词逻辑中的命题不依赖于证明。

3.6 语法和推理规则作为初始模型

一种基于显式替换的通用构造。用于层级索引的 cwf、显式宇宙多态以及层级索引的积的广义代数理论 Σ^{up} 是有穷的。因此，我们可以直接实例化 [6] 中项模型的构造，并得到一个证明： $\mathscr{T}_{\Sigma^{\mathrm{up}}}$ 在 $\mathrm{CwF}_{\Sigma^{\mathrm{up}}}$ 中是初始的，而 $\mathrm{CwF}_{\Sigma^{\mathrm{up}}}$ 是带有内部层级索引带族范畴及额外结构的带族范畴的范畴。以与我们在第 2.3 节中所展示的类似方式，$\mathrm{CwF}_{\Sigma^{\mathrm{up}}}$ 中的对象可以被外部化，从而在范畴 $\mathrm{LCwF}^{\mathrm{up}}$ 中得到一个对象；该范畴是具有用于显式宇宙多态和层级索引的积之额外结构的层级索引的 cwf 的范畴。

一种基于隐式替换的构造（初始性猜想）。我们将概述如何基于 $\mathrm{TT}^{\mathrm{up}}$（即我们的具有显式宇宙多态的类型理论的装饰版本 [5, 第 4]节）构造 $\mathrm{CwF}^{\mathrm{up}}$ 中的初始对象 $\mathscr{T}_{\mathrm{up}}$ =(Lctx,Lhom,Ltm, Ctx, Hom, Ty, Tm)。我们需要说明：(i) 如何将层级项和层级判断组织成层的单类型上下文范畴族；(ii) 如何通过修改小类型的上下文范畴的构造来构造小类型的层级索引带族范畴；(iii) 如何通过修改基于 $\mathrm{TT}^{\mathrm{tower}}$ 的外部索引宇宙模型的构造来构造按层索引的宇宙的模型。

我们首先构造一个层的单类型上下文范畴族 (Lctx, Lhom, Ltm)。为此，我们扩展 Brilakis 在 Agda 中构造两个初始上下文统一范畴框架之间等价关系的方法：一个使用显式替换，另一个使用隐式替换（通过对项递归定义）和 de Bruijn 变量。由于使用显式替换的上下文统一范畴框架是直接根据上下文统一范畴框架的算子符号构造的，Brilakis 的证明本质上等同于证明使用隐式替换的上下文统一范畴框架的初始性。为了证明层的单类型上下文范畴族的初始性，我们在 Brilakis 的证明中加入针对 $\vee$和 $(-)^+$ 的额外结构。

- Lctx 中的一个元素 n $\in$表示可用层级变量的数量。
- Ltm(n) 的一个元素是由 n 个层级变量经由 $\vee$和 $(-)^+$ 生成的层级项的等价类，其中等价关系由针对 $\vee$ 和 $(-)^+$ 的方程生成。在我们的显式宇宙多态类型论中， [5]这对应于满足以下条件的层级项 l:

$$n, \Gamma \vdash l \ \mathsf{level}$$

并且两个项 l、l′ : ltm(n) 等价，当且仅当

$$n, \Gamma \vdash l = l'$$

- Lhom(m, n) 的一个元素是层级项序列的一个等价类。
- ucwf 运算的定义请参阅 Brilakis。注意，层级代换 l[σ]通过对 l 作归纳法定义。在层级的等价类上定义 $\vee$ 和 $(-)^+$ 是直接的。

下一步是为 n $\in$Lctx 构造层级索引的 cwf（带额外结构）(Ctx_n, Hom_n, Ty_n, Tm_n):

• $\mathrm{Ty}_n(\Gamma)$ 是原始类型 A 的等价类集合，使得 $\mathrm{n}\ \Gamma \vdash \mathrm{A}$ 是一个类型，并且在 $\mathrm{n}\ \Gamma \vdash \mathrm{A} = \mathrm{A}'$ 的条件下 $\mathrm{A}.\mathrm{A}'$ 等价。

• $\mathrm{Tm}_n(\Gamma,\mathrm{A})$ 是满足 $\mathrm{n}\ \Gamma \vdash \mathrm{a} : \mathrm{A}$ 的原始项 a 的等价类集合；若 $\mathrm{n}\ \Gamma \vdash \mathrm{A} = \mathrm{A}'$，则 $\mathrm{a}.\mathrm{a}'$等价。

• Ctx_n 是原始上下文 Γ 在等价关系 $\mathrm{n}\ \Gamma = \Gamma' \vdash$ 下的等价类集合，条件是 $\mathrm{n}\ \Gamma \vdash$ 。

• $\mathrm{Hom}_n(\Delta,\Gamma)$ 是原始上下文态射的等价类集合。

接着，我们定义该结构中的所有算子符号，并验证这些方程。

构造的最后一部分是解释层级代换与复合的算子符号（作用于层级、层级态射、上下文、上下文态射、类型和项），它们对应于带额外结构的层级索引带族范畴的箭头部分。这些符号均通过对原始语法作归纳法而隐式定义。

至此，我们完成了对构造 $\mathrm{CwF}^{\mathrm{up}}$ 中对象的概述。最后，我们需要构造一个到 $\mathrm{CwF}^{\mathrm{up}}$ 中任意其他对象的态射，并证明该态射是唯一的。

4 结论

我们介绍了一个用于带有外部宇宙塔的 Martin-L¨ 类型论的无穷基范畴代数理论 Σ^{tower}，以及一个用于带有内部层级索引的宇宙和层级索引的积的 Martin-L¨ 类型论的有限基范畴代数理论 Σ^{up}。我们还解释了，模型 $\mathscr{T}_{\Sigma^{\mathrm{tower}}}$ 和 $\mathscr{T}_{\Sigma^{\mathrm{up}}}$ 是我们文章 [6] 中所述广义代数理论初始模型的一般构造的实例。此外，我们概述了外部带族范畴 $\mathscr{T}_{\mathrm{tower}}$ 和 $\mathscr{T}_{\mathrm{up}}$ 的构造，它们分别是 $\mathrm{CwF}_{\mathrm{tower}}$ 和 $\mathrm{CwF}^{\mathrm{up}}$ 中的初始对象。

广义代数理论 Σ^{up} 的一个关键要素是用于层级相等的排序符号 leq。在即将发表的文章中，我们计划展示如何利用层级相等排序来表示等式约束。这将使我们能够通过新的排序符号和方程扩展 Σ^{up}，从而实现对文献 [5, 第 5] 节中介绍的带有等式约束的 $\mathrm{TT}^{\mathrm{up}}$ 的扩展。

相关研究。表示类型论的另一种方法是使用逻辑框架，例如 Martin-L¨of 的 [30], Edinburgh LF [18] 或 Dedukti [15]。这些框架基于带有 Π-类型和一个或多个宇宙的依赖类型论。其目标是通过向逻辑框架添加常量和方程来编码其他逻辑。与此不同，广义代数理论基于不带 Π-类型和宇宙的依赖类型。随后，通过向依赖类型基本理论添加排序符号、算子符号和方程来编码逻辑。

作为 Voevodsky 初始性猜想项目的一种方法，逻辑框架重新受到关注。相关工作包括 Bauer、Haselwarter 和 Lumsdaine [2], Uemura [37],，以及 Kaposi 和 Xie [22]关于二阶广义代数理论（SOGATs）的研究。这些文献展示了理论编码的若干例子，包括基本依赖类型论、二层类型论、谓词逻辑和立方类型论。我们的带宇宙多态性的类型论似乎很可能也能以类似方式紧凑地编码。Kaposi 和 Xie 还提出了从其 SOGATs 到广义代数理论的一般转换。不过，我们将用 SOGAT 编码我们的理论留待未来工作，同时也将本文中的广义代数理论与通过将 SOGATs 转换为广义代数理论所得到的理论之间的关系问题留待未来探讨。

另一条相关研究路线是 Kaposi、Kov´acs 和 Altenkirch [21, 23] 提出的商归纳-归纳类型（qiits），它们与广义代数理论密切相关。尽管形式细节有所不同，但 qiits 大致是

在依赖类型论中被视为数据类型的初始广义代数理论。种类符号对应数据类型构造子；算子符号对应项构造子；还可以声明项之间的方程。由于 qiit 是通过归纳生成的，因此它具有消去原理。它是依赖类型论中以下逐渐一般化的归纳概念序列中最新的一种：归纳类型、归纳族、归纳-归纳类型和商归纳-归纳类型。

参考文献

[1] Martın Abadi, Luca Cardelli, Pierre-Louis Curien & Jean-Jacques Lévy（1990）：显式代换。载于：POPL1990，第31–46页，doi:10.1017/S0956796800000186。[2] Andrej Bauer, Philipp G. Haselwarter & Peter LeFanu Lumsdaine（2020）：依赖类型论的一般定义，doi:10.48550/arxiv.2009.05539。[3] J.F. Belo（2008）：依赖排序逻辑。载于：TYPES 2007，《计算机科学讲义》4941，Springer，第33–50页，doi:10. 1007/978-3-540-68103-8_3。[4] Marc Bezem & Thierry Coquand（2022）：对带有膨胀自同态的并半格进行循环检查及其一致字问题。《TCS》913，第1–7页，doi:10.1016/j.tcs.2022.01.017。[5] Marc Bezem, Thierry Coquand, Peter Dybjer & Martın Escardó（2023）：《具有显式宇宙多态性的类型理论》。载于：TYPES 2022，LIPIcs 269，第13:1–13:16页，doi:10.4230/LIPICS.TYPES.2022.13。（修订扩展版见 https://arxiv.org/pdf/2212.03284）。[6] Marc Bezem, Thierry Coquand, Peter Dybjer & Martın Escardó（2021）：关于广义代数理论与带族范畴。《计算机科学中的数学结构》31，第1006–1023页，doi:10. 1017/S0960129521000268。[7] Menno de Boer（2020）：依赖类型论初始性猜想的证明与形式化。执照论文，斯德哥尔摩大学数学系。[8] Konstantinos Brilakis（2018）：关于初始带族范畴——Agda中单类型与简单类型带族范畴的形式化。硕士论文，查尔姆斯理工大学。[9] Guillaume Brunerie（2019）：Agda中初始性猜想的形式化。关于与Menno de Boer、Peter Lumsdaine和Anders M¨ortberg合作成果的演讲幻灯片，演讲地点为卡内基梅隆大学匹兹堡分校HoTT会议。[10] John Cartmell（1978）：广义代数理论与上下文范畴。哲学博士，牛津大学。[11] John Cartmell（1986）：广义代数理论与上下文范畴。《纯数学与应用逻辑年刊》32，第209–243页，doi:10.1016/0168-0072(86)90053-9。[12] Simon Castellan, Pierre Clairambault & Peter Dybjer（2021）：带族范畴：单类型、简单类型与依赖类型。载于 Claudia Casadio & Philip J. Scott 编：《Joachim Lambek：数学、逻辑与语言学的交汇》，Springer，第135–180页，doi:10.1007/978-3-030-66545-6。[13] Pierre Clairambault & Peter Dybjer（2014）：局部笛卡尔闭范畴与 Martin-L¨of 类型论的双等价。《计算机科学中的数学结构》24(6)，doi:10.1017/S0960129513000881。[14] Judica¨el Courant：构造演算的显式宇宙。载于 Victor Carre˜no, C´esar A. Mu˜noz & Sofi`ene Tahar 编：TPHOLs2002，《计算机科学讲义》2410，Springer，第115–130页，doi:10.1007/3-540-45685-6_9。[15] Gilles Dowek, Th´er`ese Hardin & Claude Kirchner（2003）：模理论证明。《自动推理杂志》31(1)，第33–72页，doi:10.1023/A:1027357912519。[16] Peter Dybjer（1996）：内部类型论。载于：TYPES ’95，《证明与程序的类型》，《计算机科学讲义》1158，Springer，第120–134页，doi:10.1007/3-540-61780-9_66。

[17] Nicola Gambino & Peter Aczel（2006）：构造性集合论的一般类型论解释。《符号逻辑杂志》71(1)，第67–103页，doi:10.2178/jsl/1140641163。[18] Robert Harper, Furio Honsell & Gordon D. Plotkin（1987）：定义逻辑的框架。载于：LICS'87，美国数学学会计算机学会，第194–204页，doi:10.1145/138027.138060。[19] Martin Hofmann（1996）：依赖类型的语法与语义。载于 Andrew Pitts & Peter Dybjer 编：《计算语义与逻辑》，剑桥大学出版社，第79–130页，doi:10.1017/CBO9780511526619.004。[20] G´erard Huet（1987）：以 Type:Type 扩展构造演算。未发表手稿。[21] Ambrus Kaposi, Andr´as Kov´acs & Thorsten Altenkirch（2019）：构造商归纳-归纳类型。《ACM编程语言会议论文集》3，POPL专刊，第2:1–2:24页，doi:10.1145/3290315。[22] Ambrus Kaposi & Szumi Xie：二阶广义代数理论：签名与一阶语义。载于 Jakob Rehof 编：FSCD 2024，LIPIcs 299，Schloss Dagstuhl - Leibniz信息学中心，第10:1–10:24页，doi:10.4230/LIPICS.FSCD.2024.10。[23] Andr´as Kov´acs（2022）：代数理论与归纳类型的类型论签名。博士论文，E¨otv¨os Lor´and大学信息学博士学院。[24] F. William Lawvere（1969）：基础中的伴随性。《Dialectica》23，第281–296页。后转载于《范畴理论及其应用》16，http://www.tac.mta.ca/tac/reprints/articles/16/tr16.pdf。[25] F. William Lawvere（1970）：超教义中的相等与作为伴随函子的概括模式。载于 A. Heller 编：《范畴代数的应用》，《纯数学专题讨论会论文集》XVII，美国数学学会，第1–14页，doi:10.1090/pspum/017/0257175。[26] Michael Makkai（1998）：迈向数学的范畴论基础。载于：逻辑学术研讨会 '95，《逻辑讲义》11，施普林格出版社，第153–190页，doi:10.1017/9781316716830.014。[27] Per Martin-L¨of（1982）：构造性数学与计算机编程。载于：《逻辑、方法论与科学哲学VI，1979》，北荷兰出版社，第153–175页，doi:10.1016/S0049-237X(09)70189-2。[28] Per Martin-L¨of（1992）：代换演算。于 G¨oteborg 举行的讲座笔记。[29] Leonardo de Moura, Soonho Kong, Jeremy Avigad, Floris van Doorn & Jakob von Raumer（2015）：Lean定理证明器（系统说明）。载于：自动演绎——CADE-25，《计算机科学讲义》9195，Springer，第378–388页，doi:10.1007/978-3-319-21401-6_26。[30] Bengt Nordstr¨om, Kent Petersson & Jan Smith（1990）：Martin-L¨of 类型论编程：导论。牛津大学出版社。[31] Erik Palmgren（2019）：带族范畴与依赖类一阶逻辑。《纯数学与应用逻辑年刊》170(12)，doi:10.1016/J.APAL.2019.102715。[32] Thomas Streicher（1988）：构造演算范畴语义的正确性与完备性。博士论文，帕绍大学数学与信息学学院。[33] Alvaro Tasistro（1993）：具有显式代换的 Martin-L¨of 类型理论的表述。技术报告，查尔姆斯理工大学与哥德堡大学计算机科学系。[34] Agda社区：Agda-2.6.4变更日志。https://hackage.haskell.org/package/Agda-2.6. 4/changelog。[35] Agda社区：Agda维基。https://wiki.portal.chalmers.se/agda/Main/HomePage。[36] Rocq社区：Rocq。https://rocq-prover.org。[37] Taichi Uemura（2023）：类型论语义的一般框架。《计算机科学中的数学结构》33(3)，第134–179页，doi:10.1017/S0960129523000208。[38] Vladimir Voevodsky：模型、解释与初始性猜想。见 https://www. math.ias.edu/Voevodsky/voevodsky-publications_abstracts.html#logcoll-1。讲座笔记，摘自2017年在斯德哥尔摩举行的逻辑学术研讨会，范畴论与类型论专题，纪念 Per Martin-L¨of 的75岁生日。

[39] Vladimir Voevodsky：宇宙多态类型系统。可于 http://www.math.ias.edu/Voevodsky/voevodsky-publications_abstracts.html#UPTS 获取。[40] Vladimir Voevodsky（2010）：等价公理与类型论的单价模型。卡内基梅隆大学演讲。

A 小类型的层级索引的 cwf 的算子符号与方程

我们已在 3.2 中列出排序符号。

算子符号。

$$
\begin{array}{rcl}
n : \mathrm{lctx}, \Gamma : \mathrm{ctx}_n & \vdash & \mathrm{id}_{n,\Gamma} : \mathrm{hom}_n(\Gamma,\Gamma) \\
n : \mathrm{lctx}, \Xi, \Delta, \Gamma : \mathrm{ctx}_n, \gamma : \mathrm{hom}_n(\Delta,\Gamma), \delta : \mathrm{hom}_n(\Xi,\Delta) & \vdash & \gamma \circ \delta : \mathrm{hom}_n(\Xi,\Gamma) \\
n : \mathrm{lctx}, \Gamma, \Delta : \mathrm{ctx}_n, A : \mathrm{ty}_n(\Gamma), \gamma : \mathrm{hom}_n(\Delta,\Gamma) & \vdash & A[\gamma] : \mathrm{ty}_n(\Delta) \\
n : \mathrm{lctx}, \Gamma, \Delta : \mathrm{ctx}_n, A : \mathrm{ty}_n(\Gamma), \gamma : \mathrm{hom}_n(\Delta,\Gamma), a : \mathrm{tm}_n(\Gamma,A) & \vdash & a[\gamma] : \mathrm{tm}_n(\Delta, A[\gamma]) \\
n : \mathrm{lctx} & \vdash & 1_n : \mathrm{ctx}_n \\
n : \mathrm{lctx}, \Gamma : \mathrm{ctx}_n & \vdash & \langle\rangle_{n,\Gamma} : \mathrm{hom}_n(\Gamma, 1_n) \\
n : \mathrm{lctx}, \Gamma : \mathrm{ctx}_n, A : \mathrm{ty}_n(\Gamma) & \vdash & \Gamma.A : \mathrm{ctx}_n \\
n : \mathrm{lctx}, \Gamma, \Delta : \mathrm{ctx}_n, A : \mathrm{ty}_n(\Gamma), \gamma : \mathrm{hom}_n(\Delta,\Gamma), a : \mathrm{tm}_n(\Delta, A[\gamma]) & \vdash & \langle \gamma, a \rangle : \mathrm{hom}_n(\Delta, \Gamma.A) \\
n : \mathrm{lctx}, \Gamma : \mathrm{ctx}_n, A : \mathrm{ty}_n(\Gamma) & \vdash & \mathrm{p}_{n,\Gamma,A} : \mathrm{hom}_n(\Gamma.A, \Gamma) \\
n : \mathrm{lctx}, \Gamma : \mathrm{ctx}_n, A : \mathrm{ty}_n(\Gamma) & \vdash & \mathrm{q}_{n,\Gamma,A} : \mathrm{tm}_n(\Gamma.A, A[\mathrm{p}])
\end{array}
$$

层级索引 Π-类型的算子符号

n : lctx Γ : 上下文$_n$, A : 类型$_n$(Γ), B : 类型$_n$(Γ.A) ⊢ Π(A, B) : 类型$_n$(Γ) n : lctx Γ: 上下文$_n$, A : 类型$_n$(Γ), B : 类型$_n$(Γ.A), b : tm$_n$(Γ.A, B) ⊢ λ(b) : tm$_n$(Γ, Π(A, B)) n : lctx Γ: 上下文$_n$, A : 类型$_n$(Γ), B : 类型 $_n$(Γ.A), c : tm$_n$(Γ, Π(A, B)), a : tm$_n$(Γ, A) ⊢ app(c, a) : tm$_n$(Γ, B[⟨id, a⟩])

方程。

$$
\begin{array}{rcl}
\mathrm{id}_{n,\Gamma} \circ \gamma & = & \gamma \\
\gamma \circ \mathrm{id}_{n,\Delta} & = & \gamma \\
(\gamma \circ \delta) \circ \xi & = & \gamma \circ (\delta \circ \xi) \\
A[\mathrm{id}_{n,\Gamma}] & = & A \\
a[\mathrm{id}_{n,\Gamma}] & = & a \\
A[\gamma \circ \delta] & = & A[\gamma][\delta] \\
a[\gamma \circ \delta] & = & a[\gamma][\delta] \\
\mathrm{id}_{n,1_n} & = & \langle\rangle_{n,1_n} \\
\langle\rangle_{n,\Gamma} \circ \gamma & = & \langle\rangle_{n,\Delta} \\
\mathrm{p}_{n,\Gamma,A} \circ \langle \gamma, a \rangle & = & \gamma : \mathrm{hom}(\Delta,\Gamma) \\
\mathrm{q}_{n,\Gamma,A}[\langle \gamma, a \rangle] & = & a : \mathrm{tm}(\Delta, A[\gamma]) \\
\langle \gamma, a \rangle \circ \delta & = & \langle \gamma \circ \delta, a[\delta] \rangle \\
\mathrm{id}_{n,\Gamma.A} & = & \langle \mathrm{p}_{n,\Gamma,A}, \mathrm{q}_{n,\Gamma,A} \rangle : \mathrm{hom}(\Gamma.A, \Gamma.A)
\end{array}
$$

方程（省略等式的上下文和类型）：

$$\begin{aligned} \mathsf{app}(\lambda(b), a) &= b[\langle \mathrm{id}, a\rangle] \\ \lambda(\mathsf{app}(c[\mathrm{p}], \mathrm{q})) &= c \end{aligned}$$

算子符号关于代换的交换性方程:

$$\begin{aligned} \Pi(A, B)[\gamma] &= \Pi(A[\gamma], B[\gamma^\dagger]) \\ \lambda(b)[\gamma] &= \lambda(b[\gamma^\dagger]) \\ \mathsf{app}(c, a)[\gamma] &= \mathsf{app}(c[\gamma], a[\gamma]) \end{aligned}$$

其中 $\gamma^\dagger = \langle \gamma \circ \mathrm{p}, \mathrm{q}\rangle$。