正则性模的计算内容及其逻辑强度

Ulrich Kohlenbach 数学系 达姆施塔特工业大学 Schlossgartenstraße 7, 64289 达姆施塔特，德国
kohlenbach@mathematik.tu-darmstadt.de

谨以此文献给斯特凡诺·贝拉尔迪教授，值其64岁生日之际

我们继续研究正则性模存在这一命题的计算状态（以及它们在收敛速率方面的用途），按照 [21]，中的意义，在 [17]，中以经典逆向数学和魏劳赫度为参照展开研究，并确定其中涉及的排中律（LEM）的强度。我们还表明，对于紧度量空间上的连续函数 $F : K \to \mathbb{R}$，只要这样的零点存在，就总能利用正则性模数得到一个计算该零点的算法（其中 F 配备一致连续性模，K 以标准表示给出）。若 $K \subset X$ 是一致凸巴拿赫空间 X 的紧子集，且 F 的零点集为凸集，则甚至可以计算出最小范数零点。正则性模数还可用于计算无限0/1树的最左无限路径。我们还证明，不存在一种在证明论上温和的非标准一致性原理，能够将正则性假设中的紧性替换为度量有界性，同时仍保证经典上正确的界。

1 引言

在本文中，我们延续 [17] 的研究，考察 [21] 所引入的（度量）正则性一般形式（的存在性）的计算与逻辑强度；这一概念统一了连续优化中研究的许多相关概念。粗略地说，对解集作正则性假设，可以得出这样的结论：足够好的近似解必定接近某个实际解。如果解集是单点集，这一问题曾以强唯一性或一致唯一性的名义得到研究（也研究了相应的模数），例如见 [9]（另见 [16]）。正则性概念将其推广到了非唯一情形。在紧度量空间 X 和连续函数 $F : X \to \mathbb{R}$的情形下，根据 [21]中的一个结果，F 的零点集 zer F 总是具有正则性。然而，如 [17],所示，通常——不同于唯一性的情形，在后者中可以使用证明论技术提取有效唯一性模数——不能指望存在可计算的正则性模数。事实上，即使对于利普希茨连续函数 $F : [0,1] \to \mathbb{R}$，后者的存在性也等价于算术概括公理 ACA_0；而 $\forall\exists$形式的正则性（不带模数）只需要弱柯尼希引理 WKL_0。造成这一差异的原因在于，$\forall\exists$形式的正则性（尽管在证明论意义上很弱）在直觉主义地（实际上等价于）蕴含 Σ^0_1排中律原则 Σ^0_1-LEM：见下文定理2.11。[1] 当将其加强为一个模数时，这种对 Σ^0_1-LEM 的使用甚至会变得更加

[1]一个特别引人注目的例子是关于数对和两种颜色的拉姆齐定理。尽管它在证明论意义上较弱，却蕴含（且等价于）原则 Σ^0_3-有限反例原理（见 [3]）；根据 [1]，该原理严格强于 Σ^0_2-排中律。关于推广到 k 种颜色的情形，另见 [4]。

T. Altenkirch、F. Barbanera、F. Damiani 和 U. de'Liguoro（编）：《逻辑与类型理论：献给斯特凡诺·贝拉尔迪64岁生日的论文集》，EPTCS441，2026年，第185–196页，doi:10.4204/EPTCS.441.11

© Ulrich Kohlenbach 本作品采用知识共享署名许可协议。

在经典情形下表现为 Σ^0_1-概括公理（因此，经迭代后表现为 ACA_0）.
在 [21] 中已经证明，只要我们有一个关于解集单调的 Fej´er 算法，用于计算近似解，并且有该算法的近似解界，那么正则性模数就能给出收敛速率。[2] 在本文中，我们证明，在上述具有紧度量空间 X 的情形下，只要 zer F $\neq /0$，就可以无条件地构造一个原始递归泛函：它以正则性模数、X 的标准表示以及 F 的名称为输入（后者由 F 在可数稠密子集上的限制和一个一致连续性模给出），并一致地计算出 F 的一个零点（定理 2.3）。

作为一个特例，可以将寻找无限二叉树（即 0/1-树）的无穷路径这一问题纳入其中。对于这样的树，存在一个 Kalmar初等泛函，它以该树（的特征函数）和一个正则性模数（相对于作为解集的无穷路径集合）为输入，能够一致地计算出树的最左分支（定理 2.8）。

若 K $\subset$ X 是一致凸巴拿赫空间 X 的紧子集，F : K $\to \mathbb{R}$ 连续，且 F的零点集是凸的（这是凸优化中经常出现的情形），那么，利用上述数据并加上 X 的凸性模数，甚至可以计算出一个最小范数零点（定理 2.4）。
在证明挖掘中，通常可以允许使用非标准论证，以度量有界性取代紧性假设。一致有界原理 $\exists$-UB^X （见 [15] ，另见 [16] 及 [5]中的相关讨论）系统地使这一做法成为可能；尽管该原理在经典情形下是错误的，但仍可将其消去，而且验证从使用该原理的证明中提取出的界，不会带来任何复杂度开销。这就引出了一个问题：某种组合，例如算术理解（若允许使用棒递归界，它是证明挖掘逻辑元定理中的一个可容许原理）与 $\exists$-UB^X （或其他某种“温和”的非标准原理）相结合，是否能在缺少紧性的情况下蕴含正则性？（若某原理不会增加可提取界的复杂度，就称其为“温和”的。）命题 2.5 表明，情况并非如此。

2 主要结果

定义 2.1（[21]）。设 (X , d) 为一个度量空间，并设 F : X $\to \mathbb{R}$ 为一个映射。设 F的零点集 := {x $\in$X : F(x) $= 0\} \neq /0$ 且 r > 0. 我们称，对于 z $\in$ F的零点集，F 关于 F的零点集 与 B(z, r) 是正则的，如果

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists k \in \mathbb{N} \forall x \in \overline{B}(z,r) \left(|F(x)| < 2^{-k} \to \exists z' \in zer\, F \, (d(x,z') < 2^{-n}) \right).$$

如果将‘$\forall$x $\in$B(z, r)’替换为‘$\forall$x $\in$X’后上述仍成立，则我们称 F 关于 F的零点集 是正则的。
一个函数 ρ: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 对给定的 n 给出满足上述条件的数 k $= \rho$(n)，称为 F 关于 F的零点集 与 B(z,r) 的正则性模数，或相应地关于 F的零点集 的正则性模数（简记： ρ mreg F的零点集, r）
回顾：若每个有界闭子集都是紧的，则称该度量空间为‘正则’（或‘有界紧’）。

命题 2.2（[21]）。如果 X 是正则的且 F 是连续的，那么对于任意 z $\in$ F的零点集和 r > 0，F 关于 F的零点集和 B(z, r) 具有正则性模数。
设 (X, d) 为紧度量空间，(a_n) 为 X 中的一个序列，且 α： $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 二者共同见证 X 的全有界性，即

$$\forall x \in X \forall k \in \mathbb{N} \exists 0 \leq i \leq \alpha(k) \left(d(x, a_i) < 2^{-k} \right)$$

[2]关于这一结果推广到 Fej´er 单调性的一般形式，参见 [22]。

（比较 [20] 中的 (TOT I)。）

设 g 使得对所有 i、j ∈ ℕ，g(i, j) 都是 d(a_i, a_j) 的一个名称（依照 [16] 的定义）。设 F : X → ℝ 是一个连续函数，其具有一个模数 ω：ℕ → ℕ 的一致连续性，即

$$\forall k \in \mathbb{N} \forall x, y \in X \left(d(x,y) < 2^{-\omega(k)} \to d(F(x), F(y)) < 2^{-k} \right).$$

设 h : ℕ → $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$，使得对于每个 i ∈ ℕ，h(i) 都是 F(a_i) 的一个名称。

定理 2.3。设 (X , d)、F 如上所述。可以定义一个原始递归泛函（依照 [8] 中 Kleene 的 S1-S8） Φ，使得对于所有函数 ω、α、g、h ρ，均有 β := Φ(ω, α, g, h ρ) :ℕ → ℕ，且只要 F的零点集 ≠ /0、函数ω、α、g、h 满足上述要求，并且 ρ 是 F的零点集的一个正则性模数 ρ，则 $(a_{\beta(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ 以速率 2^{-k} 收敛到 F 的一个零点。

证明：我们说明如何在满足上述要求的ω、α、g、h ρ 中原始递归地计算一个函数 β：ℕ → ℕ，使得对于x_k : = $a_{\beta(k)}$

$$(*)\ \forall k \in \mathbb{N} \left(|F(x_k)| < 2^{-\max\{k, \rho(k+2)\}} \wedge (k > 0 \to d(x_k, x_{k-1}) \le 2^{-k}) \right).$$

（∗）显然蕴含（x_k）是具有收敛率 2^{-k} 的柯西序列，因为对于m ≥ n ≥ k

$$d(x_m, x_n) \le \sum_{k=n}^{m-1} d(x_k, x_{k+1}) \le \sum_{k=n}^{m-1} 2^{-k-1} \le \sum_{k=n}^{\infty} 2^{-k-1} \le 2^{-n}.$$

由于F是连续的，（∗）——此外——蕴含x: = lim x_k 是F 的零点。

我们通过对k作归纳来证明（∗），并同时定义 β：设k = 0. 由于F的零点集 ≠ /0，可以在 ω、α、g、h ρ 中原始递归地搜索一个n，使得

$$|F(a_n)| < 2^{-\rho(2)}$$

从而（∗）在 β(0): = n时成立（为明确起见，我们可以规定x_{-1} : = a_0）。事实上，设z ∈F的零点集。于是存在一个n ≤ α（ω（ρ(2) + 2））， 使得

$$d(a_n, z) < 2^{-\omega(\rho(2)+2)}.$$

进而

$$|F(a_n)| < 2^{-\rho(2)-2}$$

因此，对于由 ⌢h(n)(ρ(2) + 2) 给出的 F(a_n) 的 $2^{-\rho(2)-2}$-有理数近似 (F(a_n))(ρ(2) + 2)

$$(1)\ |(F(a_n))(\rho(2)+2)| < 2^{-\rho(2)-1}.$$

由于 (1) 是原始递归可判定性质，因此可以通过原始递归搜索，找到使 (1) 成立的最小 n ≤ α(ω(ρ(2) + 2))，进而推出

$$(2)\ |F(a_n)| < 2^{-\rho(2)}.$$

k ↦k + 1, k ≥ 0：根据归纳假设，我们已经定义了 β(0) . .. , β(k)，使得

$$(3)\ k > 0 \to d(x_k, x_{k-1}) \le 2^{-k}$$

and

$$(4)\ |F(x_k)| < 2^{-\rho(k+2)}.$$

由（4）可得

$$(5)\ \exists z \in X \left(F(z) = 0 \wedge d(z, x_k) < 2^{-k-2}\right).$$

与上述论证类似，我们可以在 ω、α、g、h ρ、k 和 β(k) 中原始递归地搜索一个 n_k，使得

$$d(a_{n_k}, x_k) \le 2^{-k-1} \wedge |F(a_{n_k})| < 2^{-\max\{k+1, \rho(k+3)\}}.$$

事实上：令 $N := \max\{k+1, \rho(k+3)\}$. 设 z 如 (5) 中所述。存在一个 $n_k \le \alpha(\max\{k+4, \omega(N+2)\})$，使得

$$d(a_{n_k}, z) < 2^{-\max\{k+4, \omega(N+2)\}}$$

从而

$$d(a_{n_k}, x_k) < 2^{-k-4} + 2^{-k-2} \wedge |F(a_{n_k})| < 2^{-N-2}.$$

因此

$$(6)\ (d(a_{n_k}, x_k))(k+4) < 2^{-k-3} + 2^{-k-2} \wedge (|F(a_{n_k})|)(N+2) < 2^{-N-1},$$

其中 $(d(a_{n_k}, x_k))(k+4)$ 和 $(F(a_{n_k}))(N+2)$ 分别是由 $g(n_k, \beta(k))(k+4)$ 和 $h(n_k)(N+2)$ 给出的 $\widehat{d(a_{n_k}, x_k)}$ 和 $\widehat{F(a_{n_k})}$ 的 2^{-k-4}- 与 2^{-N-2}-有理数逼近。由于 (6) 是一个原始递归可判定性质，我们可以搜索满足 (6) 的最小 $n_k \le \alpha(\max\{k+4, \omega(N+2)\})$，这意味着

$$(7)\ d(a_{n_k}, x_k) < 2^{-k-1} \wedge |F(a_{n_k})| < 2^{-N}.$$

现在取 $\beta(k+1) := n_k$. □

设 $(X, \|\cdot\|)$ 是一个凸性模为 η 的一致凸巴拿赫空间：$\mathbb{N} \to \mathbb{N}$如（$10^*$）中（[16] 第 4.12 页）所述。设 $K \subset X$ 是一个紧子集，且 $F: K \to \mathbb{R}$ 连续，其一致连续性模数为 ω。设 (a_n) 是 K 中的一个稠密序列，并且 $\alpha: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 是如上所述的 K 的全有界性模，$h: \mathbb{N} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 是 $(F(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ 的名称序列，且 $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 满足对每个 $n \in \mathbb{N}$，$g(n)$ 都是 $\|a_n\|$. 的名称。现在我们假设 $C := F$ 的零点集是非空、闭且凸的，并且 ρ 是 F 关于 F 的零点集的正则性模数。
It 众所周知，从 X 到 C 的度量投影是良定义且单值的 .
设 $D \in \mathbb{N}$ 是 F 的某个零点范数的上界。

定理 2.4. 存在一个 Kleene 意义下的原始递归泛函 Ψ，它对于满足上述要求的函数 η, α, ω, g, h ρ 和 D，能够一致地计算出唯一零点$\Psi(\eta, \alpha, \omega, g, h, \rho, D) \in$，即 F 的零点集 zer F 中范数最小的零点，也就是 0 在 zer F 上的度量投影。

证明：在 η 和 D 中，可以很容易地原始递归地计算出 0 到 C 的度量投影的唯一性模函数 $\Phi(k) := \Phi(\eta, D, k) \in \mathbb{N}$，参见例如 [16, 命题 17。4], 这里我们将此模函数写成 ε/δ形式为 2^{-k}，即

$$\forall k \in \mathbb{N} \forall y_1, y_2 \in C \left(\bigwedge_{i=1}^{2} (\|y_i\| \le \inf_{y\in C} \|y\| + 2^{-\Phi(k)}) \to \|y_1 - y_2\| \le 2^{-k}\right).$$

给定 $k \in \mathbb{N}$，并定义

$$L := \alpha\left(\max\{\Phi(k+1)+2, \omega(K)\}\right),$$

其中

$$K := \rho\left(\Phi(k+1)+2\right)+2.$$

我们考虑集合

$$S_k := \left\{n \le L : |(F(a_n))(K)| \le 2^{-\rho(\Phi(k+1)+2)-1}\right\},$$

这里再次地，(F (a_n))(K) 是由 $\widetilde{\ }h(a_n)(K)$ 给出的 $F(a_n)$ 的 2^{-K}-有理逼近。(i) : $S_k \neq /0$。
令 $z \in F$ 的零点集。根据 α 的定义，存在一个 $n \le L$，使得

$$\|a_n - z\| < 2^{-\omega(K)}.$$

根据 ω 的定义，并利用 $F(z) = 0$，我们得到 $|F(a_n)| < 2^{-K}$，因此

$$|(F(a_n))(K)| < 2^{-\rho(\Phi(k+1)+2)-1},$$

也就是说，$n \in S_k$.
(ii)：对所有 n，以下蕴含关系成立 $\in \mathbb{N}$

$$n \in S_k \to \exists z \in \operatorname{zer} F\ \left(\|z - a_n\| < 2^{-\Phi(k+1)-2}\right),$$

因为根据假设

$$|(F(a_n))(K)| \le 2^{-\rho(\Phi(k+1)+2)-1}$$

因此

$$|F(a_n)| < 2^{-\rho(\Phi(k+1)+2)}$$

这样我们就可以应用 ρ. 的定义
现在（关于 k 及定理中提到的其他数据）原始递归地计算一个 $n_k \in S_k$，使得对所有 $m \in S_k$

$$(+)\ (\|a_n\|)(\Phi(k+1)+2) \le (\|a_m\|)(\Phi(k+1)+2),$$

其中，$(\|a_i\|)(\Phi(k+1)+2)$ 是 $\widetilde{\ }g(i)(\Phi(k+1)+2)$ 所给出的 $2^{-\Phi(k+1)-2}$-有理数近似值 $\|a_i\|$。

由 (ii) $\exists z \in F$的零点集，使得

$$\|a_{n_k} - z\| < 2^{-\Phi(k+1)-2}.$$

令 z_0 为 F 的唯一零点，且具有最小范数。
断言：$\|z\| \le \|z_0\| + 2^{-\Phi(k+1)}$.
断言的证明：假设 $\|z\| > \|z_0\| + 2^{-\Phi(k+1)}$. 那么 $\|a_{n_k}\| > \|z_0\| + 2^{-\Phi(k+1)} - 2^{-\Phi(k+1)-2}$，因此

$$(1)\ (\|a_{n_k}\|))(\Phi(k+1)+2) > \|z_0\| + 2^{-\Phi(k+1)} - 2^{-\Phi(k+1)-1} = \|z_0\| + 2^{-\Phi(k+1)-1}.$$

根据 L 的定义，存在一个 $l \le L$，满足

$$\|a_l - z_0\| < 2^{-\Phi(k+1)-2} \wedge \|a_l - z_0\| < 2^{-\omega(K)}.$$

由第二个合取项可得——推理方式与 (i) 中相同——$l \in S_k$.第
一个合取项意味着

$$(2)\ (\|a_l\|)(\Phi(k+1)+2) < \|z_0\| + 2^{-\Phi(k+1)-1}.$$

(1) 和 (2) 合起来可得

$$(\|a_{n_k}\|)(\Phi(k+1)+2) > (\|a_l\|)(\Phi(k+1)+2)$$

这与 (+) 矛盾，因此断言的证明就此完成。
由于 Φ 是唯一性模函数，该断言意味着 $\|z - z_0\| \le 2^{-k-1}$，因此（由于 $\Phi(k) \ge k$，这由 Φ 的构造可知；无论如何，我们也可以不失一般性地取 $\max\{\Phi(k),k\}$，否则） $\|a_{n_k} - z_0\| < 2^{-k}$. 。这意味着 $(n_k)_k$ 是按 [16] 的意义而言 z_0 的一个名称。□

下述公理（以经典分析在所有有限类型上的系统 $\mathcal{A}^\omega[X, d, W]$ 的语言表述，并扩充一个抽象类型 X，表示 [14] 中定义的有界双曲空间）指出：对于抽象有界度量空间 (X, d)，任何具有零点的非扩张函数 $F : X \to \mathbb{R}$ 都存在一个正则性模数

$$\text{(NE-Reg)} : \forall F : X \to \mathbb{R}, r > 0\,(F \text{ n.e.} \wedge \exists z \in \operatorname{zer} F \to \exists \rho : \mathbb{N} \to \mathbb{N}(\rho \text{ mreg zer } F, r)).$$

我们将证明，这个在经典逻辑中为假的公理（具体含义见下文的命题 2.5），与同样在经典逻辑中为假的非标准原理 $\exists\text{-UB}^X$ from [15] 不同（另见 [16]）：后者可用于证明挖掘的逻辑元定理，而前者不能加入 $\mathcal{A}^\omega[X, d, W]$，从而构造出一个能够提取关于（实质上）$\forall\exists$-定理的、在经典逻辑中正确的一致界的形式系统。[3]这一论证已隐含在 [18][定理 3] 的证明中，但为完整起见，我们在此将其列出。

命题 2.5。在 $\mathcal{A}^\omega[X, d, W] + \text{(NE-Reg)}$ 中，可以证明一个如下形式的句子：

$$A :\equiv \forall g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, k \in \mathbb{N}, x^X, p^X, T^{X\to X}\,(T \textit{ nonexpansive } \to \exists n \in \mathbb{N} A_\exists(g, k, x, p, T)),$$

其中，$A_\exists(g, k, x, p, T)$ 是一个可证明具有外延性的 Σ^0_1-公式，并且 A 并非在所有有界双曲空间 (X , d,W) 中都成立（事实上，甚至并非在 l_2 的所有闭有界凸子集中都成立）。
证明：考虑以下句子（将“非扩张”缩写为“n.e.”）

$$A :\equiv \forall g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, k \in \mathbb{N}, x^X, p^X, T^{X\to X}\left(T \text{ n.e.} \wedge p =_X Tp \to \exists n \in \mathbb{N}\, d_X(x_n, x_{g(n)}) <_{\mathbb{R}} 2^{-k}\right),$$

其中 (x_n) 定义为 $x_0 := x$，$x_{n+1} := W_X(x_n, T x_n, 1/2)$；注意到 $=_X \in \Pi^0_1$ 和 $<_{\mathbb{R}} \in \Sigma^0_1$，这等价于一个具有所需逻辑形式的句子。
$\mathcal{A}^\omega[X , d,W]$ 证明 T 的克拉斯诺谢尔斯基迭代是渐近正则的，即 $d(x_n, T x_n) \to 0$(见 [19, 16])。由于 (x_n) 关于 F 的零点集是 Fej´er 单调的，其中 $F(x) := d(x, T(x))$，由 (NE-Reg) 得到的假设 $F(p) =_{\mathbb{R}} 0$ 给出了关于 F 的零点集和 B(p, b) 的正则性模数，其中 $b^{\mathbb{N}}$ 是在 $\mathcal{A}^\omega[X , d,W]$. 中证明 X 有界（即 b-有界）的常数。因此根据 [21, 定理 4.1],，(x_n) 是——在$\mathcal{A}^\omega[X , d,W] +$中运用 (NE-Reg) 推理——柯西序列，故对所有 $k \in \mathbb{N}$，$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$\exists n \in \mathbb{N}\, d_X(x_n, x_{g(n)}) < 2^{-k}.$$

[3]因此，特别是，(NE-Reg) 不能由 $\exists\text{-UB}^X$ 与自然数上的概括公理相结合推出，例如，不能通过将 [11] 中研究的广义一致有界性原理 $\Pi^0_k\text{-UB}^{-}$ 的构造方式调整到抽象类型 X 上来推出。

因此，我们总共得到了 A 的可证性。然而，根据 [6],，存在一个有界闭凸子集 $C \subset l_2$，以及一个非扩张自映射 $T : C \to C$，它在 C 中有一个不动点，且存在一点 $x_0 \in C$，使得 (x_n) 不强收敛。因此 (x_n) 不是柯西序列，所以在此例中，$\forall k \in \mathbb{N} \forall g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \exists n \in \mathbb{N}(d_X(x_n, x_{g(n)}) < 2^{-k})$ 不成立，其中 $X := C$ 且 $W(x, y\lambda) := (1-\lambda)x + \lambda y$. □

以下我们采用 [27] 中给出的二叉（“弱”）K˝onig 引理的形式化定义（使用函数变量的语言）（另见 [28]；这里的 $*$、$\overline{bx}$、lth(n) 指的是 [26] 中有限序列的原始递归编码）：

定义 2.6（[27]）。

$T f :\equiv \forall n^0, m^0(f(n * m) =_0 0 \to f n =_0 0) \wedge \forall n^0, x^0(f(n * \langle x \rangle) =_0 0 \to x \leq_0 1)$

（即 T (f) 断言 f 表示一棵二叉树（的特征函数））

$T^\infty(f) :\equiv T(f) \wedge \forall x^0 \exists n^0(\mathrm{lth}(n) = x \wedge f n = 0)$,

（即 T^∞(f) 表示 f 表示一棵无穷二叉树），

弱柯尼希引理 $:\equiv \forall f^1(T^\infty(f) \to \exists b^1 \forall x^0(f(\overline{bx}) = 0))$。

定义 2.7。我们称 $\rho: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 是无穷二叉树（由 f 表示）关于经过 f 的无穷路径的正则性模数，如果

$$\forall h \leq_1 1 \forall k^0 \left(f(\overline{h}(\rho(k))) = 0 \to \exists b \leq_1 1 (\forall x^0 (f(\overline{b}x) = 0) \wedge \overline{h}k = \overline{b}k) \right).$$

定义 2. 7 可视为定义 2.1 在 $X := 2^{\mathbb{N}}$（其中度量采用贝尔空间度量）上的特例 ic

$$d(f,g) := \begin{cases} 2^{-\min k[f(k) \neq g(k)]-1}, \text{ if } f \neq g \\ 0, \text{ otherwise} \end{cases}$$

and

$$F : 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R},\ h \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \chi(h,i) \cdot 2^{-i},$$

其中

$$\chi(h,i) = \begin{cases} 0, \text{ if } f(\overline{h}i) = 0, \\ 1, \text{ otherwise.} \end{cases}$$

这里我们使用 $d(f,g) < 2^{-k}$ 当且仅当 $\overline{f}(k) = \overline{g}(k)$，并且

$$|F(h)| < 2^{-n} \to f(\overline{h}n) = 0 \to |F(h)| \leq 2^{-n}.$$

更准确地说，如果 ρ 满足定义 2.7，那么它也是定义 2.1 意义下针对 F 的零点集的正则性模数；反过来，如果 ρ 是定义 2.1 意义下的模数，那么 $\tilde{\rho}(k) := \rho(k) + 1$ 满足定义 2.7。

如 [17], 所示，紧空间上连续函数的正则性模数存在，当且仅当算术理解 ACA_0 成立（而 $\forall \varepsilon \exists \delta$ 版本的存在则等价于弱柯尼希引理）。这种强度差异的原因在于，仅 $\forall \varepsilon \exists \delta$ 正则性就蕴含 Σ^0_1 排中律（见下文定理 2.11.2），而将其加强为一个模数后，就会得到 Σ^0_1 概括公理，因此，通过迭代便可得到算术理解。

利用算术理解，可以在无穷二叉树中构造最左无穷路径。下面的结果给出了一个显式变换，将定义 2.7 意义下的正则性模数转换为最左分支：

命题 2.8. 存在一个类型为 2 的 Kalmar初等泛函 φ（更准确地说， φ由 [10] 中定义的 G_3A^{ω} 的一个闭项给出），使得对于任意给定的带有正则性模数 ρ 的无穷二叉树 f， φ(f ρ) 是 f 中的最左无穷路径。

证明：定义 φ(f ρ)(k) :=f 中长度为 ρ(k + 1) 的最左有限分支的第 k 个分量 $(\sigma)_k$。该分支可通过指数有界搜索找到。我们可以假设对所有 k 都有 k ≤ ρ(k)。固定 k，并考虑 f 中长度为 ρ(k + 1) 的最左有限分支 σ 。于是，无穷序列$\sigma * 0^1$（定义为在 σ 后接上若干个 0）满足 f ((σ ∗ 0) (ρ(k + 1)) = f (σ) = 0. 根据 ρ 的定义，存在一条无穷路径 b ≤ 1 ，使得

$$\overline{b}(k+1) = \overline{(\sigma * 0)}(k+1).$$

˜令 b ≤ 1 为 f 中最左的无穷路径。
我们证明 ∀i ≤ k (˜b(i) = b(i))（因此，特别地， ˜b(k) = b(k) = $(\sigma)_k$）：假设∃i ≤ k $\left(\tilde{b}(i) \neq b(i)\right)$，并令 i_0 为满足条件的最小 i。
情况 1： ˜b(i_0) < b(i_0) = $(\sigma)_{i_0}$. 那么 ˜b(ρ(k + 1)) 将是 f 中长度为 ρ(k + 1) 的有限分支，并且比 σ 更靠左（因为对于所有 i < i_0， ˜b(i) = b(i) = $(\sigma)_i$），这与 σ. 的定义矛盾
情况 2： b(i_0) < ˜b(i_0)。那么 b 将是 f 中一条比 ˜b 更靠左的无穷路径，这与 b 的˜定义矛盾
. □

如 [21, 定理 4.1], 所示，正则性模数总能（在给定近似解界的情况下）为计算近似解的 Fej´er 单调算法给出收敛速率。事实上，命题 2.8 证明中的算法就是这一结果的一个实例：

命题 2.9。对于给定的无穷二叉树 f，按如下方式定义 (x_k)：$x_k := \sigma_k * 0^1$，其中 σ_k是 f 中长度为 k 的最左有限分支。那么，(x_k) 关于经过 f 的无穷路径集合 S 是 Fej´er 单调的。

证明：设 b ∈S。我们需要证明

$$\forall k \in \mathbb{N}\,(d(x_{k+1}, b) \leq d(x_k, b)).$$

这又可由以下结论推出
断言： ∀k, m ∈ℕ(x_km = bm → x_{k+1}m = bm)。
断言的证明：令 k, m ∈ℕ 固定，并假设 x_km = bm。假设存在某个 i < m，使得 x_{k+1}(i) ≠ b(i)，并令 i_0 为满足此条件的最小值。注意， ∀j < i_0 (x_k(j) = b(j) = x_{k+1}(j))。
情况 1： $i_0 \leq k$。由于 σ_{k+1}是长度为 k + 1的最左分支，而 σ_k是长度为 k 的最左分支，因此（利用 x_k(k) = 0）可知，x_k位于 x_{k+1}的左侧，从而 b(i_0) = x_k(i_0) ≤ x_{k+1}(i_0)。由于 b(k + 1) 是某个长度为 k + 1的有限分支， σ_{k+1} 位于它的左侧，因此 x_{k+1}(i_0) ≤ b(i_0)。综上，x_{k+1}(i_0) = b(i_0)，这与 i_0.的定义矛盾

情况 2： $i_0 > k$。由定义可知，x_{k+1}(i_0) = 0 = x_k(i_0) = b(i_0)，这再次与 i
0. □ 的定义矛盾

定义 2.10. 1. Σ^0_1-排中律原理（带函数参数）定义为[4]

$$\Sigma^0_1\text{-LEM}: \forall f\left(\forall n^0\,(f(n)=0) \vee \exists n^0\,(f(n)\neq 0)\right).$$

[4]关于这一原则（一种不含函数变量的一阶原则）的证明论研究及其计算解释，分别参见 [1] 和 [2] 。

2. Π^0_1-公式的二元选择原理定义为

$$\Pi^0_1\text{-AC}_{\leq 1}: \forall f\left(\forall n^0\exists m\leq_0 1\forall k^0(f(n,m,k)=0)\to\exists g\leq_1\lambda x.1\forall n,k(f(n,g(n),k)=0)\right).$$

I在下文中，EL 表示 [26] 中的初等直觉主义分析系统。

定理2.11。1. EL+Σ^0_1-排中律+Π^0_1-AC≤ 1 证明：对于每个紧度量空间 X $=\widehat{}$A，任何具有零点的连续映射 F : X $\to\mathbb{R}$ 都关于 F的零点集 正则。

2. 即使对于利普希茨连续函数 F : $[0,1]\to\mathbb{R}$，若其 F的零点集 为 $\neq 0$，F 关于 F的零点集的正则性也蕴含 EL 上的 Σ^0_1-排中律。

证明：1）考察 [17, 定理4.2(1)] 的证明（另见 [17, 备注4.3]）可知，借助归纳、Σ^0_1-排中律和弱柯尼希引理即可证明该断言。根据 [13, 定理 3] 的证明，弱柯尼希引理又可在 EL+有限反例原理+Π^0_1–AC$^{0,0}_{\leq 1}$ 中证明。有限反例原理可由 Π^0_1-排中律直接推出，因而——先验地——也可由 Σ^0_1-排中律推出。综上，定理的断言得证。

2) 我们改进了 [17, 定理 4.4(2)], 的证明。该定理在经典逻辑下表明，正则性模数的存在性意味着 $[0,1]$ 中有理数有界单调序列的收敛（因此，根据 [24, 定理 III.2.2]，也意味着算术理解 ACA_0 ）。由此可得，直觉主义地，正则性的 ε/δ-形式意味着有界单调序列具有柯西性质；已知在 EL 上，这会推出Σ^0_1-排中律（见 [25, 定理 2.(ii)], ，该定理又引用了 [29, 5.4.4], 和较新的 [7]）。设 (a_n) 是 $[0,1]$ 中的有理数非递减序列，且 f、T : $[0,1]\to[0,1]$ 如 [17, 定理 4.4(2)] 的证明中定义的那样是非扩张映射，并令 $x_n := T^n 0$. 。现在假设 Lipschitz-2 函数 F : $[0,1]\to\mathbb{R}$，F(x) := |x − T x| 是∀ε∃δ-正则的，并注意到 $1\in$F 的零点集 $\neq$/0。由于 (x_n) 关于 F 的零点集 =Fix(T) 是 Fejér 单调的，且渐近正则，即 $|x_n - T x_n|\to 0$，实际上其收敛速率为 n + 3 （见 [17, 定理 4.4(2)]的证明），因此 (x_n) 是柯西序列：固定 k $\in\mathbb{N}$，根据 ∀ε∃δ-正则性取 n $\in\mathbb{N}$，使得对所有

$$\forall x\in[0,1]\left(|x-Tx|<2^{-n}\to\exists p\in Fix(T)(|p-x|<2^{-k-1})\right).$$

于是 $|x_{n+3}-p|<2^{-k-1}$，其中某个 p $\in$Fix(T)，因此根据 (x_n) 的费耶尔单调性´

$$\forall m\geq n+3(|x_m-p|<2^{-k-1})$$

这就意味着——由于 k 是任意的——

$$(*)\ \forall k\in\mathbb{N}\exists n\forall m,\tilde{m}\geq n(|x_m-x_{\tilde{m}}|<2^{-k}).$$

再次固定 k $\in\mathbb{N}$，并取满足 (∗) 的 n_k。对于 C $\in\mathbb{N}$，定义 n_C:=max{n_k, k +C +3}.。于是

$$|x_{n_C}-Tx_{n_C}|<2^{-k-C}$$

因此——根据 T (x) $=\frac{1}{2}$(x +f (x))——

$$|x_{n_C}-f(x_{n_C})|<2^{-k-C+1}$$

这又根据用于定义 f 的 f_n-定义，意味着

$$\forall l\leq C(a_l<x_{n_C}+2^{-k})$$

因此——由于 $n_C\geq n_k$ ——

$$\forall l\leq C(a_l<x_{n_k}+2^{-k+1}).$$

由于 C ∈ℕ 是任意的，我们得到

$$(**)\ \forall l \in \mathbb{N}\,(a_l < x_{n_k} + 2^{-k+1}).$$

令 $l_k \in \mathbb{N}$ 足够大，使得 $2^{-l_k} \cdot n_k < 2^{-k}$.。于是——按照 [17], 第 383 页第 3–7 行的推理——

$$(***)\ a_{l_k} \geq x_{n_k} - 2^{-k}.$$

事实上，假设 $a_{l_k} < x_{n_k} - 2^{-k}$，因此——由于 (a_n) 是非递减的

$$\forall l \leq l_k\,(a_l < x_{n_k} - 2^{-k}).$$

对 n 作归纳，我们证明

$$(+)\ \forall n \in \mathbb{N}\,(x_n \leq x_{n_k} - 2^{-k} + n \cdot 2^{-l_k}):$$

$x_0 = 0 \leq a_0 \leq x_{n_k} - 2^{-k}$.。归纳步骤（利用 x_n、$a_l \leq 1$）：

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \tfrac{1}{2}\left(x_n + \sum_{l=0}^{\infty} 2^{-l-1} \max\{x_n, a_l\}\right) \\ &\overset{\text{I.H., assumption}}{\leq} \tfrac{1}{2}\left(x_{n_k} - 2^{-k} + n \cdot 2^{-l_k} + (x_{n_k} - 2^{-k} + n \cdot 2^{-l_k}) \sum_{l=0}^{\infty} 2^{-l-1} + \sum_{l=l_k+1}^{\infty} 2^{-l-1}\right) \\ &= x_{n_k} - 2^{-k} + n \cdot 2^{-l_k} + \tfrac{1}{2} 2^{-l_k-1} < x_{n_k} - 2^{-k} + (n+1) \cdot 2^{-l_k}. \end{aligned}$$

将 (+) 应用于 n：$=n_k$，得到

$$x_{n_k} \leq x_{n_k} - 2^{-k} + n_k \cdot 2^{-l_k} < x_{n_k}$$

这导致矛盾，因此证明了（$***$）。

So b由（$**$）和（$***$）共同可知（再次利用（a_n）是非递减的），我们已经证明了 t

$$\forall l \geq l_k \left(a_l \in [x_{n_k} - 2^{-k}, x_{n_k} + 2^{-k+1}]\right)$$

这说明（a_n）是一个柯西序列。 □

正如在 [17], 中使用经典逻辑（以及弱柯尼希引理）所示， Σ^0_1-IA 足以在紧情形下证明 ε/δ-正则性。然而，随后证明似乎需要 Σ^0_2-DNE

$$\forall f\,(\neg\neg\exists n \forall k\,(f(n,k) = 0) \to \exists n \forall k\,(f(n,k) = 0))$$

为将后一个原理弱化为 Σ^0_1-LEM，显然需要稍强的归纳，以建立有界 Σ^0_1-概括公理原理

$$\Sigma^0_1\text{-BCA}:\ \forall f, k \exists \sigma\ (lth(\sigma) = k \wedge \forall i < k\,((\sigma)_i = 0 \leftrightarrow \exists n\,(f(i,n) = 0)))$$

该原理在 [23] 中以 AS^{Σ}_1 的名称引入，并在 [7]中以此名称进行研究。因此，这种情形类似于 $[0,1]$中有界单调序列的柯西性质：该性质在 [12]和 [25] 中以 PCM_{ar} 的名称、在 [7]中以 MCT^{-} 的名称进行研究： Σ^0_1-BCA 在限制为无量词归纳法的 EL 上蕴含 Σ^0_1-LEM 和 Σ^0_1-IA（甚至蕴含于更弱的系统；见 [7]），而 Σ^0_1-LEM 和 IA 又蕴含它；这足以证明定理 2.11.1），但目前尚不清楚在这里是否可以将 IA 弱化为 Σ^0_1-IA。当然，这并不令人意外，因为——正如定理 2.11.2）的证明所示——度量正则性在直觉主义地意义下蕴含 PCM_{ar} （实数序列的情形可以利用有理数逼近，按照 [12,命题 5.2(1)]的证明，轻易化归为有理数的情形）。

致谢：作者感谢 Pedro Pinto 和 Nicholas Pischke 提出的意见，这些意见改进了本文的表述。

The 作者获德国科学基金会（DFG 项目 KO 1737/6-2）资助 .

参考文献

[1] Y. Akama、S. Berardi、S. Hayashi 和 U. Kohlenbach（2004）：排中律及相关原理的算术层次结构。载于 H. Ganzinger 编：《第19届 IEEE 计算机学会逻辑与计算机科学研讨会论文集（LICS 2004）》，IEEE计算机学会出版社，第192–201页，doi:10.1109/LICS.2004. 1319613。[2] F. Aschieri 和 S. Berardi（2010）：海廷算术中带有 EM_1 的基于交互学习的可实现性。《逻辑与计算机科学》6，第1–22页，doi:10.2168/LMCS-6(3:19)2010。[3] S. Berardi 和 S. Steila（2014）：作为直觉主义算术中经典原理的成对拉姆齐定理。载于 R. Matthes 和 A. Schubert 编：《第19届证明与程序类型国际会议，TYPES 2013》。LIPIcs，第26卷，Schloss Dagstuhl-Leibniz 信息学中心，第64–83页，doi:10.4230/ LIPIcs.TYPES.2013.64。[4] S. Berardi 和 S. Steila（2017）：成对拉姆齐定理及 k 种颜色作为算术的亚经典原理。《符号逻辑杂志》82，第737–753页，doi:10.1017/jsl.2016.41。[5] F. Ferreira、L. Leustean 和 P. Pinto（2019）：论在证明挖掘中去除弱紧致性论证。《数学进展》354，doi:10.1016/j.aim.2019.106728。共55页。[6] A. Genel 和 J. Lindenstrauss（1975）：一个关于不动点的例子。《以色列数学杂志》22，第81–86页，doi:10.1007/BF02757276。[7] H. Ishihara 和 T. Nemoto（2019）：构造性逆向数学中的单调完备性定理。载于 S. Centrone 等编：《普遍数学、可计算性与证明》。Synthese Library 412，第8章，Springer Nature Switzerland AG，第101–112页，doi:10.1007/978-3-030-20447-1_8。[8] S. C. Kleene（1959）：有限类型的递归泛函与量词，第一部分。《美国数学会汇刊》91，第1–52页，doi:10.2307/1993145。[9] U. Kohlenbach（1993）：从非有效唯一性证明中获得有效模。对德拉瓦莱·普桑切比雪夫逼近证明的展开。《纯粹与应用逻辑年刊》64，第27–94页，doi:10. 1016/0168-0072(93)90213-W。[10] U. Kohlenbach（1996）：具有低增长率的可证明递归泛函的数学上强的分析子系统。《数学逻辑文档》36，第31–71页，doi:10.1007/s001530050055。[11] U. Kohlenbach（1998）：论概括公理、选择和一般一致有界性的受限形式的算术内容。《纯粹与应用逻辑年刊》95，第257–285页，doi:10.1016/S0168-0072(98)00018-9。[12] U. Kohlenbach（2000）：原始递归算术中能做与不能做的事情。《纯粹与应用逻辑年刊》102，第223–245页，doi:10.1016/S0168-0072(99)00036-6。[13] U. Kohlenbach（2001）：直觉主义选择与受限经典逻辑。《数学逻辑季刊》47，第455–460页，doi:10.1002/1521-3870(200111)47:4<455::AID-MALQ455>3.0.CO;2-%23。[14] U. Kohlenbach（2005）：若干逻辑元定理及其在泛函分析中的应用。《美国数学会汇刊》357，第89–128页，doi:10.1090/S0002-9947-04-03515-9。[15] U. Kohlenbach（2006）：针对抽象度量空间和双曲空间的逻辑一致有界原理。《理论计算机科学电子札记》165，第81–93页，doi:10.1016/j.entcs.2006.05.038。WoLLIC 2006 会议论文集。[16] U. Kohlenbach（2008）：《应用证明论：证明解释及其在数学中的应用》。Springer数学专著，施普林格出版社。[17] U. Kohlenbach（2019）：论正则性模与唯一性模的逆向数学和魏劳赫复杂性。《可计算性》8，第377–387页，doi:10.3233/COM-180097。[18]U. Kohlenbach（2021）：证明论一致有界性、有界收集原理与海涅-博雷尔紧致性。《数学逻辑文档》60，第995–1003页，doi:10.1007/ s00153-021-00771-w。

[19] U. Kohlenbach & L. Leus¸tean（2003）：双曲空间中方向非扩张映射的 Mann迭代。分析与应用分析2003，页码 449–477，doi:10.1155/S1085337503212021。[20] U. Kohlenbach, L. Leus¸tean & A. Nicolae（2018）：关于 Fej´er 单调序列的定量结果。《当代数学通讯》20，doi:10.1142/S0219199717500158。共 42 页。[21] U. Kohlenbach, G. L´opez-Acedo & A. Nicolae（2019）：Fej´er 单调序列的正则性模与收敛速率。《以色列数学杂志》232，页码 261–297，doi:10.1007/ s11856-019-1870-x。[22] U. Kohlenbach & P. Pinto（2025）：重新探讨 Fej´er 单调序列。《凸分析杂志》。即将出版。[23] C. Parsons（1970）：论一种数论选择图式及其与归纳的关系。载于 A. Kino、J. Myhill & R.E. Vesley 编：《直觉主义与证明论：1968 年于纽约州布法罗举行的暑期会议论文集》，North-Holland（阿姆斯特丹），页码 459–473，doi:10.1016/S0049-237X(08)70771-7。[24] S.G. Simpson（2009）：《二阶算术子系统》。第 2 版。数学逻辑 ASL 展望丛书，剑桥大学出版社。[25] M. Toftdal（2004）：以 HA 上一系列半经典逻辑原则为标尺，对非能行数学定理进行分级。载于 J. Diaz 等编：《自动机、语言与程序设计：ICALP 2004 论文集》，Springer Lecture LNCS 3142，Springer-Verlag（柏林），页码 1188–1200，doi:10.1007/978-3-540-27836-8_98。[26] A.S. Troelstra 编（1973）：《直觉主义算术与分析的元数学研究》。Springer 数学讲义第 344 卷，Springer-Verlag（柏林），doi:10.1007/BFb0066739。[27] A.S. Troelstra（1974）：关于扇定理的注记。《符号逻辑杂志》39，页码 584–596，doi:10.2307/2272902。[28] A.S. Troelstra（1977）：直觉主义有限型算术的一些带有扇函数的模型。《符号逻辑杂志》42，页码 194–202，doi:10.2307/2272120。[29] A.S. Troelstra & D. van Dalen（1988）：《数学中的构造主义》，第一卷。《逻辑与数学基础研究》，第 121 卷，North-Holland（阿姆斯特丹）。