交类型的主类型：四十五年后

Daniele Pautasso都灵大学
daniele.pautasso@unito.it

Simona Ronchi DellaRocca都灵大学 ronchi@di.unito.it

谨以此文献给 Stefano Berardi，他为计算问题带来了清晰而富有启发性的逻辑之光。

如果一个 λ-演算的类型指派系统具有主类型指派性质，那么每个可定型项 M 都有一种特殊的定型，称为主定型，M 的所有定型都可以通过适当的操作从它导出。长期以来，人们通过语义和语法两种途径，确立了各种交类型体系中主定型的存在性。在语法研究方面，证明这一性质以及描述计算主定型的类型推断（半）算法，历来因许多微妙的技术细节而复杂难懂；本文旨在提供一种更易理解的表述。为此，我们重新审视若干经典概念，并指出三种基本操作（替换、扩展、擦除），借助它们可以构造刻画头正规化的系统中的任意类型推导。随后，我们利用这些操作设计一种推断半算法，为且仅为所有强正规化项计算其主定型，从而以现代视角重新审视四十多年前最初证明的结果。

1 引言

主类型的概念由 Hindley 于 [17], 提出，并于 [18], 在 λ-演算[1]的简单类型指派框架下进一步发展。 λ-项 M 的主类型是可推导出的最一般类型，也就是说，可以赋给 M 的所有类型都能通过替换从主类型得到。Hindley 证明，所有可简单定型的项都有主类型，而且（主）可定型性问题是可判定的：事实上，简单类型推断可视为 Robinson 经典合一问题 [29]的一个实例。Ben-Yelles 将这些思想用于设计其主类型推断算法 [5],，该算法后来为 Damas 和 Milner 开发的 ML编程语言中的类型指派过程奠定了基础 [15]。

交类型体系中的主定型存在性也曾受到研究。交类型由 Coppo 和 Dezani 开创 [13], ，通过为项赋予多个（传统上是一组）类型，增强了简单类型的可定型性。交类型系统可以被设计为刻画 λ-项的语义类别，例如（头）归一化项和强归一化项，并以有限方式描述 λ-演算的模型 [4]。由于交类型可定型性与项归一化之间联系紧密，此类系统中的可定型性问题通常不可判定；尽管如此，Coppo、Dezani 和 Venneri 提出了一种交类型系统，其中包含一种类似于主类型的概念 [14]。在该系统中，对于每个可定型项 M，都可以确定一个主对 (Γ, A)，使得对于每个可推导的类型判断 $\Gamma' \vdash M : A'$，都可以通过替换以及一系列称为扩展的操作，从 (Γ, A) 得到该对 (Γ′, A′)。

[1]确切地说，是针对组合逻辑。

T. Altenkirch、F. Barbanera、F. Damiani 和 U. de'Liguoro（编）：《逻辑与类型论：纪念 Stefano Berardi 64 岁生日论文集》，
EPTCS441，2026 年，第 227–250 页，doi:10.4204/EPTCS.441.14

© D. Pautasso & S. Ronchi DellaRocca 本作品采用知识共享署名许可协议授权。

这种额外操作（在其最初的表述中相当技术化）的必要性，可以通过以下直观观察来说明：在简单类型赋值系统中，给定项的所有类型推导都具有相同的树结构，彼此之间的差异仅在于各节点上的类型；相反，在交类型系统中，同一项的推导既可能在上述意义上有所不同，其推导结构也可能不同。因此，替换用于匹配推导中各节点的类型，而扩展则用于调整其树结构：从与 (Γ, A) 对应的推导出发，该推导呈现最小结构，扩展会引入额外的子推导，从而得到与 (Γ', A') 对应的更复杂结构。总而言之，对偶进行扩展可以理解为对整个推导所作结构变化在结论上的投影。

前面已经提到的 [14] 考虑这样一个系统：交被视为非幂等联结词，并且类型在 [2], 的意义上是严格的，即不允许交出现在箭头的右侧。Ronchi Della Rocca与Venneri将主对的概念推广到一个系统，其中交是幂等的，类型并非严格的，并且它们带有预序关系 [31]。该系统描述了 λ-演算的滤子模型，而预序刻画了模型元素之间的函数包含；在这一设定下，从主对生成所有对需要三种运算，即替换、扩展和上升，其中上升处理预序关系。尽管存在差异， [14] 与 [31] 的系统具有相同的可定型性能力，即它们都刻画头正规化（见 [2]）；因此，为使表述尽可能简单，本文选择严格系统。

两者都利用了相关系统具有近似定理这一事实来实现各自的目标：一个项可以被赋予且仅能被赋予其近似项可被赋予的类型；其中，近似项是扩展了常量 $\bot$ 及其相关归约规则的 λ 演算中的范式。Ronchi Della Rocca 随后给出了第一个类型推断半算法，能够计算所有且仅有强正规化项的主对 [30]。此后，多位作者研究了交类型推断与项归约之间的相似性 [25, 11, 8, 7]。

交类型主要用于语义用途；不过，为了寻求更实际的应用，人们提出了若干可定型性问题可判定的限制。许多此类限制都基于秩的概念 [22], ，直观而言，秩衡量的是交连接词在类型中的嵌套程度。值得注意的是，Kfoury 和 Wells 证明，所有有限秩限制下的可定型性问题都是可判定的 [20]。为了以纯句法的方式证明这一结果，他们重新表述了原始的扩展概念，并将其与推导结构联系起来：他们在类型语法中加入所谓的扩展变量，即指向可由扩展修改的子类型的指针 [21, 10, 12]。在我们的工作中，约束系统发挥了类似作用；尽管它不够灵活，却避免了处理扩展变量所需的一些繁琐操作。

近期讨论非幂等交类型系统中主定型的贡献包括 [6], [9] 和 [1]。与这些以较为边缘的方式处理该主题的工作相比，我们更深入地探讨交类型推断的算法方面。

贡献。本文为交类型系统中的主类型提供一种句法方法。首先，我们引入伪推导，以及作用于其上的三种运算（替换、扩展、擦除），并证明这些概念相对于刻画头正规化的系统中的可定型性是正确且完备的，即它们可用于构造任意类型推导。其次，我们运用这些要素设计一种推断半算法，用以计算输入项在刻画强规范化的子系统中的主类型。我们将本工作定位为对早已确立的结果的一种有望更易理解的表述，旨在为主定型提供平易的导论，并解释构造它们所需的基本运算。为此，我们

精简若干经典概念，尤其是扩展这一概念，并进一步强调我们的算法所执行的运算与项归约之间的平行关系。

论文结构。本文的结构安排如下：

第 2 节。 λ-演算与交类型赋值系统 $\mathscr{N}$和 $\mathscr{N}_{\mathsf{S}}$的预备知识。

第 3 节。伪推导的定义，以及扩展和擦除操作。这些概念相对于 $\mathscr{N}$和 $\mathscr{N}_{\mathsf{S}}$ 中的可定型性的正确性与完备性（定理14、16和19）。

第 4 节。为 $\mathscr{N}_{\mathsf{S}}$设计类型推断半算法。分析该过程的终止性质（定理30）；所找到的解的唯一性与主性（定理33和34）。

第 5 节。结论与最后的注记。

2 预备知识

λ-演算。 λ-演算的项和项上下文由以下文法生成：

$$M,N \;::=\; x \mid \lambda x.M \mid MN \qquad\qquad \mathtt{C} \;::=\; \Box \mid \lambda x.\mathtt{C} \mid \mathtt{C}M \mid M\mathtt{C}$$

其中，x 取遍一个可数的项变量集合。抽象 λx.M 在 M 中绑定 x；记号 FV(M) 表示 M 的自由变量集合。我们假定变量满足卫生条件：自由变量与绑定变量具有不同的名称，由不同绑定子绑定的变量亦然。给定上下文 C 和项 M，记号 C[M] 表示将 C 中唯一出现的洞□ 替换为 M 所得的项，该替换可能捕获 M 的自由变量。

β归约（记为 $\to_\beta$）是如下重写规则的上下文闭包：

$$(\lambda x.M)N \mapsto_\beta M[N/x]$$

其中，$\mathrm{M}[\mathrm{N}/\mathrm{x}]$ 表示在 M 中将 x 无捕获替换为 N。形如 (λx.M)N 的项称为 β可归约式。此类 β可归约式根据变量 x 是否在 M 中自由出现，划分为 I重定向和 K重定向。相应地，我们将β归约的非擦除部分和擦除部分分别称为 I归约和 K归约。

给定一个二元归约关系 $\to_r$，我们用 $\to_r^+$ 表示它的传递闭包，用 $\to_r^*$ 表示它的自反传递闭包。如果一个项不含 r 可归约式，则称其为 r范式；如果一个项可以归约到某个 r范式，则称其为 r正规化；如果从一个项出发的每个 r归约序列最终都会停止，则称该项为强r正规化。

β-范式项和头部 β-范式项分别由以下文法生成（注意，任何范式都是头部范式）：

$$K \;::=\; \lambda x.K \;\mid\; xK_1 \ldots K_n \qquad\qquad H \;::=\; \lambda x.H \;\mid\; xM_1 \ldots M_n \qquad\qquad (n \geq 0)$$

头部范式的概念是（按名称调用） λ-演算中可解性概念的句法对应物：当且仅当存在一个形如（$\lambda \mathrm{x}_1 \ldots \mathrm{x}_n.\Box$）$\mathrm{M}_1 \ldots \mathrm{M}_m$的头部上下文 C，使得 C[M] 归约为一个完全确定的结果时，项 M 才是可解的；传统上，该结果是恒等函数，即 $\mathrm{C}[\mathrm{M}] \to_\beta^* \lambda \mathrm{x}.\mathrm{x}$ [32]。可解项可以被视为能够产生某些信息的“有意义”项，即使它们可能无法归一化。

交类型。下面简要回顾一种基于多重集概念的非幂等交类型赋值系统。多重集（记作 μ,ν）是元素的无序列表；我们用 $|\mu|$表示多重集 μ的基数，用 $\uplus$表示计入重数的多重集并。

定义 1. 交类型集合 T 由以下文法定义：

$$\begin{array}{lllll} \textsc{Intersection Types} & A,B & ::= & a \mid \mu \to A & \\ \textsc{Multisets} & \mu,\nu & ::= & [A_1,\ldots,A_n] & (n \geq 0) \end{array}$$

其中，a 取自类型变量的可数集合 V。

类型环境是从项变量到多重集的全函数，且只有有限个变量被映射到空多重集以外的值。环境记作 Γ、Δ。环境的定义域为 $\mathrm{dom}(\Gamma) = \{x \mid \Gamma(x) \neq []\}$；环境的并定义为 $(\Gamma \uplus \Delta)(x) = \Gamma(x) \uplus \Delta(x)$；当 Γ 和 Δ 的定义域不相交时，可将其简写为 Γ, Δ；而 $\Gamma, x:\mu$ 是这种记法的特例。$\Gamma \setminus x$ 表示满足 $(\Gamma \setminus x)(x) = []$ 且对于每个 $y \neq x$，均有 $(\Gamma \setminus x)(y) = \Gamma(y)$ 的环境。为方便起见，写作 $\Gamma, x:[]$ 时，视为与 Γ 相同。

定义 2。交类型赋值系统 $\mathscr{N}$ 将类型（的多重集）赋给 λ-项，由以下规则组成：

$$\frac{}{x:[A] \vdash x:A}\ \textsf{var} \qquad \frac{\Gamma \vdash M:A}{\Gamma \setminus x \vdash \lambda x.M : \Gamma(x) \to A}\ \textsf{abs}$$

$$\frac{(\Gamma_i \vdash M:A_i)_{i=1}^n \quad n \geq 0}{\uplus_{i=1}^n \Gamma_i \vdash M : [A_1,\ldots,A_n]}\ \textsf{many} \qquad \frac{\Gamma \vdash M:\mu \to A \quad \Delta \vdash N:\mu}{\Gamma \uplus \Delta \vdash MN : A}\ \textsf{app}$$

类型推导记作 Π、Σ。我们将 $\Gamma \vdash M:A$ 简写为存在一个证明 $\Gamma \vdash M:A$ 的推导；若要以此结论命名一个推导，则记作 $\Pi \triangleright \Gamma \vdash M:A$。

我们还引入强系统 $\mathscr{N}_s$，它是 $\mathscr{N}$ 的一个限制，不允许包含空多重集的类型。为区分两个系统中的推导，$\mathscr{N}_s$ 中的类型判断记作 $\Gamma \vdash_s M:A$。集合 $T_s \subset T$ 是通过在定义 1 中施加 $n \geq 1$ 得到的；系统 $\mathscr{N}_s$ 则是通过在 many 规则中施加 $n \geq 1$，并将 abs 规则替换为以下两条规则，从定义 2 得到的：

$$\frac{\Gamma, x:\mu \vdash_s M:A \quad \mu \neq []}{\Gamma \vdash_s \lambda x.M : \mu \to A}\ \textsf{abs-I} \qquad \frac{\Gamma \vdash_s M:B \quad x \notin \mathrm{dom}(\Gamma) \quad A \in \mathbf{T_s}}{\Gamma \vdash_s \lambda x.M : [A] \to B}\ \textsf{abs-K}$$

系统 $\mathscr{N}$ 和 $\mathscr{N}_s$ 是相关的（即不允许不必要的弱化），并且分别与 [9] 的系统 $\mathscr{W}$ 和 $\mathscr{S}$ 重合；以下民间流传的性质也由此继承而来。

定理 3（主体归约／扩展）。设 $M \to_\beta N$。那么 $\Gamma \vdash M:A$ 当且仅当 $\Gamma \vdash N:A$。定理 4（刻画）。

- M 可 $\mathscr{N}$类型化，当且仅当它是头部 β归一化的。
- M 可 $\mathscr{N}_s$类型化，当且仅当它是强 β归一化的。

注 1。在强系统 $\mathscr{N}_s$ 中，主体归约和主体扩展都不成立。主体归约之所以不成立，是由于该系统的相关性；添加弱化规则即可弥补这一点。请注意，较弱的性质仍然成立：若 M 是 $\mathscr{N}_s$可定型的，且 $M \to_\beta N$，则 N 也是 $\mathscr{N}_s$可定型的，不过其定型可能不同。例如，考虑推导 $x:[a,b] \vdash_s (\lambda y.x)x : a$。尽管 $x:[a,b] \vdash_s x:a$ 不可推导，但可以推导出 $x:[a] \vdash_s x:a$。至于主体扩展，只有在相对于特定的归约概念（即保持强规范化的归约）考察扩展时，$\mathscr{N}_s$可定型性才得以保留（其定型可能不同）。不受限制的 β归约不属于此类，因为其中包含擦除性的 K归约步骤。例如，考虑 $(\lambda y.x)(\delta\delta) \to_\beta x$，其中 $\delta = (\lambda z.zz)$。显然，x 是 $\mathscr{N}_s$可定型的，但 $(\lambda y.x)(\delta\delta)$ 不可定型，因为 $\delta\delta$只能用空多重集定型。

$$\frac{}{\Pi \triangleright x : \langle \mathtt{a} \rangle \vdash_{\mathrm{p}} x : \mathtt{a}}\ \mathsf{var} \qquad E_\Pi = \emptyset$$

$$\frac{\Sigma \triangleright \Gamma \vdash_{\mathrm{p}} M : \mathtt{a} \quad \mathtt{b}\ \text{fresh}}{\Pi \triangleright \Gamma \setminus x \vdash_{\mathrm{p}} \lambda x.M : \mathtt{b}}\ \mathsf{abs} \qquad E_\Pi = E_\Sigma \cup \{\mathtt{b} \doteq \Gamma(x) \to \mathtt{a}\}$$

$$\frac{(\Sigma_i \triangleright \Gamma_i \vdash_{\mathrm{p}} M : \mathtt{a}_i)_{i=1}^n \quad \forall i \neq j.\Sigma_i * \Sigma_j \quad n \geq 0}{\Pi \triangleright \Gamma_1 \cdot \ldots \cdot \Gamma_n \vdash_{\mathrm{p}} M : \langle \mathtt{a}_1, \ldots, \mathtt{a}_n \rangle}\ \mathsf{many} \qquad E_\Pi = \bigcup_{i=1}^n E_{\Sigma_i}$$

$$\frac{\Sigma_1 \triangleright \Gamma \vdash_{\mathrm{p}} M : \mathtt{a} \quad \Sigma_2 \triangleright \Delta \vdash_{\mathrm{p}} N : \langle \mathtt{b}_1, \ldots, \mathtt{b}_n \rangle \quad \Sigma_1 * \Sigma_2 \quad \mathtt{c}\ \text{fresh}}{\Pi \triangleright \Gamma \cdot \Delta \vdash_{\mathrm{p}} MN : \mathtt{c}}\ \mathsf{app}$$
$$E_\Pi = E_{\Sigma_1} \cup E_{\Sigma_2} \cup \{\mathtt{a} \doteq \langle \mathtt{b}_1, \ldots, \mathtt{b}_n \rangle \to \mathtt{c}\}$$

图 1：系统 $\mathscr{N}$ 的伪推导规则。

3 迈向交类型推断

为了更好地探讨（非幂等）交类型系统，并大幅降低我们将在后续各节讨论的过程的复杂度，对多重集施加某种排序会很方便。形式上，我们需要交预类型这一概念。

交预类型（简称预类型）类似于交类型，唯一的区别在于多重集被列表所取代。σ、τ 取遍列表；我们用 |σ| 表示列表 σ 的长度，符号 · 表示列表拼接。预类型集合 $\mathrm{T_P}$ 定义如下：

Intersection Pre-types	A,B	::=	$\mathtt{a} \mid \sigma \to \mathtt{A}$
Lists	σ,τ	::=	$\langle \mathtt{A}_1, \ldots, \mathtt{A}_n \rangle \quad (n \geq 0)$

其中 a 取遍可数集 $\mathrm{V_P}$ 中的预类型变量。注记：预类型变量（记作 a）与类型变量（记作 a）之间的区分并无实质意义；采用两种不同记法只是为了在视觉上区分预类型与实际的交类型。

预类型环境是从项变量到列表的全函数，且仅有有限个变量不被映射到空列表。Γ、Δ 取遍前类型环境，且 $\mathrm{dom}(\Gamma) = \{x \mid \Gamma(x) \neq \langle\,\rangle\}$。前类型环境的并定义为 $(\Gamma \cdot \Delta)(x) = \Gamma(x) \cdot \Delta(x)$。我们将先前为类型环境引入的所有记法推广到前类型环境。

3.1 伪推导

伪推导是一棵判断树，为项赋予（预类型的）列表；每个伪推导 Π 都关联着一个预类型（列表）之间的方程集 $\mathrm{E_\Pi}$，它记录了将 Π 转化为实际推导所必须满足的全部且仅有的约束。由于可从 Π 恢复 $\mathrm{E_\Pi}$，我们有时会省略 $\mathrm{E_\Pi}$。此外，当 Π 的含义可由上下文明确时，我们可以用 E 代替 $\mathrm{E_\Pi}$，表示与 Π 关联的方程组。请注意，伪推导是在预类型变量重命名的意义下定义的，并且每条规则的前提都有顺序。

令 Var(A) 表示 A 中出现的预类型变量集。若 $\mathrm{Var(A)} \cap \mathrm{Var(B)} = /0$，则称 A 和 B 不相交（记作 $\mathrm{A} * \mathrm{B}$）。不相交性的概念以标准方式扩展到环境和推导。若对于推导 Π 中出现的每个 B，$\mathrm{A} * \mathrm{B}$，则称类型 A 相对于该推导是新鲜的。

定义 5（$\mathcal{N}$的伪推导）。

- M 的伪推导是一个对偶 $\mathrm{PD(M)} = (\Pi, \mathrm{E}_\Pi)$，其中 Π 是一棵判断树，为项赋予预类型变量（列表），而 E_Π 是与之关联的方程组，如图 1 所示。
- M 的最小伪推导是满足所有 many 规则中 $\mathrm{n} = 1$ 的 M 的伪推导。由于最小伪推导在预类型变量重命名意义下唯一，我们将其记为 $\mathrm{PD}^{\mathtt{min}}\mathrm{(M)}$。

接下来，我们将介绍一些概念，这些概念与求解预类型（列表）之间的方程集有关。符号 ϕ 表示替换 $\mathrm{V} \to \mathrm{T}$，而 ψ表示替换 $\mathrm{V_p} \to \mathrm{T_P}$；我们规定 $\mathrm{dom}(\psi) = \{\mathrm{a} \in \mathrm{V_p} \mid \psi(\mathrm{a}) \neq \mathrm{a}\}$，以及 $\mathrm{cod}(\psi) = \{\mathrm{A} \mid \mathrm{a} \in \mathrm{dom}(\psi)$ 且 $\psi(\mathrm{a}) = \mathrm{A}\}$。替换以标准方式扩展到类型（分别是预类型）、多重集（分别是列表）以及推导。

定义 6. 令 $\mathrm{t\,S} = \{\mathrm{A}_i \doteq \mathrm{B}_i \mid \mathrm{i} \in \mathrm{I}\} \cup \{\sigma_j \doteq \tau_j \mid \mathrm{j} \in \mathrm{J}\}$ 为一组前类型之间的方程（列表） es.

- ψ: $\mathrm{V_p} \to \mathrm{T_P}$ 可解 S，当且仅当对于所有 $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$，都有 $\psi(\mathrm{A}_i) = \psi(\mathrm{B}_i)$；对于所有 $\mathrm{j} \in \mathrm{J}$，都有 $\psi(\sigma_j) = \psi(\tau_j)$。

- 若满足以下条件，则称 S 为已解形式：– $\mathrm{J} = /0$，即不存在列表之间的方程；– 每个 A_i 都是一个变量 a_i，且所有变量 a_i 互不相同；– 左侧 a_i 不会出现在任何右侧 B_k中。

- 若 S 至少包含一个循环方程，即形如 $\mathrm{a} \doteq \mathrm{A}$ 的方程，且 a 出现在 $\mathrm{A} \neq \mathrm{a}$ 中，则称 S 为不可解形式。
- 若 S 至少包含一个受阻方程，即一个列表之间的方程 $\sigma \doteq \tau$，使得 $|\sigma| \neq |\tau|$，则称 S 为阻塞形式。

记号 7. 如果 $\mathrm{S} = \{\mathrm{a}_i \doteq \mathrm{B}_i \mid \mathrm{i} \in \mathrm{I}\}$ 处于已解形式，$\vec{\ }\mathrm{S}$ 表示解 S 的最一般替换（也称为 S 的最一般合一子），即 $\vec{\ }\mathrm{S}(\mathrm{a}_i) = \mathrm{B}_i$。

图 2 给出了用于尝试求解预类型（列表）之间的方程组的合一规则。记法 S[A/a] 表示将 S 中每个 a 都替换为 A 后得到的集合。

定义 8。

- $\mathrm{S} \to_u \mathrm{S}'$ 表示 S′ 是通过应用图 2 中的一条规则从 S 得到的。

若无法对方程集 S 应用任何规则，则称其处于 $\to_u$-范式。•

$$\frac{S \cup \{\mathtt{A} \doteq \mathtt{A}\}}{S}\ \mathit{erase} \qquad \frac{S \cup \{\sigma \to \mathtt{A} \doteq \mathtt{a}\}}{S \cup \{\mathtt{a} \doteq \sigma \to \mathtt{A}\}}\ \mathit{swap} \qquad \frac{S \cup \{\sigma \to \mathtt{A} \doteq \tau \to \mathtt{B}\}}{S \cup \{\sigma \doteq \tau\} \cup \{\mathtt{A} \doteq \mathtt{B}\}}\ \mathit{arrow}$$

$$\frac{S \cup \{\langle \mathtt{A}_1, \ldots, \mathtt{A}_n \rangle \doteq \langle \mathtt{B}_1, \ldots, \mathtt{B}_n \rangle\} \quad n \geq 0}{S \cup \{\mathtt{A}_i \doteq \mathtt{B}_i\}_{1 \leq i \leq n}}\ \mathit{list} \qquad \frac{S \cup \{\mathtt{a} \doteq \mathtt{A}\} \quad \mathtt{a} \notin \mathsf{Var}(\mathtt{A}) \quad \mathtt{a} \in \mathsf{Var}(S)}{S[\mathtt{A}/\mathtt{a}] \cup \{\mathtt{a} \doteq \mathtt{A}\}}\ \mathit{subs}$$

图 2：交预类型的合一规则。

以下性质 9 和 10 源于这样一个事实：图 2 中的规则是 Robinson合一规则 [29, 23], 在交预类型文法中的实例。特别地，记 $\mathrm{nf}_u(S)$ 为 S 的唯一 $\to_u$-范式，我们注意到 $\mathrm{nf}_u(S)$ 要么处于已解形式，要么处于不可解/阻塞形式（也可能同时不可解且阻塞）。

性质 9. $\to_u$ 是终止且合流的（模预类型变量重命名）。

性质 10. $\mathrm{nf}_u(S)$ 要么处于已解形式，要么处于不可解/阻塞形式。

3.2 扩展与擦除

对与伪推导相关联的方程集应用合一规则，可能会得到阻塞形式。为了处理这种情况，我们引入两种操作，称为扩展[2]和擦除。两者都会修改其所作用的伪推导的树结构：扩展会增加 many 规则的前提数量，而擦除则会减少前提数量。

定义 11（扩展、擦除）。设 (Π,E) 是一个伪推导。

- 扩展操作记作 Expand(σ, n)，有两个参数：一个列表 $\sigma \neq \langle\,\rangle$ 和一个自然数 $n \geq 1$。将 Expand(σ, n) 应用于 (Π, E) 的结果，简记为 Expand(σ, n Π)，是一个伪推导 (Π′,E′)，满足：
  - 如果 $\sigma = \langle a1, \ldots, a_m \rangle$ 和 Π 包含一条规则

$$\frac{(\Delta_i \vdash_{\mathrm{p}} N : a_i)_{i=1}^{m}}{\Delta_1 \cdot \ldots \cdot \Delta_m \vdash_{\mathrm{p}} N : \langle a_1, \ldots, a_m \rangle}\ \mathsf{many}$$

    那么 Π′ 具有与 Π相同的树结构，但根为上述 many规则的子树除外；该子树被替换为：

$$\frac{(\Sigma_i \triangleright \Gamma_i \vdash_{\mathrm{p}} N : a_i)_{i=1}^{m+n}}{\Gamma_1 \cdot \ldots \cdot \Gamma_{m+n} \vdash_{\mathrm{p}} N : \langle a_1, \ldots, a_m, \ldots, a_{m+n} \rangle}\ \mathsf{many}$$

    其中 $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_{m+n}$ 是 $\mathrm{PD}^{\mathrm{min}}(N)$ 的新鲜且互不相交的副本。
  - 否则，如果不存在这样的规则，则 $\Pi' = \Pi$。
- 擦除操作记作 Erase(σ, n)，有两个参数：一个列表 $\sigma \neq \langle\,\rangle$ 和一个自然数 $n \geq 1$。将 Erase(σ, n) 应用于 (Π, E) 的结果，简记为 Erase(σ, n Π)，是一个伪推导 (Π′, E′)，满足：
  - 如果 $\sigma = \langle a1, \ldots, a_m \rangle$，并且（如上一点所述） Π 包含一个结论为 $\Delta_1 \cdot \ldots \cdot \Delta_m \vdash_{\mathrm{p}} N : \langle a1, \ldots, a_m \rangle$ 的 many规则，那么 Π′ 与 Π具有相同的树结构，但根节点为上述 many规则的子树除外；该子树将替换为：

$$\frac{(\Sigma_i \triangleright \Gamma_i \vdash_{\mathrm{p}} N : a_i)_{i=1}^{m-n}}{\Gamma_1 \cdot \ldots \cdot \Gamma_{m-n} \vdash_{\mathrm{p}} N : \langle a_1, \ldots, a_{m-n} \rangle}\ \mathsf{many}$$

    其中 $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_{m-n}$ 是 $\mathrm{PD}^{\mathrm{min}}(N)$ 的新鲜互不相交副本。若 $m \leq n$，则所得的 many规则以 $\vdash_{\mathrm{p}} N : \langle\,\rangle$ 为结论。– 否则，若不存在这样的规则，则 $\Pi' = \Pi$。

[2]不要将其与 主体扩展混淆。这个名称是出于历史原因而选用的，相关原因将在引言中讨论 n.

容易验证，上述定义 11 是良定义的，也就是说，对于每个伪推导 PD(M) $=(\Pi,E)$、自然数 $n \geq 1$ 和列表 $\sigma \neq \langle\,\rangle$，Expand($\sigma$, n Π) 和 Erase(σ, n Π) 都是 M 的伪推导。得益于扩展和擦除操作，可将可解性的概念扩展到伪推导。

定义 12. 设 (Π, E) 是一个伪推导。(Π, E) 的一个解是一个对 $(\bar{e}\ \psi)$，其中 $\bar{e}$ 是由扩展和擦除组成的序列，使得 $\bar{e}(\Pi,E) = (\Pi',E')$，且 $\psi : V_p \to T_P$ 是 E' 的一个解。

请注意，任意扩展和擦除都不能保持伪推导的可解性，例 13 展示了这一点。这启示了我们将在类型推断算法中遵循的一项设计原则（见后文第 4 节）：对伪推导结构的修改应始终以与之关联的方程组为指导。

例 13. 设 $M = (\lambda x.x)y$。那么 $PD^{min}(M) = (\Pi,E)$，其中 Π 为：

$$\dfrac{\dfrac{x : \langle a\rangle \vdash_p x : a}{\vdash_p \lambda x.x : b} \quad \dfrac{y : \langle c\rangle \vdash_p y : c}{y : \langle c\rangle \vdash_p y : \langle c\rangle}}{\Pi \rhd y : \langle c\rangle \vdash_p (\lambda x.x)y : d}$$

且 $E = \{b \doteq \langle a\rangle \to a, b = \langle c\rangle \to d\}$。集合 E 可化简为 $\{b \doteq \langle a\rangle \to a, c \doteq a, d \doteq a\}$，这是已解形式。现在考虑以下两种情形：

- 令 Expand($\langle c\rangle$, 1, Π) $= (\Pi', E')$，其中 Π' 为：

$$\dfrac{\dfrac{x : \langle a\rangle \vdash_p x : a}{\vdash_p \lambda x.x : b} \quad \dfrac{y : \langle c\rangle \vdash_p y : c \quad y : \langle c'\rangle \vdash_p y : c'}{y : \langle c, c'\rangle \vdash_p y : \langle c, c'\rangle}}{\Pi' \rhd y : \langle c, c'\rangle \vdash_p (\lambda x.x)y : d}$$

  并且 $E' = \{b \doteq \langle a\rangle \to a, b = \langle c, c'\rangle \to d\}$。$E'$ 归约为 $\{b \doteq \langle a\rangle \to a, d \doteq a\ \langle a\rangle \doteq \langle c, c'\rangle\}$，这属于阻塞形式。但扩展无法消除这个阻塞，因为 $\langle a\rangle$ 不会出现在 many 规则的结论中，因此 Expand($\langle a\rangle$, 1, Π') $= (\Pi', E')$。只有执行 Erase($\langle c, c'\rangle$, 1, Π') 才能解除阻塞。

- 令 Erase($\langle c\rangle$, 1, Π) $= (\Pi', E')$，其中 Π' 为：

$$\dfrac{\dfrac{x : \langle a\rangle \vdash_p x : a}{\vdash_p \lambda x.x : b} \quad \vdash_p y : \langle\,\rangle}{\Pi' \rhd \vdash_p (\lambda x.x)y : d}$$

  并且 $E' = \{b \doteq \langle a\rangle \to a, b = \langle\,\rangle \to d\}$。$E'$ 归约为 $\{b \doteq \langle a\rangle \to a, d \doteq a\ \langle a\rangle \doteq \langle\,\rangle\}$，它既不能通过扩展也不能通过擦除解除阻塞，因为 Erase($\langle a\rangle$, 1, Π') $= (\Pi', E')$。

3.3 正确性和完备性

本节将证明，（最小）伪推导这一概念以及扩展、擦除和替换操作，对于系统 $\mathscr{N}$ 中的可定型性而言是正确且完备的。这保证了这些基本要素适用于在所关注的系统中寻找（主）类型。

为了将预类型转换为实际的交类型，我们定义以下两个互递归函数，它们的定义域分别是预类型和列表（为简便起见，我们对两者都使用符号 m）：

$$m(a) = a \qquad m(\sigma \to A) = m(\sigma) \to m(A) \qquad m(\langle A_1, \ldots, A_n\rangle) = [m(A_1), \ldots, m(A_n)]$$

其中，我们假设 m 在预类型变量上是单射。函数 m 按照标准方式扩展到预类型环境和推导。

利用 m，我们首先证明：从伪推导的任意一个解出发，可以得到系统 $\mathscr{N}$ 中的一族无穷推导。

定理 14（正确性）。设 PD(M) $=(\Pi,E)$ 为伪推导，$(\bar{e}\psi)$ 为 (Π,E) 的解，且 $\bar{e}(\Pi) \triangleright \Gamma \vdash_p M : a$。则对所有 $\phi : V \to T$，有 $\phi \circ m \circ \psi \circ \bar{e}(\Pi) \triangleright \phi \circ m \circ \psi(\Gamma) \vdash M : \phi \circ m \circ \psi(a)$。

证明。$m \circ \psi \circ \bar{e}(\Pi) \triangleright m \circ \psi(\Gamma) \vdash M : m \circ \psi(a)$ 这一事实来自定义 12。由于推导在类型变量的替换下是封闭的，结论随之成立。 □

其次，我们证明，在系统 $\mathscr{N}$ 中，项 M 的所有推导都可以从最小伪推导 $PD^{min}(M)$ 出发得到。该性质的证明分为两步：引理 15 的第一部分表明，任何伪推导都可以通过适当的擦除与扩展序列从最小伪推导得到；第二部分则指出，任何推导 Σ 都可以通过替换从一个与 Σ 具有相同结构的伪推导 Π 得到。

引理 15。

1. 设 PD(M) $=(\Pi, E)$ 且 $PD^{min}(M) = (\Pi_M, E_M)$。那么，存在一个由扩展与擦除构成的序列 $\bar{e}$，使得 $(\Pi, E) = \bar{e}(\Pi_M, E_M)$。2. 设 $\Sigma \triangleright \Gamma \vdash M : A$。那么，存在一个伪推导 PD(M) $=(\Pi, E)$ 和一个替换 ψ，使得 ψ 解 E 且 $\Sigma = m \circ \psi(\Pi)$。

证明。见附录 A。 □

定理 16（完备性）。设 $\Sigma \triangleright \Gamma \vdash M : A$ 且 $PD^{min}(M) = (\Pi_M, E_M)$。那么存在 $(\bar{e}\psi)$ 的一个解，使得 (Π_M, E_M) 的 $\Sigma = m \circ \psi \circ \bar{e}(\Pi_M)$。

证明。由引理 15 立即得出。 □

3.4 强情形

本节将重新表述一些概念，以适应系统 $\mathscr{N}_s$ 的设定。我们从伪推导开始；在强情形下，主题类型中不允许出现空列表。

定义 17（$\mathscr{N}_s$ 的伪推导）。

- M 的强伪推导按照图 1 中的规则构造，但在 many 规则中要求 $n \geq 1$，并将 abs 规则替换为以下两条规则：

$$\frac{\Sigma \triangleright \Gamma, x : \sigma \vdash_p M : a \quad \sigma \neq \langle\,\rangle \quad b \text{ fresh}}{\Pi \triangleright \Gamma \vdash_p \lambda x.M : b}\ \text{abs-I} \qquad E_\Pi = E_\Sigma \cup \{b \doteq \sigma \to a\}$$

$$\frac{\Sigma \triangleright \Gamma \vdash_p M : a \quad x \notin \mathrm{dom}(\Gamma) \quad b, c \text{ fresh}}{\Pi \triangleright \Gamma \vdash_p \lambda x.M : c}\ \text{abs-K} \qquad E_\Pi = E_\Sigma \cup \{c \doteq \langle b \rangle \to a\}$$

- M 的最小强伪推导是这样一种强伪推导：其中所有规则的 $n = 1$ 都很多。由于最小强伪推导在预类型变量重命名的意义下是唯一的，我们将其记作 $PD^{min}{}_s(M)$。

要将扩展操作应用于强伪推导，只需在定义 11 的第一点中用 $PD_s^{min}(N)$ 替换 $PD^{min}(N)$。另一方面，不需要擦除。这意味着，$PD_s^{min}(M)$ 的一个解仅由一系列扩展以及最后的一个合一代换组成。定理 14、引理 15 和定理 16 也很容易调整到强设定下：

引理 18。

1. 设 $PD_s(M) = (\Pi, E)$ 且 $PD_s^{min}(M) = (\Pi_M, E_M)$。那么存在一个扩展序列 $\bar{e}$，使得 $(\Pi, E) = \bar{e}(\Pi_M, E_M)$。2. 设 $\Sigma \triangleright \Gamma \vdash_s M : A$。那么存在一个强伪推导 $PD_s(M) = (\Pi, E)$ 和一个替换 ψ，使得 ψ 解出 E，且 $\Sigma = m \circ \psi(\Pi)$。

定理 19（强情形下的正确性与完备性）。

- 设 $PD_s(M) = (\Pi, E)$ 是一个强伪推导，$(\bar{e}\psi)$ 是 (Π, E) 的一个解，并且 $\bar{e}(\Pi) \triangleright \Gamma \vdash_p M : a$。那么，对于所有 $\phi : V \to T$，$\phi \circ m \circ \psi \circ \bar{e}(\Pi) \triangleright \phi \circ m \circ \psi(\Gamma) \vdash_s M : \phi \circ m \circ \psi(a)$。
- 设 $\Sigma \triangleright \Gamma \vdash_s M : A$ 且 $PD^{min}{}_s(M) = (\Pi M, E M)$。那么，$(\Pi M, E M)$ 存在一个解 $(\bar{e}\psi)$，使得 $\Sigma = m \circ \psi \circ \bar{e}(\Pi M)$。

4 类型推断半算法

基于扩展概念，本节设计一种半算法：以项 M 作为输入，尝试求解由 $PD_s^{min}(M)$ 生成的约束系统。随后我们证明，当且仅当 M 是强 β-归一化的，该算法才会得出一个解。

为了唯一确定需要通过扩展（分别地，擦除）进行修改的 many规则，定义 11 依赖于这样一个事实：根据构造，伪推导的每个子树都包含互不相交的预类型变量。为了在算法执行期间始终保持这一不相交性，我们对标准合一规则稍作修改：具体而言，不替换列表内部所含预类型变量的出现位置，从而避免产生歧义。

定义 20. $S \to_o S'$ 表示 S' 是通过对 S 应用图 2 中的某一规则得到的，但将规则 subs 替换为如下规则：

$$\frac{S \cup \{a \doteq A\} \quad a \notin \mathsf{Var}(A) \quad a \in \mathsf{OutVar}(S)}{S(\!|A/a|\!) \cup \{a \doteq A\}}\ \textit{subs-out}$$

其中 $OutVar(S) \subseteq Var(S)$ 是 S 中出现在列表之外的所有预类型变量的集合，而 $S(\!|A/a|\!)$ 表示由 S 仅替换那些不包含在列表内部的 a 的出现所得到的集合。

注意，S 可能处于 $\to_o$-范式，但既不处于已解形式，也不处于不可解形式，也不处于阻塞形式，$S = \{a \doteq \langle b \rangle \to c, b \doteq \langle a \rangle \to d\}$ 即为例证。尽管如此，仍有可能分离出一些良好性质，将 $\to_o$ 的行为与 $\to_u$ 的行为联系起来。

P性质 21. $\to_o$ 是终止且合流的（在预类型变量重命名的意义下）.

性质 22.

- 用 $nf_o(S)$ 表示 S 的唯一 $\to_o$-范式，则有 $nf_o(S) \to^*_u nf_u(S)$。
- 如果 $nf_o(S)$ 不是阻塞形式，那么 $nf_u(S)$ 也不是阻塞形式（也就是说，$nf_u(S)$ 要么是已解形式，要么是不可解形式）。

证明。首先注意，如果 $\mathrm{nf_o(S)}$ 不是阻塞形式，那么它必定具有如下形式：

$$\mathtt{nf_o}(S) = \{\mathtt{a}_i \doteq \sigma_1^i \to \ldots \to \sigma_{m_i}^i \to \mathtt{b}_i\}_{1 \le i \le n} \quad (m_i \ge 0)$$

此外，$\mathrm{a1}, \ldots, \mathrm{a}_n$ 彼此均不相同；若 $\{\mathrm{a1}, \ldots, \mathrm{a}_n\} \cap \{\mathrm{b1}, \ldots, \mathrm{b}_n\} \neq /0$，则 $\mathrm{nf_o(S)}$ 处于不可解形式。事实上，对于 $\mathrm{i} \neq \mathrm{j}$，我们不可能有 $\mathrm{a}_i = \mathrm{a}^j$，否则便可应用 subs-out。此外，对于 $\mathrm{i} \neq \mathrm{j}$，我们不可能有 $\mathrm{a}_i = \mathrm{b}_j$，否则 subs-out 就能替换右部中 b^j 的尾部出现。若 $\{\mathrm{a1}, \ldots, \mathrm{a}_n\} \cap \{\mathrm{b1}, \ldots, \mathrm{b}_n\} \neq /0$，但既不能应用擦除，也不能应用 subs-out，则唯一的情形是至少存在一个 i，使得 $\mathrm{a}_i = \mathrm{b}_i$ 且 $\mathrm{m}_i \ge 1$；此时 $\mathrm{nf_o(S)}$ 处于不可解形式。最后请注意，从 $\mathrm{nf_o(S)}$ 得到 $\mathrm{nf_u(S)}$，只需应用 subs 规则，替换列表中出现的左部变量；这些变量无法通过 subs-out 替换。由于这些替换不会产生阻塞方程，我们得出结论。 □

4.1 半算法

我们现在可以讨论半算法 InferStrong。InferStrong 的输入是项 M；若其终止，输出是一个对 (Π,ψ)，其中 Π 是 M 的一个伪推导，其关联的方程集 E 使得 $\mathrm{nf_u(E)}$ 处于已解形式，而 ψ 是由它所诱导的替换。

N记法 23。Blocked(S) = 当且仅当方程集 S 处于阻塞形式时为 true .

算法 1 非确定性半算法 InferStrong。输入：项 M。

```
1: function InferStrong(M)
2:     (Π, E) ← PD_s^min(M)
3:     E ←nf_o(E)
4:     当 Blocked(E) 时执行
5:         选择 (σ ≐ τ) ∈E，使得 |σ| ≠ |τ|
6:         如果 |σ| > |τ| 则
7:             n ← |σ| − |τ|
8:             (Π, E) ← 扩展(τ, n Π)
9:         else
10:            n ← |τ| − |σ|
11:            (Π, E) ← 扩展(σ, n Π)
12:        结束 if
13:        E ←nf_o(E)
14:    结束 while
15:    E ←nf_u(E)
16:    ψ ← E⃗
17:    返回 (Π,ψ)
18: 结束函数
```

该算法作用于形如 (Π, E) 的对，由一个伪推导和一个（可能已部分归约的）方程集组成。将 $\to_o$ 扩展到此类对，若 $E \to_o E'$，则记 $(\Pi, E) \to_o (\Pi, E')$。记法 $(\Pi,E) \to_e (\Pi',E')$ 表示 (Π', E') 是 InferStrong 可对 Π 执行的一次扩展的结果，用以尝试解除 E 中的一条受阻方程，如算法描述所述。最后，$(\Pi, E) \Rightarrow (\Pi',E')$ 表示 $(\Pi,E) \to_o^* (\Pi, \mathrm{nf_o(E)}) \to_e (\Pi', E')$。采用这些约定，InferStrong 的一次运行可理解为一段 $\Rightarrow$ 步骤序列，随后是一段 $\to_u$ 步骤序列。

注意，由于方程组在每次扩展[3], 时都会重新计算，中间 $\to_o$-归约步骤的唯一目的是暴露阻塞方程，从而引导对伪推导所作的结构变更。该算法是非确定性的，因为阻塞方程是随机选取的。

我们指出，该算法会检查方程集是否处于阻塞形式，但不会考虑其可能处于不可解形式的情况。下面的引理24并未附有正式证明，但它阐明了这一设计选择的依据：对与伪推导相关联的约束系统应用合一规则，不会导致不可解形式。要严格证明这一论断出乎意料地困难。有趣的是，似乎没有任何将交类型可定型性视为扩展合一问题来处理的研究承认这一结果的重要性，即使它们隐含地依赖于该结果。我们可以通过比较简单类型系统和交类型系统，给出直观的解释。事实上，在检查给定项是否具有简单类型可赋性时，可能会生成循环方程；这本质上是由于类型环境受到严格条件限制，要求它们在共有变量上保持一致。相比之下，交类型系统对环境的并集不施加任何约束，因此能够避免循环。

引理24. 若 $\mathrm{PD_s}(M) = (\Pi, E)$，则 $\mathrm{nf_u}(E)$ 不属于不可解形式。

定理 25（算法正确性）。设 $\mathrm{InferStrong}(M) = (\Pi, \psi)$，其中 $\Pi \triangleright \Gamma \vdash_p M : a$。则 $m \circ \psi(\Pi) \triangleright m \circ \psi(\Gamma) \vdash_s M : m \circ \psi(a)$。

*P*证明。由定理 19 的第一点、性质 22 的第二点以及引理24 . □

注2. InferStrong 并不会找出 $\mathrm{PD_s^{min}}(M)$ 的所有可能解，因为扩展只会在绝对必要时使用（即解除受阻方程），而且采用最小方式（即列表的扩展幅度不超过所需）。

4.2 终止性

由于 InferStrong 是非确定性的，我们称算法在存在一条终止执行路径时终止。现在我们证明，若 M 是强 β-归一化的，则 InferStrong(M) 终止。证明这一结果的关键思路，是将算法的行为与 M 的归约联系起来；这一思路还可以进一步表述为：InferStrong 本质上表现得像一个 λ 演算的（非确定性）解释器，通过归约逐步为 M 构造类型。

从这个角度看，以最小伪推导为起点是有其依据的：M 的最小伪推导与项的结构相吻合，即 M 的每个子项恰好是一个子推导的主体。在 InferStrong 的执行过程中，伪推导的结构会随着归约时发生的子项复制而演变：事实上，受阻方程总是源自归约序列中产生的非线性可归约式，而该归约序列始于 M。因此，范式不会产生受阻方程。

引理 26. 若 $\mathrm{PD_s}(M) = (\Pi, E)$，且 M 处于范式，则 E 可解。

证明。对范式 M 进行归纳。我们证明，对 E 应用合一规则不会生成列表之间的方程，因此也不会生成受阻方程。情形 $M = x$ 是平凡的，因为 $E = /0$。对于情形 $M = \lambda x.N$，令 $\mathrm{PD_s}(N) = (\Pi_0, E_0)$；则 $E = E_0 \cup \{c \doteq \sigma \to b\}$，其中 c 是新鲜的。由于根据归纳假设，$E_0$不会生成列表之间的方程，E 也不会，因为 c 不出现在 E_0中。最后，考虑 $M = xM_1 \ldots M_n$，其中 $n > 0$。令 $\mathrm{PD_s}(x) = (\Pi_0, /0)$，其中 $\Pi_0 \triangleright x : \langle a_0 \rangle \vdash_p x : a_0,$；并令 $\mathrm{PD_s}(M_i) = (\Pi_i, E_i)$，其中

[3]当然，在实际实现中，只需跟踪已修改的约束，就能避免重复执行合一步骤，从而提高效率。这里我们选择清晰易懂的表述，而非追求效率。

$\Pi_i \triangleright \Gamma_i \vdash_{\mathrm{p}} M_i : \sigma_i (1 \leq i \leq n)$。于是 $E = \bigcup_{ni=1} E_i \cup \{a_0 \doteq \sigma_1 \to a_1, a_1 \doteq \sigma_2 \to a2, \ldots, a_{n-1} \doteq \sigma_n \to a_n\}$，其中 $a1, \ldots, a_n$ 都是新鲜的。注记：当 $i \neq j$ 时，$E_i * E_j$。由于根据归纳假设，没有任何 E_i 会生成列表之间的方程，E 也不会，因为 $a_0, a1, \ldots, a_n$ 不会出现在 $\bigcup_{ni=1} E_i$ 中。 □

推论27 。如果 M 是范式，那么 InferStrong(M) 会在不执行任何扩展的情况下终止 .

以下引理29将 InferStrong(M) 的终止性与从 M 的约化式开始的过程的终止性联系起来，其证明采用了 Barendregt 的 F_∞ 永续归约策略。回顾一下，永续归约策略会保留无限归约路径 [28]；由于这类策略与强规范化密切相关，因此多次被证明有助于研究没有空交的交类型系统的性质。特别是，我们提及 Neergaard 的相关工作 [24], ，他通过考察关于 F_∞-归约步骤的扩展，为类似于 $\mathcal{N}_S$ 的系统中的主体扩展（较弱变体）给出了优雅的归纳证明。这种证明技巧的扩展见于 [16]。

定义 28（[3,定义 13.4.1]）。F_∞ 归约策略定义如下：

$$F_\infty(M) = \begin{cases} \text{If } M \text{ is in normal form then } M \\ \text{If } M = \mathtt{C}[(\lambda x.P)Q] \text{ and } (\lambda x.P)Q \text{ is the leftmost-outermost redex:} \\ \quad \begin{cases} \mathtt{C}[P[Q/x]] \text{ if } x \in \mathsf{FV}(P) \\ \mathtt{C}[P] \text{ if } x \notin \mathsf{FV}(P) \text{ and } Q \text{ is in normal form} \\ \mathtt{C}[(\lambda x.P)F_\infty(Q)] \text{ otherwise} \end{cases} \end{cases}$$

引理29。设 $M = M^0 \to_\beta M^1 \to_\beta \cdots \to_\beta M_k$ 是一个 F_∞ 归约序列（即对 $0 \leq i < k$，令 $M_{i+1} = F_\infty(M_i)$）。那么 InferStrong(M) 终止，当且仅当 InferStrong(M_k) 终止。

证明。见附录B。 □

假设采用公平非确定性，即算法不会无限次重复执行没有效果的扩展，我们可以陈述：

定理30。如果 M 是强 β归一化的，那么 InferStrong(M) 会终止。

证明。由引理29和推论27得出。 □

推论 31。InferStrong(M) 终止，当且仅当 M 是强 β归一化的。

证明。($\Rightarrow$) 由定理 25 和定理 4。($\Leftarrow$) 由定理30。 □

4.3 合流性

我们接下来证明，尽管该算法是非确定性的，其输出（若有）仍是唯一的。在深入细节之前，有必要先对我们的扩展定义作若干考量。

定义 11 引入的扩展和擦除操作能够使表述更加简洁，但从效率角度来看显然并非最优。事实上，可以对扩展（分别地，擦除）给出更精细的定义：通过在特定位置添加最少的前提（分别地，删除前提）来修改给定的 many 规则，而不是仅从最小子推导“重新开始”。为了推理算法的合流性，我们采用这一更精细的扩展概念：在陈述以下引理 32 和定理 33 时，我们便如此处理。这样，我们就可以依赖这样一个事实：在 InferStrong 执行期间，所有列表的长度都不会减少。

引理 32. 设 $(\Pi, E) \Rightarrow (\Pi_1, E_1)$ 且 $(\Pi, E) \Rightarrow (\Pi_2, E_2)$。则存在 (Π_3, E_3)，使得 $(\Pi_1, E_1) \Rightarrow^* (\Pi_3, E_3)$，并且满足以下二者之一：$(\Pi_2, E_2) \Rightarrow (\Pi_3, E_3)$ 或 $(\Pi_2, E_2) = (\Pi_3, E_3)$。

证明。见附录 C。 □

引理 32 表明关系 $\Rightarrow$ 是合流的，因此 InferStrong 的输出是唯一确定的。鉴于我们的类型推断过程与项归约之间的相似性，这一结果可视为 λ-演算合流性的自然推论。

定理 33。若 $\text{InferStrong}(M) = (\Pi, \psi)$ 且 $\text{InferStrong}(M) = (\Pi', \psi')$，则 $(\Pi, \psi) = (\Pi', \psi')$（在预类型变量重命名的意义下）。

证明。由引理 32 以及 [19, 引理 2.5], 再加上合一的性质 9。 □

4.4 主性

回顾一下，项 M 的主类型是一种类型判断，所有其他关于 M 的类型判断都可以通过适当的操作从中导出。若过程 InferStrong(M) 终止，则它会按以下意义构造出项 M（强归一化）的主类型。

定理 34. 设 $\Sigma \triangleright \Gamma \vdash_s M : A$ 且 $\text{InferStrong}(M) = (\Pi, \psi)$。那么，对于某个扩展序列 $\bar{e}$ 和替换 ψ'，有 $\Sigma = m \circ \psi' \circ \bar{e}(\Pi)$。

证明. 根据引理 18，系统 $\mathcal{N}_s$ 中的每个推导 Σ 都可以由某个适当的强伪推导得到；此外，同一引理还保证，任何强伪推导都可以从 $PD_s^{min}(M)$ 出发，通过扩展序列构造出来。InferStrong 从 $PD_s^{min}(M)$ 出发，若其终止，则根据定理 33，其输出是唯一确定的。注意，该算法只执行解决受阻方程所严格必需的扩展，并且以最小方式进行（也就是说，列表绝不会扩展得超过所需程度）。由此可得，每个 Σ 都可以通过适当的附加扩展序列 $\bar{e}$（即并非严格必要的扩展）从 Π 得到。 □

注 3. 定理 34 并未讨论 ψ 与 ψ' 之间的关系。正式分析会相当技术性，且超出本文的范围。这里我们只指出，$\text{dom}(\psi) \subseteq \text{dom}(\psi')$，因为可以放心地假设 $\text{Var}(\Pi) \subseteq \text{Var}(\bar{e}(\Pi))$。当然，即使对于满足 $\in \text{dom}(\psi) \cap \text{dom}(\psi')$ 的情况，也可能有 $\psi(a) \neq \psi'(a)$，因为一般而言，$\bar{e}(\Pi)$ 中的列表比 Π 中的列表更长。注意，若 Σ 与 Π 具有相同的（最小）树结构，则 $\Sigma = m \circ \psi'(\Pi)$，其中 $\psi' = \psi'' \circ \psi$ 适用于某个 ψ''；这是因为 ψ 是与 Π 相关联的方程集的最一般合一子。

5 总结

本文为系统 $\mathcal{N}_s$ 设计了一种类型推断半算法，用于计算且仅计算所有强 β-归一化项的主类型（推论 31 和定理 34）。该过程基于若干基本概念，我们证明了这些概念对于 $\mathcal{N}$-可定型性是可靠且完备的（定理 14 和 16）。尽管我们的结果早已为人所知，但所采用的方法是新的；我们借助过去几十年间交类型理论的发展，简化了一些技术细节。

我们可以将半算法视为一份“蓝图”，据此可以推导出适用于其他类型系统的推断过程。例如，自然可以考虑对 InferStrong 作一种变体：利用扩展和擦除操作，为所有且仅有 $\mathcal{N}$ 归一化的项构造推导。

β。我们指出，这种变体的意义相当有限，因为 $\mathscr{N}$ 也有另一种类型推断半算法（概念上更简单）：首先，将 M 归约为范式 N（如果范式存在；否则该过程不会终止）；其次，为 N 构造推导（根据引理 26，这很容易）；最后，通过主体扩展为 M 构造推导（定理 3）。当然，这种方法不容易适用于 $\mathscr{N}_{\mathsf{S}}$，因为在强系统中，主体扩展并非严格成立（注 1）。沿着这一思路的另一种变体，得出了 [27]，的一致交类型推断算法；它只不过是 InferStrong 的一个总能终止的特化版本。更多细节见第一作者的博士论文 [26]。

最后，我们简要谈谈幂等交类型系统中的类型推断。我们要指出，本文提出的方法也可以原样应用于幂等情形。事实上，在进行类型推断时，能够作出的最一般假设是：子项的每个副本都表现出不同的行为，也就是说，必须为其赋予不同的交类型。请注意，我们已经遵循了这一原则，对伪推导施加了不相交性条件（见定义 5）：用集合替代多重集不会产生实质影响，因为当集合彼此不相交时，集合并的行为与多重集并完全相同。

参考文献

[1] Beniamino Accattoli（2024）：语义界与多重类型：再探。载于 Aniello Murano 与 Alexandra Silva（编）：第 32 届 EACSL 计算机科学逻辑年会，CSL 2024，2024年2月19日至23日，意大利那不勒斯，LIPIcs 288，Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum f¨ur Informatik，第 7:1–7:24 页，doi:10. 4230/LIPICS.CSL.2024.7。[2] Steffen van Bakel（1992）：交类型体系的完全限制。Theor. Comput. Sci. 102(1)，第 135–163 页，doi:10.1016/0304-3975(92)90297-S。[3] Hendrik Pieter Barendregt（1985）：λ演算——其语法与语义。逻辑与数学基础研究 103，North-Holland。[4] Hendrik Pieter Barendregt、Mario Coppo 与 Mariangiola Dezani-Ciancaglini（1983）：滤子λ模型与类型赋值的完备性。J. Symb. Log. 48(4)，第 931–940 页，doi:10.2307/2273659。[5] Choukri-Bey Ben-Yelles（1979）：λ演算中的类型赋值：语法与语义。博士论文，威尔士大学斯旺西分校。[6] Alexis Bernadet 与 St´ephane Lengrand（2013）：非幂等交类型与强规范化。Log. Methods Comput. Sci. 9(4)，doi:10.2168/LMCS-9(4:3)2013。[7] G´erard Boudol（2008）：交类型体系中的强规范化与类型推断。Theor. Comput. Sci. 398(1-3)，第 63–81 页，doi:10.1016/J.TCS.2008.01.045。[8] G´erard Boudol 与 Pascal Zimmer（2004）：交类型体系中的类型推断。载于 Mario Coppo 与 Ferruccio Damiani（编）：第三届交类型及相关系统国际研讨会论文集，ITRS 2004，芬兰图尔库，2004年7月13日，理论计算机科学电子札记 136，爱思唯尔，第 23–42 页，doi:10.1016/J.ENTCS.2005.06.016。[9] Antonio Bucciarelli、Delia Kesner 与 Daniel Ventura（2017）：λ演算的非幂等交类型。Log. J. IGPL 25(4)，第 431–464 页，doi:10.1093/JIGPAL/JZX018。[10] S´ebastien Carlier 与 Joe B. Wells（2004）：扩展：使用交类型进行类型推断的关键机制：综述与说明。载于 Mario Coppo 与 Ferruccio Damiani（编）：第三届交类型及相关系统国际研讨会论文集，ITRS 2004，芬兰图尔库，2004年7月13日，理论计算机科学电子札记 136，爱思唯尔，第 173–202 页，doi:10.1016/J. ENTCS.2005.03.026。

[11] S´ebastien Carlier 与 Joe B. Wells（2004）：在 E 系统中使用扩展变量和交类型进行类型推断，以及与 β 归约的精确对应。载于 Eugenio Moggi 与 David Scott Warren（编）：第六届 ACM SIGPLAN 声明式编程原理与实践国际会议论文集，2004年8月24日至26日，意大利维罗纳，ACM，第 132–143 页，doi:10.1145/1013963.1013980。[12] S´ebastien Carlier 与 Joe B. Wells（2012）：扩展代数。Fundam. Informaticae 121(1-4)，第 43–82 页，doi:10.3233/FI-2012-771。[13] Mario Coppo 与 Mariangiola Dezani-Ciancaglini（1978）：一种针对 λ-项的新类型赋值。Arch. Math. Log. 19(1)，第 139–156 页，doi:10.1007/BF02011875。[14] Mario Coppo、Mariangiola Dezani-Ciancaglini 与 Betti Venneri（1980）：主类型方案与 λ演算语义。载于 Richard A. DeMillo（编）：致 H.B. Curry：关于组合逻辑、λ演算与形式主义的论文集，Academic Press，第 535–560 页。[15] Lu´ıs Damas 与 Robin Milner（1982）：函数式程序的主类型方案。载于 Richard A. De- Millo（编）：第九届 ACM 编程语言原理专题讨论会会议记录，阿尔伯克基，新墨西哥州，美国，1982年1月，ACM Press，第 207–212 页，doi:10.1145/582153. 582176。[16] Andrej Dudenhefner 与 Daniele Pautasso（2024）：永久归约下一致交类型中的机械化主体扩展。载于 Jakob Rehof（编）：第九届形式结构与计算演绎国际会议，FSCD 2024，爱沙尼亚塔林，2024年7月10日至13日，LIPIcs 299，Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum f¨ur Informatik，第 8:1–8:20 页，doi:10.4230/LIPICS.FSCD.2024.8。[17] J. Roger Hindley（1969）：组合逻辑中对象的主类型方案。Transactions of the American Mathematical Society 146，第 29–60 页。[18] J. Roger Hindley（1997）：基础简单类型理论。剑桥大学出版社。[19] G´erard Huet（1980）：合流归约：项重写系统的抽象性质与应用。J. ACM 27(4)，第 797–821 页，doi:10.1145/322217.322230。[20] Assaf J. Kfoury 与 Joe B. Wells（1999）：有限秩交类型的主性与可判定类型推断。载于 Andrew W. Appel 与 Alex Aiken（编）：POPL ’99，第 26 届 ACM SIGPLAN-SIGACT 编程语言原理专题讨论会论文集，美国得克萨斯州圣安东尼奥，1999年1月20日至22日，ACM，第 161–174 页，doi:10.1145/292540.292556。[21] Assaf J. Kfoury 与 Joe B. Wells（2004）：使用扩展变量的交类型主性与类型推断。Theor. Comput. Sci. 311(1-3)，第 1–70 页，doi:10.1016/J.TCS.2003.10.032。[22] Daniel Leivant（1983）：多态类型推断。载于 John R. Wright、Larry Landweber、Alan J. Demers 与 Tim Teitelbaum（编）：第十届 ACM 编程语言原理专题讨论会会议记录，美国得克萨斯州奥斯汀，1983年1月，ACM Press，第 88–98 页，doi:10.1145/567067. 567077。[23] Alberto Martelli 与 Ugo Montanari（1982）：一种高效的合一算法。ACM Trans. Program. Lang. Syst. 4(2)，第 258–282 页，doi:10.1145/357162.357169。[24] Peter Møller Neergaard（2005）：理论珍珠：交类型的一个折中方案：一个简单的强规范化证明。J. Funct. Program. 15(5)，第 669–677 页，doi:10.1017/S0956796805005587。[25] Peter Møller Neergaard 与 Harry G. Mairson（2004）：类型、效能与幂等性：为什么非线性与遗忘能使类型系统发挥作用。SIGPLAN Not. 39(9)，第 138–149 页，doi:10.1145/1016848.1016871。[26] Daniele Pautasso（2025）：可计数的类型：定性交类型与定量交类型体系之旅。博士论文，都灵大学。可访问：https://hdl.handle.net/2318/2073973。[27] Daniele Pautasso 与 Simona Ronchi Della Rocca（2023）：简单类型的定量版本。载于 Marco Gaboardi 与 Femke van Raamsdonk（编）：第八届形式结构与计算演绎国际会议，FSCD 2023，2023年7月3日至6日，意大利罗马，LIPIcs 260，Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum f¨ur Informatik，第 29:1–29:21 页，doi:10.4230/LIPICS.FSCD.2023.29。

[28] Femke van Raamsdonk、Paula Severi、Morten Heine Sørensen 和 Hongwei Xi（1999）：λ演算中的永久归约。Inf.Comput.149(2)，第 173–225 页，doi:10.1006/INCO.1998.2750。[29] John A. Robinson（1965）：一种基于归结原理的面向机器的逻辑。J.Asoc.forComputing Machinery12(1965)12，第 23–41 页。[30] Simona Ronchi Della Rocca（1988）：交类型系统的主类型方案与合一。Theor.Comput.Sci.59，第 181–209 页，doi:10.1016/0304-3975(88)90101-6。[31] Simona Ronchi Della Rocca 和 Betti Venneri（1984）：扩展类型理论的主类型方案。Theor.Comput.Sci.28，第 151–169 页，doi:10.1016/0304-3975(83)90069-5。[32] Christopher P. Wadsworth（1976）：Scott 的 λ演算 D_∞-模型中计算性质与指称性质之间的关系。SIAMJ.Comput.5(3)，第 488–521 页，doi:10.1137/0205036。

完备性

我们分别证明引理 15 的两个部分，首先从以下命题开始：

1. 若 $\mathrm{PD}(\mathrm{M}) = (\Pi, \mathrm{E})$，且 $\mathrm{PD}^{\mathtt{min}}(\mathrm{M}) = (\Pi_M, \mathrm{E}_M)$，则存在一个扩展与擦除序列 $\bar{\mathrm{e}}$，使得 $(\Pi, \mathrm{E}) = \bar{\mathrm{e}}(\Pi_M, \mathrm{E}_M)$。

证明。对 Π 进行归纳，考察其最后一条规则。

- var 情形。容易验证，模去预类型变量的重命名后，$\mathrm{PD}(\mathrm{x}) = \mathrm{PD}^{\mathtt{min}}(\mathrm{x})$，因此 $\bar{\mathrm{e}}$ 是空序列。

- abs 情形。令 $\mathrm{M} = \lambda \mathrm{x}.\mathrm{N}$，则伪推导 Π 具有以下形式：

$$\frac{\Pi_0 \rhd \Gamma, x : \sigma \vdash_{\mathrm{p}} N : \mathtt{b}}{\Pi \rhd \Gamma \vdash_{\mathrm{p}} \lambda x.N : \mathtt{a}}$$

  令 $\mathrm{PD}^{\mathtt{min}}(\mathrm{N}) = (\Pi_N, \mathrm{E}_N)$，最小伪推导 Π_M 的形式如下：

$$\frac{\Pi_N \rhd \Delta, x : \tau \vdash_{\mathrm{p}} N : \mathtt{b}}{\Pi_M \rhd \Delta \vdash_{\mathrm{p}} \lambda x.N : \mathtt{a}}$$

  根据归纳假设，存在 $\bar{\mathrm{e}}_0$，使得 $(\Pi_0, \mathrm{E}_0) = \bar{\mathrm{e}}_0(\Pi_N, \mathrm{E}_N)$，因此 $\bar{\mathrm{e}}_0$ 就是所需的序列。

- app 情形。令 $\mathrm{M} = \mathrm{PQ}$，伪推导 Π 的形式如下：

$$\frac{\Pi_1 \rhd \Gamma_1 \vdash_{\mathrm{p}} P : \mathtt{b} \quad \dfrac{(\Pi_{2i} \rhd \Gamma_{2i} \vdash_{\mathrm{p}} Q : \mathtt{c}_i)_{i=1}^{n}}{\Pi_2 \rhd \Gamma_2 \vdash_{\mathrm{p}} Q : \langle \mathtt{c}_1, \ldots, \mathtt{c}_n \rangle}}{\Pi \rhd \Gamma \vdash_{\mathrm{p}} PQ : \mathtt{a}}$$

  对某个 $\mathrm{n} \geq 0$。令 $\mathrm{PD}^{\mathtt{min}}(\mathrm{P}) = (\Pi_P, \mathrm{E}_P)$，且 $\mathrm{PD}^{\mathtt{min}}(\mathrm{Q}) = (\Pi_Q, \mathrm{E}_Q)$，最小伪推导 Π_M 的形式如下：

$$\frac{\Pi_P \rhd \Delta_1 \vdash_{\mathrm{p}} P : \mathtt{b} \quad \dfrac{\Pi_Q \rhd \Delta_2 \vdash_{\mathrm{p}} Q : \mathtt{c}_1}{\Delta_2 \vdash_{\mathrm{p}} Q : \langle \mathtt{c}_1 \rangle}}{\Pi_M \rhd \Delta \vdash_{\mathrm{p}} PQ : \mathtt{a}}$$

  由归纳假设，存在 $\bar{\mathrm{e}}_1$，使得 $(\Pi_1, \mathrm{E}_1) = \bar{\mathrm{e}}_1(\Pi_P, \mathrm{E}_P)$。因此，如果 $\mathrm{n} = 0$，所需序列为 $\bar{\mathrm{e}}_1 \circ \mathrm{Erase}(\langle \mathtt{c}_1 \rangle, 1)$。否则，如果 $\mathrm{n} \geq 1$，还需考虑 n 个互不相交的副本

$(\Pi_Q, \mathrm{E}\varrho)$，即对于 $1 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{n}$，$(\Pi^i_Q, \mathrm{E}^i_Q)$。由归纳假设，对每个 i，都存在 $\bar{}\mathrm{e}_{2i}$，使得 $(\Pi_{2i}, \mathrm{E}_{2i}) = \bar{}\mathrm{e}_{2i}(\Pi^i_Q, \mathrm{E}^i_Q)$。令 $\bar{}\mathrm{e}'$ 为按任意顺序组合序列 $\bar{}\mathrm{e}1, \bar{}\mathrm{e}21, \ldots, \bar{}\mathrm{e}_{2n}$ 所得的序列（注意，由于 $\bar{}\mathrm{e}1, \bar{}\mathrm{e}21, \ldots, \bar{}\mathrm{e}_{2n}$ 作用于不同的子树，组合顺序并不重要）。如果 $\mathrm{n} = 1$，所需序列就是 $\bar{}\mathrm{e}'$。最后，如果 $\mathrm{n} \geq 2$，所需序列为 $\bar{}\mathrm{e}' \circ \mathrm{Expand}(\langle \mathrm{c}_1 \rangle, \mathrm{n} - 1)$。

□

现在我们证明引理 15 的第二点，即：

2. 若 $\Sigma \triangleright \Gamma \vdash \mathrm{M} : \mathrm{A}$，则存在一个伪推导 $\mathrm{PD(M)} = (\Pi, \mathrm{E})$ 以及一个替换 ψ，使得 ψ 解出 E，且 $\Sigma = \mathrm{m} \circ \psi(\Pi)$。

证明。我们说明，若 Π 与 Σ具有相同的树结构，则很容易找到所需的 ψ。我们对 Σ作归纳，考察其最后一条规则。下文中，$\psi_1 \cup \psi_2$ 表示相容替换的并。此外，为简洁起见，我们将 $\mathrm{cod}(\psi)$ 简写为 $\mathrm{Var}(\mathrm{cod}(\psi))$。

- var 情形。令 $\mathrm{M} = \mathrm{x}$，则推导 Σ 的形式为：

$$\frac{}{\Sigma \triangleright x : [A] \vdash_{\mathrm{p}} x : A}$$

由于必有 $\mathrm{PD(M)} = (\Pi \triangleright \mathrm{x} : \langle \mathrm{a} \rangle \vdash_{\mathrm{p}} \mathrm{x} : \mathrm{a}, /0)$，因此任何满足 $\psi(\mathrm{a}) = \mathrm{A}$ 且 $\mathrm{m(A)} = \mathrm{A}$ 的 ψ 都符合要求。

- abs 情形。令 $\mathrm{M} = \lambda \mathrm{x.N}$ 且 $\mathrm{A} = \mu \to \mathrm{B}$，推导 Σ 具有如下形式：

$$\frac{\Sigma_0 \triangleright \Gamma, x : \mu \vdash N : B}{\Sigma \triangleright \Gamma \vdash \lambda x.N : \mu \to B}$$

根据归纳假设，存在 $\mathrm{PD(N)} = (\Pi_0, \mathrm{E}_0)$，且 ψ_0 满足 E_0，使得 $\Sigma_0 = \mathrm{m} \circ \psi_0(\Pi_0)$。现在考虑形如下的伪推导 $\mathrm{PD(M)} = (\Pi, \mathrm{E})$：

$$\frac{\Pi_0 \triangleright \Gamma, x : \sigma \vdash_{\mathrm{p}} N : \mathrm{b}}{\Pi \triangleright \Gamma \vdash_{\mathrm{p}} \lambda x.N : \mathrm{a}} \qquad E = E_0 \cup \{\mathrm{a} \doteq \sigma \to \mathrm{b}\}$$

由于 a 是新鲜的，可以安全地假设 $\mathrm{a} \notin \mathrm{dom}(\psi_0) \cup \mathrm{cod}(\psi_0)$；因此，替换 $\psi = \psi_0 \cup \{\mathrm{a} \doteq \psi_0(\sigma \to \mathrm{b})\}$ 满足要求。

- app 情形。令 $\mathrm{M} = \mathrm{PQ}$，推导 Σ 具有如下形式：

$$\frac{\Sigma_1 \triangleright \Gamma_1 \vdash P : \mu \to A \qquad \dfrac{(\Sigma_{2i} \triangleright \Gamma_{2i} \vdash Q : c_i)^n_{i=1}}{\Sigma_2 \triangleright \Gamma_2 \vdash Q : \mu}}{\Sigma \triangleright \Gamma \vdash PQ : A}$$

其中 $\mathrm{n} \geq 0$。根据归纳假设，存在 $\mathrm{PD(P)} = (\Pi_1, \mathrm{E}_1)$ 和 ψ_1，它们求解 E_1，使得$\Sigma_1 = \mathrm{m} \circ \psi_1(\Pi_1)$。此外，若 $\mathrm{n} > 0$，根据归纳假设，对于每个 $1 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{n}$，都存在 $\mathrm{PD(Q)} = (\Pi_{2i}, \mathrm{E}_{2i})$ 和 ψ_{2i}，它们求解 E_{2i}，使得 $\Sigma_{2i} = \mathrm{m} \circ \psi_{2i}(\Pi_{2i})$。由于 $\Pi_{2j} * \Pi_{2k}$ 只要 $\mathrm{j} \neq \mathrm{k}$，就有这一性质，因此可以安全地假设 ψ_{21}、……、ψ_{2n} 满足：当 $\mathrm{j} \neq \mathrm{k}$ 时，$\mathrm{dom}(\psi_{2j}) \cap \mathrm{dom}(\psi_{2k}) = \mathrm{dom}(\psi_{2j}) \cap \mathrm{cod}(\psi_{2k}) = /0$；因此 $\psi_2 = \bigcup \mathrm{ni}_{=1} \psi_{2i}$ 是一个求解 $\mathrm{E}2 = \bigcup \mathrm{ni}_{=1} \mathrm{E}_{2i}$ 的替换。现在考虑形状如下的伪推导 $\mathrm{PD(M)} = (\Pi, \mathrm{E})$：

$$\frac{\Pi_1 \triangleright \Gamma_1 \vdash_{\mathrm{p}} P : \mathrm{b} \qquad \dfrac{(\Pi_{2i} \triangleright \Gamma_{2i} \vdash_{\mathrm{p}} Q : \mathrm{c}_i)^n_{i=1}}{\Pi_2 \triangleright \Gamma_2 \vdash_{\mathrm{p}} Q : \sigma}}{\Pi \triangleright \Gamma \vdash_{\mathrm{p}} PQ : \mathrm{a}} \qquad E = E_1 \cup E_2 \cup \{\mathrm{b} \doteq \sigma \to \mathrm{a}\}$$

注意，当 $n = 0$ 时，有 $\sigma = \langle\rangle$ 且 $E_2 = /0$。同样，由于 $\Pi_1 * \Pi_2$，可以安全地假设对于 $j, k \in \{1,2\}$，只要 $j \neq k$，就有 $dom(\psi_j) \cap dom(\psi_k) = dom(\psi_j) \cap cod(\psi_k) = /0$；因此 $\psi_1 \cup \psi_2$ 是一个替换。由于 $m \circ \psi_1(b) = \mu \to A$，因此必有 $\psi_1(b) = \tau \to A$，其中存在某个 τ、A，使得 $m(\tau) = \mu = m \circ \psi_2(\sigma)$ 且 $m(A) = A$。由于列表 τ 和 $\psi_2(\sigma)$ 合并后得到同一个多重集 μ，它们至多相差一个排列；由于总可以重新排列 Π_2 的 n 个前提，不失一般性，我们可以假设 $\tau = \psi_2(\sigma)$。最后，由于 a 是新鲜的，我们可以假设 $a \notin dom(\psi_1) \cup dom(\psi_2) \cup cod(\psi_1) \cup cod(\psi_2)$；因此，替换 $\psi = \psi_1 \cup \psi_2 \cup \{a \doteq A\}$ 满足要求。

□

B 终止性

引理（29）。设 $M = M^0 \to_\beta M^1 \to_\beta \cdots \to_\beta M_k$ 为一个 F_∞ 归约序列（即对 $0 \le i < k$，有 $M_{i+1} = F_\infty(M_i)$）。则 InferStrong(M) 终止当且仅当 InferStrong(M_k) 终止。

证明。下文中，我们用 $\bar{u}(E)$ 表示将合一规则序列 $\bar{u}$ 应用于方程集 E 的结果。不相交集合的并记为 $\sqcup$，即写出 $X \sqcup Y$ 即默认意味着 $X \cap Y = /0$。我们对 k 进行归纳论证。

情形 $k = 1$。我们详细展开基础步骤，即 $M = C[(\lambda x.P)Q] \to_\beta C[P[Q/x]] = M_1 = N$。设 $PD_s^{min}(M) = (\Pi_M, E_M)$ 且 $PD_s^{min}(N) = (\Pi_N, E_N)$。该证明依赖于 P 中 x 的出现。

情形 x 出现在 P 中。我们证明 InferStrong(M) 可以将 E_M 转换为一个 $E^\dagger{}_M$ 的超集，即 $E_N \subset E^\dagger{}_M$；同时证明，$E^\dagger{}_M \setminus E_N$ 中的方程在求解 $E^\dagger{}_M$ 时，对生成受阻方程不起任何作用；也就是说，当且仅当 E_N 可解时，$E^\dagger{}_M$ 才可解。为便于说明，我们暂且假设 $P \neq x$；特殊情况 $P = x$ 将在后文单独处理。推导 Π_M 包含一个形状如下的子推导 $\Pi_{(\lambda x.P)Q}$：

$$\dfrac{\dfrac{\Pi_P \rhd \Gamma, x : \langle a_i \rangle_{i \in I} \vdash_p P : b \quad c \text{ fresh}}{\Gamma \vdash_p \lambda x.P : c}\ \text{abs-I} \qquad \dfrac{\Pi_Q \rhd \Delta \vdash_p Q : d}{\Delta \vdash_p Q : \langle d \rangle} \quad e \text{ fresh}}{\Pi_{(\lambda x.P)Q} \rhd \Gamma \cdot \Delta \vdash_p (\lambda x.P)Q : e}$$

其中 $|I| \ge 1$、$PD_s^{min}(P) = (\Pi_P, E_P)$，且 $PD_s^{min}(Q) = (\Pi_Q, E_Q)$。根据构造，对于 P 中 x 的每次出现，Π_P 中都有一个主体为 x 的公理。由于我们假设 $P \neq x$，在 Π_P 中，每个这样的公理后面都接着一个 abs 规则或 app 规则。我们将集合 I 的索引划分为三个子集，逐一考察所有可能的情形，即令 $I = I_{abs} \sqcup I_{appl} \sqcup I^{appr}$。对于主体为 x 且后接 abs 规则的每个公理，Π_P 都包含一个形状如下的子推导 Ξ_i：

$$\dfrac{x : \langle a_i \rangle \vdash_p x : a_i \quad f_i, f_i' \text{ fresh}}{\Xi_i \rhd x : \langle a_i \rangle \vdash_p \lambda y.x : f_i} \qquad (i \in I_{abs})$$

其中 $y \neq x$。令所有上述 Ξ_i 生成的方程集为：

$$E_{abs} = \{ f_i \doteq \langle f_i' \rangle \to a_i \mid i \in I_{abs} \}$$

另一方面，如果引入 x 的公理后面紧跟一个应用规则，我们将根据 x 出现在应用的左侧还是右侧而区分两种子情况。对于 P 中处于函数位置的每个 x 出现位置， Π_P 包含一个形如以下内容的子推导 Σ_i：

$$\frac{x : \langle \mathtt{a}_i \rangle \vdash_{\mathtt{p}} x : \mathtt{a}_i \quad \dfrac{\Upsilon_i \vdash_{\mathtt{p}} R_i : \mathtt{g}_i}{\Upsilon_i \vdash_{\mathtt{p}} R_i : \langle \mathtt{g}_i \rangle} \quad \mathtt{h}_i \text{ fresh}}{\Sigma_i \rhd \{x : \langle \mathtt{a}_i \rangle\} \cdot \Upsilon_i \vdash_{\mathtt{p}} xR_i : \mathtt{h}_i} \qquad (i \in I_{\text{appl}})$$

令上述所有 Σ_i 的最后一条规则所生成的方程集为：

$$E_{\text{appl}} = \{\mathtt{a}_i \doteq \langle \mathtt{g}_i \rangle \to \mathtt{h}_i \mid i \in I_{\text{appl}}\}$$

转而关注 P 中处于参数位置的 x 的出现， Π_P 包含形如以下形式的子推导 Θ_i：

$$\frac{\Phi_i \vdash_{\mathtt{p}} S_i : \mathtt{i}_i \quad \dfrac{x : \langle \mathtt{a}_i \rangle \vdash_{\mathtt{p}} x : \mathtt{a}_i}{x : \langle \mathtt{a}_i \rangle \vdash_{\mathtt{p}} x : \langle \mathtt{a}_i \rangle} \quad \mathtt{l}_i \text{ fresh}}{\Theta_i \rhd \Phi_i \cdot \{x : \langle \mathtt{a}_i \rangle\} \vdash_{\mathtt{p}} S_i x : \mathtt{l}_i} \qquad (i \in I_{\text{appr}})$$

令上述所有 Θ_i 的最后一条规则所生成的方程集为：

$$E_{\text{appr}} = \{\mathtt{i}_i \doteq \langle \mathtt{a}_i \rangle \to \mathtt{l}_i \mid i \in I_{\text{appr}}\}$$

令 $\mathrm{E}_P^x = \mathrm{E}_{\text{abs}} \cup \mathrm{E}_{\text{appl}} \cup \mathrm{E}^{\text{appr}}$（显然可见 $\mathrm{E}_P^x \subseteq \mathrm{E}_P$）；此外，令 $\mathrm{E}_P^* = \mathrm{E}_P - \mathrm{E}_P^x$ 为由 Π_P 生成且与 P 中 x 的出现无关的约束子集。根据上述分析可知，E_M 具有以下形式：

$$E_M = E \sqcup E_P^* \sqcup E_P^x \sqcup E_Q \sqcup \{\mathtt{c} \doteq \langle \mathtt{a}_i \rangle_{i \in I} \to \mathtt{b}, \mathtt{c} \doteq \langle \mathtt{d} \rangle \to \mathtt{e}\}$$

对于某个 E。若 $|\mathrm{I}| = \mathrm{n} > 1$，即 (λx.P)Q 是一个非线性可约式，则对 E_M 应用合一规则会得到一个受阻方程 $\langle \mathrm{a1}, \ldots, \mathrm{a}_n \rangle \doteq \langle \mathrm{d} \rangle$（对于情形 $|\mathrm{I}| = \mathrm{n} = 1$，忽略以下有关扩展的讨论，直接继续讨论 ¯u，并令 $\Pi'_M = \Pi_M$ 和 $\mathrm{E}'_M = \mathrm{E}_M$）。此时，InferStrong 可以执行扩展，得到一个伪推导 Expand(⟨d⟩, n − 1, Π_M) = (Π'_M, E'_M)。在 $\Pi_{(\lambda x.P)Q}$的位置，推导 Π'_M 包含一个形如以下形式的子推导 $\Pi'_{(\lambda x.P)Q}$：

$$\frac{\Pi_P \rhd \Gamma, x : \langle \mathtt{a}_i \rangle_{i \in I} \vdash_{\mathtt{p}} P : \mathtt{b} \quad \mathtt{c} \text{ fresh}}{\Gamma \vdash_{\mathtt{p}} \lambda x.P : \mathtt{c}} \quad \frac{(\Pi_Q^i \rhd \Delta_i \vdash_{\mathtt{p}} Q : \mathtt{d}_i)_{i \in I}}{\cdot_{i \in I} \Delta_i \vdash_{\mathtt{p}} Q : \langle \mathtt{d}_i \rangle_{i \in I}} \quad \mathtt{e} \text{ fresh}}{\Pi'_{(\lambda x.P)Q} \rhd \Gamma \cdot_{i \in I} \Delta_i \vdash_{\mathtt{p}} (\lambda x.P)Q : \mathtt{e}}$$

其中（Π_Q^i、E_Q^i）（$\mathrm{i} \in \mathrm{I}$）是 $\mathrm{PD}_{\mathrm{s}}^{\min}(\mathrm{Q})$ 的 n 个互不相交的副本。因此我们有：

$$E'_M = E' \sqcup E_P^* \sqcup E_P^x \sqcup (\bigsqcup_{i \in I} E_Q^i) \sqcup \{\mathtt{c} \doteq \langle \mathtt{a}_i \rangle_{i \in I} \to \mathtt{b}, \mathtt{c} \doteq \langle \mathtt{d}_i \rangle_{i \in I} \to \mathtt{e}\}$$

对于某个 E′。注记 a_i($\mathrm{i} \in \mathrm{I}$)、c 不出现在 $\mathrm{E}' \sqcup \mathrm{E}_P^* \sqcup (\bigsqcup_{i \in I} \mathrm{E}_Q^i)$ 中，而 c、e 不出现在 $\mathrm{E}_P \sqcup (\bigsqcup_{i \in I} \mathrm{E}_Q^i)$ 中。对 E'_M 应用一系列适当的合一规则 ¯u，可以将方程 $\langle \mathrm{a}_i \rangle_{i \in I} \doteq \langle \mathrm{d}_i \rangle_{i \in I}$ 分解；每个 a_i 都可以替换为 d_i，并且 e 可以替换为 b。由此得到：

$$\bar{\mathrm{u}}(E_{\text{abs}}) = \{\mathtt{f}_i \doteq \langle \mathtt{f}'_i \rangle \to \mathtt{d}_i \mid i \in I_{\text{abs}}\}$$

$$\bar{\mathrm{u}}(E_{\text{appl}}) = \{\mathtt{d}_i \doteq \langle \mathtt{g}_i \rangle \to \mathtt{h}_i \mid i \in I_{\text{appl}}\}$$

$$\bar{\mathrm{u}}(E_{\text{appr}}) = \{\mathtt{i}_i \doteq \langle \mathtt{d}_i \rangle \to \mathtt{l}_i \mid i \in I_{\text{appr}}\}$$

$$\bar{\mathrm{u}}(\mathrm{E}'_M) = \mathrm{E}'[\mathrm{b}/\mathrm{e}] \sqcup \mathrm{E}_P^* \sqcup \bar{\mathrm{u}}(\mathrm{E}_P^x) \sqcup (\bigsqcup_{i \in I} \mathrm{E}_Q^i) \sqcup \{\mathrm{c} \doteq \langle \mathrm{d}_i \rangle_{i \in I} \to \mathrm{b}, \mathrm{e} \doteq \mathrm{b}\} \sqcup \{\mathrm{a}_i \doteq \mathrm{d}_i\}_{i \in I}$$

其中 $\bar{u}(E_P^x) = \bar{u}(E_{abs}) \cup \bar{u}(E^{appl}) \cup \bar{u}(E^{appr})$。现在我们证明：

$$E_N = E'[b/e] \sqcup E_P^* \sqcup \bar{u}(E_P^x) \sqcup (\bigsqcup_{i \in I} E_Q^i) \tag{1}$$

我们首先指出， Π_N而非$\Pi_{(\lambda x.P)Q}$包含一个子推导 $PD_s^{min}(P[Q/x]) = (\Pi_{P[Q/x]}, E^{P[Q/x]})$，其结尾为：

$$\Pi_{P[Q/x]} \triangleright \Gamma \cdot_{i \in I} \Delta_i \vdash_p P[Q/x] : b$$

反过来， $\Pi_{P[Q/x]}$ 包含与各种 Ξ_i、 Σ_i 和 Θ_i相对应的子推导，即 y:

$$\frac{\Pi_Q^i \triangleright \Delta_i \vdash_p Q : d_i \quad f_i, f_i' \text{ fresh}}{\Xi_i^{[Q/x]} \triangleright \Delta_i \vdash_p \lambda y.Q : f_i} \qquad (i \in I_{abs})$$

$$\frac{\Pi_Q^i \triangleright \Delta_i \vdash_p Q : d_i \quad \dfrac{\Upsilon_i \vdash_p R_i[Q/x] : g_i}{\Upsilon_i \vdash_p R_i[Q/x] : \langle g_i \rangle} \quad h \text{ fresh}}{\Sigma_i^{[Q/x]} \triangleright \Delta_i \cdot \Upsilon_i \vdash_p Q(R_i[Q/x]) : h_i} \qquad (i \in I_{appl})$$

$$\frac{\Phi_i \vdash_p S_i[Q/x] : i_i \quad \dfrac{\Pi_Q^i \triangleright \Delta_i \vdash_p Q : d_i}{\Delta_i \vdash_p Q : \langle d_i \rangle} \quad l \text{ fresh}}{\Theta_i^{[Q/x]} \triangleright \Phi_i \cdot \Delta_i \vdash_p (S_i[Q/x])Q : l_i} \qquad (i \in I_{appr})$$

其中 (Π_Q^i, E_Q^i)（$i \in I$）是 $PD_s^{min}(Q)$ 的 n 个互不相交的副本（与 $\Pi'_{(\lambda x.P)Q}$的右前提中完全相同）。注意， $\Xi^{[Q/x]}$ i、 $\Sigma^{[Q/x]}$ i 和 $\Theta^{[Q/x]}$ i 的环境可能比 Ξ_i、 Σ_i 和Θ_i （$i \in I$）的环境更大。因此，人们可能会想知道，由于这些修改， Π_N 的 abs 规则是否会生成不同于 $\bar{u}(E'_M)$中的方程。我们证明事实并非如此。首先，注意 P 中的绑定变量不能属于 $dom(\Delta_i) = dom(\Delta)$。因此，环境的扩充不会影响 $\Pi_{P[Q/x]}$生成的方程，即我们有 $E^{P[Q/x]} = E_P^* \sqcup \bar{u}(E_P^x) \sqcup (\bigsqcup_{i \in I} E_Q^i)$。接下来只需证明 $E_N - E^{P[Q/x]} = E'[b/e]$。对于 $E_N - E^{P[Q/x]}$ 中的大多数方程，这一点很容易证明；但对于 Π_N 中抽象各种 $z \in dom(\Delta)$ 所生成的 abs 规则对应的方程，则仍需格外留意。考虑任意这样的 z，并令 p （分别为 q ）表示 Π_P （分别为 Π_Q ）中主项为 z 的公理数。根据构造， Π_M 中有 $m = h + p + q$ 个主项为 z 的公理，其中 $h \geq 0$。另一方面， Π_N中有 $m' = h + p + n \times q$ 个主项为 z 的公理。查看 $\Pi'_{(\lambda x.P)Q}$可知， Π'_M 中也恰好包含 m' 个主项为 z 的公理。因此， Π_N中抽象 z 的 abs 规则生成的方程属于 $E'[b/e]$。证明了方程（1）后，我们注意到，求解 $\bar{u}(E'_M)$时， $\bar{u}(E'_M) - E_N = \{c \doteq \langle d_i \rangle_{i \in I} \to b, e \doteq b\} \sqcup \{a_i \doteq d_i\}_{i \in I}$不会对生成阻塞方程起任何作用，因为 a_i （$i \in I$）、c 和 e 均未出现在 E_N中。

T特殊情形 $P = x$。推导 Π_M 包含一个形状为 $\Pi_{(\lambda x.x)Q}$ 的子推导 ：

$$\frac{\dfrac{\Pi_P \triangleright x : \langle a \rangle \vdash_p x : a \quad b \text{ fresh}}{\vdash_p \lambda x.x : b}\ \text{abs-I} \quad \dfrac{\Pi_Q \triangleright \Delta \vdash_p Q : c}{\Delta \vdash_p Q : \langle c \rangle} \quad d \text{ fresh}}{\Pi_{(\lambda x.x)Q} \triangleright \Delta \vdash_p (\lambda x.x)Q : d}$$

因此我们有：

$$E_M = E \sqcup E_Q \sqcup \{b \doteq \langle a \rangle \to a, b \doteq \langle c \rangle \to d\}$$

对于某个 E。注意，a、b 不出现在 E $\sqcup$E$_Q$ 中，而 d 不出现在 E$_Q$ 中。对 E$_M$ 应用一系列适当的合一规则 $\bar{\mathrm{u}}$，可得：

$$\bar{\mathrm{u}}(E_M) = E[\mathtt{c}/\mathtt{d}] \sqcup E_Q \sqcup \{\mathtt{b} \doteq \langle \mathtt{c} \rangle \to \mathtt{c}, \mathtt{a} \doteq \mathtt{c}, \mathtt{d} \doteq \mathtt{c}\}$$

读者可以轻易验证 $E_N = E[\mathtt{c}/\mathtt{d}] \sqcup E_Q$；事实上，在 Π_N 中，与 $\Pi_{(\lambda x.x)Q}$ 对应的子推导就是 Π_Q。最后注意到，a、b 和 d 均未出现在 E$_N$中；因此$\bar{\mathrm{u}}$(E$_M$) $-$ E$_N$ = {b $\doteq \langle$c$\rangle \to$c,a $\doteq$c,d $\doteq$c} 在求解 $\bar{\mathrm{u}}$(E$_M$) 时，不会对生成受阻方程产生任何贡献。

情形 x 未出现在 P 中。首先要强调的是，F$_\infty$ 归约策略会在适当的子项中选取最左最外可归约式（见定义 28）。回忆一下，中性项的形式为 xN$_1 \ldots$N$_n$(n ≥ 0)，其中每个 N$_i$都是范式，而最左最外归约策略$\to_{\mathsf{LO}}$ 可以在以下上下文中进行归约：

(a) 若 M $\to_{\mathsf{LO}}$ M′，则 λx.M $\to_{\mathsf{LO}}$ λx.M′；(b) 若 M $\to_{\mathsf{LO}}$ M′，则 MN $\to_{\mathsf{LO}}$ M′N；(c) 若 M $\to_{\mathsf{LO}}$ M′ 且 N 是中性项，则 NM $\to_{\mathsf{LO}}$ NM′。

现在考虑推导 Π_M，它包含一个形状如下的子推导 $\Pi_{(\lambda x.P)Q}$：

$$\dfrac{\dfrac{\Pi_P \rhd \Gamma \vdash_{\mathrm{p}} P : \mathtt{a} \quad \mathtt{b}, \mathtt{e} \text{ fresh}}{\Gamma \vdash_{\mathrm{p}} \lambda x.P : \mathtt{b}}\ \textsf{abs-K} \quad \dfrac{\Pi_Q \rhd \Delta \vdash_{\mathrm{p}} Q : \mathtt{c}}{\Delta \vdash_{\mathrm{p}} Q : \langle \mathtt{c} \rangle}}{\Pi_{(\lambda x.P)Q} \rhd \Gamma \cdot \Delta \vdash_{\mathrm{p}} (\lambda x.P)Q : \mathtt{d}}\ \mathtt{d} \text{ fresh}$$

其中 PD$^{\mathtt{min}}_{\mathtt{s}}$(P) =($\Pi_P$,E$_P$)，且 PD$^{\mathtt{min}}_{\mathtt{s}}$(Q) =($\Pi_Q$, E$_Q$)。因此，E$_M$具有如下形式：

$$E_M = E \sqcup E_P \sqcup E_Q \sqcup \{\mathtt{b} \doteq \langle \mathtt{e} \rangle \to \mathtt{a}, \mathtt{b} \doteq \langle \mathtt{c} \rangle \to \mathtt{d}\}$$

对于某个 E。首先指出，在 Π_N 中，与 $\Pi_{(\lambda x.P)Q}$ 对应的子推导就是 Π_P，因此 E$_N$ 不包含 E$_Q$，也不包含 {b $\doteq \langle$e$\rangle \to$ a, b $\doteq \langle$c$\rangle \to$ d}。显然，后一个集合不会对生成受阻方程有任何贡献，因为 b、d 和 e 都是新鲜的。类似地，可以验证 E$_Q$中的方程实际上可以忽略：事实上，根据引理 26，单独求解 E$_Q$ 会得到一个已解形式，因为 Q 是范式。然而，如果 Q 的某些自由变量被抽象，那么 E$_Q$中出现的预类型变量也可能出现在 E 中；我们将证明，这些变量对 E$_M$的解没有任何实质影响，因此 E$_M$ 可解当且仅当 E$_N$ 可解。令 y $\in$ FV(Q) 为一个被抽象变量，并令 Δ(y) = σ（注意，当然，σ中的预类型变量不会出现在 E$_N$中）。现在考虑 M 的子项 λy.R；注意，R 包含 (λx.P)Q。我们分析可能产生涉及 σ中预类型变量的方程的两种情形；当包含 λy.R 的项成为某个应用的函数部分或参数部分时，就会发生这种情况。为便于阅读，以下我们稍微滥用伪推导的语法，隐式地执行一些简单的合一步骤。

(i) 在 fi 中首先，我们通过反证法进行推理。假设存在一个形如以下形式的 Π_M 子推导：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Phi \vdash_{\mathrm{p}} \lambda y.R : \sigma_1 \cdot \sigma \cdot \sigma_2 \to \mathtt{f}}{\vdots}}{\Upsilon_1 \vdash_{\mathrm{p}} \mathtt{K}[\lambda y.R] : \sigma_1 \cdot \sigma \cdot \sigma_2 \to \mathtt{f}} \quad \Upsilon_2 \vdash_{\mathrm{p}} S : \tau}{\Upsilon \vdash_{\mathrm{p}} \mathtt{K}[\lambda y.R]S : \mathtt{f}}$$

对于某个归约上下文 K。根据 F_∞ 的定义，结合 $\to_{LO}$-归约的 (a) 和 (b) 两点，上下文 K 必须由以下文法生成：

$$K ::= \Box \mid \lambda x.K \mid KM$$

然而，这将至少产生一个以 (λx.P)Q 为子项的可归约式，从而与 (λx.P)Q 是 K[λy.R]S 中最左最外可归约式这一假设相矛盾。因此，这种情形是不可能的。

(ii) 对于第二种情形，考虑 Π_M 的一个形如下述的子推导：

$$\dfrac{\Upsilon_1 \vdash_p S : g \qquad \dfrac{\Phi \vdash_p \lambda y.R : \sigma_1 \cdot \sigma \cdot \sigma_2 \to f}{\dfrac{\vdots}{\dfrac{\Upsilon_2 \vdash_p \lambda v_1 \ldots v_m y.R : A}{\Upsilon_2 \vdash_p \lambda v_1 \ldots v_m y.R : \langle A \rangle}}}}{\Upsilon \vdash_p S(\lambda v_1 \ldots v_m y.R) : h}$$

其中对某个 $m \geq 0$，有 $A = \tau_1 \to \ldots \to \tau_m \to \sigma_1 \cdot \sigma \cdot \sigma_2 \to f$。根据 F_∞ 的定义以及 $\to_{LO}$-归约的第 (c) 点，S 必须是一个中性项，即对某个 $n \geq 0$，$S = zS_1 \ldots S_n$。设 $z : \langle l \rangle \vdash_p z : l$ 为引入 z 的公理；则合一规则会生成一个形如 $l \doteq \tau'_1 \to \ldots \to \tau'_n \to \langle A \rangle \to h$ 的方程。如果还生成了其他涉及 l 的方程，就可能出现潜在的问题情形，因为此时 σ中包含的预类型变量可能在 E_M的解中起作用。然而，如前所述，这只有在 z 被抽象，并且随后某个包含 λz.T 的子项成为某个应用的函数部分或参数部分时才会发生。注意，将 λy.R 替换为 λz.T 后，可以重复第 (i) 点和第 (ii) 点中讨论的推理；这将得到一个处于头位置的变量 z′、一条公理 $z' : \langle l' \rangle \vdash_p z' : l'$、一个使得 l 出现在 B 中的方程 $l' \doteq B$，依此类推。由于这一过程不能无限迭代，我们得出结论：只能生成一条不影响 E_M 可解性的有限方程链。

归纳步骤。根据归纳假设，InferStrong(M) 终止当且仅当 InferStrong(M_k) 终止。令 $M_k = C[(\lambda x.P)Q] \to_\beta C[P[Q/x]] = M_{k+1}$，按照 F_∞ 归约策略进行，并令 $PD_s^{min}(M_k) = (\Pi_k, E_k)$。由于 Π_k 包含一个主体为 (λx.P)Q 的子推导，我们可以像基础步骤那样进行证明，从而得出 InferStrong(M_k) 终止当且仅当 InferStrong(M_{k+1}) 终止。因此，该性质对所有 k 均成立。

□

注记 4。引理29的证明技巧可以用来弥补 [27], 中一个类似终止性证明的某些漏洞，该证明对 K归约步骤的处理有误。

C 合流性

引理（32）。设 $(\Pi,E) \Rightarrow (\Pi_1,E_1)$，且 $(\Pi, E) \Rightarrow (\Pi_2, E_2)$。那么存在 (Π_3, E_3)，使得 $(\Pi_1, E_1) \Rightarrow^* (\Pi_3, E_3)$，并且以下两者之一成立：$(\Pi_2,E_2) \Rightarrow (\Pi_3, E_3)$ 或 $(\Pi_2, E_2) = (\Pi_3, E_3)$。

证明。（概要）我们分析算法可能执行的两个同起点扩展如何相互影响。设 Π 包含如下形状的子推导：

$$\dfrac{\Sigma_1 \triangleright \Gamma_1 \vdash_p P : b \quad \Sigma_2 \triangleright \Gamma_2 \vdash_p Q : \sigma}{\Gamma \vdash_p PQ : a}\ \text{app}$$

并假设对 E 应用合一规则后得到一个受阻方程 $\tau \doteq \sigma$，该方程源自某个 τ 的方程 $b \doteq \tau \to A$，且满足 $|\tau| \neq |\sigma|$。设 e_2 为算法为尝试解除该方程的阻塞而执行的扩展。我们区分两种情形：

- 首先，考虑这样一种情形：除了 e2 之外，算法还可以在 Σ_1 中执行扩展 e1。于是，$\Pi \Rightarrow \Pi_1$ 和 $\Pi \Rightarrow \Pi_2$，其中 $\Pi_1 = e1(\Pi)$，而 $\Pi_2 = e2(\Pi)$。我们先从情形 $|\sigma| < |\tau|$开始。若在 Π_1 中，将列表 τ替换为τ'，使得—$\tau| < |\tau'|$，算法便无法再应用 e2；相反，算法可以构造 $\Pi_3 = \text{Expand}(\sigma, |\tau'| - |\sigma|, \Pi_1)$。在 Π_2中，列表 σ 被替换为σ'，使得 $|\sigma'| = |\tau|$，且 ¯e1 仍然适用。因此，从 $\Pi' =$e1(Π_2)开始，算法可以构造与之前相同的伪推导，即$\Pi_3 = \text{Expand}(\sigma', |\tau'| - |\sigma'|, \Pi')$。于是我们有 $\Pi_1 \Rightarrow \Pi_3$和 $\Pi_2 \Rightarrow^* \Pi_3$。另一方面，如果 e1 不修改$\tau$，可以验证 $e2(\Pi_1) = e1(\Pi_2) = \Pi_3$，也就是说，$\Pi_1 \Rightarrow \Pi_3$ 和 $\Pi_2 \Rightarrow \Pi_3$。现在注意，在 InferStrong(M) 的整个执行过程中，情形 $|\tau| < |\sigma|$ 不可能发生：事实上，应用规则主前提中列表的长度始终大于或等于其次前提中列表的长度。原因是，算法的起始点，即最小强伪推导 $PD^{min}s$ (M)，满足这一性质（因为所有规则中的 $n = 1$ 都很多），且扩展操作会保持这一性质（回想一下，我们假设扩展的定义使列表长度不会减少）。

- 其次，考虑这样一种情形：除了 e2 之外，算法还可以在 Σ_2 内执行扩展 e1。可以验证，e1 不会修改 σnor τ，因此 e2 可以应用于 $\Pi_1 = e1(\Pi)$。同样，由于 e2 会引入 PD^{min}_s (Q) 的额外新副本，且不会干扰 Σ_2 的现有前提（包括 e1 作用于其上的那个前提），扩展 e1 可以应用于$\Pi_2 = e2(\Pi)$。因此 $e_2 \circ e1(\Pi) = e_1 \circ e2(\Pi) = \Pi_3$，即 $\Pi_1 \Rightarrow \Pi_3$ and $\Pi_2 \Rightarrow \Pi_3$。

□