机器学习研究会议录 1–25

连续模态逻辑神经网络：通过随机可达关系进行模态推理

Antonin Sulc
美国加利福尼亚州伯克利，劳伦斯伯克利国家实验室，
asulc@lbl.gov

arXiv:2603.04019v1 [cs.LO] 4 Mar 2026

摘要

我们提出流体逻辑（Fluid Logic），这是一种将模态逻辑推理——包括时间、认知、信念和义务推理——从离散的克里普克结构提升到连续流形上的范式，该范式通过神经随机微分方程（Neural SDE）实现。每种模态算子都由专用的神经随机微分方程提供支持，而嵌套公式则在单个可微图中组合这些随机微分方程。一种关键实例是逻辑引导神经网络（LINN）：与物理信息神经网络（PINN）类似，LINN 将模态逻辑公式（例如 (□有界) 和 (◊ 访问_叶瓣）直接纳入训练损失，引导神经网络生成在结构上符合指定逻辑性质的解，而无需了解控制方程。

由此得到的框架——连续模态逻辑神经网络（CMLNN）——具有若干关键性质：(i) 随机扩散可防止量词坍缩（□ 和 ◊ 不同），而确定性常微分方程则不具备这一特性；(ii) 模态算子是熵风险度量，对于基于风险的语义具有可靠性，并提供明确的蒙特卡洛集中保证；(iii) 由随机微分方程诱导的可达关系与经典模态公理具有结构对应关系；(iv) 通过动力学参数化可达关系，可将内存占用从随世界数量呈二次增长降低为随参数数量呈线性增长。

三个案例研究表明，流体逻辑和逻辑引导神经网络能够引导神经网络在不同领域中生成一致的解：认知／信念逻辑（多机器人幻觉检测）、时序逻辑（仅凭逻辑约束恢复洛伦兹吸引子的几何结构），以及道义逻辑（根据逻辑规范学习安全约束动力学）。

关键词：流体逻辑、逻辑引导神经网络、模态逻辑、神经随机微分方程、神经符号人工智能

1. 引言

模态逻辑神经网络（MLNNs）（Sulc，2025年）在离散世界上建立了可微分的 □ 和 ◊算子。然而，有限的世界集合从根本上限制了对连续物理、变化中的信念以及时间轨迹的推理。

本文提出连续模态逻辑神经网络（CMLNN）（Li 等人，2020年），通过神经随机微分方程（Li 等人，2020年），将模态推理从离散克里普克结构扩展到连续流形。其核心洞见是，每种模态逻辑类型——时间、认知、信念、义务——都对应于同一状态空间上的一种不同随机过程。嵌套公式将这些过程组合起来： B_a（$\Box_{[0,T]}$安全）沿着每条路径运行信念动力学，然后评估时态必然性。

我们将这一范式称为流体逻辑：逻辑真值按照学习到的动力学，在流形上随机流动。可达关系变为随机可达性； w' 能够从 w 到达的程度，取决于 w' 落在从 w出发的随机微分方程样本路径分布中的程度。

© A. Sulc。

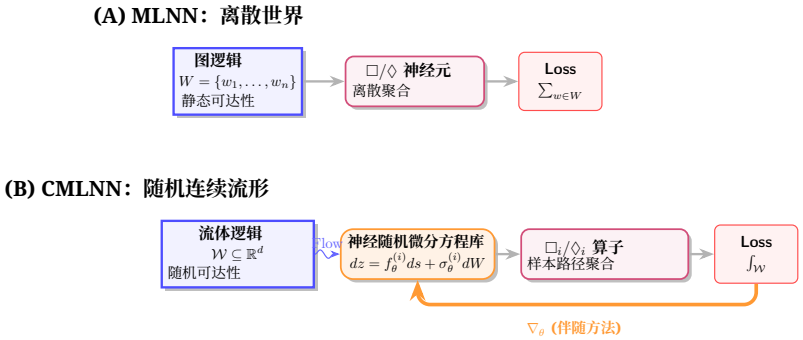


图1：从图逻辑到流体逻辑的转变。(A) 模态逻辑神经网络在具有静态、可枚举可及关系的有限世界集合上运行。(B) CMLNNs将世界嵌入连续流形 $\mathcal{W}$，其中每个模态算子 $\square_i$，$\Diamond_i$ 由其自身的神经随机微分方程定义。随机扩散系数 $\sigma_\theta^{(i)}$ 产生真正的分支，使 □ （所有样本路径）与 ◇ （存在一条样本路径）具有语义上不同的含义。梯度经由随机伴随方法流经随机微分方程求解器。

流体逻辑的主要优势包括：(1) 每种算子类型都有各自的随机微分方程作为支撑，因此能够处理信号时序逻辑中无法实现的多模态公式；(2) 随机微分方程会生成未来分布，使得 □ 和 ◇ 具有不同的语义，并避免量词坍缩（定理2）；(3) 模态公理源自随机微分方程性质（初始化、可逆性、遍历性），而非显式正则化；(4) 算子是熵风险度量，在基于风险的模态语义下具有可靠性，并具备蒙特卡洛集中保证（定理1）。

贡献。 (i) 我们提出流体逻辑，这是一种范式，其中每种模态算子类型都由专用的神经随机微分方程支撑，嵌套公式则组合随机微分方程。(ii) 我们引入逻辑引导神经网络（逻辑引导神经网络），将模态逻辑规范直接嵌入训练损失，引导神经网络产生与规定逻辑性质一致的解。(iii) 我们证明随机扩散可防止量词坍缩（$\square \neq \Diamond$），且这些算子相对于基于熵风险的语义是可靠的。(iv) 我们在涵盖认知、信念、时间与义务模态逻辑的三项案例研究中展示了CMLNNs。

2. 相关工作

模态逻辑神经网络。 MLNNs（Sulc，2025年）引入了可微的 Kripke语义，其中包含 □/◇作用于离散世界的神经元。CMLNNs 将这种方法从基于图的逻辑（以节点表示世界，以边表示可达关系）扩展到流体逻辑（世界位于流形上，通过随机流实现可达关系），同时借助随机微分方程库支持多模态推理。

神经随机微分方程。 神经随机微分方程（Li 等人，2020年）通过学习得到的扩散扩展了常微分方程（Chen 等人，2018）。我们以一种根本不同的方式使用它们：不是用于生成建模或随机深度，而是用来定义模态逻辑的 可及结构，其中扩散控制可能世界的分支。

信号时序逻辑（STL）。 STL（Maler 和 Nickovic，2004）为□/◇ 连续时间信号（Donzé 和 Maler，2010）提供了可微分的信号时序逻辑鲁棒性。单独来看，CMLNN 时间算子与随机微分方程展开上的可微分信号时序逻辑鲁棒性密切相关。CMLNNs

从三个方面扩展 STL：（i）具有可靠性保证的区间真值界 $[L, U]$；（ii）通过多重随机微分方程架构实现的非时间模态（认知、信念、义务），这是 STL 无法表达的；（iii）多重随机微分方程组合，其中嵌套公式将具有不同语义和初始化的算子串联起来。

其他相关工作。微分动态逻辑（d$\mathcal{L}$）提供形式化的混合系统验证，但需要手工构造的不变式[1]；CMLNNs 从数据中学习结构，并给出概率保证。神经李雅普诺夫方法（Chang 等人，2019年）和屏障方法（Ames 等人，2016年）只能认证单一性质，而无法将时序不变性与认知不确定性组合起来。概率模型检测器（PRISM、STORM）需要有限离散状态空间。

3. 方法：连续模态逻辑神经网络

3.1. 从图逻辑到流体逻辑

在离散克里普克模型中，世界是图节点，可达关系是固定的边矩阵。CMLNNs 将其提升到连续流形 $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^d$：每种模态类型 i 是一个神经随机微分方程 $dz = f_\theta^{(i)}(z,\ s)\ ds + \sigma_\theta^{(i)}(z,\ s)\ dW_s$，其样本路径定义随机可达关系。可达关系变为学习到的动力学下的可达性，且内存规模为 $O(|\theta|)$ 而非 $O(|W|^2)$。与确定性常微分方程不同，在后者中 $\Box\phi = \Diamond\phi$（量词坍缩），随机微分方程会扇出为一个分布：$\Box$ 充当路径上的软最坏情况，而 $\Diamond$ 充当软最好情况。扩散系数 $\sigma_\theta^{(i)}$ 是学习到的分支因子，使这些算子真正彼此不同（定理 2）。

3.2. 连续模态算子

原子公式返回实值鲁棒性裕度，所有复合公式都按照信号时序逻辑的含义传播鲁棒性（正值表示满足，负值表示违反）。为获得集中界并实现稳定训练，我们假设鲁棒性在相关定义域上有界（这可能是因为 $\mathcal{W}$ 是紧致的且赋值是利普希茨连续的，也可能是通过显式裁剪实现的）：$L_\phi(w)\ U_\phi(w) \in [-B, B]$，其中 $B > 0$。若需使用连续模态真值度进行可视化，我们会报告归一化值 $\tilde{v}_\phi(w) = \sigma(L_\phi(w)/\beta)$，其中使用 S 形函数 σ 和尺度 β。图和表会明确标注：报告原始 L、U 时标注“鲁棒性”；报告以 $[0, 1]$ 表示的值时标注“$\tilde{v}$”或“归一化”。

CMLNN 维护一个区间 $[L_\phi(w)\ U_\phi(w)]$，用于界定世界 w 中公式 ϕ 鲁棒性的范围。为评估模态性质，我们从 w 中抽取 N_{mc} 条 SDE i 的样本路径 $\{\omega_n\}$，覆盖 K 个时间网格点 $\{s_k\}$。我们首先计算逐路径得分（沿路径 ω_n 对 L_ϕ 取软最小值），以找出随时间变化的 ϕ-满足度中的“最薄弱环节”：

$$g_n = -\tau_s \log \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} \exp\left(-\frac{L_\phi(\Phi_\theta^{(i),s_k}(w; \omega_n))}{\tau_s} \right) \tag{1}$$

1. 一个标准参考文献是 Platzer，《信息物理系统的逻辑基础》，施普林格，2018。

The 必然性（$\Box_i$）和可能性（$\Diamond_i$）算子会跨路径汇总这些得分 s:

$$L_{\Box_i\phi}(w) = -\tau_\omega \log \tfrac{1}{N_{\text{mc}}} \sum_n \exp(-g_n/\tau_\omega) \tag{2}$$

$$U_{\Diamond_i\phi}(w) = \ \tau_\omega \log \tfrac{1}{N_{\text{mc}}} \sum_n \exp(h_n/\tau_\omega) \tag{3}$$

其中 h_n 是沿着 ω_n的 U_ϕ 软最大值。这使两个算子都成为温度为 τ的熵风险度量： $\Box_i$ 使用软最小值来稳健地识别最坏情况路径，而 $\Diamond_i$ 使用软最大值来识别最佳情况路径。当 $\tau \to 0^+$时，它们恢复经典的 $\forall/\exists$ 量词。关键的结构性质是可靠性间隙：

$$L_{\Box_i\phi}(w) \ \le \ L_\phi(w) + \tau_s \log K + \tau_\omega \log N_{\text{mc}} \tag{4}$$

这是一种 T 型包含性质：由于 s=0属于软最小值的参数，因此内层软最小值给出 $g_n \le L_\phi(w) + \tau_s \log K$，而外层聚合增加 $\tau_\omega \log N_{\text{mc}}$；当$\tau_s$， $\tau_\omega \to$0时，间隙消失。总体层面的方程见附录 A。

3.3. 多模态SDE库

统一的架构是一个由具名随机微分方程组成的库，每种模态对应一个：

$$\mathcal{F} = \left\{ \left(i,\ f_\theta^{(i)},\ \sigma_\theta^{(i)},\ \texttt{init}^{(i)} \right) \right\}_{i \in I} \tag{5}$$

嵌套公式将随机微分方程组合起来。对于 B_a(□$_{[0,T]}$安全)：(1) 从 $\hat{x}_a$抽取信念样本路径；(2) 沿每条路径，使用物理随机微分方程评估时间 □；(3) 通过外层软最小值进行聚合。

时序算子（$\Box_{[a,b]}\phi$）采用漂移为 $f_\theta^{(\text{temp})}$ 的随机微分方程来学习物理动力学，并初始化于真实状态 $z(0) = x_{\text{true}}$。认知算子（$K_a\phi$）采用条件随机微分方程 $f_{\theta\,a}^{(\text{epist})}(z,\ y_a,\ s)$，从 $z(0) = x$ 探索观测一致状态，作为经典 S5 知识的连续松弛。信念算子（$B_a\phi$）采用智能体的（可能有误的）内部模型 $\hat{f}_{\theta\,a}^{(\text{dox})}$，并初始化于 $z(0) = \hat{x}_a \neq x$；按构造，公理T不成立，因为信念可能为假。义务算子（$O\phi$）采用经训练以保持在允许区域 $\mathcal{P}$ 内的随机微分方程； $O\phi \not\to \phi$ 因为义务可能遭到违反。

认知与信念的区分归结为一个设计选择：在真实状态（K_a，鼓励满足公理T）还是信念状态（B_a，公理T不成立）处初始化随机微分方程。幻觉检测是 B_a(safe) $\wedge \neg$安全的：信念随机微分方程与时态随机微分方程彼此不一致。

3.4. 公理性质

经典模态公理对应于随机微分方程架构的结构性质（完整对应关系见表 3，附录）。这些是结构类比，而非经典公理满足性的形式证明。公理T（真实性， $\Box\phi \to \phi$）之所以得到鼓励，是因为s=0 位于时间网格中，因此 $L_\phi(w)$ 始终位于软最小值的参数集合中： $L_{\Box_i\phi}(w) \ \le L_\phi(w) + \tau_s \log K + \tau_\omega \log N_{\text{mc}}$ （公式 4）；当 τ_s时，间隙消失 $\tau_\omega \to 0$。公理D（串行性）严格成立，因为任何随机微分方程都会生成至少一条路径。公理4（传递性）通过马尔可夫半群性质近似成立。对于信念随机微分方程（$z(0) = \hat{x} \neq x$），公理T在构造上不成立，而这正是实现幻觉检测的关键。

3.5. 训练

CMLNN 采用端到端方式训练：

$$\mathcal{L}_{\text{total}} = \mathcal{L}_{\text{task}} + \beta\mathcal{L}_{\text{contra}} + \gamma\mathcal{L}_{\text{physics}} + \sum_i \lambda_i \mathcal{L}^{(i)}_{\text{axiom}} \tag{6}$$

其中 $\mathcal{L}_{\text{contra}}$ 惩罚矛盾（$L > U$）， $\mathcal{L}_{\text{physics}}$ 可选择地施加已知物理规律约束，并且 $\mathcal{L}^{(i)}$ 公理 鼓励采用模态特定公理。梯度通过随机伴随方法经由随机微分方程求解器传播（Li 等人, 2020年）。在纯可满足性模式下， $\mathcal{L}_{\text{task}} = 0$ ，所有监督信号均来自逻辑规范。

4. 理论分析

4.1. 可靠性

CMLNN 算子相对于基于熵风险的模态语义是可靠的，而非相对于经典克里普克语义。在有限温度下，这些算子比本质下确界更乐观，因此可能忽略罕见但灾难性的路径。

定理 *1*（*CMLNN* 基于风险的界的可靠性）设 *CMLNN* 使用理论 Γ_0 和随机微分方程库 $\mathcal{F}$ 初始化，且其中包含非空的一致概率测度。假设逐路径得分有界 $g_n \in [-B, B]$ （例如，通过在紧致 $\mathcal{W}$ 上采用有界/利普希茨赋值，或进行显式裁剪），因此 $L_\phi \in [-B, B]$。对于集中界，假设 $B \le C\tau_\omega$ 对某个常数 C 成立（例如通过裁剪 g/τ_ω 或重新缩放，使指数范围保持有界）：*(a)* 对于熵风险度量 $\mathcal{P}^{\text{risk}}_\tau$，总体软算子满足 $L^{\text{pop}}_\phi(w) \le \mathcal{P}^{\text{risk}}_\tau(S_\phi, w)$（确定性，无蒙特卡洛误差）。*(b)* 在 $B \le C\tau_\omega$ 条件下，蒙特卡洛估计量集中于：$\mathbb{P}(|\hat{L}_\phi - L^{\text{pop}}_\phi| \ge \epsilon) \le 2\exp\big(-c(C) N_{\text{mc}}\epsilon^2/\tau_\omega^2\big)$，其中某个 $c(C) > 0$ 取决于 C （附录 *C* 给出了显式表达式）。*(c)* 当 $\tau \to 0^+$ 时，软最小值/*Softmax* 收敛到本质下确界/本质上确界；只有在对原子赋值作出明确的布尔化假设（例如符号阈值化或 $\{0,1\}$ 值原子）时，才可得到经典 *Kripke*语义（每个世界上的布尔真值）。在固定-B 情形下（没有 $B \le C\tau_\omega$），当固定 B 时，样本复杂度随 $\tau_\omega \to 0$ 发散，这反映了集中界中的 $e^{\Theta(B/\tau_\omega)}$ 爆炸。

定理1 确保网络输出构成系统安全性在所选风险阈值 τ以内的数学上可靠下界，并具有蒙特卡洛集中。关键在于，该可靠性严格相对于熵风险度量，而非经典克里普克语义。在有限的 τ下，风险度量比本质下确界更为乐观，并可能忽略罕见的灾难性路径，从而充当适定的优化目标，而非严密的验证保证。完整证明见附录C。

4.2. 量词不坍缩

定理 2（量词不坍缩）设 $\sigma^{(i)}_\theta$ 在一个正测度集合上非退化。则存在 ϕ、 w ，使得 $L_{\Box_i\phi}(w) < U_{\Diamond_i\phi}(w)$。

在确定性系统中，“所有未来”（□）和“某个未来”（◇）会坍缩为完全相同的陈述，因为只有一条轨迹。定理 2表明，随机

扩散通过将路径分支为多个分布，避免了这种量词坍缩，使必然性和可能性成为真正不同的概念。

证明 [概要：] 非退化扩散意味着某些 s^* 上存在正方差。选择一个在支撑集上变化的光滑 Lipschitz 谓词。示例： $\mathcal{W} = \mathbb{R}$, $\phi(z) = \tanh(z)$, $w = 0$, $dz = \sigma\, dW_s$。于是，以正概率， $\phi(\Phi^{s^*}(0))$ 接近 1；而以正概率，它接近 -1，因此软最坏情况聚合与软最好情况聚合不同，从而得到 $L_{\Box_i\phi}(w) < U_{\Diamond_i\phi}(w)$。对于确定性常微分方程（$\sigma \equiv 0$），流是单条轨迹，两个算子相同。 ■

4.3. 复杂度

一次模态算子求值的成本为 $O(N_{\text{mc}} \cdot K \cdot C_f)$ 其中 $C_f = O(d \cdot |\theta_i|)$；样本路径可轻松并行处理。对于嵌套深度 D，最坏情况成本为 $O(N_{\text{mc}}^D \cdot K^D \cdot C_f)$。我们的实验采用 $D \leq 2$。更多定理（收敛、通用逼近、样本复杂度、可微性）见附录B。

5. 实验

我们在三个案例研究上评估 CMLNNs，涵盖认知、信念、时间和义务模态逻辑，以验证该框架在不同领域中的多模态通用性。概述见附录 E。

5.1. 案例　研究 1：认知 + 信念逻辑，群体幻觉检测

我们模拟了一个自定义二维环境，其中由 5 辆漫游车组成的集群在驶向目标的同时避开一个危险空间区域（“裂谷”）。这使我们能够在连续空间中定义精确的多模态逻辑场，而不受离散约束。漫游车3发生传感器故障，导致其内部模型在别处幻觉出一条虚假裂谷，同时认为真实峡谷是安全的。关键公式：

$$B_{\text{rover3}}(\Box_{[0,T]}\text{safe}) \ \wedge \ K_{\text{swarm}}(\Diamond_{[0,T]}\text{collision}) \tag{7}$$

需要两个不同的随机微分方程：一个用于信念（基于漫游车3所相信的状态），另一个用于认知（以正常传感器为条件）。标准的单一随机微分方程或纯信号时序逻辑表述，若不分别定义评估模型，就无法自然地表达这一合取关系。

三个随机微分方程共享状态空间 $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^{4\times5}$：时间（真实物理规律， $z(0) = x_{\text{true}}$）、认知（群体知识， $z(0) = x_{\text{true}}$，以正常传感器为条件）和信念（漫游车3的内部模型， $z(0) = \hat{x}_3$，使用过时动力学）。当 $L_{B_3}(\Box\text{安全}) > 0.8$ 和 $U_{K_{\text{swarm}}}(\Diamond\,\text{碰撞}) > 0.3$同时成立时，便会触发幻觉标志。

结果。 第 1 轮训练时检测到幻觉，并在整个训练过程中持续存在（图 2）。在联合训练期间（N_{mc}=24），信念界限 $L_{B_3}(\Box\text{安全})$ 始终超过 0.8 的检测阈值（峰值为 1.04），而认知界 $U_{K_{\text{swarm}}}(\Diamond\text{碰撞})$ 超过 0.3，这证实了漫游车3认为所有未来都安全，而集群知道碰撞有可能发生。在采用更高蒙特卡洛精度（N_{mc}=256）进行最终评估时，较为保守的估计得到 $L_{B_3} = 0.73$ 和 $U_{K_{\text{swarm}}} = 1.25$；信念界限略低于 0.8 的阈值，这与蒙特卡罗集中界一致（命题 8）。Wasserstein

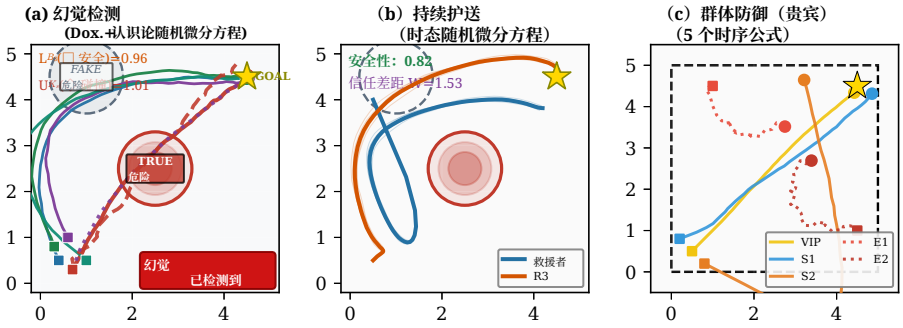


图2：案例研究 1：三个多智能体场景。（a）幻觉检测（认知+ 信念随机微分方程）：漫游车3（故障传感器）在存在危险的地方却认为是安全的。实线表示真实轨迹；红色虚线表示信念路径；紫色点线表示认知路径。当 $L_{B_3}(\Box\text{安全})>0.8$ 且$U_{K_{\text{sw}}}(\Diamond\text{碰撞})>0.3$时，幻觉标志就会触发。（b）持续护送（时态随机微分方程）：一名救援者（蓝色）学会在真实峡谷周围保护漫游车3（橙色），并朝目标（星形标记）前进；最终实际安全性为 0.82，信任差距为 W=1.53。（c）群体防御（5 个时序公式）：侦察兵 S1/S2 护送贵宾（黄色），同时躲避敌人 E1/E2；五个逻辑目标经过联合优化。更多详情见附录 E。

信念—现实差距稳定在 $W = 0.39$，量化了信念—认知分歧。空间模态真值场（见附录图 9 ）表明，只有当漫游车3的初始位置使其轨迹穿过真实峡谷时，才会检测到幻觉；也就是说，恰好是在两种随机微分方程在空间上存在分歧的位置。两个子实验验证了其他多智能体公式：(B) 双漫游车持续护送场景，救援者学会保护漫游车3（最终安全性 0.82，信任差距1.53），以及 (C) 五智能体群体防御（贵宾保护），包含五个联合优化的时序公式（其中 _界限： 0.16，安全： 0.12，跟随： -0.03，攻击：-0.20，探索： -0.47）。

5.2. 案例研究 2：时序逻辑与洛伦兹混沌系统（逻辑引导神经网络）

Lorenz-63 系统是混沌流体对流的经典模型。本文选择该系统，是因为其由两个明显叶瓣构成的蝴蝶吸引子对初始条件高度敏感。这种混沌特性使确定性神经模型难以捕捉其全局结构，尤其是在轨迹发生分歧后。为解决这一问题，我们引入逻辑引导神经网络（LINNs）。它们类似于物理信息神经网络（PINNs），但约束的是模态逻辑轨迹性质，而非局部微分方程：

$$\Box_{[0,T]}(\text{bounded}) \ \wedge \ \Diamond_{[0,T]}(\text{visits_lobe}) \tag{8}$$

这要求在 $\Box \neq \Diamond$ Lorenz-63 吸引子上：所有轨迹都必须保持有界，但其中一些必须访问次级叶瓣。确定性常微分方程无法满足这一要求（量词坍缩）；随机微分方程的扩散则带来了真正的分支。本文比较了八种模型（神经常微分方程、纯均方误差随机微分方程、物理信息神经网络、物理信息神经网络+噪声、集成常微分方程、常微分方程+逻辑引导神经网络、随机微分方程+逻辑引导神经网络、物理信息神经网络+逻辑引导神经网络）。

结果。 表 1 报告了所有指标。真实模态值通过在随机洛伦兹系统上进行 256 条路径的蒙特卡洛计算获得，所采用的尺度与我们的算子所使用的同一有界鲁棒性尺度

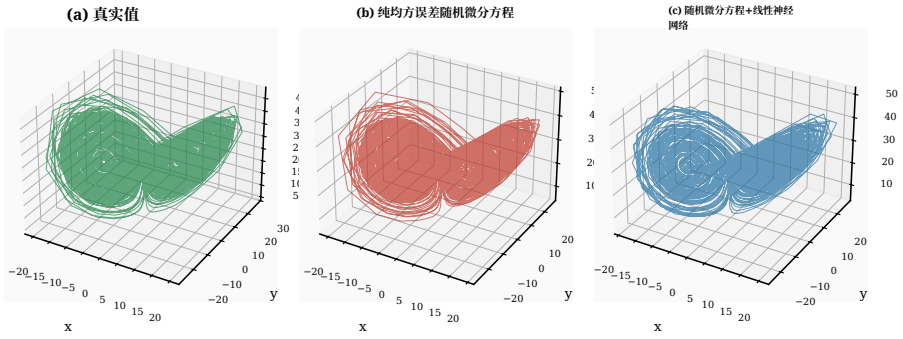


图 3：案例研究 2：洛伦兹-63 上的三维吸引子对比。真实值呈现经典的双叶瓣蝴蝶形态；纯均方误差随机微分方程坍塌为单个叶瓣；随机微分方程+线性神经网络通过 □（有界） ∧ ◇（访问_叶瓣）恢复了两个叶瓣。

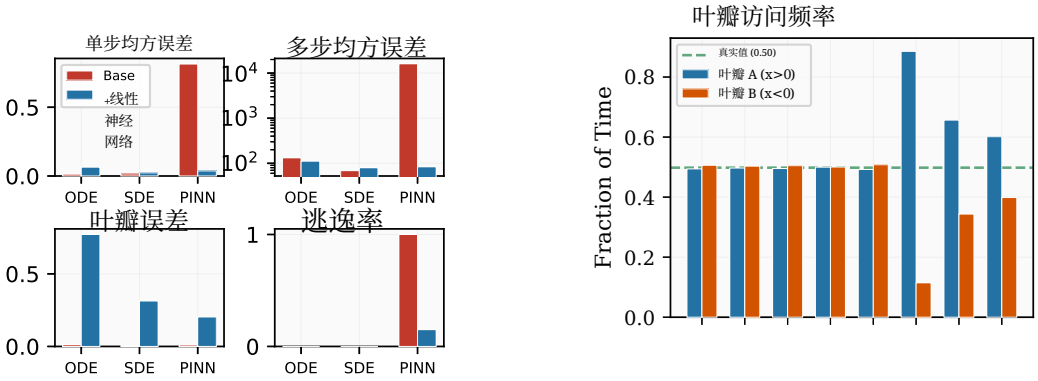


图 4：案例研究 2：线性神经网络作为逻辑正则化器。左：将线性神经网络添加到任意基线模型中，可降低多步均方误差和逃逸率。右：叶瓣访问频率。基线模型的平均叶瓣误差似乎较为均衡，但存在结构坍塌问题（单条轨迹很少在叶瓣之间切换）。线性神经网络强制对两个叶瓣进行显式探索，从而恢复全局几何结构，但代价是对自然切换频率造成轻微扰动。

（第 3.2 节；例如 □（有界） $= 0.69$， $\Delta_Q = 0.25$）。确定性模型（神经常微分方程、物理信息神经网络）表现出量词坍缩（$\Box = \Diamond$ 按构造即如此，标记为 †）。纯数据驱动的常微分方程/随机微分方程模型将轨迹均方误差降至最低，因此自然能够保持有界。相比之下，物理信息神经网络仅依赖于最小化局部残差。由于洛伦兹-63具有高度混沌性，微小的数值误差会迅速累积，导致无约束的物理信息神经网络在较长时域内完全发散（逃逸率为 100%）。这明确构成一项消融实验：该比较并非旨在宣称物理预测领域的最先进水平，而是为了说明，正确的局部动力学并不能确保全局结构稳定性。

虽然基线神经常微分方程和随机微分方程并未发生逃逸，但它们在结构上发生了坍塌，无法捕捉蝴蝶几何结构。它们的叶瓣误差（在左叶瓣与右叶瓣之间花费时间的总体层面平衡）看似异常偏低，这是因为不同的初始条件分别坍塌到不同的单个叶瓣中，平均后呈现 50/50 的比例，尽管单条轨迹从未发生切换。线性神经网络明确强制探索两个叶瓣（◇访问_叶瓣）。这精准地指出了

表 1：案例研究 2 结果（洛伦兹-63）。 †：量词坍缩（$\Box = \Diamond$）。

模型	单步	多步 □ 平均绝对误差	◇平均绝对误差	Δ_Q 平均绝对误差	叶瓣误差	逃逸百分比
神经常微分方程	0.013	132.2	0.133†	0.063†	0.124†	0.012	0
纯均方误差随机微分方程	0.015	68.7	0.112	0.074	0.121	0.006	0
物理信息神经网络（确定性）	0.814	16084	0.400†	0.478†	0.124†	0.010	100
物理信息神经网络 +噪声	0.816	12523	0.400	0.477	0.123	0.001	100
集成常微分方程	0.013	134.4	0.119	0.071	0.119	0.016	0
常微分方程 +线性神经网络	0.064	111.3	0.091	0.079	0.130	0.771	0
随机微分方程 +线性神经网络	**0.023**	**79.6**	**0.088**	**0.070**	**0.109**	0.313	**0**
物理信息神经网络 + 线性神经网络	0.037	83.6	0.204	0.121	0.171	0.203	15

符号组件的价值所在：线性神经网络从根本上解决了结构坍塌问题。随机微分方程+线性神经网络取得了最佳的 □ 平均绝对误差（0.088），以及 ◇ 平均绝对误差（0.070）。从视觉上看（图3），它是唯一恢复真实双叶几何结构的模型。将线性神经网络添加到任何基线模型中，都能发挥强大的正则化器作用，减少发散（图4）。

5.3. 案例研究 3：道义逻辑、安全约束动力学

我们模拟一个受托卡马克启发的二维区域（极向截面），其中粒子必须保持在特定半径范围内。这项测试旨在验证能否完全依据形式逻辑规范，而非手工设计奖励，来合成安全控制。两个随机微分方程用于描述不同的动力学：时态随机微分方程表示无约束物理（粒子向外漂移并逸出），而道义随机微分方程经过训练，以最大化 $L_{\Box\text{safe}}$。

环境的“物理”被嵌入为固定的、受格拉德-沙弗拉诺夫方程启发的基础漂移，它施加环向旋流和径向压力梯度，导致粒子自然向外运动。道义随机微分方程以此物理过程为基础，并通过多层感知机学习加性恢复力，以抵消向外压力。通过直接将 $O(\Box_{[0,T]}$安全$)$ 用作训练目标，道义随机微分方程实际上是作为线性神经网络进行训练，从而完全依据形式约束合成安全动力学。

结果。表2 汇总了关键指标。时态随机微分方程（自然动力学）具有 $L_{\Box\text{safe}} = 0.075$，其中61.7%的路径离开容器；道义随机微分方程（经训练以最大化 O（□安全））达到 $L_{\Box\text{safe}} = 0.456$，退出概率为0%，取得 $6.1\times$ 的提升（图5）。量词间隙（$U_\Diamond - L_\Box$）在时间情形下为0.72，在义务情形下为0.40，证实两种随机微分方程中的量词均为非坍缩量词。物理一致性检验证实，学习到的道义漂移在刮削层内指向内侧（100%的样本），其幅度随半径增大（相关系数0.84），并能泛化至未经显式训练的中半径区域（$r \in [0.5, 0.7]$）（在漂移热图中表现为明亮的边界环；见图22，附录E）。一个平凡的径向基线（$f = -k\hat{r}$ 对于 $r > 0.6$）仅达到 $L_\Box = 0.148$，退出率为24.2%，证实学习到的漂移捕捉到了非平凡的空间结构。

6. 结论

我们提出了连续模态逻辑神经网络（CMLNN）和流体逻辑范式：每种模态算子类型都由专用的神经随机微分方程提供支持，其

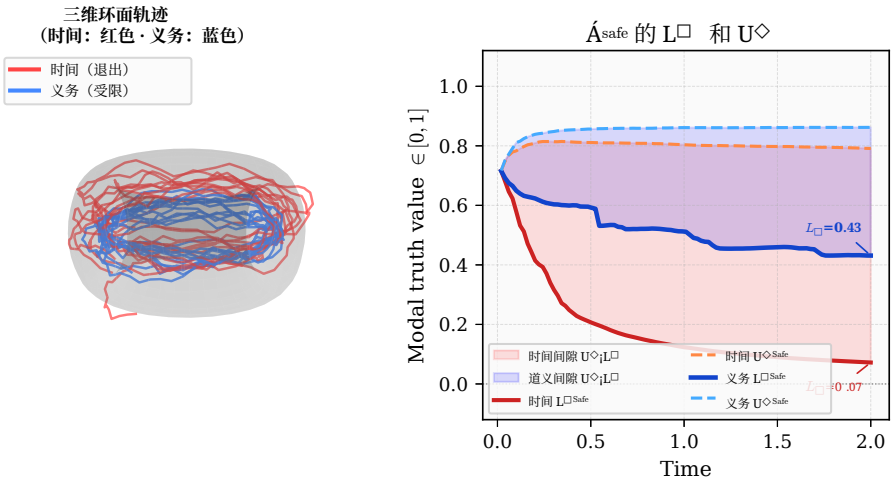


图5：案例研究 3：道义安全约束。左：三维环面轨迹（将极向截面缠绕到环面几何上）。红色路径表示时间随机微分方程（无约束物理，向外漂移并离开容器）。蓝色路径表示道义随机微分方程（基于 $O(\Box_{[0,T]}$安全)训练，始终保持在约束范围内，退出率为 0%）。这种约束结构仅由逻辑目标产生，无需手工设计控制律。右：随时间变化的 $L_\Box$ 和 $U_\Diamond$ 的 ϕ_{safe}。道义随机微分方程（蓝色）维持 $L_{\Box\text{safe}} = 0.456$ (6.1× 高于时间随机微分方程的 0.075）；阴影部分的量词间隙$U_\Diamond - L_\Box > 0$ 证实了两个随机微分方程中的量词均未坍缩。展示学习到的恢复力的漂移幅度热图见附录E。

表2：案例研究 3 结果（道义约束）。

SDE	$L_{\Box\text{safe}}$	$U_{\Diamond\text{safe}}$	**退出率**	Δ_Q
时间	0.075	0.797	61.7	0.722
义务	**0.456**	**0.857**	**0.0**	0.401
平凡基线	0.148	—	24.2	—

扩散系数决定必然性与可能性之间的语义区分。该框架针对基于熵风险的语义给出了可靠的界（定理 1），解决了量词坍缩问题（定理 2），并指出了随机微分方程性质与模态公理之间的结构类比。该框架的一个重要实例是逻辑引导神经网络（LINN），它允许模态逻辑公式充当训练目标，从而恢复仅凭局部动力学无法强制实现的结构性质。此外，认知与信念的区分可通过单一设计选择（随机微分方程初始化）来体现，而道义随机微分方程则为安全控制提供了一个逻辑结构化规范层。

未来，值得探索的方向包括将流体逻辑扩展到其他模态，例如用于推理复杂多智能体系统的策略逻辑或联盟逻辑。未来的研究还可以着重提升深层公式嵌套的 $O(N_{\text{mc}}^D)$ 可扩展性，并开发方差缩减技术，以收紧概率蒙特卡洛界。

参考文献

Aaron D Ames、Xiangru Xu、Jessy W Grizzle 和 Paulo Tabuada。基于控制障碍函数的安全关键系统二次规划。*IEEE* 自动化控制汇刊，62(8):3861–3876，2016年。

Ya-Chien Chang、Nima Roohi 和 Sicun Gao。神经 Lyapunov 控制。载于神经信息处理系统进展，第 32 卷，2019年。

Ricky TQ Chen、Yulia Rubanova、Jesse Bettencourt 和 David K Duvenaud。神经常微分方程。神经信息处理系统进展，31，2018。Alexandre Donzé 和 Oded Maler。实值信号上的时序逻辑鲁棒满足性。载于国际定时系统形式化建模与分析会议，第 92–106 页。施普林格，2010。Xuechen Li、Ting-Kam Leonard Wong、Ricky TQ Chen 和 David Duvenaud。随机微分方程的可扩展梯度。载于国际人工智能与统计会议，第 3870–3882 页。PMLR，2020年。Oded Maler 和 Dejan Nickovic。连续信号时序性质的监测。载于实时与容错系统形式化技术国际研讨会，第 152–166 页。施普林格，2004。

Antonin Sulc。模态逻辑神经网络。*arXiv* 预印本 *arXiv:2512.03491*，2025年。

附录A。算子定义（总体形式）

A.1. 必然性（□）与可能性（◇），可视化证明

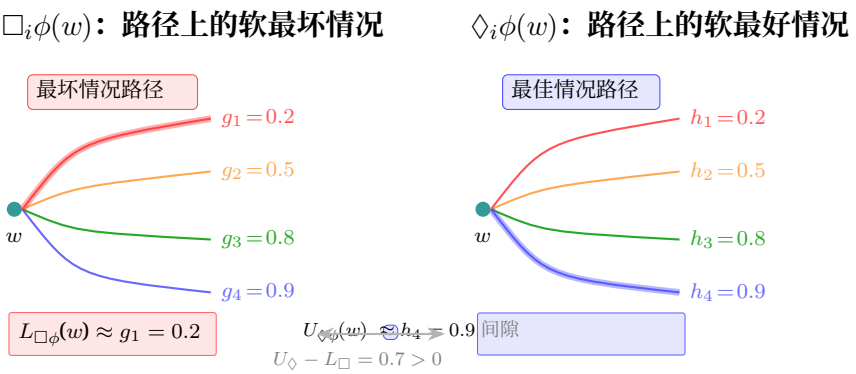


图 6：量词不坍缩的可视化。从同一起始世界 w 出发，四条随机微分方程样本路径呈扇形展开，具有不同的逐路径真值分数 g_n（沿路径的 L_ϕ 的软最小值）。左侧（□）：必然性通过软最小值聚合，因此最坏情况路径（红色，$g = 0.2$）占主导。右侧（◇）：可能性通过软最大值聚合，因此最佳情况路径（蓝色，$h = 0.9$）占主导。由于随机微分方程产生路径分布，$L_\Box < U_\Diamond$（此处间隙为 0.7）。对于确定性常微分方程，四条路径将重合，且 $L_\Box = U_\Diamond$（量词坍缩）。

A.2. 总体级算子

定义 3（总体熵风险泛函） 对于随机变量 $X(\omega)$ 在$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$上，温度为 $\tau > 0$ 的总体软最小值为：

$$\operatorname{softmin}_{\tau,\,\omega\sim\mathbb{P}}(X(\omega)) := -\tau \log \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(-\frac{X(\omega)}{\tau}\right)\right]$$

单调，满足 本质下确界 $X \le$ 软最小值$_\tau(X) \le \mathbb{E}[X]$，收敛到 本质下确界 X，当 $\tau \to 0^+$。

定义 4（总体必然性与可能性算子）

$$L^{\mathrm{pop}}_{\Box_i\phi}(w) = \operatorname{softmin}_{\tau_\omega,\,\omega\sim\mathbb{P}}\left(-\tau_s \log \int_0^S \exp\left(-\frac{L_\phi(\Phi_\theta^{(i),s}(w;\omega))}{\tau_s}\right) ds\right)$$

蒙特卡洛算子（方程 *1–3*）将期望替换为对 N_{mc} 路径的经验均值，并将积分替换为对 K 求积点的求和。

附录 B. 补充定理陈述

定理 5（收敛） 对于有界的漂移/扩散、紧致 $\mathcal{W}$、利普希茨赋值以及有限公式集，只要满足 $\tau_s \tau_\omega > 0$，*CMLNN* 推理算法几乎必然收敛到一个不动点。

定理 6（转移律的普适逼近）对于紧致 $\mathcal{W}$ 以及任何具有利普希茨伊藤扩散表示的目标转移律，$\exists$ 存在一个神经随机微分方程，使$\sup_w W_1(Law(\Phi_\theta^S(w;\cdot)) \ \mathcal{R}(w,\cdot) < \epsilon$。

定理 7（Wasserstein 普适逼近）在具有有界 p 阶矩的相同条件下，逼近结果可加强至 W_p。

命题 8（样本复杂度）在 $B \le C\tau_\omega$，$\mathbb{P}(|\hat{L}_{\Box_i\phi} - L^{\text{pop}}_{\Box_i\phi}| \ge \epsilon) \le 2\exp\big(-c(C)\ N_{\text{mc}}\epsilon^2/\tau_\omega^2\big)$ 对于某个 $c(C) > 0$（详见附录C）。对于误差 $\le \epsilon$，置信度为 $1-\delta$：$N_{\text{mc}} \ge {}_c\ C^{\tau_\omega^2}()\ \epsilon^2 \log(2/\delta)$。若不满足此假设，该界中会包含一个 $e^{\Theta(B/\tau_\omega)}$ 因子（见证明）。

定理 9（可微性）在满足利普希茨条件且导数有界的情况下，随机可达关系 $\mathcal{R}_\theta^{(i)}(w,\ w')$ 关于 θ 和 w 连续可微，可通过随机伴随计算。

附录 C. 完整证明

C.1. 定理 1 （可靠性）

证明部分 (a)：对 ϕ 作结构归纳。基线情形：$L_p(w) \le \mathcal{P}(S_{p,w})$ 由假设成立。归纳情形（$\Box_i\phi$）：根据归纳假设，$L_\phi(z) \le \mathcal{P}_\tau^{\text{risk}}(S_{\phi,z})$ 逐点成立。由于总体软最小值（定义3）具有单调性：

$$L^{\text{pop}}_{\Box_i\phi}(w) \le \text{softmin}_{\tau_\omega,\omega}(\text{softmin}_{\tau_s,s}(\mathcal{P}_\tau^{\text{risk}}(S_{\phi,\Phi^s(w;\omega)}))) = \mathcal{P}_\tau^{\text{risk}}(S_{\Box_i\phi,w})$$

部分 (b)：定义 $X_n = \exp(-g(\omega_n)/\tau_\omega)$；$\{X_n\}$ 在 $[e^{-B/\tau_\omega}, e^{B/\tau_\omega}]$中独立同分布。范围 $R_X = e^{B/\tau_\omega} - e^{-B/\tau_\omega}$ 会随着 $\tau_\omega \to 0$ 增大而趋于无穷，除非 $B = O(\tau_\omega)$。在 $B \le C\tau_\omega$条件下，$R_X \le 2(e^C - e^{-C})$有界；对 $\bar{X}$ 应用 Hoeffding 不等式，并通过 $h(x) = -\tau_\omega \log x$（Lipschitz常数 $\tau_\omega/\xi \le \tau_\omega e^{B/\tau_\omega} \le \tau_\omega e^C$）传播，可得 $\mathbb{P}(|\hat{L} - L^{\text{pop}}| \ge \epsilon) \le 2\exp(-c(C)\ N_{\text{mc}}\epsilon^2/\tau_\omega^2)$。具体而言，根据 Hoeffding 范围 $R_X = e^C - e^{-C}$和 Lipschitz常数 $\tau_\omega/\xi \le \tau_\omega e^C$，有 $c(C) = 2/\big((e^C - e^{-C})^2\, e^{2C}\big)$。若没有 $B \le C\tau_\omega$，该界会因 R_X^2 和 Lipschitz常数而多出一个 $e^{\Theta(B/\tau_\omega)}$ 因子。

（c）部分：由于 $\tau \to 0$，由单调收敛可得，软最小值$_\tau(X) \to$本质下确界 X。

在有限的 τ 下，这些算子无法确定性地界定经典克里普克语义。由于软最小值$_\tau(X) \ge$本质下确界 X，CMLNN 的下界可能高于经典真值。 ■

C.2. 定理 2 （非坍缩）

证明 非退化的 $\sigma_\theta^{(i)}$ 意味着 $\exists w^*,\ s^*$ 使得某个坐标上的 $\text{Var}(\Phi^{(i)}_{\cdot,\ \theta}{}^{s^*}(w^*;\cdot)) > 0$。令 $m = \mathbb{E}[\Phi^{s^*}(w^*)]$，并选择一个光滑的 Lipschitz 谓词，例如 $\phi(z) = \tanh(z_1 - m_1)$。于是，一些路径会得到 $\phi \approx 1$，另一些则得到 $\phi \approx -1$，因此软最好情况和软最坏情况聚合结果不同，从而得到 $L_{\Box_i\phi}(w^*) < U_{\Diamond_i\phi}(w^*)$。对于 $\sigma \equiv 0$，流是确定性的：软最小值 $=$ 软最大值，因此量词会塌缩。

■

C.3. 命题8（样本复杂度）

证明 定义 $X_n = \exp(-g(\omega_n)/\tau_\omega)$；这些 $\{X_n\}$ 在 $[e^{-B/\tau_\omega}, e^{B/\tau_\omega}]$中独立同分布。在 $B \le C\tau_\omega$下，范围 R_X 和 Lipschitz常数 τ_ω/ξ 保持有界；Hoeffding 不等式结合经由$h(x) = -\tau_\omega \log x$ 的传播，得到 $\mathbb{P}(|\hat{L} - L^{\text{pop}}| \ge \epsilon) \le 2\exp(-c(C)\, N_{\text{mc}}\epsilon^2/\tau_\omega^2)$。令此值为 $\le \delta$，得到$N_{\text{mc}} \ge \frac{\tau_\omega^2}{c\, C(\,)\,\epsilon^2} \log(2/\delta)$。若无此假设，$R_X \sim e^{B/\tau_\omega}$ 且指数中会出现e^{-4B/τ_ω}。 ■

附录D. 扩展方法细节

D.1. 模态公理对应关系

表3：模态公理及其随机微分方程结构对应项。

公理	性质	随机微分方程机制	状态
$\mathbf{T}$: $\Box\phi \to \phi$	真实性	$z(0) = x_{\text{true}}$	鼓励（间隙）
$\mathbf{D}$: $\Box\phi \to \Diamond\phi$	串行性	≥ 1 路径	Free
$\mathbf{4}$: $\Box\phi \to \Box\Box\phi$	内省	半群	近似
$\neg\mathbf{T}$	可错性	$z(0) = \hat{x} \ne x$	强制

D.2. 随机轨迹可达性（派生诊断）

w' 在模态 i 下从 w 出发的可达关系是一个派生量（不用于算子定义）：

$$\mathcal{R}_\theta^{(i)}(w, w') = \mathbb{E}_\omega \left[\sup_{s \in [0,S]} \exp\left(-\frac{\|w' - \Phi_\theta^{(i),s}(w;\omega)\|^2}{2\sigma_b^2} \right) \right]$$

D.3. 动态逻辑

动作 α 对应于随机微分方程 $f_\theta^{(\alpha)}$；顺序组合 $[\alpha;\ \beta]\phi = [\alpha][\beta]\phi$ 串联随机微分方程的解。

D.4. Wasserstein 距离作为模态度量

模态 Wasserstein 距离 $\mathcal{W}_p^{(i,j)}(w,\ s) = W_p(\text{Law}(\Phi^{(i)}_{\cdot,\ \theta}{}^{s}(w;\cdot)),\ \text{Law}(\Phi^{(j)}_{\cdot,\ \theta}{}^{s}(w;\cdot)))$ 使得幻觉量化能够分级，并改进扩散学习。

D.5. 对抗性矛盾挖掘

我们通过对 $c(w) = \max(0,\ L_\phi(w) - U_\phi(w))^2$ 进行梯度上升，主动搜索边界情形下的矛盾；搜索范围为候选世界，随后将矛盾程度高的世界加入训练批次。

附录E. 扩展实验详情

下文提供了全部三个案例研究的完整实验设置、超参数和其他结果。

表4：实验设计：每个案例研究都运用了不同的模态逻辑 c.

#	实验	模态类型 关键公式		SDE	领域
1	群体幻觉	认识论+Dox.	B_{r3}(□安全) ∧ K_{sw}(◇碰撞)	认识论+Dox.	自定义二维群体
2	洛伦兹混沌	时间	□（有界） ∧ ◇（访问_叶瓣）	时间	洛伦兹-63
3	安全约束	义务	O(□安全)	时态.+道义.	二维容器

E.1. 案例研究 1：多智能体集群模态逻辑

幻觉检测实验需要三个语义上不同、在共享状态空间中运行的随机微分方程 $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^{4\times5}$（5 个漫游车的位置和速度）。时态随机微分方程对真实物理规律进行建模，认知随机微分方程以正常传感器数据为条件，而信念随机微分方程则使用漫游车3的错误内部模型。

训练动态。 图 7 展示了 5 个随机种子下三个关键量的变化轨迹。信念界限 L_{B_3}(□安全) 在最初几个训练轮次内便升至 0.8 检测阈值以上并趋于稳定，漫游车3始终相信自己是安全的。与此同时，认知界限$U_{K_{sw}}$(◇碰撞) 升至 0.3 以上，证实集群共同知晓存在一条碰撞路径。Wasserstein 信念—现实差距收敛至 $W = 0.39$，为漫游车3所相信的未来与真实未来之间的偏离程度提供了一个连续的标量度量。

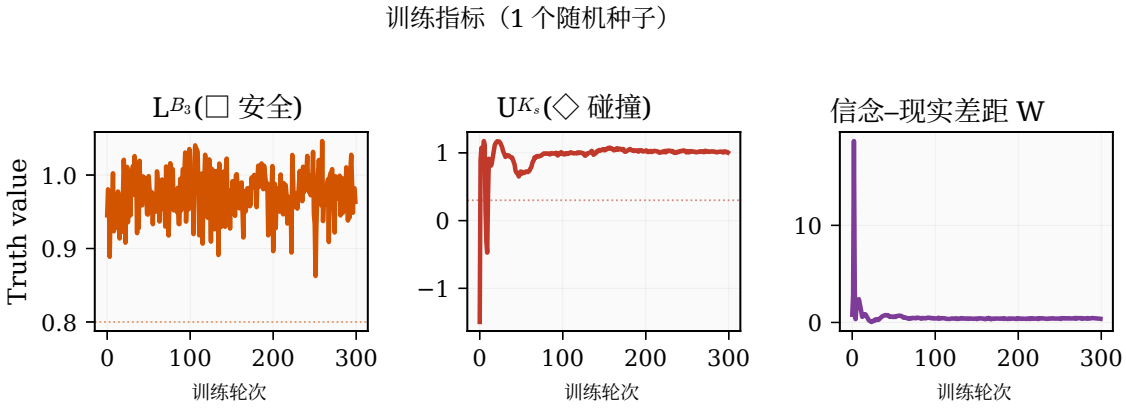


图 7：训练动态（5 个随机种子，均值 ± 标准差）。左：信念界限 L_{B_3}(□安全) 升至 0.8 阈值以上。中：认知界限 $U_{K_{sw}}$(◇碰撞) 升至 0.3 以上。右：Wasserstein 信念—现实差距稳定在 $W = 0.39$。

幻觉从何而来？ 答案是空间性的：检测取决于漫游车3占据竞技场的哪个区域。图 8 展示了真实模型与漫游车3的错误模型所看到的安全场，真实裂谷与幻觉裂谷位于不同位置。图 9 将由此产生的模态真值映射到一个 50×50 起始位置网格上。幻觉在信念随机微分方程预测安全性而认知随机微分方程预测危险之处最为强烈，恰好是穿过真实峡谷的轨迹。

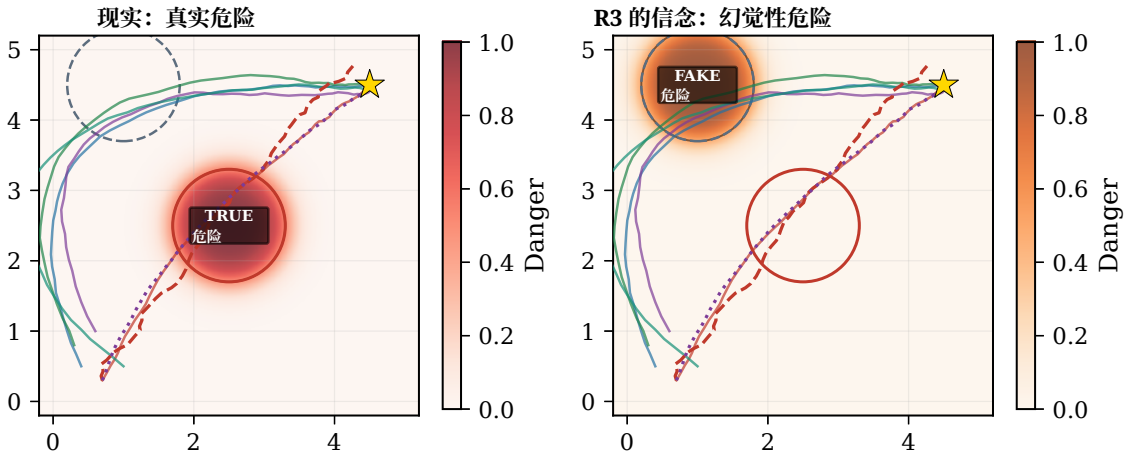


图 8：竞技场上的安全场。左：以真实裂谷为中心的真实危险梯度。右：漫游车3所相信的危险场，以幻觉（虚假）裂谷为中心。

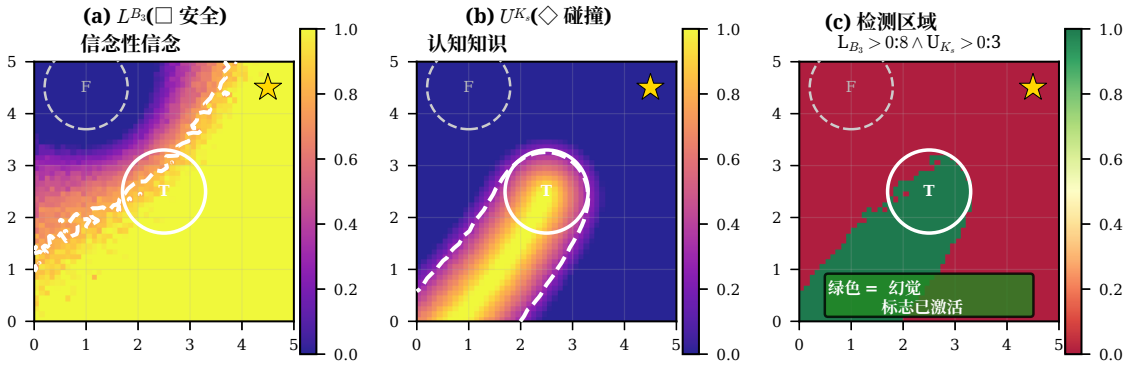


图 9：空间模态真值场（50×50 网格；原始鲁棒性 L, U）。左：L_{B_3}（□安全）。右：$U_{K_{\text{swarm}}}$（◇碰撞）。白色虚线轮廓表示检测阈值。

子实验B：持续护送。 一辆救援漫游车学会在真实峡谷周围为漫游车3提供防护，并将其引导至目标。图 10 展示了学得的护送轨迹；图11 跟踪实际安全裕度、信念安全性以及瓦瑟斯坦信任差距（$W = 1.53$）。较高的信任差距表明，救援者必须进行干预，正是因为漫游车3自身的模型并未感知到危险。

子实验C：群体防御。 五个智能体联合优化五个时序逻辑目标：侦察兵在躲避敌人的同时保护贵宾（图12）。这检验了CMLNN的

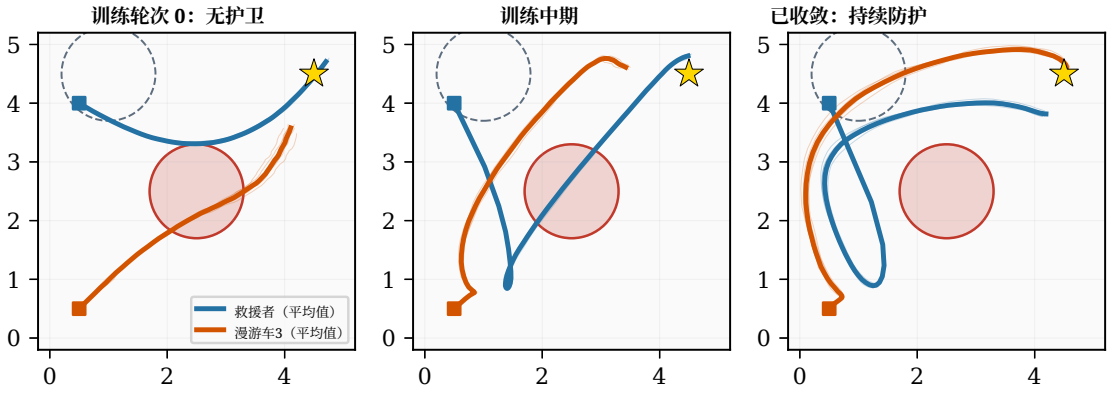


图10：子实验B：双漫游车持续护航。救援者（蓝色）护送漫游车3（橙色）越过真实峡谷，同时R3朝着目标（星形）返航。最终实际安全性：0.82。

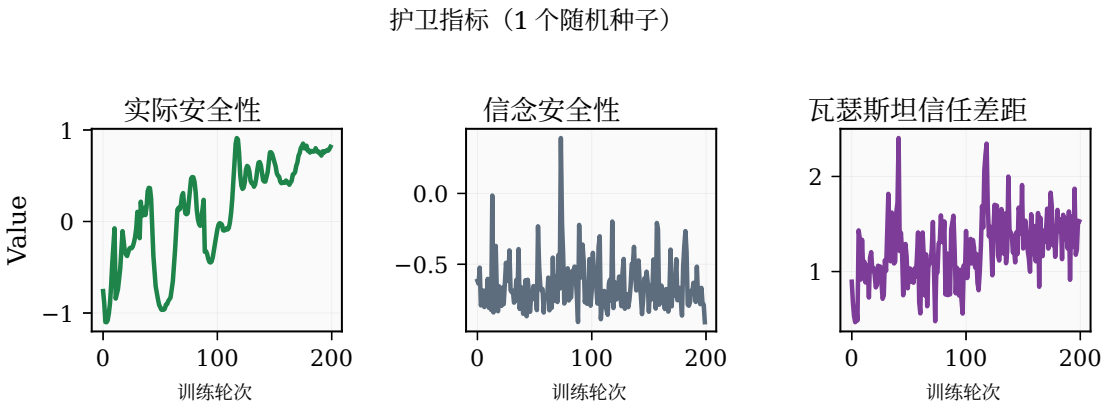


图11：护航训练指标。左：实际安全裕度有所提升。中：信念安全性保持较高水平（R3从未感知到真实危害）。右：瓦瑟斯坦信任差距（$W = 1.53$）。

处理共享动力学上多个公式的能力。最终的公式满足度数值（图13）表明，安全性与边界约束均已满足（□ 在_边界内：0.16，□ 安全：0.12，□ 跟随：−0.03），而进攻与探索目标则表现出预期的难度（◇ 攻击：−0.20，◇探索：−0.47）。

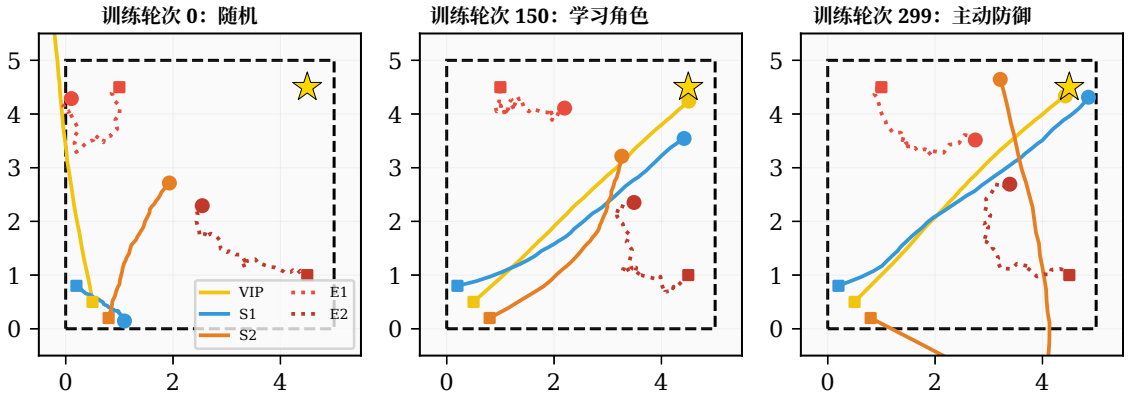


图12：子实验 C：五智能体群体防御（贵宾保护）。两名侦察兵保护一名贵宾免受两名敌人的攻击，同时贵宾朝目标探索。

E.2. 案例研究 2：洛伦兹混沌系统（逻辑引导神经网络）

Lorenz-63 系统为模态逻辑提供了一个具有挑战性的基准：公式□（有界）∧◇（访问_叶瓣）要求所有轨迹保持有界（必然性），同时要求某些轨迹访问次级叶瓣（可能性）。对于确定性模型而言，这不可能实现（量词坍缩），因此需要随机微分方程的随机分支。

训练方案。 训练分两个阶段进行（图 14）。阶段 1 使用轨迹均方误差对随机微分方程漂移项进行预训练。阶段 2 通过预定的 λ逐步引入 LINN 逻辑损失，使目标从轨迹匹配逐渐转向逻辑一致性。全部五个模态公式均收敛。

量词分歧与结构性质。 非坍缩模态逻辑的定义性特征是 $\Diamond\phi - \Box\phi > 0$。图 15(a) 展示了这一间隙随预测时域的变化：随机微分方程+线性神经网络能够跟踪真实值，而确定性模型则始终为零。图 15(b) 证实，随机微分方程+线性神经网络恢复了均衡的波瓣访问（$\sim$0.5/0.5），这是洛伦兹吸引子的典型特征。

可靠性验证。 可靠的模态算子必须满足 $L_{\Box} \leq$真实值$_{\Box}$ 和 $U_{\Diamond} \geq$真实值$_{\Diamond}$，且二者使用相同的有界鲁棒性尺度（第 3.2节）。图 16证实，随机微分方程+线性神经网络满足这两个条件，而纯均方误差模型则过度自信。

完整模型比较。图17 展示了 x–z 所有八个模型的相图。确定性模型（神经常微分方程、物理信息神经网络）只生成单条轨迹；尽管已知真实方程，物理信息神经网络仍偏离吸引子盆。随机微分方程+线性神经网络生成了最丰富的双叶吸引子覆盖，与真实值最为接近，表明逻辑约束能够恢复仅凭局部动力学无法保证的全局结构性质。

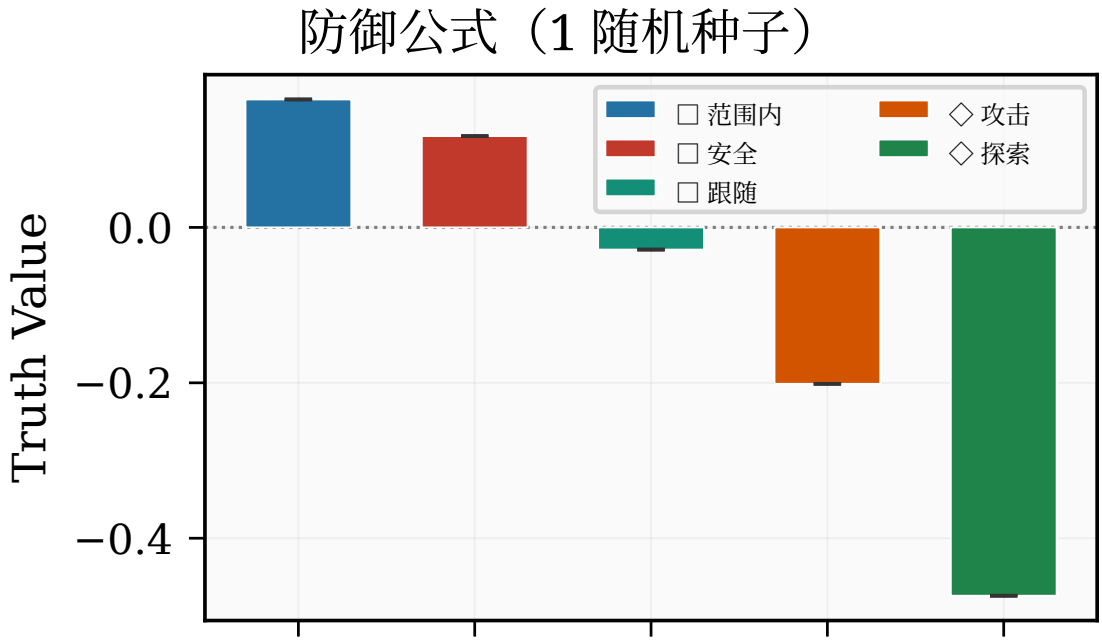


图1　　3：防御公式满足度。五个时序逻辑目标联合优化　　.

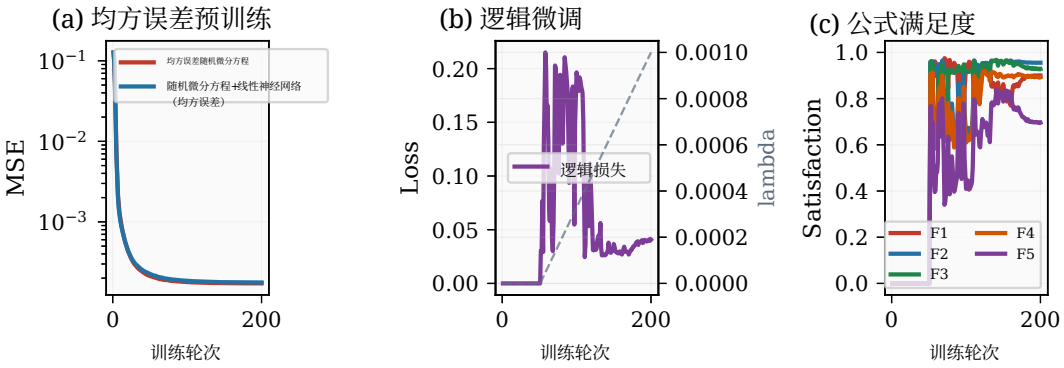
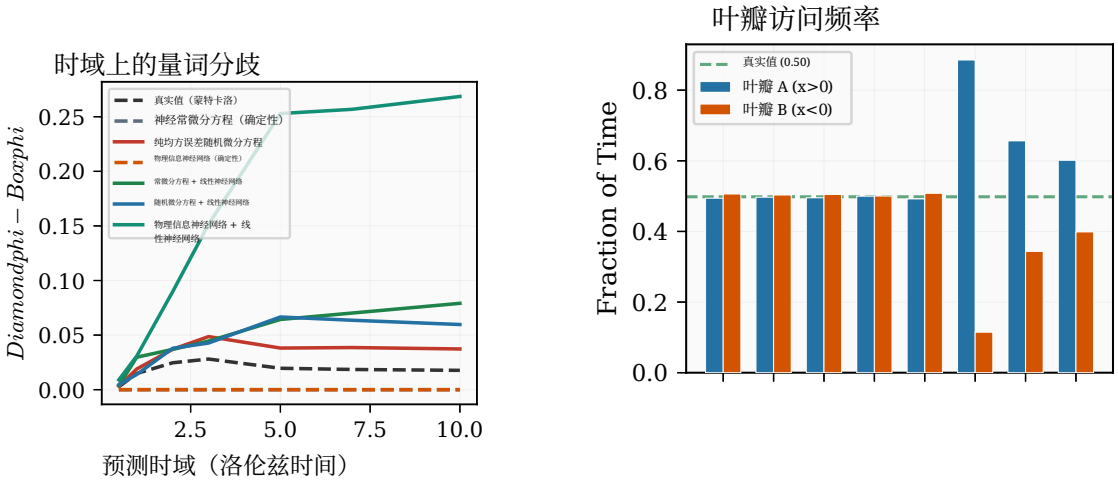


图14：训练动态。（a）均方误差预训练。（b）逻辑损失和 λ 斜坡。（c）公式满足度收敛。



(a) 量词分歧　　(b) 波瓣访问

图15：(a) $\Diamond\phi - \Box\phi$ 随预测时域变化：SDE+线性神经网络跟踪真实值，而确定性模型保持为零（量词坍缩）。(b) 波瓣访问：SDE+线性神经网络与真实值的 $\sim 0.5/0.5$ 平衡相符。

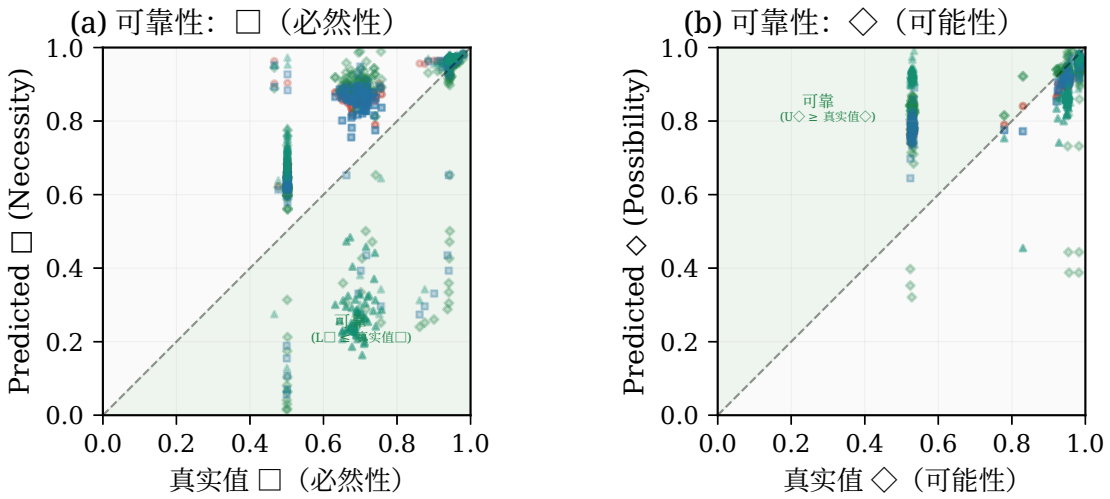


图16：可靠性验证：预测的 □ ≤ 真实值 □ （左）和预测的 ◇ ≥ 真实值 ◇（右）。SDE+线性神经网络同时满足两者。

E.3. 案例研究 3：安全约束动力学

道义逻辑案例研究表明，逻辑规范 $O(\Box_{[0,T]}$安全) 可以作为学习安全动力学的完整训练目标，无需奖励工程或手工设计控制律。

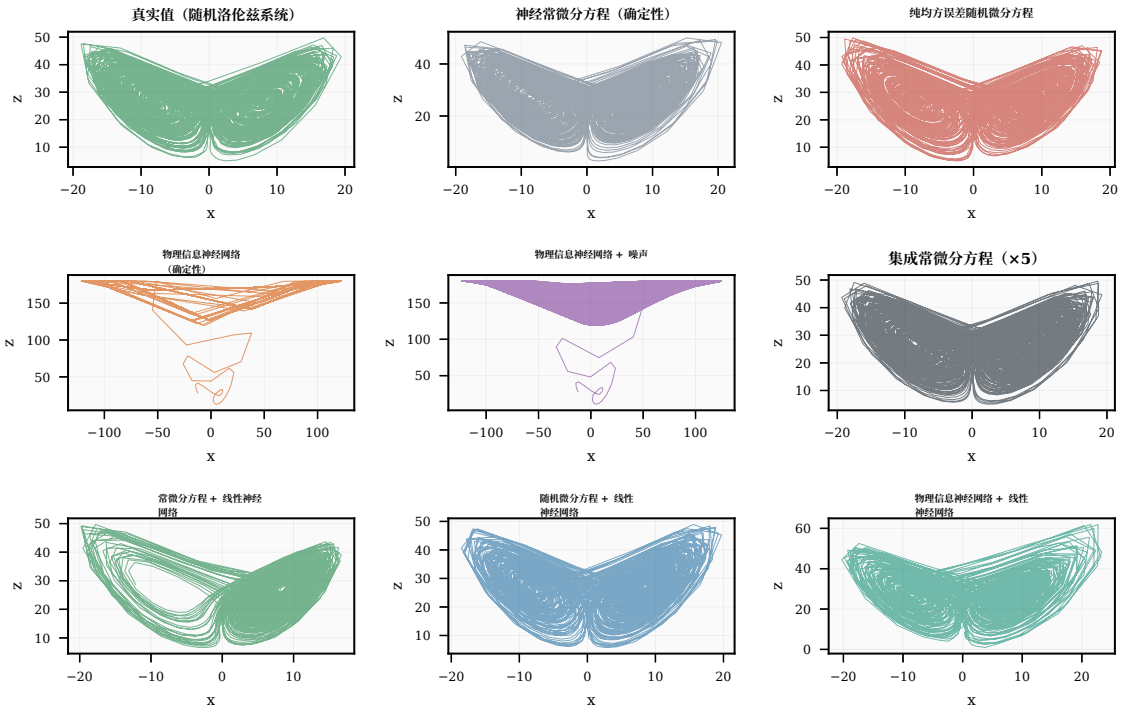


图17：所有八种模型及真实值的相图（x–z 投影）。随机微分方程+线性神经网络产生了覆盖最丰富的双叶吸引子。

概览仪表板。 图 18 展示了所学系统的四个面板：二维截面中的轨迹束（时间路径会离开，义务路径则保持在约束范围内）、随时间变化的模态真值、三维环面嵌入，以及所学漂移场的箭矢图。义务漂移在容器壁处向内弯曲，形成所学到的恢复力。

逐路径安全性与退出分析。图19 追踪了安全值 $\phi_{\text{safe}}(z_t)$ 在各条样本路径上的变化。在时间动力学下，路径向外漂移，安全性随之下降；在学习得到的道义动力学下，安全性在整个时域内都得以维持。图20对此进行了量化：时间退出比例持续上升，而道义退出比例始终为零；径向分布也证实，道义路径集中在容器边界以内。

训练动态。 图。21 展示了多随机种子训练曲线： $L_{\Box}$ 和 $U_{\Diamond}$ 随着道义随机微分方程学会约束而增加，退出比例降至零，总损失则趋于收敛。

学习到的漂移幅度。 图。22 展示了学习到的恢复力的幅度。道义漂移场中的明亮边界环（右图）证实，网络已学会在容器边界处精确地产生强恢复力；这一结构属性甚至泛化到了未明确参与训练的中半径区域。

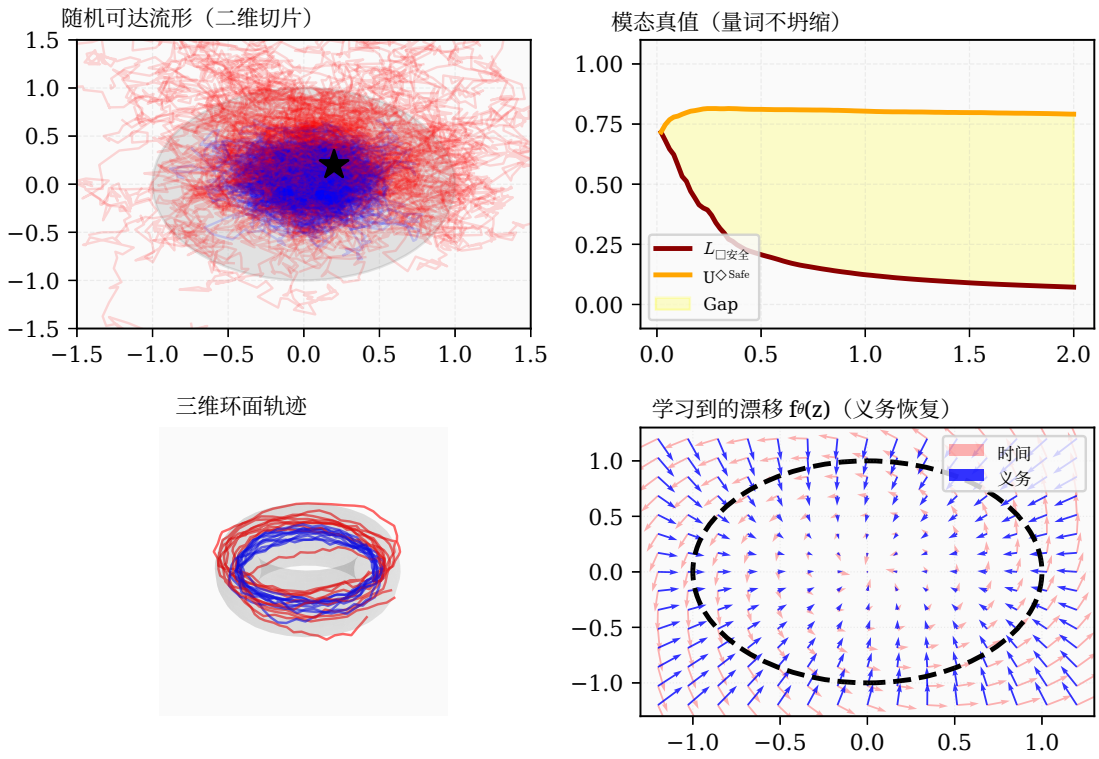


图18：概览仪表板。左上：时间（红色）与义务（蓝色）轨迹束。右上：模态真值和量词间隙。左下：三维环面嵌入。右下：学习到的漂移场；义务漂移在边界处向内弯曲。

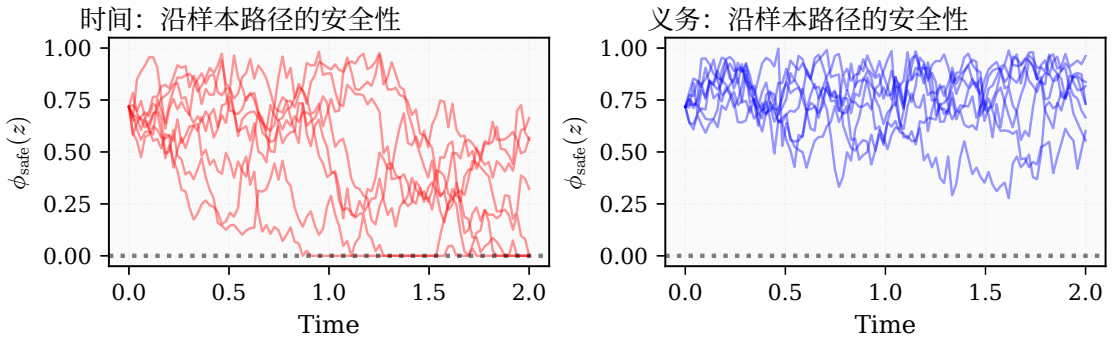
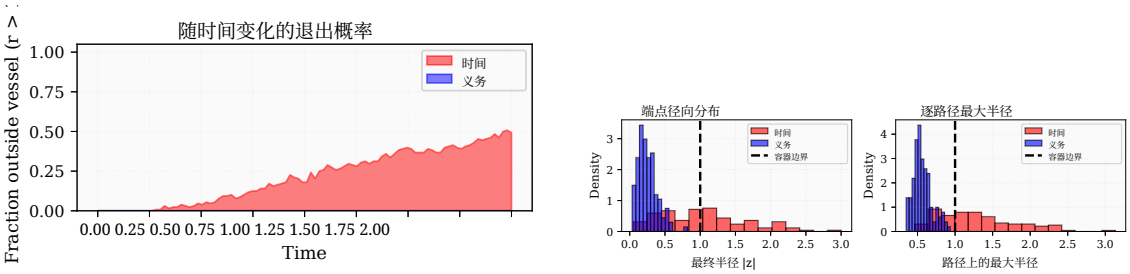


图19：逐路径安全性 $\phi_{\text{safe}}(z_t)$。左：时序动力学，其中安全性随时间推移而下降。右：道义动力学，其中安全性在整个时域内得以维持。



（a）随时间变化的退出概率　　（b）径向分布

图20：（a）退出比例：时间退出比例稳步上升，而道义退出比例保持为零。（b）径向分布：道义路径集中在容器内部。

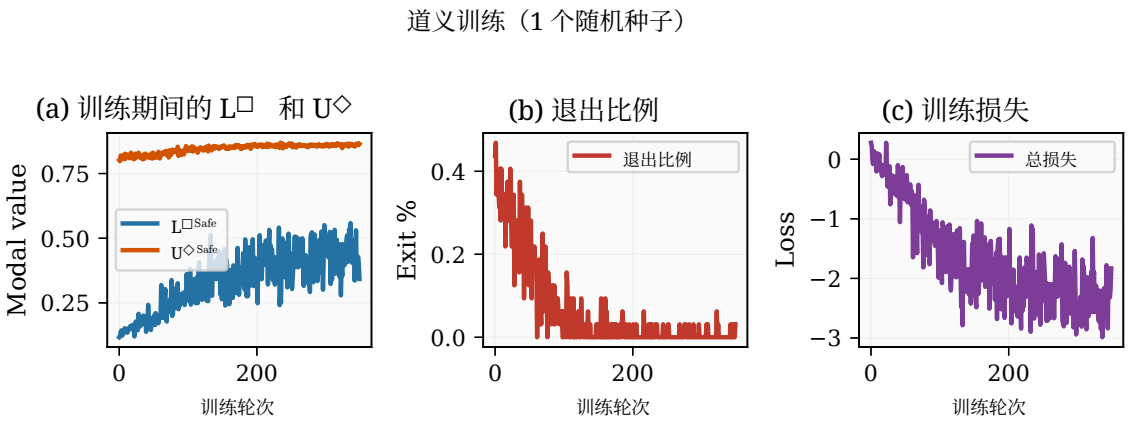


图21：道义训练曲线（多随机种子）。（a） $L_{\Box}$ 和 $U_{\Diamond}$ 增加。（b）退出比例降至零。（c）损失收敛。

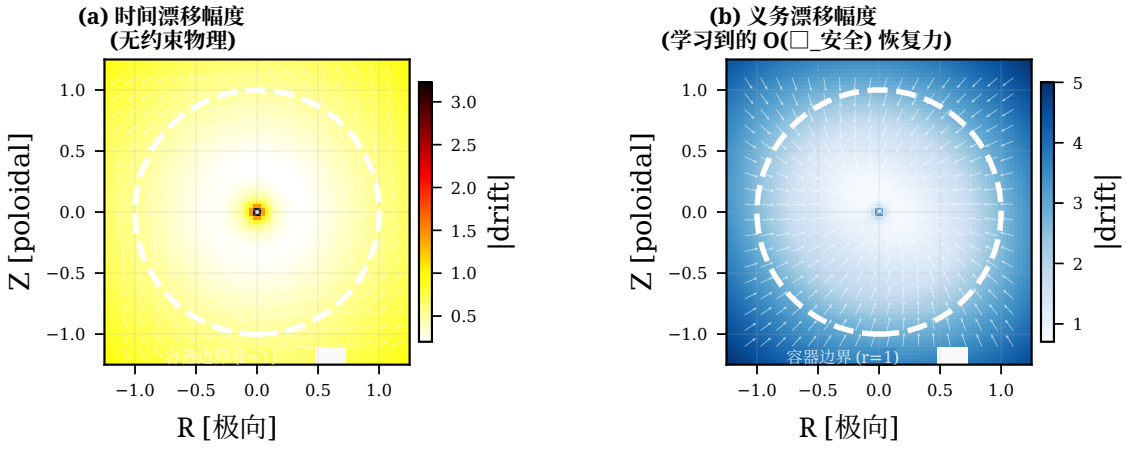


图22：漂移幅度热图。左：时间漂移（无约束物理）。右：义务漂移，显示在容器边界附近学到了强大的恢复力（亮环）。