经典逻辑的博弈语义：关于博弈语义的两则评论

Thierry Coquand计算
机科学与工程 哥德堡大学 哥德
堡，瑞典
coquand@chalmers.se

我们介绍并阐释 Stefano Berardi 两则与博弈语义相关的未发表评论。

1 引言

大约 30 年前，我曾与 Stefano Berardi 多次讨论经典逻辑的博弈语义，尤其是与我们的工作 [2]相关的内容。Stefano 提出了若干富有洞见的评论，可惜其中大多数未曾发表；本文旨在报告并评述其中两则：

1. 第一条评论提出了一种自然的扩展，将视图和辩论 [4, 5] 的概念推广到超限交互序列。
2. 第二条评论表明，实现语义 [2] 的博弈动机也能验证错误公式；这条评论与近期研究 [10] 相关。

我们首先回顾一下 [2] 中所用博弈语义的主要概念，然后提出这些评述 s.

2 经典逻辑的博弈语义

该语义是为无穷命题演算定义的。该演算的公式归纳定义如下：(i) 0 和 1 是（原子）公式；(ii) 若 a_i ($i \in I$) 是公式，其中 I 是可数集，则 $\wedge_i a_i$ 和 $\vee_i a_i$ 也都是公式。注意，每个算术公式都可以用一种自然的方式表示为该无穷命题演算中的公式。在这里，我们将原子公式视为既是全称量词也是存在量词。我们根据德摩根律，通过对 a 作归纳来定义 $\neg a$。

我们可以定义直觉主义有效性，并归纳地指定直觉主义有效公式的集合 $\mathscr{V}$：(i) $1 \in \mathscr{V}$；(ii) 若对所有 i，$a_i \in \mathscr{V}$，则 $\wedge_i a_i \in \mathscr{V}$；(iii) 若对某个 i，$a_i \in \mathscr{V}$，则 $\vee_i a_i \in \mathscr{V}$。我们可以将公式视为规定一个完全信息博弈，此时直觉主义有效性对应于该博弈的获胜策略。注意，对于任意 a，通过对 a 作归纳，并采用“照搬”策略，我们可以得到 $a \vee \neg a$ 的获胜策略。

接着，我们通过指定经典有效公式的集合 $\mathscr{C}$来引入经典有效性的概念。$\mathscr{C}$采用归纳方式定义：(i) $1 \in \mathscr{C}$，(ii) $\wedge_i a_i \in \mathscr{C}$，当且仅当对所有 i 都有 $a_i \in \mathscr{C}$；(iii) $\vee_i a_i \in \mathscr{C}$，当且仅当存在某个 i_0，使得 a_{i_0} 为 1，或者 a_{i_0} 的形式为 $\wedge_j a_{i_0 j}$，且对所有 $j \in J$ 都有 $a_{i_0 j} \vee \vee_i a_i \in \mathscr{C}$。

该演算的博弈论语义也被表述为两个玩家围绕一个公式进行的完全信息博弈： ∃loise 为存在公式而战， ∀belard 则为全称公式而战。不过，区别在于现在 ∃loise 可以回溯。公式 a 的博弈规则如下：如果轮到 ∃loise（分别地， ∀belard）行动，且 a 是原子公式，那么当 a 为 1（分别地，0）时， ∃loise（分别地， ∀belard）获胜。如果 a 是形如 $\wedge_i a_i$ 的全称公式，那么 ∀belard 必须选择一个 $i \in I$，然后 ∃loise 开始

T. Altenkirch、F. Barbanera、F. Damiani 和 U. de'Liguoro（编）：《逻辑与类型论：献给 Stefano Berardi 的论文集——祝贺他 64 岁生日》，EPTCS441，2026年，第 96–102 页，
doi:10.4204/EPTCS.441.6

© Thierry Coquand 本作品采用知识共享署名许可协议授权。

公式 a_i 的博弈。如果 a 是形如 $\vee_i a_i$ 的存在公式，那么 ∃loise 选择一个 $i \in I$；若 a_i 为 1，则获胜；若 a_i 为 0，则失败。当 a_i 是形如 $\wedge_j a_{ij}$ 的全称公式时，∃loise 可以不从 a_{ij} 开始，而是在 ∀belard 返回一个 $j \in J$ 后，从 $a_{ij} \vee \vee_i a_i$ 开始游戏。只有 ∃loise 可以改变主意，并回溯自己所作的选择。其直觉是，∃loise 通过这种方式进行博弈，从环境 ∀belard 中学习。

例如，若 f 是一个以预言机形式给出的函数，那么公式 $\vee_x \wedge_y f(x) \leq f(y)$（断言 f 取到一个最小值）并非直觉主义有效。不过，∃loise 在经典博弈中有一个获胜策略。她首先任意选择一个值 $x = 0$。如果 ∀belard 回答一个值 $y = x_1$，使得 $f(0) \leq f(x_1)$，那么 ∃loise 就获胜。否则，$f(x_1) < f(0)$，于是 ∃loise 回溯并选择 $x = x_1$。如果 ∀belard 回答一个值 $y = x_2$，使得 $f(x_1) \leq f(x_2)$，那么 ∃loise 就获胜。否则，$f(x_2) < f(x_1)$，于是 ∃loise 回溯并选择 $x = x_2$，，如此继续。由于 $f(x_n) < f(x_{n-1})$，博弈最终必定结束。注意，∃loise 可能在尚未找到 f 的实际最小值时就获胜。

与 Lorenzen 的方法的一个主要区别在于，我们将范围限定为 ∧∨ 公式[1]。带回溯的策略对应于无割证明；相较于 Lorenzen 的工作，我们的贡献在于分析割消去过程对应的是什么。

通常，我们将一个公式表示为一棵 ∧∨树，它可以有无限多个分支，叶节点的值为 0 或 1。例如：

$$(\exists_n \forall_m f(n) \leqslant f(m)) \to \exists_u f(u) \leqslant f(u+1)$$

将表示为一棵 ∧∨树：

$$(\wedge_n \vee_m f(n) > f(m)) \vee \vee_u f(u) \leqslant f(u+1).$$

∃loise 的策略如下，最多两步即可获胜

- ∃loise 请求给出 n。
- ∀belard 回答 $n = a$。
- 若 $f(a) \leq f(a+1)$，则 ∃loise 取 $u = a$。
- 若 $f(a) > f(a+1)$，则 ∃loise 取 $m = a+1$。

迄今所考虑的策略对应于无割证明，这些证明描述了一个证明在不改变主意的环境中如何表现。割规则被解释为证明之间的“协作”。例如：策略 A 用于

$$\vee_n \wedge_m f(n) \leqslant f(m)$$

与策略 B 交互，用于

$$(\wedge_n \vee_m f(n) > f(m)) \vee \vee_u f(u) \leqslant f(u+1)$$

从而得出 $\vee_u f(u) \leq f(u+1)$ 的证明。割公式为 $\vee_n \wedge_m f(n) \leq f(m)$。

对于 a 举个简单的例子，考虑函数：$f(0) = 10, f(1) = 8, f(2) = 3, f(3) = 27, \ldots$

交互过程如下[2]

1. B 请求 n，使用 $\varphi(1) = 0$2. A 回答 $n = 0$，使用 $\varphi(2) = 1$3. B 回应 $m = 1$，因为 $f(0) > f(0+1)$，使用 $\varphi(3) = 2$4. A 回溯并通过选择 $n = 1$作答，使用 $\varphi(4) = 1$

[1]这样，直觉主义策略便有了直接的完全信息博弈解释。[2]映射 φ指明了我们要响应哪些着法，其中 0 是起始着法。

5. B 回应 $m = 2$，因为 $f(1) > f(1+1)$，使用 $\varphi(5) = 46$.
A 回溯并通过选择 $n = 2$作答，使用 $\varphi(6) = 17$. B 通过选择 $u = 2$得出结论，因为 $f(2) \not< f(2+1)$

割公式被视作一棵树，充当“辩论主题”。辩论包括：

- 论证与反论证。
- 两位均可改变想法的对手。
- 在任何时刻，他们都可以从先前的某一点重新开始辩论。

在这个例子中，A 与 B 进行辩论，双方都从这次交互中学习，直到 B 能够为 u 产生一个值。我们可以将 A 视为充当证明，而 B 则充当反证明。注意，在这个例子中，如果例如 $f(4) = 0$，交互就会在 A 找到 f 的实际最小值之前停止。

Gentzen 的割消去对应于这样一个事实：此类辩论最终必定会结束。在 [4],发表于 [6] 和 [3] 的文章中（其中也给出了终止性的另一种证明），我们为终止性给出了一种论证，我们认为它与 Gentzen[3]的论证本质上不同。这种论证依赖于对交互的几何分析，其形式为一个交互序列。

定义 1. 一个交互序列由一对 $V\ \varphi$ 给出，其中 $V(n) \subseteq [0,n[$ 且 $\varphi(n) \in V(n)$，对 $n > 0$成立，并满足条件 $V(1) = \{0\}$ 且 $V(n+1) = \{n\} \cup V(\varphi(n))$，对 $n > 0$成立。

直观地说，$\varphi(n)$ 记录了当前步回应的是哪一个较早的步。

例如，策略 A 与上文的 B 之间这次交互所产生的交互序列（指针结构）为

$$\varphi(1) = 0, \quad \varphi(2) = 1, \quad \varphi(3) = 2, \quad \varphi(4) = 1, \quad \varphi(5) = 4, \quad \varphi(6) = 1.$$

关于如何获得这种交互序列的生动描述，请参阅 [6] 和 [1]。令区段 S(k) 定义为 $[\varphi(k),k]$，若 $k > 0$；令 S(0) 为 $[0,0]$。注意，对于每个 $n > 0$，我们可以将 $[0,n[$ 划分为区段 $S(m_k)$，其中 $m_0 = n - 1$ 且 $m_{k+1} = \varphi(m_k) - 1$。我们有 $V(n) = \{m_0, m1, \dots\}$，这就是阶段 n 的“视图”。这一概念在 [4] 中提出，后来被用于程序语言的博弈语义[4]。

3 第一条说明

在 [4], 中，我们运用经典逻辑证明：若有一个无限交互序列 $V\varphi$，则可以找到一个无限序列 $n_k < n_{k+1}$，使得 $\varphi(n_{k+1}) = n_k + 1$。证明结合对公式深度的归纳法，使用了以下观察。若 k 不在 φ 的像集中，则称区段 S(k) 是确定的。

引理 1. 确定区段构成一种嵌套结构：如果有两个不同的确定区段，那么它们要么互不相交，要么其中一个完全包含在另一个内部。

Stefano Berardi 注意到，这一结果可以按以下方式加以改进。

[3]例如，Stefano Berardi 的前学生 F. Aschieri 证明了 [1] 我们可以利用这种分析来改进 Gentzen 关于割消去的界限：不仅考虑割公式的复杂度，还考虑参与辩论的两种策略的回溯层级。在 [5], 中，我们给出了终止性的构造性版本。[4]在 [5], 中，我们展示了可以定义一些具有对称性的运算，而这些对称性并不容易通过割消去获得；有关这种对称运算的随机版本，请参见 [8]。

定理 1.（经典）存在唯一的序列 $n_k < n_{k+1}$，使得 $n_k + 1 = \varphi(n_{k+1})$，且 $S(n_k)$ 是 $[0,\omega[$ 的一个划分。

唯一性至关重要，因为它表明两个玩家中的哪一个可以被视为对无限辩论负责。

我们不提供证明；该证明是依赖于 [4] 中引理 1 的论证的一个简单变体，而是进一步阐述这一结果的意义。无限序列 n_k 应被视为阶段 ω 的视图。在该序列中，所有 n_k 都具有相同的奇偶性。直观地说，这意味着如果存在一场无限辩论，那么我们可以恰好归咎于两个玩家中的一个。于是，该玩家拥有一个视图 $V(\omega)$，它由集合 $\{n_k\}$ 给出，随后应选择一个 $\varphi(\omega) = n_k$。于是我们有 $V(\omega+1) = \{\omega\} \cup V(n_k)$，从而可以将交互序列超限延拓。

4 第二条备注

在 [2], 中，我们给出了经典 HA^ω（采用某种简化的 A-翻译）的修正可实现性解释，并将其扩展到可数选择。这一工作源于对先前博弈解释的扩展：在该扩展中，我们允许进行函数博弈，而不仅仅是自然数博弈。例如，可数选择将由一个公式表示

$$\vee_f \wedge_x P(x, f(x)) \vee \vee_x \wedge_y \neg P(x,y)$$

那么，∃loise 在可数选择中的策略如下

- ∃loise 任意选择一个函数，例如 $f_0 = \lambda n\ 0$
- ∀belard 以一个值 $x = x0$ 作答
- ∃loise 回溯，然后选择 $x = x0$
- ∀belard 以一个值 $y = y0$ 作答
- ∃loise 再次回溯，并选择 $f_1 = f0, x_0 \mapsto y0$（即将值 y0 赋给 x0 后得到的 f0）
- ∀贝拉尔德以一个值 $x = x1$ 作答
- 如果 $x_1 = x0$，∃洛伊丝通过出 $y = y0$ 获胜，随后针对 P(x0,y0) 出招 P(x0,y0)，采用“复制猫”策略；否则 ∃洛伊丝回溯并出 $x = x_1$，，如此继续

采用这一策略，∃洛伊丝会逐步更新 f 的值

$$f_n = f_0,\ x_0 \mapsto y_0,\ x_1 \mapsto y_1, \ldots,\ x_{n-1} \mapsto y_{n-1}$$

她通过询问 ∀贝拉尔德：作为对 $x = x_i$ 的回答，y 应取什么值。如果 ∀贝拉尔德曾经通过给出一个已回答过的值 $x_n = x_i$，来回答关于 $f = f_n$ 的问题，那么 ∃洛伊丝就会通过出 $y_n = y_i$ 获胜，随后针对 $P(x_i,y_i)$ 出招 $P(x_i,y_i)$。

在 [2], 中，我们指出，如果 ∀贝拉尔德以“连续”的方式作答，即仅使用关于函数 f_n 的有限信息量，那么他最终不得不对 $f = f_n$ 给出一个值 x，而这个值此前已针对某个 f_k、$k < n$ 作答过。根据上述讨论，这意味着在这种情况下，∃洛伊丝最终会获胜。

我们在 [2] 中采用了这一策略，为经典 HA^ω加上可数选择[5]提供修正可实现性解释。在 [7], T. Hida 通过连续性论证，为

[5]请注意，斯佩克特 [11] 也为这个系统提供了计算解释，但他使用的是Dialectica解释，而不是修正的可实现性。

确定性公理提出了一种策略，也能够为经典 HA^{ω}加上确定性公理[6]提供修正可实现性解释。

Stefano Berardi 的第二个重要评论如下：存在一些 HA^{ω} 中为假的公式，但它们有一种策略，能够让 ∃loise 战胜任意连续对手。以下就是这样一个例子

$$\vee_f \wedge_x \vee_y f(x) = 0 \wedge f(y) \neq 0 \qquad (*)$$

令 人惊讶的是，尽管这个公式为假，却存在一种策略 A_1，供 ∃loise 使用，具体如下

- ∃loise 选择函数 $f_0 = \lambda_n 1$
- ∀belard 用 $x = x0$ 作答
- ∃loise通过走出$f_1 = f_0$进行回溯，$0 \mapsto 0$
- ∀belard以$x = x1$作答
- 若$x_1 < 1$ ∃loise走出$y = 1$即获胜；否则 ∃loise回溯并走出$f_2 = f_1$，$1 \mapsto 0$
- ∀belard以$x = x2$作答
- 若$x_2 < 2$ ∃loise走出$y = 2$即获胜；否则 ∃loise回溯并走出$f_3 = f2$，$2 \mapsto 0$ 并 d

以此类推

如果 ∀belard 以连续方式进行游戏，那么它必须在某个时刻选择 x_n <n；随后， ∃loise 选择 y =n 获胜。

但公式 (∗) 为假，而我们有一个策略 B_1，用于其否定式

$$\wedge_f \vee_x \wedge_y f(x) \neq 0 \vee f(y) = 0$$

策略如下： ∀belard 选择 f =g 后

- ∃loise 选择任意一个值，例如 $x = 0$
- ∀belard 通过选择 y =y0 作出回应
- if g(0) $\neq 0$ or g(y0) $= 0$ then ∃loise 获胜；否则 g(0) $= 0$ and g(y0) $\neq 0$ and ∃loise 通过选择 $x = y0$ 回溯
- ∀伯拉尔选择 $y = y_1$ 作答， ∃洛伊丝获胜，因为 $g(y_0) \neq 0$

如果让 A_1 与 B_1, 对弈，我们会得到一场无限辩论，这对应于我们不能指望实现割消去这一事实。

1. A_1 出 $f_0 = \lambda_n 1$，并带有 $\varphi(1) = 0$
2. B_1 回答 $x = 0$，并带有 $\varphi(2) = 13$.
A_1 出 $f_1 = f0, 0 \mapsto 0$，并带有 $\varphi(3) = 0$
4. B_1 回答 $x = 0$，并带有 $\varphi(4) = 35$.
A_1 回答 $y = 1$，并带有 $\varphi(5) = 46$. B_1
出 $x = 1$，并带有 $\varphi(6) = 37$. A_1 出 f
$_2 = f1, 1 \mapsto 0$，并带有 $\varphi(7) = 08$. B_1
出 $x = 0$，并带有 $\varphi(8) = 7$

[6]关于联系更紧密的近期研究，请参见 [9]。

9. A_1 回答 $y = 2$，并带有 $\varphi(9) = 8$10. B_1 回答 $x = 2$，并带有 $\varphi(10) = 7$11. A_1 出 $f_3 = f2, 2 \mapsto 0$，并带有 $\varphi(11) = 0$，依此类推。

这场辩论将生成无穷函数序列

$$f_0 = \lambda_n 1,\ f_1 = f_0,\ 0 \mapsto 0,\ f_2 = f_1, 1 \mapsto 0,\ \ldots.$$

因此，令人惊讶的是，我们可以为可数选择得到一种修正可实现性解释；尽管对于（$*$），我们无法做到这一点，而（$*$）在面对任何连续对手时，也有一个使 ∃loise获胜的策略。这表明，基于连续性的论证本身不足以刻画可实现性语义。

这个例子可与 S. Soloviev 的工作 [10] 相比较。如果 f 是阿克曼函数，并且 ∀belard 仅限于采用原始递归策略，那么 ∃loise 就有一个针对这个（错误的）公式的获胜策略

$$\vee_x \wedge_y y \leqslant f(x).$$

该策略是依次出 $x = 0$、1、2、.....。由于 ∀belard 采用原始递归策略，它会以原始递归方式回答 $y = y_0, y_1, y2$、.....，因此最终应该会有 $y_n \leqslant f(n)$。这个例子在哲学上与 Stefano 的第二条备注相似：如果两位玩家之间存在不对称（例如在计算资源方面），较强的一方就能诱使另一方相信一个错误的陈述。

致谢

衷心感谢 Stefano 与我就类型论、构造性数学以及经典证明的计算内容进行了许多引人入胜的讨论。也感谢 Sergei Soloviev 近期与我就博弈语义进行的精彩讨论。

参考文献

[1] Federico Aschieri（2017）：博弈语义与回溯几何：一种新的交互复杂性分析。《符号逻辑杂志》82(2)，第672–708页，doi:10.1017/JSL.2016.48。[2] Stefano Berardi、Marc Bezem 和 Thierry Coquand（1995）：选择公理负解释的一种实现。载于 Mariangiola Dezani-Ciancaglini 和 Gordon D. Plotkin 编：《类型化 λ 演算及其应用：第二届类型化 λ 演算及其应用国际会议（TLCA'95）论文集》，英国爱丁堡，1995年4月10日至12日，《计算机科学讲义》902，施普林格，第47–62页，doi:10.1007/BFB0014044。[3] Pierre Clairambault 和 Russ Harmer（2010）：竞技场博弈中的全性。《纯粹与应用逻辑年鉴》161(5)，第673–689页，doi:10.1016/J.APAL.2009.07.016。[4] Thierry Coquand（1992）：经典算术的证据语义。载于：CLIC 研讨会论文集，奥胡斯。可在 www.cse.chalmers.se/~coquand/game1.pdf 查阅。[5] Thierry Coquand（1995）：经典算术的证据语义。《符号逻辑杂志》60(1)，第325–337页，doi:10.2307/2275524。[6] Pierre-Louis Curien（1998）：抽象 Böhm 树。《数学结构与计算机科学》8(6)，第559–591页，doi:10.1017/S0960129598002631。

[7] Takanori Hida（2012）：算术中确定性公理的计算解释。载于 Patrick C´egielski 和 Arnaud Durand 编：《计算机科学逻辑——欧洲计算机科学逻辑协会第26届国际研讨会暨第21届年会（CSL 2012）论文集》，法国枫丹白露，2012年9月3日至6日，LIPIcs 16，Schloss Dagstuhl - Leibniz 信息学中心，第335–349页，doi:10.4230/LIPICS.CSL.2012.335。[8] Morenikeji Neri、Nicholas Pischke 和 Thomas Powell（2025）：随机原则的广义可学习性。载于 Arnold Beckmann、Isabel Oitavem 和 Florin Manea 编：《可计算性与逻辑的交汇：见解、启发与创新——第21届欧洲可计算性会议（CiE 2025）论文集》，葡萄牙里斯本，2025年7月14日至18日，《计算机科学讲义》15764，施普林格，第333–348页，doi:10.1007/978-3-031-95908-0_24。[9] Philipp Provenzano（2025）：关于割消去与确定性的逆向数学。载于 Arnold Beckmann、Isabel Oitavem 和 Florin Manea 编：《可计算性与逻辑的交汇：见解、启发与创新——第21届欧洲可计算性会议（CiE 2025）论文集》，葡萄牙里斯本，2025年7月14日至18日，《计算机科学讲义》15764，施普林格，第410–424页，doi:10. 1007/978-3-031-95908-0_29。[10] Sergei Soloviev（2024）：关于对策略计算复杂性施加限制的验证者—证伪者博弈。可在 https://www.pdmi.ras.ru/EIMI/2019/dlc/S-Soloviev-abstract-Shanin100.pdf 查阅。[11] Clifford Spector（1962）：可证明递归的分析泛函：通过扩展当前直觉主义数学中提出的原则，给出分析的一致性证明。载于 J. C. E. Dekker 编：《递归函数理论》，《纯粹数学研讨会论文集》，美国数学学会，普罗维登斯，RI，第5卷，第1–27页，doi:10.2307/2271288。