归纳定义的真谓词与无穷下降证明的逻辑复杂度

Sohei Ito长崎大学
日本长崎
s-ito
@nagasaki-u.ac.jp

Makoto Tatsuta
国立信息学研究所 / 综合研究大学院大学 东京，日本 tatsuta@nii.ac.jp

关于归纳定义关系和结构的形式推理，不仅因其数学价值而广受认可，也因其在计算机科学中的重要性而备受重视，并应用于验证程序和算法的性质。近年来，基于相继式演算、用于归纳定义谓词的若干证明系统引起了广泛关注，其中包括循环证明系统 CLKID-ω 和无穷下降证明系统 LKID-ω。尽管迄今为止这些系统之间的可证性关系已得到阐明，但对其逻辑复杂度的研究仍不多。无穷下降证明系统 LKID-ω 是一个用于归纳定义的无穷证明系统，允许证明图中出现无穷路径。它构成了循环证明系统的基础。本文证明，LKID-ω 中可证性的逻辑复杂度是 (Π-1-1)-完备的。为此，首先证明，标准模型中归纳定义的有效性等价于标准项模型中归纳定义的有效性。接着，利用这一等价性，本文通过对归纳定义进行算术编码，将 Girard 教科书中给出的 ω- 语言真谓词推广到归纳定义。由此可知，标准模型中归纳定义的有效性是一个 (Π-1-1) 关系。随后，利用 LKID-ω 对标准模型的完备性，证明了 LKID-ω 中可证性的逻辑复杂度是 (Π-1-1)-完备的。

1 引言

归纳法和递归是定义和计算各种集合等对象的基本原理。在编程语言中，树和列表等各种数据结构通过归纳定义，而对这类结构的计算通常通过递归定义。分析这些原理的一种方法，是研究具备归纳和递归机制的系统的证明论。近年来，基于相继式演算的证明系统 LKID^{ω} 和 CLKID^{ω} [3, 5]作为此类系统受到关注。这些系统是一阶谓词语言 $\mathrm{FOL}_{\mathrm{ID}}$ 的证明系统，其中包含归纳定义谓词。

LKID^{ω}通过无限下降法，将关于归纳定义的推理形式化，其证明树可能包含无穷分支。另一方面，CLKID^{ω}是一个系统，它只允许证明树满足 LKID^{ω}证明中的正则性，即只包含有限个不同的子树。在这类证明树中，相同的子树可以合并，因此整个证明图呈现循环结构。

由于这些系统能够形式化关于归纳定义谓词的各种性质的证明，因此研究此类系统中证明搜索的复杂度是很自然的。除了 [14]，中简要的证明概要外，LKID^{ω} 的证明搜索逻辑复杂度鲜少受到关注，这主要是因为分析无限下降证明的复杂度颇具挑战。除了理论意义之外，无限下降证明的逻辑系统也很重要，因为循环证明的展开会成为无限下降证明，而无限下降证明为循环证明奠定了基础。本文将形式化地阐明 LKID^{ω} 的逻辑复杂度。

T. Altenkirch、F. Barbanera、F、Damiani 和 U. de'Liguoro（编）：《逻辑与类型论：献给 Stefano Berardi 的论文集，值其 64 岁寿辰》，EPTCS441，2026 年，第 166–184 页，doi:10.4204/EPTCS.441.10

© S. Ito 和 M.Tatsuta 本作品采用知识共享署名许可协议。

本文将展示以下三项结果：(1) 我们可以定义一个 Π^1_1 公式，作为标准模型中含归纳定义的一阶语言的真谓词；(2) 标准模型中含归纳定义的一阶语言的有效性是一个 Π^1_1 关系；(3) LKID^ω 中的可证性是 Π^1_1-完全的。

对于结果（1），我们将首先证明可数标准模型中的有效性与通过添加新常元而扩展后的签名的标准项模型中的有效性之间的等价。新常元用作给定模型论域中元素的名称。这些常元用于表明：若给定模型是标准的，则项模型是标准的。接下来，利用向下 Skolem-L¨owenheim 定理，我们可以将这一等价改进为可能不可数的标准模型中的有效性。然后，通过用归纳定义可编码为算术公式 [25], 这一事实来扩展 Girard 的著作 [11]中给出的 ω-语言的真谓词，我们将最终得到带归纳定义的一阶语言的真谓词定义。

We 可以立即证明结果（2），因为在结果（1）中得到的真谓词是 Π^1_1。

对于结果（3），我们将通过证明它是一个 Π^1_1关系，并证明它是 Π^1_1-困难的，来证明 LKID^ω中的可证性是 Π^1_1-完全的。第一个断言借助如下事实得到证明：其可证性等价于标准模型中的真 [5], 以及结果（2）。第二个断言则通过证明从 Π^1_1-困难问题到 LKID^ω在标准模型中之真的归约而得到证明。

如上所述，我们为一阶逻辑$_{\mathrm{ID}}$ 定义真谓词的方法，受到 [11] 第 348 页所介绍的为 ω-语言定义真谓词的方法的启发。由于一阶逻辑$_{\mathrm{ID}}$ 未必是 ω-语言，将这一思路应用于一阶逻辑$_{\mathrm{ID}}$ ，需要证明在所有模型中有效与在所有项模型中有效等价（结果 (1) 的一部分）。本文提出的真定义或可为超越ω-语言这一类别的高阶语言真定义的其他方法奠定基础。

第二作者与 Stefano Berardi 合作研究已有二十年，并共同撰写了多篇关于程序理论和数理逻辑的论文，其中包括一篇因循环证明研究而获奖的论文。本文的主题涵盖归纳定义、逻辑复杂度、无限下降证明和循环证明，与这些研究工作密切相关。因此，我们相信，本文所报告的研究完全属于 Stefano Berardi 的研究兴趣范围，也认为本文是向他致敬的合适方式。

本文的组织结构如下：第2节介绍一阶逻辑 $\mathrm{FOL}_{\mathrm{ID}}$ 的定义。第3节确立标准模型中的有效性与标准项模型中的有效性之间的等价关系。第4节给出一阶逻辑 $\mathrm{FOL}_{\mathrm{ID}}$ 的真谓词，并表明归纳定义的有效性是一种Π^1_1 关系。第5节定义无穷下降证明系统 LKID^ω。第6节证明，LKID^ω 中可证性的逻辑复杂度为 Π^1_1-完全。第7节回顾相关工作。最后，第8节讨论结果（2）的一种替代证明技巧，并概述未来研究方向。

2 $\mathrm{FOL}_{\mathrm{ID}}$：带归纳定义谓词的一阶语言

本节介绍背景知识，包括文献 [5] 中所述的带归纳定义谓词的一阶语言 $\mathrm{FOL}_{\mathrm{ID}}$ 的句法和语义定义。

$\mathrm{FOL}_{\mathrm{ID}}$ 的语言由一个可数的一阶逻辑语言和有限多个归纳谓词组成，后者不同于普通谓词符号。本节中，我们固定一个签名Σ。我们用 c_1,c2, . . . 表示常量符号，用 f_1, f2, . . . 表示函数符号，用 Q_1, Q2, . . . 表示普通谓词符号，用 P_1, P2, . . . ,P_n 表示归纳谓词符号。我们假设每个归纳谓词

符号都有下文定义的产生式规则。当项和公式属于由 Σ生成的语言时，我们称它们为 Σ 的项和公式。对于项 t，我们记作 t(x1, . . . , x_m)，其中出现在 t 中的变量均包含在 {x1, . . . , x_m}中。我们用 t[x := u] 表示将 t 中的 x 替换为 u 后得到的项。我们还用 t(t1, . . . ,t_m)表示在 t 中将 x1, . . . , x_m 替换为 t1, . . . ,t_m 后得到的项。我们使用诸如 $\vec{}$t 和 $\vec{}$x 这样的向量记法，分别表示项和变量的序列。我们也可能使用诸如$\vec{}$t($\vec{}$x)这样的记法，以明确项序列$\vec{}$t中包含的变量 $\vec{}$x。那么，$\vec{}$t($\vec{}$u)表示在 $\vec{}$t中将变量 $\vec{}$x 替换为 $\vec{}$u后得到的项序列。FOL_{ID} 的公式定义与传统的带等号的一阶逻辑相同。

一阶逻辑$_{ID}$ 的函数符号和普通谓词符号由结构 M =(U, ⟦ ⟧) 按照传统一阶逻辑进行解释。变量通过变量赋值 ρ 被解释为结构 M 的论域 U 中的元素。若公式 F 在 M 中为真，我们记作 M $\models_\rho$F，并且 ρ。当 F 是闭合的时，我们简单记作 M ⊨ F，表示对于所有 ρ，都有 M $\models_\rho$F。我们在附录 A 中给出句法和语义的形式定义。

归纳谓词符号的预期含义由其产生式规则指定。

定义2.1（产生式规则）P_i的产生式规则具有以下形式：

$$\frac{Q_1(\vec{u_1}) \quad \dots \quad Q_h(\vec{u_h}) \quad P_{j_1}(\vec{t_1}) \quad \dots \quad P_{j_m}(\vec{t_m})}{P_i(\vec{t})} \tag{1}$$

其中 Q1、.....、Q_h 是普通谓词符号，j1、.....、j_m、i ∈ {1, . . . ,n}，而向量符号是由项组成的序列，其长度分别等于相应谓词符号的元数。

这条产生式规则表示：如果 $Q_1(\vec{}u_1), .. ., Q_h(\vec{}u_h), P_{j1}(\vec{}t_1), .. ., P_{j_m}(\vec{}t_m)$ 成立，那么 $P_i(\vec{}t)$ 成立。由于假设中可能包含与结论相同的谓词 P_i，因此可以用它来归纳地定义 P_i。为简单起见，我们可以省略括号，写作 Q$\vec{}$u，而不写 Q($\vec{}$u)。

Exa例 2.2 我们通过以下产生式规则定义归纳谓词 N：

$$\frac{}{N0} \quad \frac{Nx}{Nsx}$$

其中 s 是一个表示“后继函数”的函数符号。谓词 N 表示“自然数”集。

我们将一阶逻辑$_{ID}$ 的签名定义为 (Σ, Φ)，其中 Φ 是有限个产生式规则的集合。接下来，我们将定义 (Σ, Φ) 的标准模型。对于每个归纳谓词 P_i，都可以在论域 U 上自然地定义一个单调算子。设 k_i 是归纳谓词 P_i 的元数。那么，相应的单调算子定义为 φ_i: $\mathscr{P}(U^{k_1}) \times \cdots \times \mathscr{P}(U^{k_n}) \to \mathscr{P}(U^{k_i})$。直观地说，对于 P1, . . . , P_n 的给定解释 X1, . . . , X_n，P_i 的新解释由 φ_i(X1, . . . , X_n) 确定。

定义 2.3（产生式规则算子）对于签名 Σ、一组 Φ 产生式规则，以及结构 M =(U, ⟦ ⟧)（其签名为 (Σ, Φ)），若 Σ中的归纳谓词符号为 P1, . . . ,P_n，其元数分别为 k1, . . . , k_n，则我们定义算子 φ_i: $\mathscr{P}(U^{k_1}) \times \cdots \times \mathscr{P}(U^{k_n}) \to \mathscr{P}(U^{k_i})$，针对 P_i（其中 i ∈ {1, . . . , n}），如下所示：

$$\varphi_i(\vec{X}) = \{[\![\vec{t}]\!]\rho \mid \Phi \text{ has the production rule } \frac{Q_1\vec{u_1} \quad \dots \quad Q_h\vec{u_h} \quad P_{j_1}\vec{t_1} \quad \dots \quad P_{j_m}\vec{t_m}}{P_i\vec{t}},$$
$$\rho \text{ a variable assignment}, M \models_\rho Q_1\vec{u_1}, \dots, M \models_\rho Q_h\vec{u_h}, [\![\vec{t_1}]\!]\rho \in X_{j_1}, \dots, [\![\vec{t_m}]\!]\rho \in X_{j_m}\}.$$

最后，我们通过 $\varphi(\vec{}X) = (\varphi_1(\vec{}X) \dots, \varphi_n(\vec{}X))$ 来定义 Φ 的算子 φ。

为简便起见，我们有时对序列使用 $\subseteq$，以表示序列各元素上的逐点 $\subseteq$-关系。我们把满足 $\varphi(X1,\ldots,X_n) \subseteq (X1,\ldots,X_n)$ 的 $(X1,\ldots,X_n)$ 称为 φ 的前不动点。众所周知，最小前不动点就是最小不动点。我们用 $\mathrm{lfp}.\varphi$ 表示 φ 的最小前不动点。

定义 2.4（标准模型） 对于 Σ 的一阶结构 M 被称为 (Σ,Φ) 的标准模型，如果对所有 $i \in \{1,\ldots,n\}$ 有 $[\![P_i]\!] = (\mathrm{lfp}.\varphi)_i$，其中 φ 是 Φ 的单调算子。

解析层级。解析层级是根据定义关系的二阶逻辑公式的复杂度，对 $\mathbb{N}$ 上的关系所做的一种分类。我们考虑如下二阶公式 $Q_1X_1\ldots Q_nX_n\phi$，其中 Q_i 为 $\exists$ 或 $\forall$，每个 X_i 是二阶变量，且 ϕ 是不含二阶量词的公式。于是 Π^1_1 关系被定义为由那些所有 Q_i 均为 $\forall$ 的公式所描述的关系。我们称这些公式为 Π^1_1 公式。

3 项模型

本节表明，归纳定义在标准模型中的有效性，与在通过添加新常元得到的扩展签名的标准项模型中的有效性之间的等价。

为了定义真谓词，我们需要从给定模型构造一个项模型。为了构造标准项模型，我们将引入结构的名称扩展这一概念。

定义 3.1（名称扩展的模型）对于签名 Σ，我们定义签名 Σ_c 为 $\Sigma \cup \{c_1,c2,\ldots\}$，其中 $c_1,c2,\ldots$ 是新常元。我们称它们为名常数。若签名 Σ_c 的模型 $(U,[\![\,]\!])$ 满足以下条件，则称其为名称扩展的：对于任意 $u \in U$，都存在某个 c_i，使得 $[\![c_i]\!] = u$。

请注意，这一定义与广为人知的名称扩张结构略有不同：这里先用可数多个新常元扩展签名，并将该签名下的结构定义为名称扩展的，条件是其论域中的每个元素都有某个常元，其解释就是该元素。

定义 3.2（模型 M_c）对于签名 (Σ,Φ) 下的可数结构 $M = (U,[\![\,]\!])$，我们通过以下方式定义签名 (Σ_c,Φ) 下的结构 $M_c = (U\ [\![\,]\!]_c)$：对于任意 i，只要 $U = \{u_1,u2,\ldots\}$，就令 $[\![c_i]\!]_c = u_i$（若 U 是有限集且 $|U| = n$，则对 $i \geq n$，定义 $[\![c_i]\!]_c = u_1$）。

下一个引理指出，按上述方式构造的模型 M_c 是名称扩展的 .

引理 3.3 M_c 是名称扩展的。

证明。对于任意 $u \in U$，若 $u = u_i$，则 $[\![c_i]\!]_c = u_i = u$。 □

下一个引理指出，若一个模型是标准的，则其名称扩展模型也必定是标准的。这显然成立，因为产生式规则不包含名常数，而且产生式规则算子定义中使用的 $M_c \models$ 与其中使用的 $M \models$ 相同。

引理 3.4 若 M 是标准模型，则 M_c 是标准模型。

引理 3.5 对于 Σ 的模型 M 和 Σ的闭公式 A，$M \models A$ 当且仅当 $M_c \models A$。

证明。M 和 M_c 的论域相同，并且对于 Σ 中的公式，M 和 M_c 的解释也相同。

□

定义 3.6（项模型）我们称 Σ 的结构 $(U, [\![\ ]\!])$ 为项模型，如果

(1) $U = S/\sim$，其中 S 是 Σ 的闭项集合，且关系 $\sim$ 是 S 上的等价关系，

(2) 对任意常元 c，$[\![c]\!] = [c]$；对任意函数符号 f，$[\![f]\!]([\vec{}u]) = [f(\vec{}u)]$，其中 $[t]$ 表示 t 的等价类。

我们将用 $[t]$ 表示 t 的等价类。

定义 3.7（模型 M_T）对于 (Σ, Φ) 的结构 $M = (U, [\![\ ]\!])$，我们如下定义 (Σ, Φ) 的项模型 $M_T = (U_T, [\![\ ]\!]_T)$：

> 对于闭项 t、u，若 $M \models t = u$，则 $t \sim u$；若 P 是归纳谓词符号，则 $[\vec{}u] \in [\![P_i]\!]_T$ 当且仅当 $M \models P_i(\vec{}u)$；若 Q 是普通谓词符号，则 $[\vec{}u] \in [\![Q]\!]_T$ 当且仅当 $M \models Q(\vec{}u)$。

引理 3.8 若 M 的 Σ_c 是名称扩展的，则 M_T 的 Σ_c 也是名称扩展的。

证明。假设 $u \in U_T$，以便找到 c_i 使得 $[\![c_i]\!]_T = u$。于是，存在一个闭项 t，使得 $u = [t]$。任取一个变量赋值 ρ。那么，对于某个 $u' \in U$，有 $[\![t]\!]\rho = u'$。由于 M 是名称扩展的，存在某个 c_i 使得 $[\![c_i]\!] = u'$。于是 $[\![c_i]\!]_T = [c_i]$。因此 $M \models t = c_i$。因此 $[t] = [c_i]$。因此 $[\![c_i]\!]_T = u$。□

为便于阅读，我们有时会通过明确描述索引 i，将序列 $e1, \ldots, e_k$ 写作 $\vec{}e_{i\,i}$。

定义 3. 9 对于归纳谓词符号 P 和一个数 k，我们定义公式 $P^{(k)}(\vec{}x)$，如下所示

$$P^{(0)}(\vec{x}) \equiv \bot,$$

$$P^{(k+1)}(\vec{x}) \equiv \bigvee\{\exists \vec{y}(\vec{x} = \vec{t_0} \wedge \overrightarrow{Q_l \vec{u}_l}^{\,l} \wedge \overrightarrow{P^{(k)}_{j_p}(\vec{t_p})}^{\,p}) \mid \frac{\overrightarrow{Q_l \vec{u}_l}^{\,l} \quad \overrightarrow{P_{j_p} \vec{t_p}}^{\,p}}{P\vec{t_0}} \textit{ a production rule}, \vec{y} \textit{ the free variables of the production rule}\}.$$

此定义引入了不动点近似的概念。

命题 3.10 对于模型 $M = (U, [\![\ ]\!])$，$\Sigma, [\![\vec{}t]\!]\rho \in (\varphi^k(\vec{}/0))_i$ 当且仅当 $M \models_\rho P^{(k)}{}_i(\vec{}t)$ 对所有项 $\vec{}t$ 均成立。

证明。$\Longrightarrow$：对 k 使用归纳法。假设 $[\![\vec{}t]\!]\rho \in (\varphi^{k+1}(\vec{}/0))_i$，证明 $M \models_\rho P^{(k+1)}{}_i(\vec{}t)$。于是，我们有 $[\![\vec{}t]\!]\rho = [\![\vec{}t_0]\!]\rho'$，$M \models_{\rho'} Q_l \vec{}u_l, [\![\vec{}t_p]\!]\rho' \in (\varphi^k(\vec{}/0))_{j_p} (1 \le l \le h\ 1 \le p \le m)$，其中某个 ρ' 以及某条产生式规则

$$\frac{\overrightarrow{Q_l \vec{u}_l}^{\,l} \quad \overrightarrow{P_{j_p} \vec{t_p}}^{\,p}}{P_i \vec{t_0}} \quad (1 \le l \le h, 1 \le p \le m).$$

由归纳假设，我们有 $M \models_{\rho'} P^{(k)}{}_{j_p}(\vec{}t_p)$。因此，$M \models_{\rho'} P^{(k+1)}{}_i(\vec{}t_0)$。因此，$M \models_\rho P^{(k+1)}{}_i(\vec{}t)$。

$\Longleftarrow$：对 k 使用归纳法。假设 $M \models_\rho P^{(k+1)}{}_i(\vec{}t)$，证明 $[\![\vec{}t]\!]\rho \in (\varphi^{k+1}(\vec{}/0)) = \vec{} \vec{}{}^{\,p}$。那么，对于某个产生式规则，$M \models_\rho \exists \vec{}y(\vec{}t\, t_0 \wedge \overrightarrow{}^{\,l} Q\, u_l{}^{\,l} \wedge \overrightarrow{}^{(k)} P_{j_p}(t_p))$

$$\frac{\overrightarrow{Q_l \vec{u}_l}^{\,l} \quad \overrightarrow{P_{j_p} \vec{t_p}}^{\,p}}{P_i \vec{t_0}}.$$

因此，存在某个 $\rho' = \rho[\vec{y} := \vec{u}]$，使得 $M \models_{\rho'} \vec{t} = \vec{t}_0 \wedge \overrightarrow{Q_l}\, u_l \wedge \overrightarrow{P^{(k)}_{j_p}}\, (t_p)$. 因此

$$[\![\vec{t}]\!]\rho' = [\![\vec{t}_0]\!]\rho', M \models_{\rho'} \overrightarrow{Q_l \vec{u}_l}, M \models_{\rho'} \overrightarrow{P^{(k)}_{j_p}(\vec{t}_p)}.$$

由归纳假设，我们有 $[\![\vec{t}_p]\!]\rho' \in (\varphi^k(\vec{\ }/0))_{j_p}$. 因此 $[\![\vec{t}_0]\!]\rho' \in (\varphi^{k+1}(\vec{\ }/0))_i$. 因此 $[\![\vec{t}]\!]\rho \in (\varphi^{k+1}(\vec{\ }/0))_i$. □

推论 3.11 对于一个结构 M，以下命题等价：

(1) M 是标准的。(2) 对于任意归纳谓词 P，$M \models_\rho P^{(k)}(\vec{t})$ 对某个 k 成立，当且仅当 $M \models_\rho P(\vec{t})$。

下一个引理说明，如果一个模型是名称扩展的且标准的，那么它的项模型也是标准的。以下，对于一个从变量到闭项的变量赋值 ρ，以及一个项 t，我们记作 ρt，表示 $t[\vec{x} := \rho(x)],$，其中 $\vec{x}$ 是 t 的自由变元。

引理 3.12 如果 M 是名称扩展的标准模型，则 M_T 是标准模型。

证明。设 $M = (U, [\![\ ]\!])$ 是 (Σ, Φ) 的名称扩展的标准模型。设 φ_T 为 M_T 的产生式规则算子。

首先，我们将证明 $[\![P_i]\!]_T \supseteq (\bigcup_k \varphi^k_T(\vec{\ }/0))_i$。为此，我们将对 k 使用归纳法证明 $[\![P_i]\!]_T \supseteq (\varphi^k_T(\vec{\ }/0))_i$。假设 $[\vec{t}_0] \in (\varphi^{k+1}_T(\vec{\ }/0))_i$，以证明 $[\vec{t}_0] \in [\![P_i]\!]_T$。那么，存在 M_T 上的一个变量赋值 ρ，以及某个产生式规则

$$\frac{Q_1\vec{u}_1 \quad \dots \quad Q_h\vec{u}_h \quad P_{j_1}\vec{t}_1 \quad \dots \quad P_{j_m}\vec{t}_m}{P_i\vec{t}}$$

使得 $[\vec{t}_0] = [\![\vec{t}]\!]_T\rho$ 且 $M_T \models_\rho Q_1 \vec{u}1, \dots, M_T \models_\rho Q_h \vec{u}_h, [\![\vec{t}_1]\!]_T\rho \in (\varphi^k_T(\vec{\ }/0))_{j_1}, \dots, [\![\vec{t}_m]\!]_T\rho \in (\varphi^k_T(\vec{\ }/0))_{j_m}$。定义 U 上的变量赋值 ρ′，使得 $\rho'(x) = [\![u]\!]$ 当且仅当 $\rho(x) = [u]$。定义闭项上的变量赋值 ρ″，使得 $\rho''(x) = u$ 当且仅当 $\rho(x) = [u]$。

于是 $[\vec{t}_0] = [\rho''(\vec{t})]$ 以及 $[\rho''(\vec{t}_p)] \in (\varphi^k_T(\vec{\ }/0))_{j_p} (1 \le p \le m)$。

根据归纳假设（IH），我们有 $[\rho''(\vec{t}_p)] \in [\![P_{j_p}]\!]_T$. 由于 $[\![\rho''(\vec{t}_p)]\!] = [\![\vec{t}_p]\!]\rho'$，我们有 $[\![\vec{t}_p]\!]\rho' \in [\![P_{j_p}]\!]$. 因此 $M \models_{\rho'} P_{j_p}(\vec{t}_p)$。

对于 $Q_l (1 \le l \le h)$，由 $M_T \models_\rho Q_l \vec{u}_l$ 我们有 $[\![\vec{u}_l]\!]_T\rho \in [\![Q_l]\!]_T$。由于 $[\![\vec{u}_l]\!]_T\rho = [\rho''(\vec{u}_l)],$，我们有 $[\![\rho''(\vec{u}_l)]\!] \in [\![Q_l]\!]$。由于 $[\![\rho''(\vec{u}_l)]\!] = [\![\vec{u}_l]\!]\rho'$，我们有 $M \models_{\rho'} Q_l \vec{u}_l$。

由于 M 是标准的，我们有 $[\![\vec{t}]\!]\rho' \in [\![P_i]\!]$. 因此 $[\rho''(\vec{t})] \in [\![P_i]\!]_T$. 因此 $[\vec{t}_0] \in [\![P_i]\!]_T$.

其次，我们将证明 $[\![P_i]\!]_T \subseteq (\bigcup_k \varphi^k_T(\vec{\ }/0))_i$。那么 $M \models P_i\ \vec{t}_0$。由于 M 是标准的，存在某个 k，使得 $[\![\vec{t}_0]\!] \in (\varphi^{k+1}(\vec{\ }/0))_i$.。因此，存在一些 ρ 属于 U，以及一条产生式规则

$$\frac{\overrightarrow{Q_l\vec{u}_l} \quad \overrightarrow{P_{j_p}\vec{t}_p}}{P_i\vec{t}} \qquad (1 \le l \le h, 1 \le p \le m)$$

使得 $[\![\vec{t}_0]\!] = [\![\vec{t}]\!]\rho$，$M \models_\rho Q_l \vec{u}_l, [\![\vec{t}_p]\!]\rho \in (\varphi^k(\vec{\ }/0))_{j_p}$ 对所有 $1 \le l \le h\ 1 \le p \le m$ 均成立。

由命题 3.10，$M \models_\rho P^{(k)}_{j_p}(\vec{t}_p)$ 对所有 $1 \le p \le m$ 均成立。

因此 $M \models_\rho \vec{t}_0 = \vec{t} \wedge \overrightarrow{Q_l}\, u_l \wedge \overrightarrow{P^{(k)}_{j_p}(\vec{t}_p)}$.

由于 M 是名称扩展的，对于每个 i，都存在某个 c_i，使得 $\rho(x_i) = [\![c_i]\!]$。令 $\vec{c}$ 为 c'_i 的序列。于是 $M \models (\vec{t}_0 = \vec{t} \wedge \overrightarrow{Q_l}\, u_l \wedge \overrightarrow{P^{(k)}_{j_p}(t_p)})[\vec{x} := \vec{c}]$.

在 M_T 的论域上定义变量赋值 ρ' $\rho'(\vec{x}) = [\vec{c}]$. 于是，对所有 $1 \le l \le h\ 1 \le p \le m$，$[\vec{t}_0] = [\![\vec{t}]\!]_T\rho', M_T \models_{\rho'} Q_l \vec{u}_l, M_T \models_{\rho'} P^{(k)}_{j_p}(\vec{t}_p)$。由命题 3.10，$[\![\vec{t}_p]\!]_T\rho' \in (\varphi^k_T(\vec{\ }/0))_{j_p}$ 对所有 $1 \le$

$p \leq m$。因此 $[\![\vec{t}]\!]_T\rho' \in (\varphi_T^{k+1}(\vec{/}0))_{i.}$。由于 $[\![\vec{t}]\!]_T\rho' = [\vec{t_0}],$，我们有 $[\vec{t_0}] \in (\varphi_T^{k+1}(\vec{/}0))_{i.}$。因此 $[\vec{t_0}] \in (\bigcup_k \varphi_T^k(\vec{/}0))_i$。□

引理 3.13 对于 Σ_c 的名称扩展模型 M，以及 Σ_c 的闭公式 A，$M \models A$ 当且仅当 $M_T \models A$。

证明。对 A 使用归纳法。这里只展示一个较难的情形。

情形 $A \equiv \forall xB$。$\Longleftarrow$：假设 $M_T \models \forall xB$，以证明 $M \models \forall xB$。假设 $M \not\models \forall xB$，以导出矛盾。因此 $M \models \exists x\neg B$。由于 M 是名称扩展的，存在某个 c_i，使得 $M \models \neg B[x := c_i]$。根据归纳假设，$M_T \models \neg B[x := c_i]$。因此 $M_T \models \exists x\neg B$。所以，$M_T \not\models \forall xB$，这导致矛盾。

$\Longrightarrow$：利用引理 3.8 可以类似地证明此情形。 □

我们将 M_{cT} 记作 $(M_c)_T$。

由引理 3.5 和 3.13，我们得到下一个引理所述的：对于 Σ 的闭公式，在 M 中有效与在 M_{cT} 中有效等价。

引理 3.14 对于 Σ 的模型 M 和 Σ 的闭公式 A，$M \models A$ 当且仅当 $M_{cT} \models A$。

命题 3.15 若 M 是 (Σ, Φ) 的标准模型，则存在一个可数标准模型 M'，它是 (Σ, Φ) 的模型，且与 M 初等等价。

证明。假设 $M = (U, [\![\ ]\!])$ 是一个标准模型，以构造一个可数标准模型 M'，它是 (Σ, Φ) 的模型，且与 M 初等等价。

根据向下 Skolem-L¨owenheim 定理（[6] 中的定理 3.3.12），存在一个可数结构 $M' = (U', [\![\ ]\!]')$，它是 M 的初等子结构。

我们将首先证明：$M' \models_\rho P(\vec{t})$ 当且仅当对某个 k，有 $M' \models_\rho P^{(k)}(\vec{t})$。

对于仅当部分。假设 $M' \models_\rho P(\vec{t})$。设 $FV(\vec{t})$ 为 $\vec{x}$。设 $\rho(\vec{x}) = \vec{u}$。设 $\vec{u}$ 为 $\vec{u}$ 的名称。则 $M' \models P(\vec{t})[\vec{x} := \vec{u}]$，其中 $M' \models$ 通过 $[\![u]\!]' = u$ 被扩展到签名 $\Sigma \cup \{u \mid u \in U'\}$。由于 M' 是 M 的初等子结构，我们有 $M \models P(\vec{t})[\vec{x} := \vec{u}]$，其中 $M \models$ 通过 $[\![u]\!] = u$ 被扩展到签名 $\Sigma \cup \{u \mid u \in U\}$。由于 M 是标准的，根据推论 3.11，对某个 k，有 $M \models P^{(k)}(\vec{t})[\vec{x} := \vec{u}]$。由于 M' 是 M 的初等子结构，我们有 $M' \models P^{(k)}(\vec{t})[\vec{x} := \vec{u}]$。因此 $M' \models_\rho P^{(k)}(\vec{t})$。

如果部分的证明方式与仅当部分类似。

根据推论 3.11，M' 是标准的。 □

命题 3.16 对于 (Σ, Φ) 和 Σ 的一个闭公式 A，以下命题等价：

(1) 对于 (Σ, Φ) 的每个标准模型 M，$M \models A$。（

2）对于 (Σ_c, Φ) 的每个标准项模型 M，$M \models A$。

证明。从 (1) 到 (2) 的断言显然成立。

我们将证明从 (2) 到 (1) 的断言。假设 (2) 成立，并固定一个 (Σ, Φ) 的结构 M，以证明 $M \models A$。根据命题 3.15，存在一个 (Σ, Φ) 的可数标准模型 M'，它与 M 初等等价。根据引理 3.4 和引理 3.12，M'_{cT} 是 (Σ_c, Φ) 的标准项模型。根据 (2)，$M'_{cT} \models A$。根据引理 3.14，$M' \models A$。由于 M 与 M' 初等等价，因此有 $M \models A$。□

4 归纳定义的真谓词

在本节中，我们将给出一阶逻辑$_{ID}$ 的真谓词，并证明归纳定义的有效性是一种 Π^1_1 关系。

4.1 归纳谓词的编码

在本节中，我们将把归纳定义的算术表示思想（ [25]中的定理1.4.5）应用于一阶逻辑$_{\mathrm{ID}}$的归纳定义，介绍归纳定义在算术中的一些编码。

我们用 $(\ulcorner z)_i$ 表示序列 $\ulcorner z$ 的第 i 个元素，用 $|\ulcorner z|$ 表示 $\ulcorner z$ 的长度，其中 i 从 0 开始。我们用 $\ulcorner e\urcorner$ 表示表达式 e 的 G¨odel 编码。

首先,我们定义一个与归纳谓词的算子相对应的编码算子 .

定义 4.1（产生规则的编码算子） 对于签名 (Σ,Φ) 和函数变量 f，若 Φ 中的归纳谓词符号为 $\mathrm{P}1,\ldots,\mathrm{P}_n$，我们如下定义 $\tilde{\varphi}_i\colon \mathscr{P}(\mathbb{N})^n \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$

$$\tilde{\varphi}_i(\vec{X}) = \{\ulcorner \rho\vec{t}\urcorner \mid$$
$$\Phi \text{ has the production rule } \frac{Q_1\vec{u_1} \quad \ldots \quad Q_h\vec{u_h} \quad P_{j_1}\vec{t_1} \quad \ldots \quad P_{j_m}\vec{t_m}}{P_i\vec{t}},$$
$$\rho \text{ a variable assignment from variables to closed terms of } \Sigma, f(\ulcorner Q_1\rho\vec{u_1}\urcorner) = 0,\ldots,$$
$$f(\ulcorner Q_h\rho\vec{u_h}\urcorner) = 0, \ulcorner\rho\vec{t_1}\urcorner \in X_{j_1},\ldots,\ulcorner\rho\vec{t_m}\urcorner \in X_{j_m}\},$$
$$\tilde{\varphi}(\vec{X}) = (\tilde{\varphi}_1(\vec{X}),\ldots,\tilde{\varphi}_n(\vec{X})).$$

引理 4.2 对于 (Σ,Φ) 的项模型 M 和函数变量 f，若对所有 Q_i 和闭项 $\ulcorner u$，M $\models \mathrm{Q}_i\ulcorner u$ 等价于 $\mathrm{f}(\ulcorner \mathrm{Q}_i\ulcorner u\urcorner) = 0$，则对所有闭项 $\ulcorner t$，有 $\lceil t] \in (\bigcup k\ \varphi^k(\vec{}/0))_i \iff \ulcorner\vec{}\,t\urcorner \in (\bigcup k\ \tilde{\varphi}^k(\vec{}/0))_i$。

证明。根据 φ 和 $\tilde{\varphi}$ 的定义，对 k 作归纳法，可以证明 $\lceil t] \in (\varphi^k(\vec{}/0))_i$ 当且仅当 $\ulcorner\vec{}\,t\urcorner \in (\tilde{\varphi}^k(\vec{}/0))_i$。结论由此得出。□

我们假定皮亚诺算术中的某种编码，并用 $\langle a1,\ldots,a_k\rangle$ 表示数的序列 $a1,\ldots,a_k$ 的编码。我们用 $(\langle a1,\ldots,a_k\rangle)_i$ 表示 a_{i+1}。若对于某个 i，$(b)_i = a$，则记作 $a \tilde{\in} b$。对于数的序列 $a1,\ldots,a_k$，我们将 $(a1,\ldots,a_k)$ 记作序列 $(S1,\ldots,S_k)$，其中 S_i 是集合 $\{b \mid b\tilde{\in}a_i\}$。

有限变元赋值是一个从变量的某个有限子集到论域的有限函数。

定义 4.3 对于 (Σ)、(Φ) 和函数变量 f，若 Φ 中的归纳谓词符号为 $\mathrm{P}1,\ldots,\mathrm{P}_n$，则我们定义一个含函数变量 f 的皮亚诺算术公式 W (y, z):

$$W(y,z) \equiv \forall i(1 \le i \le n \to \forall x\tilde{\in}(z)_i($$
$$\Phi \text{ has some production rule } \frac{Q_1\vec{u_1} \quad \ldots \quad Q_h\vec{u_h} \quad P_{j_1}\vec{t_1} \quad \ldots \quad P_{j_m}\vec{t_m}}{P_i\vec{t}},$$
and there is some finite variable assignment ρ from the free variables of the production rule to closed terms of Σ, and
$$f(\ulcorner Q_1\rho\vec{u_1}\urcorner) = 0 \wedge \ldots \wedge f(\ulcorner Q_h\rho\vec{u_h}\urcorner) = 0 \wedge \ulcorner\rho\vec{t_1}\urcorner\tilde{\in}(y)_{j_1} \wedge \ldots \wedge \ulcorner\rho\vec{t_m}\urcorner\tilde{\in}(y)_{j_m} \wedge$$
$$x = \ulcorner\rho\vec{t}\urcorner)).$$

引理 4.4 $a \in (\tilde{\varphi}^k(\vec{}/0))_i$ 当且仅当以下公式在算术标准模型中为真：$\exists z(|z| = \vec{}\,k + 1 \wedge (z)_0 = \langle\,\rangle \wedge \forall l < k\ W((z)_l, (z)_{l+1}) \wedge a\ \tilde{\in}((z)_k)_i$。

证明。对 k 作归纳法。

情形 $k = 0$。该断言成立，因为断言的两边均为假。

情形 $k > 0$。我们仅证明一个较难的情形。$\Longrightarrow$:

假设 $a \in (\tilde{\varphi}^k(\vec{}/0))_i$。则 $a \in (\tilde{\varphi}(\tilde{\varphi}^{k-1}(\vec{}/0)))_i$。因此存在某些产生规则 rule

$$\frac{Q_1\vec{u_1} \quad \ldots \quad Q_h\vec{u_h} \quad P_{j_1}\vec{t_1} \quad \ldots \quad P_{j_m}\vec{t_m}}{P_i\vec{t}}$$

以及某个变量赋值 ρ 于闭项上，使得 $\ulcorner \rho\vec{}t\urcorner = a$ 且 $f(\ulcorner Q_l\rho\vec{}u_l\urcorner) = 0 (1 \le l \le h)$ 且 $\ulcorner \rho\vec{}t_l\urcorner \in (\tilde{\varphi}^{k-1}(\vec{}/0))_{j_l} (1 \le l \le m)$。对每个 $l \le m$，由归纳假设，存在某个 w_l 使得 $|w_l| = k \wedge (w_l)_0 = \langle\vec{}\rangle \wedge \forall p < k-1\, W((w_l)_p, (w_l)_{p+1}) \wedge \ulcorner \rho\vec{}t_l\urcorner \tilde{\in} ((w_l)_{k-1})_{j_l}$.

定义一个由数的序列所构成的 n 元序列序列 z，使得

$$(\overline{(z)_p})_q = \bigcup_{l \le m} (\overline{(w_l)_p})_q \ (q \le n, p < k), (\overline{(z)_k})_q = \{\ulcorner \rho\vec{t}\urcorner\} \ (q = i), (\overline{(z)_k})_q = \emptyset \ (q \ne i).$$

则 $|z| = k+1 \wedge (z)_0 = \langle\rangle \wedge \forall l < k\, W((z)_l, (z)_{l+1}) \wedge a \tilde{\in} ((z)_k)_i$. □

定义4.5 P_i 由以下带有函数变量 f 的皮亚诺算术公式定义：$\tilde{P}_i(a) \equiv \exists z((z)_0 = \langle\vec{}\rangle \wedge \forall l < |z| - 1\, W((z)_l, (z)_{l+1}) \wedge a \tilde{\in} ((z)_{|z|-1})_i)$。

下面说明如何得到 $\tilde{P}_i$ 的定义。首先，我们将 $\lceil\vec{}t\rceil \in (\bigcup_k \varphi^k(\vec{}/0))_i$ 编码为 $\ulcorner\vec{}t\urcorner \in (\bigcup_k \tilde{\varphi}^k(\vec{}/0))_i$。接下来，$\ulcorner\vec{}t\urcorner \in (\tilde{\varphi}^k(\vec{}/0))_i$ 当且仅当存在有限集 $\vec{}S0, \vec{}S1, \ldots, \vec{}S_k$，使得对于 $l < k$，有 $\tilde{\varphi}(\vec{}S_l) \supseteq \vec{}S_{l+1}$，并且 $(\vec{}S_k)_i \ni \ulcorner\vec{}t\urcorner$。最后，我们将每个有限集 S_l 编码为某个数的列表，并将这些列表组成的序列编码为一个数 z。

根据引理 4.2 和引理 4.4，我们有如下等价：

引理 4.6 对于 (Σ, Φ) 的项模型 M、Σ 的闭项 t 以及函数变量 f，若 $M \models Q_i\vec{}u$ 等价于 $f(\ulcorner Q_i\vec{}u\urcorner) = 0$，则有：$\tilde{P}_i(\ulcorner\vec{}t\urcorner)$ 当且仅当 $\lceil\vec{}t\rceil \in (\bigcup k\ \varphi^k(\vec{}/0))_i$。

4.2 真谓词

在本节中，我们将为一阶逻辑$_{ID}$ 公式定义一个真谓词，方法是将 [11]中定理 6.1.4的证明所给出的、针对ω语言的真谓词扩展到一阶逻辑$_{ID}$。

对于 Σ的公式 B，我们用缩写 $\forall\ulcorner B\urcorner(\ulcorner \ldots B \ldots \urcorner)$ 表示 $\forall n(\mathrm{Formula}(n, \ulcorner\Sigma\urcorner) \to \mathrm{Subst}(\ulcorner \ldots x \ldots \urcorner, x, n))$，其中 $\mathrm{Formula}(n, \ulcorner\Sigma\urcorner)$ 表示 n 是以 Σ为签名的一阶语言中某个闭公式的编码，而 $\mathrm{Subst}(x, y, z)$ 表示 $e[v := e']$ 的编码，此时 x 是某个表达式 e 的编码，y 是某个变量 v 的编码，z 是某个表达式 e′的编码。类似地，我们还用缩写 $\forall\ulcorner x\urcorner$ 表示变量，用 $\forall\ulcorner\vec{}t\urcorner$ 表示闭项，用 $\forall\ulcorner\vec{}t\urcorner$ 表示闭项序列。我们还以类似于 $\forall\ulcorner \ldots \urcorner$的方式使用 $\exists\ulcorner \ldots \urcorner$的缩写。我们用 arity(v) 表示函数符号或谓词符号 v 的元数。

在下一个公式 I(f) 中，f 是真谓词，$f(\ulcorner A\urcorner) = 0$ 表示 A 为真。

定义 4.7 对于 (Σ, Φ)，我们定义公式 I(f) 如下，其中 f 是函数变量，$P1, \ldots, P_n$ 是 Σ 中的归纳谓词符号，B 和 C 遍历 Σ_c 的闭公式，而 t 和 u 遍历

Σ_c 的闭项。

$$\begin{aligned}
&\forall\ulcorner B\urcorner(f(\ulcorner B\urcorner)=0\vee f(\ulcorner B\urcorner)=1)\wedge\\
&\forall\ulcorner B\urcorner(f(\ulcorner\neg B\urcorner)=1-f(\ulcorner B\urcorner))\wedge\\
&\forall\ulcorner B\urcorner\forall\ulcorner C\urcorner(f(\ulcorner B\wedge C\urcorner)=\max\{f(\ulcorner B\urcorner),f(\ulcorner C\urcorner)\})\wedge\\
&\forall\ulcorner B\urcorner\forall\ulcorner C\urcorner(f(\ulcorner B\vee C\urcorner)=\min\{f(\ulcorner B\urcorner),f(\ulcorner C\urcorner)\})\wedge\\
&\forall\ulcorner B\urcorner\forall\ulcorner C\urcorner(f(\ulcorner B\to C\urcorner)=\min\{1-f(\ulcorner B\urcorner),f(\ulcorner C\urcorner)\})\wedge\\
&\forall\ulcorner B\urcorner(f(\ulcorner\forall xB(x)\urcorner)=0\leftrightarrow\forall\ulcorner t\urcorner f(\ulcorner B(t)\urcorner)=0)\wedge\\
&\forall\ulcorner B\urcorner(f(\ulcorner\exists xB(x)\urcorner)=0\leftrightarrow\exists\ulcorner t\urcorner f(\ulcorner B(t)\urcorner)=0)\wedge\\
&\forall\ulcorner t\urcorner(f(\ulcorner t=t\urcorner)=0)\wedge\\
&\forall\ulcorner t\urcorner\forall\ulcorner u\urcorner\forall\ulcorner x\urcorner\forall\ulcorner B\urcorner(f(\ulcorner t=u\wedge B[x:=t]\to B[x:=u]\urcorner)=0)\wedge\\
&\bigwedge_{i\in[1,n]}\forall\ulcorner\vec{t}\urcorner(\mathrm{arity}(P_i)=|\vec{t}|\to(f(\ulcorner P_i(\vec{t})\urcorner)=0\leftrightarrow\widetilde{P}_i(\ulcorner\vec{t}\urcorner))).
\end{aligned}$$

下一个命题是真谓词的关键。它指出，在标准项模型中的有效性等价于真谓词的值。

Pr命题 4.8 对于（Σ,Φ）以及 Σ_c 中的一个闭公式 A，以下各项等价：
(1) 对于（Σ_c,Φ）的任意标准项模型 M，M $\models$ A。 (2) $\forall$f (I(f) $\to$f (⌜A⌝) = 0) 为真。

证明。方向 (2) $\Rightarrow$ (1)：固定（U,⟦ ⟧）的一个标准项模型 M =，其中 U 是 M 的论域，⟦ ⟧是非逻辑符号的解释。定义 f，使得当 M $\models$ B 时，f (⌜B⌝) = 0；当 M $\not\models$B 时，f (⌜B⌝) = 1。

We 将证明 I(f)。为此，我们将证明它的每个合取项。这里只证明较难的情形 s.
∀xB(x) 的合取项：首先，我们证明以下断言：
- 对任意闭项 t，若 M $\models$ B(t)，则 M $\models$ ∀xB(x)。
为导出矛盾，假设 M $\not\models$ ∀xB(x)。那么我们有 M $\models$ ∃x¬B(x)。由于 M 是一个项模型，因此存在某个闭项 t，使得 M $\models$ ¬B(t)。这与对任意闭项 t 都有 M $\models$B(t) 矛盾。至此，我们证明了该断言。

于是，f (⌜∀xB(x)⌝) = 0 $\Leftrightarrow$ M $\models$ ∀xB(x) $\Leftrightarrow$ （根据该断言）M $\models$ B(t) 对任意闭项 t 都成立 $\Leftrightarrow$（根据 f 的定义）∀⌜t⌝(f (⌜B(t)⌝) = 0)。
$P_i\vec{}$t 的合取项：我们将证明 f (⌜$P_i\vec{}$t⌝) = 0 当且仅当 $\widetilde{P}_i$(⌜$\vec{}$t⌝) 成立。根据引理 4.6，右侧等价于 ⌜$\vec{}$t⌝ $\in$ ($\bigcup_k$ $\varphi^k(\vec{}/0)$)$_i$。由于 M 是标准的，这等价于 M $\models$ $P_i\vec{}$t。根据 f 的定义，这等价于 f (⌜$P_i\vec{}$t⌝) = 0。

由假设 ∀f (I(f) $\to$f (⌜A⌝) = 0)，可得 f (⌜A⌝) = 0，因此 M $\models$ A .
证明方向 (1) $\Rightarrow$ (2)：固定 f，并假设 I(f)，以证明 f (⌜A⌝) = 0。对于闭项 t、u，我们定义 t ∼u，当且仅当 f (⌜t =u⌝) = 0。定义 U = {t | t 为一个闭项}/∼。对于闭项 t 的等价类，我们记作 [t]，并且 ∼。对于函数符号 F，我们定义 ⟦F⟧([t$_1$], . . . , [t$_n$]) = [F(t1, . . . ,t$_n$)]。对于谓词符号 P，我们定义 ([t$_1$], . . . , [t$_n$]) $\in$ ⟦P⟧，当且仅当 f (⌜P(t1, . . . ,t$_n$)⌝) = 0。定义 M =(U,⟦ ⟧)。根据引理 4.6，M 是标准的。

我们将通过对 B 使用归纳法证明：M $\models$ B 当且仅当 f(⌜B⌝) = 0 。
当 B 为 ∀xC(x) 时的情况。M $\models$ ∀xC(x) $\Leftrightarrow$ （对于每个闭项 t，M $\models$C(t)） $\Leftrightarrow$ （根据归纳假设）（对于每个闭项 t，f(⌜C(t)⌝) = 0） $\Leftrightarrow$ f(⌜∀xC(x)⌝) = 0。
情形 B ≡ $P_i\vec{}$t。根据 M 的定义，M $\models$ $P_i\vec{}$t 当且仅当 f (⌜$P_i\vec{}$t⌝) = 0。

其他情形类似。

根据假设，我们有 $M \models A$。因此，$f(\ulcorner A \urcorner) = 0$。 □

最后，我们得到了带标准模型的一阶逻辑$_{ID}$ 真谓词。

定理 4.9 定义谓词 Tr：$Tr(x) \equiv \forall f\,(I(f) \to f(x) = 0)$。那么，一阶逻辑$_{ID}$ 的闭公式 A 在标准模型中有效，当且仅当 $Tr(\ulcorner A \urcorner)$ 为真。

证明。根据命题 3.16，对于 (Σ,Φ) 的任意标准模型 M，$M \models A$，当且仅当对于 (Σ_c,Φ) 的任意标准项模型 M，$M \models A$。根据命题 4.8，这等价于 $\forall f\,(I(f) \to f(\ulcorner A \urcorner) = 0)$，也就是 $Tr(\ulcorner A \urcorner)$。 □

推论 4.10 一阶逻辑$_{ID}$ 在标准模型中的有效性是一种 Π^1_1 关系。

证明。由于 Tr 是一个 Π^1_1 公式，对于任意标准模型 M，$M \models A$ 是一个 Π^1_1 关系。 □

还有另一种证明推论 4.10 的方法。为了定义闭公式 A 的真谓词，我们将针对每个给定的结构 $M = (U, [\![\ ]\!])$ 考虑 $[\![A]\!] = T$。根据向下 Skolem-L¨owenheim 定理，只需考虑 M 为可数结构的情形。因此，一阶逻辑（即不含归纳谓词的一阶逻辑）的真谓词可以定义为 ∀M(A 在 M 中成立)，并且它是一个 Π^1_1 关系。为了得到一阶逻辑$_{ID}$的真谓词，我们在真谓词的定义中为“A 在 M 中成立”添加以下子句：

$P(\dot{t})$ 在 M 中成立，当且仅当对于某个 k，$P^{(k)}(\dot{t})$ 在 M 中成立，其中 $P^{(k)}$ 是归纳谓词 P 展开 k 次后的形式。

由于右侧额外的全称量词是一阶的，因此可以证明一阶逻辑$_{ID}$ 的真谓词也是一个Π^1_1 关系。

本文为了给 FOL_{ID} 定义真谓词，选择了 [11] 第 348 页中给出的 ω 语言真谓词定义思路。由于 FOL_{ID} 可能不是 ω 语言，为了将这一思路应用于 FOL_{ID}，我们需要任意模型中的有效性与任意项模型中的有效性等价（命题 3.16）。本文的真定义方式或许能为非 ω 语言的高阶语言的真定义提供另一种思路。

5 无穷下降证明系统 $LKID^\omega$

本 节中，我们将给出无穷下降证明系统 $LKID^\omega$ [5] 的定义。

证明系统 $LKID^\omega$ 和 $CLKID^\omega$ 是针对逻辑 FOL_{ID} [5] 提出的。这些系统是在根岑的相继式演算 LK 中加入归纳谓词符号的推理规则而得到的。系统 $LKID^\omega$ 将无限下降证明形式化，并允许存在无穷证明树。

序列定义为 $\Gamma \vdash \Delta$，其中 Γ 和 Δ 是公式的有限集。我们在图1中给出 LK 的推理规则（函数 FV 返回公式集或项集中的自由变元集合）。对于替换 $\theta = [x_1 := t1, \ldots, x_m := t_m]$ 以及公式 A，我们将 $[\theta]$ 记作由 A 中所有 $x1, \ldots, x_m$ 的自由出现分别替换为 $t1, \ldots, t_m$ 后得到的公式。我们将 $\Gamma[\theta]$ 记作集合 $\{A[\theta] \mid A \in \Gamma\}$。请注意，收缩规则已隐含其中。每条逻辑推理规则的结论中新引入的公式称为该规则的主公式。

根据归纳谓词的产生式规则，我们在 LK 的基础上添加两类规则来定义 $LKID^\omega$：一类将归纳谓词引入序列的前件（左引入），另一类将归纳谓词引入序列的后件（右引入）。

将定义2.1中形式为 (1) 的产生式规则视为以 P_i 为结论的第 r 条产生式规则。相应的 P_i 的右引入规则为：

结构规则：

$$\frac{}{\Gamma \vdash \Delta}\ (\textsc{Axiom})(\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset) \qquad \frac{\Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta}\ (\textsc{Wk})(\Gamma' \subseteq \Gamma \text{ and } \Delta' \subseteq \Delta)$$

$$\frac{\Gamma \vdash F, \Delta \quad \Gamma, F \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}\ (\textsc{Cut}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma[\theta] \vdash \Delta[\theta]}\ (\textsc{Subst})$$

逻辑规则：

$$\frac{\Gamma \vdash F, \Delta}{\Gamma, \neg F \vdash \Delta}\ (\neg \mathrm{L}) \quad \frac{\Gamma, F \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg F, \Delta}\ (\neg \mathrm{R}) \quad \frac{\Gamma, F \vdash \Delta \quad \Gamma, G \vdash \Delta}{\Gamma, F \vee G \vdash \Delta}\ (\vee \mathrm{L}) \quad \frac{\Gamma \vdash F, G, \Delta}{\Gamma \vdash F \vee G, \Delta}\ (\vee \mathrm{R})$$

$$\frac{\Gamma, F, G \vdash \Delta}{\Gamma, F \wedge G \vdash \Delta}\ (\wedge \mathrm{L}) \qquad \frac{\Gamma \vdash F, \Delta \quad \Gamma \vdash G, \Delta}{\Gamma \vdash F \wedge G, \Delta}\ (\wedge \mathrm{R}) \qquad \frac{\Gamma \vdash F, \Delta \quad \Gamma, G \vdash \Delta}{\Gamma, F \to G \vdash \Delta}\ (\to \mathrm{L})$$

$$\frac{\Gamma, F \vdash G, \Delta}{\Gamma \vdash F \to G, \Delta}\ (\to \mathrm{R}) \qquad \frac{\Gamma, F[x := t] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x F \vdash \Delta}\ (\forall \mathrm{L}) \qquad \frac{\Gamma \vdash F, \Delta}{\Gamma \vdash \forall x F, \Delta}\ (\forall \mathrm{R})_{(x \notin FV(\Gamma \cup \Delta))}$$

$$\frac{\Gamma, F \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x F \vdash \Delta}\ (\exists \mathrm{L})(x \notin FV(\Gamma \cup \Delta)) \qquad \frac{\Gamma \vdash F[x := t], \Delta}{\Gamma \vdash \exists x F, \Delta}\ (\exists \mathrm{R})$$

$$\frac{\Gamma[x := u, y := t] \vdash \Delta[x := u, y := t]}{\Gamma[x := t, y := u], t = u \vdash \Delta[x := t, y := u]}\ (= \mathrm{L}) \qquad \frac{}{\Gamma \vdash t = t, \Delta}\ (= \mathrm{R})$$

图1：LK的推理规则

$$\frac{\Gamma \vdash Q_1 \vec{u_1}(\vec{u}), \Delta \quad \ldots \quad \Gamma \vdash Q_h \vec{u_h}(\vec{u}), \Delta \quad \Gamma \vdash P_{j_1} \vec{t_1}(\vec{u}), \Delta \quad \ldots \quad \Gamma \vdash P_{j_m} \vec{t_m}(\vec{u}), \Delta}{\Gamma \vdash P_i \vec{t}(\vec{u}), \Delta}\ (P_i R_r)$$

对于归纳谓词的左引入规则，LKID^ω 使用以下分类规则：

$$\frac{\text{case distinctions}}{\Gamma, P_i \vec{u} \vdash \Delta}\ (\textsc{Case}\ P_i)$$

其中，对于每个与 P_i 相互依赖的 P^j 的产生式规则，均定义相应的分类区分如下：对于定义2.1中形式为 (1) 的产生式规则，我们定义相应的分类区分如下：

$$\Gamma, \vec{u} = \vec{t}(\vec{y}), Q_1 \vec{u_1}(\vec{y}), \ldots, Q_h \vec{u_h}(\vec{y}), P_{j_1} \vec{t_1}(\vec{y}), \ldots, P_{j_m} \vec{t_m}(\vec{y}) \vdash \Delta$$

其中，$\vec{}\mathrm{y}$ 是一个由互不相同的变量组成的序列，其长度与 $\vec{}\mathrm{x}$ 相同，且 $=\mathrm{FV}(\{\vec{}\mathrm{t}\ \vec{}\mathrm{u1}, \ldots, \vec{}\mathrm{u}_h, \vec{}\mathrm{t1}, \ldots, \vec{}\mathrm{t}_m\})$；对于所有 $\mathrm{z} \in \vec{}\mathrm{y}$，$\mathrm{z} \notin \mathrm{FV}(\Gamma \cup \Delta \cup \{\mathrm{P}_i \vec{}\mathrm{u}\})$。分类区分中出现的公式 $\mathrm{P}_{j_1} \vec{}\mathrm{t}\,(\vec{}\mathrm{y}) \ldots, \mathrm{P}_{j_m} \vec{}\mathrm{t}_m(\vec{}\mathrm{y})$ 称为主公式 $\mathrm{P}_i \vec{}\mathrm{u}$ 的情形后继。

例5.1 与例 2.2 中的归纳谓词N相对应的分情形规则如下：

$$\frac{\Gamma, t = 0 \vdash \Delta \quad \Gamma, t = sx, Nx \vdash \Delta}{\Gamma, Nt \vdash \Delta}\ (\textsc{Case}\ N)$$

主公式是 Nt，情形后继是 Nx。

接下来，我们定义 LKID^{ω} 中的证明。根据 LKID^{ω} 的推理规则构造的（可能是无限的）推导树，若没有任何开放假设，则称为 LKID^{ω} 的预证明。开放假设是证明树中不属于某个公理实例的叶节点。

一个称为全局迹条件的条件可以保证预证明是可靠的。为准确描述它，我们需要定义迹。推导树中的一条（有限或无限）路径是一个序列 $(S_i)_{0\leq i<\alpha}(\alpha \in \mathbb{N}\cup\{\infty\})$，满足对于所有 $i+1<\alpha$，S_{i+1} 是树中 S_i 的子节点。归纳原子公式定义为形如 $P_i(\vec{t})$ 的公式，其中 P_i 是归纳谓词符号。

设 $\mathscr{D}$ 是 LKID^{ω} 的一个预证明，且 $(\Gamma_i \vdash \Delta_i)_{i\geq 0}$ 是 $\mathscr{D}$ 中的一条路径。沿着 $(\Gamma_i \vdash \Delta_i)_{i\geq 0}$ 的迹是一个归纳原子公式序列 $(\tau_i)_{i\geq 0}$，满足对于所有 i，$\tau_i \in \Gamma_i$ 并且以下条件成立：

1. 如果 $\Gamma_i \vdash \Delta_i$ 是规则 (SUBST) 的结论，那么 $\tau_i = \tau_{i+1}[\theta]$，其中 θ 是由此规则实例确定的替换。2. 如果 $\Gamma_i \vdash \Delta_i$ 是规则 (=L) 的结论，且其主公式是 $s = t$，那么 $\tau_i = F[x := t, y := u]$，并且 $\tau_{i+1} = F[x := u, y := t]$，其中 F 是某个公式，x、y 是变量。3. 如果 $\Gamma_i \vdash \Delta_i$ 是分情形规则的结论，那么 (a) $\tau_{i+1} = \tau_i$，或者 (b) τ_i 是此规则实例的主公式，且 τ_{i+1} 是 τ_i 的情形后继。在后一种情况下，该出现 τ_{i+1} 称为此迹的进展点。4. 如果 $\Gamma_i \vdash \Delta_i$ 是其他规则的结论，那么 $\tau_{i+1} = \tau_i$。

具有无穷多个进展点的迹称为无穷进展迹 .

如果对于 $\mathscr{D}$ 中的每条无穷路径 $(\Gamma_i \vdash \Delta_i)_{i\geq 0}$，都存在一条无穷进展迹，它沿着某个 $k \geq 0$ 的尾路径 $(\Gamma_i \vdash \Delta_i)_{i\geq k}$，则称 LKID^{ω} 的预证明 $\mathscr{D}$ 满足全局迹条件。如果 LKID^{ω} 的预证明满足全局迹条件，则称其为 LKID^{ω} 的证明。

系统 CLKID^{ω} 是一个只接受 LKID^{ω} 的正则证明树的证明系统，也就是说，这些树只有有限个不同的子树。

6 LKID^{ω} 中可证性的逻辑复杂度

在本节中，我们将证明，LKID^{ω} 中可证性的逻辑复杂度是 Π^1_1-完全的。

6.1 LKID^{ω} 可证性的上界

在本节中，我们将证明 LKID^{ω}可证性是一个Π^1_1 关系。

关于 LKID^{ω}，已知如下事实。

定理 6.1（[5]中的定理 5.9） $\Gamma \vdash \Delta$ 在 LKID^{ω} 中可证，当且仅当 $\Gamma \vdash \Delta$ 在每个标准模型中有效。

因此，LKID^{ω}是关于归纳谓词的标准解释的一阶逻辑$_{\mathrm{ID}}$ 的完备且可靠证明系统。

定理 6.2 LKID^{ω}中的可证性是一个 Π^1_1 关系。

证明。固定 (Σ, Φ) 和一个序列 $\Gamma \vdash \Delta$。设 $FV(\Gamma) \cup FV(\Delta) = \{x_1, \ldots, x_n\}$。定义 $A \equiv \forall x_1 \ldots \forall x_n(\bigwedge\Gamma \to \bigvee\Delta)$。则 A 是 Σ 的闭公式，且 $\Gamma \vdash \Delta$ 有效当且仅当 A 有效。

由推论4.9可知，给定序列在标准模型中的有效性是一种Π^1_1 关系。由此以及定理 6.1，我们得出这一结论。□

由定理 6.2，我们可以得出：带有自然数、列表和树的归纳定义的一阶逻辑中的可证性是 Π^1_1 关系。

6.2 Π^1_1-困难性：LKID$^\omega$

在本节中，我们将证明 LKID$^\omega$中的可证性是 Π^1_1-难的。

我们将 PA＋F 定义为在 PA 的基础上加入函数符号 F 所得到的逻辑，其中 F 是一个未解释的函数符号。皮亚诺算术 PA、加入新函数符号后的皮亚诺算术 PA ＋F，以及二阶算术 PA^2 的标准模型定义为这样一种模型：其论域为$\mathbb{N}$，且 0、s、＋和 × 分别解释为自然数上的普通常元和普通函数。

首先，我们将证明下面的引理。

引理 6.3 在 PA＋F 的每个标准模型中都为真的公式集合是 Π^1_1-困难的。

证明。定义 $S_0 = \{\ulcorner A \urcorner \mid$ A 是 PA＋F 的一个公式，它在每个标准模型中都为真皮亚诺算术 ＋F$\}$。只需证明，对于皮亚诺算术 ＋F 中任意满足 FV(A(F,x)) $\subseteq \{x\}$ 的一阶公式 A(F, n)，如果 $S_A = \{n \mid \forall f\,(A(f, n))$ 在皮亚诺算术的标准模型中为真（也就是说，S_A遍历所有 Π^1_1集合），那么就存在一个归约 σ，使得 $x \in S_A$ 当且仅当 $\sigma(x) \in S_0$,；其中 A(f , n) 是将公式 A(F, n) 中的函数符号 F 替换为函数变量 f 后得到的公式。

我们定义归约 $\sigma(m) = \ulcorner A(F, m) \urcorner$。于是，只需证明 $m \in S_A \Leftrightarrow (\forall f\,(A(f, m))$ 在皮亚诺算术的标准模型 M 中为真) $\Leftrightarrow (\forall \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}.M[f := \varphi] \models A(f, m)$ 在皮亚诺算术的标准模型 M 中为真) $\Leftrightarrow$ (A(F, m) 在皮亚诺算术的每个标准模型中都为真 ＋F) $\Leftrightarrow \ulcorner A(F, m) \urcorner \in S_0 \Leftrightarrow \sigma(m) \in S_0$,，其中 M[f := φ] 是这样的模型：函数符号 f 被解释为 φ，其他符号则按与 M 相同的方式解释。□

命题 6.4 LKID$^\omega$中的可证性是 Π^1_1-困难的。

证明。根据定理 6.1，LKID$^\omega$中的可证性等价于 FOL$_{\mathrm{ID}}$的有效性。因此，只需证明 FOL$_{\mathrm{ID}}$ 在每个标准模型中的有效性是Π^1_1-困难的。我们将对此进行证明。令$\Sigma^F_{\mathbf{PA}}$为如下签名：包含一个常元 0、一元函数符号 s、F、二元函数符号 +、×，以及一个一元归纳谓词符号 N。令产生式规则 Φ_N 为例 2.2 中的那些规则。对于下列皮亚诺公理，我们记作 (PA1)–(PA6)：

$$\forall x(sx \neq 0), \qquad \forall xy(sx = sy \to x = y), \qquad \forall x(x + 0 = x),$$
$$\forall xy(x + sy = s(x + y)), \qquad \forall x(x \times 0 = 0), \qquad \forall xy(x \times sy = x \times y + x).$$

对于 PA＋F 的公式 A，我们定义如下变换 A^N：

$$(t_1 = t_2)^N = (t_1 = t_2), \qquad (\neg A)^N = \neg A^N, \qquad (A_1 \Box A_2)^N = A_1^N \Box A_2^N \quad (\Box \in \{\wedge, \vee, \to\}),$$
$$(\forall xA)^N = \forall x(Nx \to A^N), \qquad (\exists xA)^N = \exists x(Nx \wedge A^N).$$

对于 PA ＋F 的公式 A，若 FV (A) $\subseteq \{x1, \ldots, x_n\}$，则可以类似于 [5]中的引理 3.12，证明以下各项彼此等价。其证明见附录 B（引理 B.3）。

(1) A 在 PA 的每个标准模型中都为真 ＋F。

(2) 序列 (PA1)^N, . . . , (PA6)^N, Nx1, . . . , Nx$_n$,∀x(Nx → NFx) ⊢ A^N 在 $(\Sigma^F_{\mathbf{PA}}, \Phi_N)$ 的每个标准模型中都有效。

由此以及引理 6.3 可知，FOL$_{\mathrm{ID}}$ 在每个标准模型中的有效性是 Π^1_1-困难的。 □

6.3 Π^1_1-完备性：LKID$^\omega$

在本节中，我们最终将证明 LKID$^\omega$ 中的可证性是 Π^1_1-完备的。

根据定理 6.2和命题 6.4，我们可以说明 LKID$^\omega$ 中可证性的复杂度。定理 6.5：LKID$^\omega$ 中的可证性是 Π^1_1-完全的。

7 相关工作

本文的结果证明此前已在 [14]，前作过概述；本文则详细阐述了这一思路，具体而言，证明了标准模型中的有效性与标准项模型中的有效性之间的等价，并给出了归纳谓词的编码。

我们讨论除 [14] 之外的相关工作。无限下降证明系统和循环证明系统已得到广泛研究。例如，先前的研究将它们的可证性与马丁-洛夫风格的传统归纳定义系统进行了比较 ¨，并探讨了它们在程序终止逻辑 [4] 和分离逻辑 [24, 23] 中的应用。特别是，文献 [5, 3, 19, 21, 22, 7, 17] 研究了无限下降证明。然而，这些研究只关注它们与循环证明之间的关系；与无限下降证明相关的真谓词及其逻辑复杂度均尚未得到考察。

如果我们所考虑结构的论域由标准自然数组成，那么该系统的逻辑复杂度便可轻易推导出来，因为我们可以通过取给定归纳谓词的 k 次展开的并集，将归纳谓词表示为某个 Π^0_1公式 [25]。然而，这种技术无法应用于 LKID$^\omega$，因为其论域未必由标准自然数组成。

众所周知，通过追踪无限递归证明图，可以证明带有 ω 规则的皮亚诺算术中的可证性是一种 Π^1_1 关系。然而，出于以下原因，这种技术无法应用于 LKID$^\omega$，以证明其可证性是 Π^1_1 。如果应用这种技术，就需要为每个无限分支引入一个二阶全称量词，并为一条进展轨迹引入一个二阶存在量词，因此我们只能证明该关系是 Π^1_2。

证明系统的逻辑复杂度一直受到广泛研究，已有以下结论。LKID 和 CLKID$^\omega$ 中的可证性是 Σ^0_1-完全的 [14]。一阶逻辑中的可证性是 Σ^0_1-完全的[13]。PRA 中的可证性是 Σ^0_1-完全的 [11]。二阶系统 PRA^2, PA^2, 中的可证性，以及 ω-模型中 ω-语言的有效性，都是 Π^1_1-完全的 [11]。除此之外，已知动态逻辑和构造性无穷逻辑 $\mathrm{L}\omega^{\mathrm{ck}}_1\omega$ 的可证性是 Π^1_1-完全的 [13, 15, 12]。一些无限证明系统的逻辑复杂度也得到了研究。线性逻辑的一个加入不动点扩展的片段，称为 μMALL$^\infty$，已被证明具有 Π^0_1-困难的可证性 [9]。后来，这一结果被加强为 Σ^1_1-困难性，并给出了一个 Π^1_2 上界 [10]。

真谓词已被用于分析逻辑复杂度。McGee [16]通过为以 Π^1_2 公式表示的逻辑定义真谓词，证明了模态谓词演算的有效性是 Π^1_2-完备的。Plisko [18] 利用真谓词分析了完备构造性算术理论的逻辑复杂度。这两项研究都未考虑归纳谓词。

8 结论

本文研究了 LKID$^\omega$ 中可证性的逻辑复杂度。LKID 是一种针对归纳定义谓词的无限下降证明逻辑系统；我们证明了 LKID$^\omega$ 中可证性的复杂度是 Π^1_1-完备的。为得到这一结果，我们使用一个 Π^1_1 公式，为带有归纳定义的一阶语言定义了真谓词。

除了本文所述的方法之外，还有另一种证明结果（2）的方式。为了定义真谓词，我们考察一个公式是否在每个给定结构中都成立。根据向下斯科伦-勒文海姆定理，只需考虑可数结构。因此，FOL 的真谓词（即不含归纳谓词的 FOL）可以定义为“一个公式在每个可数模型中都成立”，而它是一个 Π^1_1 关系。为了得到 $\mathrm{FOL}_{\mathrm{ID}}$ 的真谓词，我们在定义真谓词时加入以下条款：

“P(⌜t) 成立，当且仅当对于某个 k，$P^{(k)}$(⌜t) 成立”，其中 $P^{(k)}$ 是归纳谓词 P 的第 k 次展开。由于右侧额外的全称量词是一阶的，因此可以证明 FOL_{ID} 的真谓词也属于 Π^1_1 关系。

未来可能的研究方向包括考察限制签名后这些系统的逻辑复杂度是否会发生变化。未来还可以将本文的证明技术应用于其他证明系统。

参考文献

[1] Stefano Berardi & Makoto Tatsuta（2017）：Martin-L¨of 的归纳定义经典系统与循环证明系统并不等价。载于 Javier Esparza & Andrzej S. Murawski（编）：《软件科学与计算结构基础——第20届国际会议，FOSSACS 2017》，作为软件理论与实践欧洲联合会议 ETAPS 2017 的一部分举行，瑞典乌普萨拉，2017年4月22日至29日，论文集，《计算机科学讲义》10203，第301–317页，doi:10.1007/978-3-662-54458-7 18。[2] Stefano Berardi & Makoto Tatsuta（2017）：算术中的归纳定义与循环证明的等价性。载于：第32届 ACM/IEEE 计算机科学逻辑研讨会，LICS 2017，冰岛雷克雅未克，2017年6月20日至23日，IEEE计算机学会，第1–12页，doi:10.1109/LICS.2017.8005114。[3] James Brotherston（2006）：归纳定义的序列演算证明系统。博士论文，爱丁堡大学。[4] James Brotherston、Richard Bornat & Cristiano Calcagno（2008）：分离逻辑中程序终止的循环证明。载于 George C. Necula & Philip Wadler（编）：第35届 ACM SIGPLAN-SIGACT 程序设计语言原理研讨会论文集，POPL 2008，美国加利福尼亚州旧金山，2008年1月7日至12日，ACM，第101–112页，doi:10.1145/1328438.1328453。[5] James Brotherston & Alex Simpson（2011）：归纳法与无限下降的序列演算。《逻辑与计算杂志》21(6)，第1177–1216页，doi:10.1093/logcom/exq052。[6] Dirk van Dalen（1997）：《逻辑与结构》。施普林格。[7] Mads Dam & Dilian Gurov（2002）：带显式点与近似的 μ-演算。《逻辑与计算杂志》12(2)，第255–269页，doi:10.1093/LOGCOM/12.2.255。[8] Anupam Das（2020）：循环算术的逻辑复杂性。《计算机科学逻辑方法》16(1)，doi:10.23638/LMCS-16(1:1)2020。[9] Anupam Das、Abhishek De & Alexis Saurin（2022）：带最小与最大不动点的线性逻辑的判定问题。载于 Amy P. Felty（编）：第7届形式结构与计算演绎国际会议，FSCD 2022，2022年8月2日至5日，以色列海法，LIPIcs 228，达格施图尔宫——莱布尼茨信息学中心，第20:1–20:20页，doi:10.4230/LIPICS.FSCD.2022.20。[10] Anupam Das、Abhishek De & Alexis Saurin（2023）：线性逻辑中带不动点的无穷系统比较。载于 Patricia Bouyer & Srikanth Srinivasan（编）：第43届 IARCS 软件技术与理论计算机科学基础年会，FSTTCS 2023，2023年12月18日至20日，印度特伦甘纳邦海得拉巴 IIIT，LIPIcs 284，达格施图尔宫——莱布尼茨信息学中心，第40:1–40:17页，doi:10.4230/LIPICS.FSTTCS.2023.40。[11] Jean-Yves Girard（1987）：《证明论与逻辑复杂性》第一卷。Bibliopolis。[12] David Harel（1985）：循环多米诺：让极难判定的问题变得易于理解。载于 Marek Karplnski & Jan van Leeuwen（编）：《计算理论专题》，North-Holland 数学研究102，North-Holland，第51–71页，doi:10.1016/S0304-0208(08)73075-5。[13] David Harel、Dexter Kozen & Jerzy Tiuryn（2000）：《动态逻辑》。麻省理工学院出版社，doi:10.7551/mitpress/2516.001.0001。

[14] Sohei Ito & Makoto Tatsuta（2022）：归纳推理的复杂性（日语）。载于：第39届日本软件科学与技术学会年会论文集，JSSST，第1–12页。[15] H. Jerome Keisler（1974）：《无穷逻辑的模型论》。North-Holland。[16] Vann McGee（1997）：模态谓词逻辑“在 ZF 的每个传递模型中为真”的复杂性。《符号逻辑杂志》62(4)，第1371–1378页，doi:10.2307/2275648。[17] Damian Niwinski & Igor Walukiewicz（1996）：μ演算的博弈。《理论计算机科学》163(1&2)，第99–116页，doi:10.1016/0304-3975(95)00136-0。[18] Valery Plisko（2001）：某些完备算术理论的谓词逻辑的算术复杂性。《纯粹与应用逻辑年刊》113(1)，第243–259页，doi:10.1016/S0168-0072(01)00061-6。第一届圣彼得堡逻辑与可计算性日会议。[19] Ulrich Sch¨opp & Alex K. Simpson（2002）：使用显式近似项验证时序性质：上下文无关过程的完备性。载于 Mogens Nielsen & Uffe Engberg（编）：《软件科学与计算结构基础》，第5届国际会议，FOSSACS 2002，作为软件理论与实践联合欧洲会议 ETAPS 2002 的一部分举行，法国格勒诺布尔，2002年4月8日至12日，论文集，《计算机科学讲义》2303，施普林格，第372–386页，doi:10.1007/3-540-45931-6 26。[20] Alex Simpson（2017）：循环算术等价于皮亚诺算术。载于 Javier Esparza & Andrzej S. Murawski（编）：《软件科学与计算结构基础——第20届国际会议，FOSSACS 2017》，作为软件理论与实践欧洲联合会议 ETAPS 2017 的一部分举行，瑞典乌普萨拉，2017年4月22日至29日，论文集，《计算机科学讲义》10203，第283–300页，doi:10.1007/978-3-662-54458-7 17。[21] Christoph Sprenger & Mads Dam（2002）：关于带显式近似的 μ演算中全局归纳的注记。载于 Zolt´an ´Esik & Anna Ing´olfsd´ottir（编）：《计算机科学中的不动点》，FICS 2002，丹麦哥本哈根，2002年7月20日至21日，预备论文集，BRICS 笔记系列 NS-02-2，奥胡斯大学，第22–24页。[22] Christoph Sprenger & Mads Dam（2003）：归纳推理的结构：μ演算中的循环证明与树形证明。载于 Andrew D. Gordon（编）：《软件科学与计算结构基础》，第6届国际会议，FOSSACS 2003，作为软件理论与实践联合欧洲会议 ETAPS 2003 的一部分举行，波兰华沙，2003年4月7日至11日，论文集，《计算机科学讲义》2620，施普林格，第425–440页，doi:10.1007/3-540-36576-1 27。[23] Quang-Trung Ta、Ton Chanh Le、Siau-Cheng Khoo & Wei-Ngan Chin（2018）：符号堆分离逻辑中的自动引理合成。《ACM 编程语言会议论文集》2（POPL），第9:1–9:29页，doi:10.1145/3158097。[24] Makoto Tatsuta、Koji Nakazawa & Daisuke Kimura（2019）：带归纳定义的符号堆循环证明的完备性。载于 Anthony Widjaja Lin（编）：《编程语言与系统——第17届亚洲研讨会，APLAS 2019》，印度尼西亚巴厘岛努沙杜瓦，2019年12月1日至4日，论文集，《计算机科学讲义》11893，施普林格，第367–387页，doi:10.1007/978-3-030-34175-6 19。[25] Anne Sjerp Troelstra（1973）：《直觉主义算术与分析的元数学研究》。《数学讲义》344，doi:10.1007/BFb0066739。

一阶逻辑$_{\mathrm{ID}}$的句法与语义

我们定义一阶逻辑$_{\mathrm{ID}}$的句法与语义。设 Σ 为一个签名，由变量 x_1,x2、……、函数符号 f_1,f2、……以及谓词符号 R_1,R2、……组成。

一阶逻辑$_{\mathrm{ID}}$ 的项由以下语法定义：

$$t ::= c_i \mid x_i \mid f_i(t_1, \ldots, t_n),$$

其中 f_i 的元数为 n。

一阶逻辑$_{ID}$ 的公式由以下语法定义：

$$A ::= R_i(t_1,\ldots,t_n) \mid \neg A \mid A \vee A \mid A \wedge A \mid A \to A \mid \exists x_i A \mid \forall x_i A,$$

其中 R_i 的元数为 n。

一阶逻辑$_{ID}$ 的一个结构 M 是 $(U, [\![\ ]\!])$，其中 U 是一个集合，称为 M 的论域，而 $[\![\ ]\!]$ 是符号的解释，使得 $[\![c_i]\!] \in U$、$[\![f_i]\!] : U^n \to U$ 且 $[\![R_i]\!] \subseteq U^n$（n 是 f_i 和 R_i 的元数）。设 ρ 为一个变量赋值，也就是说，它是从变量集到 U 的映射。

那么项 $[\![t]\!]\rho$ 的解释定义如下：

$$\begin{aligned}
[\![c_i]\!]\rho &= [\![c_i]\!], \\
[\![x_i]\!]\rho &= \rho(x_i), \\
[\![f_i(t_1,\ldots,t_n)]\!]\rho &= [\![f_i]\!]([\![t_1]\!]\rho,\ldots,[\![t_n]\!]\rho).
\end{aligned}$$

若 t 是闭合的，我们可以省略 ρ，直接写作 $[\![t]\!]$。

关系 $M \models_\rho A$ 的归纳定义如下：

$$\begin{aligned}
M \models_\rho R_i(t_1,\ldots,t_n) &\quad \text{iff} \quad ([\![t_1]\!]\rho,\ldots,[\![t_n]\!]\rho) \in [\![R_i]\!], \\
M \models_\rho \neg A &\quad \text{iff} \quad M \not\models_\rho A, \\
M \models_\rho A \vee B &\quad \text{iff} \quad M \models_\rho A \text{ or } M \models_\rho B, \\
M \models_\rho A \wedge B &\quad \text{iff} \quad M \models_\rho A \text{ and } M \models_\rho B, \\
M \models_\rho A \to B &\quad \text{iff} \quad M \not\models_\rho A \text{ or } M \models_\rho B, \\
M \models_\rho \exists x_i A &\quad \text{iff} \quad M \models_{\rho[x_i:=u]} A \text{ for some } u \in U, \\
M \models_\rho \forall x_i A &\quad \text{iff} \quad M \models_{\rho[x_i:=u]} A \text{ for all } u \in U,
\end{aligned}$$

其中，$\rho[x_i := u]$ 是一个变量赋值，它将 x_i 映射到 u，并将 $x_j (i \neq j)$ 映射到 $\rho(x_j)$。

B 命题 6.4 中所述主张的证明

我们给出命题 6.4 中所述主张的证明。

我们将 (F) 定义为公式 $\forall x(Nx \to NFx)$。于是，在满足 $(PA1)^N$–$(PA6)^N$ 的 $(\Sigma^F_{\mathbf{PA}}, \Phi_N)$ 的任意标准模型 $M = (U, [\![\ ]\!])$ 中，显然有 $[\![N]\!] \cong \mathbb{N}$。因此，任意从变量 ρ 到 $\mathbb{N}$ 的映射，都可以在此类模型 M 以及 PA + F 的标准模型上解释为变量赋值。

我们首先证明，此类模型 M 中项的解释包含于归纳谓词 N 的解释中。

引理 B.1 设 $M = (U, [\![\ ]\!])$ 是 $(\Sigma^F_{\mathbf{PA}}, \Phi_N)$ 的一个标准模型，满足 $(PA1)^N$–$(PA6)^N$ 和 (F)。那么，对于任意项 t 和变量赋值 ρ，有 $[\![t]\!]\rho \in [\![自然数集]\!]$。

证明。对 t 作归纳。

- $t \equiv 0$。显然，根据产生式规则，$[\![0]\!]\rho \in [\![自然数集]\!]$。
- $t \equiv t_1 + t_2$。$[\![t_1 + t_2]\!]\rho = [\![t_1]\!]\rho + [\![t_2]\!]\rho$。根据归纳假设，$[\![t_1]\!]\rho, [\![t_2]\!]\rho \in [\![自然数集]\!]$。根据皮亚诺公理以及 $[\![自然数集]\!]$ 是最小不动点这一事实，+ 在 $[\![自然数集]\!]$ 中是闭合的。因此，我们有 $[\![t_1]\!]\rho + [\![t_2]\!]\rho \in [\![自然数集]\!]$。
- $t \equiv t_1 \times t_2$。与 $t \equiv t_1 + t_2$ 的情形相同。
- $t \equiv Fu$。根据归纳假设及 $M \models (F)$，$[\![F\,u]\!]\rho = [\![F]\!]([\![u]\!]\rho) \in [\![自然数集]\!]$。 □

接下来，我们将证明 PA + F 的有效性与在带有皮亚诺公理和 (F) 的 $(\Sigma^F_{\mathbf{PA}}, \Phi_N)$ 标准模型中为真之间的等价性。

引理 B.2 设 ρ 是 PA + F 标准模型上的一个变量赋值。对于 PA + F 的任意公式 B，我们有以下等价关系：

(1) 对于任何满足 $(PA1)^N$–$(PA6)^N$ 和 (F) 的 $(\Sigma^F_{\mathbf{PA}}, \Phi_N)$ 的标准模型 $M = (U, [\![\,]\!])$，$M \models_\rho B^N$。

(2) 对于 PA + F 的任何标准模型 $\mathscr{N} = (\mathbb{N}, [\![\,]\!]_{\mathscr{N}})$，$\mathscr{N} \models_\rho B$。

证明。对 B 使用归纳法。

- $B \equiv (t_1 = t_2)$。对于所有 M，$M \models_\rho (t_1 = t_2)^N \Leftrightarrow$ 对于所有 M，$M \models_\rho t_1 = t_2 \Leftrightarrow [\![t_1]\!]\rho = [\![t_2]\!]\rho \Leftrightarrow$（根据引理 B.1）$[\![t_1]\!]_{\mathscr{N}}\rho = [\![t_2]\!]_{\mathscr{N}}\rho$ 对于所有 $\mathscr{N} \Leftrightarrow \mathscr{N} \models_\rho t_1 = t_2$ 对于所有 $\mathscr{N}$。
- $B \equiv \neg A$。对于所有 M，$M \models_\rho (\neg A)^N \Leftrightarrow$ 对于所有 M，$M \not\models_\rho A^N \Leftrightarrow$（根据归纳假设）对于所有 $\mathscr{N}$，$\mathscr{N} \not\models_\rho A \Leftrightarrow$ 对于所有 $\mathscr{N}$，$\mathscr{N} \models_\rho \neg A$。
- $B \equiv A_1 \square A2, \square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$。与情形 $B \equiv \neg A$ 相同。
- $B \equiv \forall x A$。对于所有 M，$M \models_\rho (\forall x A)^N \Leftrightarrow$ 对于所有 M，$M \models_\rho \forall x(Nx \rightarrow A^N) \Leftrightarrow$ 对于所有 M，$M \models_{\rho[x:=n]} Nx \rightarrow A^N$ 对于所有 $n \in U \Leftrightarrow$ 对于所有 M，$M \models_{\rho[x:=n]} Nx$ 蕴含 $M \models_{\rho[x:=n]} A^N$ 对于所有 $n \in U \Leftrightarrow$ 对于所有 M，$n \in [\![$自然数集$]\!]$ 蕴含 $M \models_{\rho[x:=n]} A^N$ 对于所有 $n \in U \Leftrightarrow$（根据 $[\![$自然数集$]\!] \cong \mathbb{N}$）对于所有 M，$M \models_{\rho[x:=n]} A^N$ 对于所有 $n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$（根据归纳假设）对于所有 $\mathscr{N}$，$\mathscr{N} \models_{\rho[x:=n]} A$ 对于所有 $n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$ 对于所有 $\mathscr{N}$，$\mathscr{N} \models_\rho \forall x A$。□

现在我们将证明这一断言。

引理 B.3 对于皮亚诺算术 + F 的公式 A，若 $FV(A) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$，则有以下等价关系：

(1) A 在皮亚诺算术 + F 的每个标准模型中都为真。(2) 序列 $(PA1)^N, \ldots, (PA6)^N$, (F), $Nx_1, \ldots, Nx_n \vdash A^N$ 在 $(\Sigma^F_{\mathbf{PA}}, \Phi_N)$ 的每个标准模型中都有效。

证明。(1) 重述了这样一个事实：对于皮亚诺算术 + F 的每个标准模型 $\mathscr{N}$ 以及所有 $\mathscr{N}$-变量赋值 ρ，$\mathscr{N} \models_\rho A$。根据引理 B.2，这等价于以下事实：对于满足 $(PA1)^N$–$(PA6)^N$ 和 (F) 的 $(\Sigma^F_{\mathbf{PA}}, \Phi_N)$ 的每个标准模型 $M = (U, [\![\,]\!])$，以及所有满足 $\rho(x_i) \in \mathbb{N} (1 \leq i \leq n)$ 的 M-变量赋值 ρ，$M \models_\rho A^N$。由于 $[\![N]\!] \cong \mathbb{N}$，这等价于序列 $Nx1, \ldots, Nx_n \vdash A^N$ 的有效性。由于 $(PA1)^N, \ldots, (PA6)^N$ 和 (F) 都是闭公式，这又等价于 $(PA1)^N, \ldots, (PA6)^N$, (F), $Nx1, \ldots, Nx_n \vdash A^N$。□