arXiv:2603.04031v1 [math.AP] 4 Mar 2026

基于F-等价的一般线性系统的快速稳定化

Amaury Hayat与Epiphane Loko

摘要。我们研究一般线性系统的快速稳定化，其中微分算子 $\mathcal{A}$ 具有特征向量Riesz基。我们给出快速稳定化的简单充分条件，并构造一个相对显式的反馈算子。我们采用依赖于Fredholm 变换的 F-等价方法，证明一个更强的结果：在这些充分条件下，该系统等价于一个单的指数稳定系统，且衰减率可以任意大。特别地，我们的条件改进了非抛物型算子（例如斜自伴系统）快速稳定化的现有条件。

1. 引言

稳定化是控制理论中的三大主要问题之一，与可控性和最优控制并列。其目标是通过施加控制，将微分方程系统驱动到给定的长期行为，其特殊性在于控制必须是状态的函数。这形成了一个反馈回路（控制影响系统，系统又反过来影响控制），从而使所实现的稳定性相对鲁棒。然而，这一反馈回路使得寻找合适控制的数学问题变得困难，甚至适定性也可能成为挑战。从实际角度看，稳定化有许多应用 [11], 于工程学 [3], 交通运输 [33, 45, 42], 化学 [85], 生物学 [71], 种群动力学 [20],流体力学 [11, 46], 经济学 [53] 等。

从抽象的角度来看，线性框架中的稳定化问题如下：给定一个系统

$$\partial_t u = \mathcal{A}u + Bw(t), \tag{1}$$

其中 $\mathcal{A}$ 是微分算子， B 是给定算子。我们希望找到一个控制反馈律 $w(t) = K(u(t,\cdot))$，使系统 (1) 指数稳定。也就是说，我们希望系统的所有解都能以指数速度收敛到 0。一个更具挑战性的问题是，要求对于任意 $\lambda > 0$ ，都存在一个控制反馈律 $w(t) = K_\lambda(u(t,\cdot))$，使系统的所有解都以不低于 $\lambda > 0$的衰减率指数收敛到 0。这就是所谓的快速稳定化（或完全稳定化）。当 w 是有限维的（这尤其意味着 w 不依赖于空间变量 x），且 B 是无界算子时，解决这一问题就更具挑战性。例如，当控制施加在边界上，或当控制是只能控制其幅值的分布力时，就属于这种情况（具体示例见 [12, 29, 2, 27] ）。至少从 Slemrod 在 1972 [77] 的工作开始，人们便开始研究这一问题；关于一般线性系统的指数稳定化，已有许多有力成果，这些成果采用了频域判据法

CERMICS，École des Ponts ParisTech，6 - 8，布莱兹·帕斯卡尔大道，笛卡尔城—马恩河畔尚叙马恩，77455 马恩拉瓦莱，法国。电子邮箱：amaury.hayat@enpc.fr。CERMICS，École des Ponts ParisTech，6 - 8，布莱兹·帕斯卡尔大道，笛卡尔城—马恩河畔尚叙马恩，77455 马恩拉瓦莱，法国；以及 L2S- 巴黎萨克雷大学，CentraleSupelec，布雷盖楼，居里奥利奥街 3 号，91190 吉夫叙尔伊韦特。电子邮箱：dagbegnon.loko@enpc.fr。

（例如参见 [74, 72, 48] 及其中的参考文献，另见 [88]的频率-李雅普诺夫方法），或者采用最优控制和线性二次理论的工具，Lions、Barbu、Lasiecka 和 Triggiani 等人均曾使用这些方法 [61, 10, 59, 60]。其中若干结果可以推广到快速稳定化、无界算子 B [82, 84, 6, 79, 63, 64, 58]以及半线性系统 [5, 16, 10, 69, 4]。然而，所得到的控制反馈律往往依赖于对半群$e^{\mathcal{A}^* t}$的了解，因此未必总能明确给出；或者需要求解最小化问题以及代数黎卡提方程或Hamilton-Jacobi-Bellman方程，而这些问题有时难以处理 [55], ，尤其对于非抛物型系统而言。因此，许多关于稳定化问题的研究都聚焦于特定系统，尤其是在 B 为无界算子时，例如（如 [11, 55, 91, 73]）。

近年来，为了更一般地解决这一问题，一种新的方法应运而生：反馈等价（F-等价）。该方法并非直接尝试寻找反馈 K，而是转而解决另一个数学问题：寻找一个同构-反馈对（T， K），使 T 将所关注的原系统映射为指数稳定目标系统。若存在这样一对，则根据 T的同构性质，原系统在反馈 K 作用下指数稳定。特别地，当 T 为第二类Volterra变换时，该方法即为Krstic及其合作者提出的、经过充分研究的反步法 [8, 15, 57]（该方法受到有限维方法[19, 54, 80] 及其改编形式 [26]的启发），在过去20年中已成功应用于许多不同类别的系统（例如参见 [47]）。因此，无限维的 F-等价有时称为广义反步法 或*Fredholm*反步法，后者采用Fredholm变换，尽管其中并未真正出现反步现象。

对于有限维系统， F-等价的概念可追溯到Brunosvky [18]对线性系统的工作，并在随后的许多工作中被推广到非线性系统（例如参见 [51, 36, 66, 21]）。对于无穷维系统，一种依赖于 Fredholm 变换的类似方法在 [29] 中针对Korteweg-de Vries方程和Kuramoto-Sivashinsky方程这一特殊情形被引入 [30]。其他具有边界控制的系统则利用Fredholm 变换作为Volterra反步法的推广，在 [28, 34, 75]中得到研究。此后，若干秉持类似思路的工作成功地将 F-等价推广并形式化到许多不同框架： [22], 中的（线性）薛定谔方程、 [41, 62], 中的退化抛物方程、 [40], 中的一维热方程、 [90], 中的输运方程以及 [27]中的线性化Saint-Venant方程。人们希望这一方法能用于一般框架而非特定情形，这一希望在 [39] 中得以实现；作者在其中引入了紧致性-对偶方法，以将该方法推广到任意（线性）斜自伴系统，只要其微分算子的特征值 λ_n 按 n^α 随 $\alpha > 1$缩放。这一出色结果源于克服了 [29]中原始方法的结构限制，并且作为附带结果，使得能够处理诸如毛细-重力水波方程之类的系统，而这曾是 [25]中提出的一个未解决问题。尽管如此，这些结果仅限于斜自伴系统，这类系统具有非常良好的性质（例如具有一组正交归一特征向量基、纯虚特征值、生成一个 C^0 群等）。

本文我们将 F-等价推广到一类远为一般的系统：任何如下系统，其中 $\mathcal{A}$ 生成一个 C^0 半群，具有特征向量Riesz基，其特征值具有有限重数并满足增长假设（见(6)–(7)）。我们在若干线性和非线性（半线性）例子上说明这些结果：薛定谔方程、抛物型系统和一般扩散方程、Burgers 方程，以及一个既非自伴也非斜自伴的格里博夫系统。

该方法的要点在于给出显式的反馈控制以及条件，使得所考虑的偏微分方程系统等价于一个更简单的偏微分方程系统，而不是试图改进来自已有成功抽象方法（如 [59, 60, 79, 84, 64, 63, 69]）的可稳定性充分条件。尽管如此，在某些情形下，我们的方法得到了非常弱且一般的快速稳定化充分条件，据我们所知，这些条件此前尚不为人所知。

特别地，对于斜自伴系统，我们证明：即使控制算子 B 是**不**可容许的，**并且**该系统在稳定化空间中**不**是精确零可控的，该系统仍可被快速稳定化。这一点在第3.1节中讨论。

2. 记号与假设

记号 在下文中， $\mathbb{N}^*$ 表示正整数集，即 $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ 与$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. 。类似地，我们记 $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 和 $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$。符号 $\lesssim$ 表示在至多相差一个乘法常数的意义下小于或等于。

考虑由(1)描述的控制系统。设$(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$为一个希尔伯特空间。假设算子$\mathcal{A}$： $\mathcal{D}(\mathcal{A}) \to X$ 是 $\mathcal{D}(\mathcal{A})$上具有有限增长界的 C^0 半群 $\{e^{At}\}_{t\geq 0}$ 的生成元，其中 $\mathcal{D}(\mathcal{A})$定义为

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) := \{f \in X,\ \mathcal{A}f \in X\}.$$

我们作如下假设

(A_1) $\mathcal{A}$ 可对角化，即存在由 $\mathcal{A}$的特征向量构成的 X 的Riesz基（见 [87]），且相应特征值的重数有界。

让我们d 记 $m \in \mathbb{N}^*$ 为最高重数，可以将空间 X 分解为

$$X = X_1 + ... + X_m, \tag{2}$$

使得对任意 $t \geq 0$， $e^{t\mathcal{A}}X_i \subset X_i$，且在其上 $\mathcal{A}$ 具有单的特征值的谱分解（见 [39, 附录G] 中此类分解的显式构造[1]）。换言之，在每一个 X_i上，存在一个（ X_i的）由特征向量（φ_n^i）$_{n\in\mathbb{N}^*}$ 构成的Riesz基，其相应特征值为（λ_n^i）$_{n\in\mathbb{N}^*}$，使得对任意 $n \neq p$有 $\lambda_n^i \neq \lambda_p^i$，且（$\varphi_n^i$）$_{(i,n)\in\{1,...,m\}\times\mathbb{N}^*}$ 是 X的Riesz基。在下文中，我们不失一般性地假设任一 X_i 由无穷多个 φ_n^i. 生成。否则，由有限多个 φ_n^i，生成的空间 X_i 可以很容易地视为有限维空间 [24]，且以下论证对有限集$\mathcal{I}$ 而非 $\mathbb{N}^*$同样成立。我们对任意 $s \in \mathbb{R}$， 定义空间

$$\mathcal{H}^s := \mathcal{H}_1^s + ... + \mathcal{H}_m^s,$$

其中

$$\mathcal{H}_i^s = \left\{ f = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n^i \varphi_n^i,\ \sum_{n\in\mathbb{N}^*} n^{2s}|f_n^i|^2 < \infty \right\}.$$

这些空间可以赋予自然的希尔伯特空间结构（形式证明见 A.1）：

引理 2.1. 对任意 $s \in \mathbb{R}$ 和 $i \in \{1, ..., m\}$，函数

$$\|\cdot\|_{\mathcal{H}_i^s} : f \to \|f\|_{\mathcal{H}_i^s} := \left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} n^{2s}|f_n^i|^2 \right)^{1/2}, \tag{3}$$

[1]唯一的区别在于，当 $\mathcal{A}$ 的特征向量基不正交时，(2) 不是直和，而(φ_n^{i+1})选自 $Span((\varphi_n^i)_{n\in\mathbb{N}^*})$之外，但不一定正交

是 $\mathcal{H}_i^s$ 的范数，且 $(\mathcal{H}_i^s, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_i^s})$ 是一个希尔伯特空间，其内积为

$$\langle f, g\rangle_{\mathcal{H}_i^s} := \sum_{n\in\mathbb{N}^*} n^{2s} f_n^i \overline{g_n^i},\ \forall f = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n^i \varphi_n^i,\ g = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} g_n^i \varphi_n^i \in \mathcal{H}_i^s. \tag{4}$$

因此，对于任意 $s = (s_1, \ldots\ldots, s_m) \in \mathbb{R}^m$，我们可以定义希尔伯特空间

$$\mathcal{H}^{\vec{s}} := \mathcal{H}_1^{s_1} + \ldots + \mathcal{H}_m^{s_m}.$$

这些空间与算子 $\mathcal{A}$ 密切相关。事实上，如果假设 6（见下文）成立，那么 $\mathcal{H}^\alpha = D(\mathcal{A})$；对于任意 $s \in \mathbb{Z}$， $\mathcal{H}^{s\alpha} = D(\mathcal{A}^s)$（如果 $\mathcal{A}$ 是扇形算子，这一结论甚至可以推广到 $s \in \mathbb{R}$，详见第 2 节 [70, 6]）。当 $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 L^2 的正交归一基时，这些空间也与通常的 Sobolev 空间 H^s 重合。与通常的 Sobolev 空间类似，这些空间满足以下嵌入性质

引理 2.2。 对于任意 $s \in \mathbb{R}$ 和 $\varepsilon > 0$,

$$\mathcal{H}^{s+\varepsilon} \text{ is compactly embedded in } \mathcal{H}^s.$$

事实上，这对分别取出的 $\mathcal{H}_i^s$ 也成立，证明与第 [39, 1.8.1] 节中的证明相同。回顾一下，如果 $s = 0$, $\mathcal{H}^s = X$。由于 $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 不一定是带有典范范数 $\|\cdot\|_X$ 的 X 的正交归一基，因此 $\|\cdot\|_X$ 不同于 $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^0}$。然而，我们有如下结果

引理 2.3. 若 $s = 0$，则 $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^s}$ 和 $\|\cdot\|_X$ 是等价范数。

这是 φ_n 是一个 Riesz基 这一事实的直接推论。事实上，根据定义，存在正常数 c 和 C，使得对于任意 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in l^2$,

$$c\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n|^2\right)^{1/2} \le \|\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n\varphi_n\|_X \le C\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n|^2\right)^{1/2}. \tag{5}$$

由于 $\|\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n\varphi_n\|_{\mathcal{H}^0} = (\sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n|^2)^{1/2}$，引理 2.3 得证。

由 [12], 可知，对于每个 $i \in \{1, ..., m\}$，族 $(\varphi_n^i)_{n\in\mathbb{N}^*}$ 在 X_i 中存在唯一的双正交归一族 $(\widetilde{\varphi_n^i})_{n\in\mathbb{N}^*}$，它构成 X_i 的一个 Riesz基，并且对应于 $\mathcal{A}$ 的伴随算子 $\mathcal{A}^*$ 的特征向量族（相对于标量积 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle\ X$）。因此，任意 $f \in X_i$ 都可在 X_i 中唯一分解如下:

$$f = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n^i \varphi_n^i = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \langle f, \widetilde{\varphi_n^i}\rangle \varphi_n^i,$$

并且，因此 $\langle f,\ \widetilde{\varphi_n^i}\rangle = \langle f,\ \varphi_n^i\rangle_{\mathcal{H}_i^0}$ 这也适用于任意函数 $f \in \mathcal{H}_i^s$，其中 $s \in \mathbb{R}$。

假设 本文中，我们作如下假设：存在 $(\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_m) \in (1,\ +\infty)^m$，使得

- $$n^{\alpha_i} \lesssim |\lambda_n^i| + 1 \lesssim n^{\alpha_i},\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, i \in \{1, \cdots, m\} \tag{6}$$

- 存在 $C > 0$，使得对任意 $n,\ p \in \mathbb{N}^*,\ i \in \{1, \cdots, m\}$,

$$|\lambda_n^i - \lambda_p^i| \ge C n^{\alpha_i - 1} |n - p|. \tag{7}$$

现在我们引入指数稳定性的定义

定义 2.4（指数稳定性）。设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}$（$D$（$\mathcal{A}$） X）满足假设 （A_1）和 （6）–（7），$B \in \mathcal{H}_1^{-\alpha_1} \times ... \times \mathcal{H}_m^{-\alpha_m}$且 $K \in \mathcal{L}$（D（A）；$\mathbb{C}^m$）。该系统

$$\partial_t u = \mathcal{A}u + BK(u), \tag{8}$$

称其以 $\mu > 0$ *in* X 为衰减率指数稳定，如果该系统在 X 上适定，即 $\mathcal{A} + BK$ 在 X 上生成一个 C^0-半群，并且存在 $C > 0$，使得对任意 $u_0 \in X$，系统 (8) 的唯一解 $u \in C^0([0, +\infty)\ X)$ 在初始条件 u_0 下满足

$$\|u(t)\|_X \leq Ce^{-\mu t}\|u_0\|_X,\ \forall t \in [0, +\infty). \tag{9}$$

注2.5。注意，先验并未假设 K 属于 $\mathcal{L}(X, \mathbb{C}^m)$，而且可能存在 K 不属于该空间的情况。例如，对于仅依赖于点值或边界值的控制（例如参见 [11]），通常会出现这种情况，其中 $X = L^2(0, 1)$、$K \in \mathcal{L}(H^1(0, 1); \mathbb{R}^m)$，但 $K \notin \mathcal{L}(L^2(0, 1)\ \mathbb{R}^m)$。

3. 主要结果

我们的主要结果表明，对于任意满足条件 (A_1)、(6)–(7) 的算子 $\mathcal{A}$，系统 (1) 都可以实现指数稳定化。

定理 3.1. 考虑控制系统 (1)，其算子 $\mathcal{A}$ 满足假设(A_1)、(6) 和(7)。若 $B = (B_1, \cdots, B_m) \in \mathcal{H}_1^{-\alpha_1/2} \times \cdots \times \mathcal{H}_m^{-\alpha_m/2}$满足

$$c_1 \leq |\langle B_i, \widetilde{\varphi_n^i}\rangle| \leq c_2 n^{\gamma_i}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ i \in \{1, \cdots, m\} \tag{10}$$

对于某个常数 c_1、$c_2 > 0$，以及某个 $\gamma_i \in [0, (\alpha_i - 1)/2)$，对 $i \in \{1, ..., m\}$ 成立，并令 $\vec{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_m)$。那么，对于任意 $\lambda_0 > 0$，存在 $\lambda > \lambda_0$ 和一个有界线性反馈 $K \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^{\vec{\alpha}/2}, \mathbb{C}^m)$，以及一个映射 T，它对于任意满足 $r_i \in (1/2 - \alpha_i + \gamma_i, \alpha_i - 1/2 - \gamma_i)$ 的 $\vec{r} = (r_1, ..., r_m)$，都是从 $\mathcal{H}^{\vec{r}}$ 到其自身的同构，并且 T 将系统映射为

$$\partial_t u = \mathcal{A}u + BK(u) \tag{11}$$

到系统

$$\partial_t v = \mathcal{A}v - \lambda v. \tag{12}$$

特别地，对于任意 $\mu > 0$, λ_0 均可取得足够大，使得闭环系统(11) 对任意 $\vec{r} = (r_1, ..., r_m)$ 且 $r_i \in (1/2 - \alpha_i + \gamma_i, \alpha_i - 1/2 - \gamma_i)$时，均以 $\mathcal{H}^{\vec{r}}$ 中的衰减率 $\mu > 0$ 指数稳定。

备注 3.2 (反馈算子的正则性)。虽然线性反馈 K 先验上属于 $\mathcal{L}(\mathcal{H}^{\vec{\alpha}/2}, \mathbb{C}^m)$，但我们构造的反馈实际上具有更高的正则性，并且实际上可延拓到 $\mathcal{L}(\mathcal{H}^{1/2+\varepsilon}, \mathbb{C}^m)$，其中任意 $\varepsilon > 0$ 均成立。（见 (77) 和引理 *5.8*）

事实上，定理 3.1 可推广如下:

定理 3.3。考虑控制系统 (1)，其算子 $\mathcal{A}$ 满足假设(A_1) (6) 和(7)。令 $\vec{\beta} = (\beta_1, \cdots, \beta_m) \in \mathbb{R}^m$, ($\gamma_1, ..., \gamma_m$) $\in [0, (\alpha_1 - 1)/2) \times ... \times [0, (\alpha_m - 1)/2)$，以及 $B = (B_1, \cdots, B_m) \in \mathcal{H}_1^{\beta_1 - \frac{\alpha_1}{2}} \times \cdots \times \mathcal{H}_m^{\beta_m - \frac{\alpha_m}{2}}$，使得存在满足下列条件的 $c_1, c_2 > 0$

$$c_1 n^{-\beta_i} \leq |\langle B_i, \widetilde{\varphi_n^i}\rangle| \leq c_2 n^{-\beta_i + \gamma_i}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ i \in \{1, \cdots, m\}. \tag{13}$$

那么，对于任意 $\lambda_0 > 0$，存在 $\lambda > \lambda_0$ 和一个有界线性反馈 $K \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^{\vec{\beta}+\vec{\alpha}/2}, \mathbb{C}^m)$，以及一个映射 T，它是从 $\mathcal{H}^{\beta+\vec{r}}$ 到自身的同构，并且满足 $\vec{r} := (r_1, ..., r_m)$，对于任意

$$r_i \in (1/2 - \alpha_i + \gamma_i, \alpha_i - 1/2 - \gamma_i). \tag{14}$$

此外， T 将系统映射

$$\partial_t u = \mathcal{A}u + BK(u)$$

到系统

$$\partial_t v = \mathcal{A}v - \lambda v.$$

特别地，对于任意 $\mu > 0$， λ_0 都可以选得足够大，使得闭环系统 (11) 在 $\mathcal{H}^{\beta+\vec{r}}$ 中以衰减率 μ 指数稳定，其中任意 $\vec{r}$ 满足 (14)。

我们在第 3.2–3.3 节中给出该定理的一些示例：讨论其在薛定谔方程和水波方程中的应用，以及文献 [40] 中研究的线性拉普拉斯算子的推广。

注 3.4。 定理 *3.1* 和定理 *3.3* 不仅保证存在反馈律 K，使闭环系统 $\partial_t u = \mathcal{A}u + BK(u)$ 指数稳定，还保证存在变换 T，将闭环系统的任意解 u 变换为指数衰减的 v，其中 $\partial_t v = \mathcal{A}v - \lambda v.$。由此可得以下观察结果

- *F*-等价可以扩展到确保某些拟线性系统的稳定性（抛物型系统的情况见 [14]，对于一般系统，这个问题在很大程度上仍未解决），也可以扩展到某些非线性系统（见第 *3.3.2* 小节）。

- 与其依赖涉及算子预解式的频域判据$\mathcal{A}+BK$， F-等价这一概念的优势在于，对于充分大的 $\lambda > 0$，它可以通过变换 T 以及平移算子 $\mathcal{A} - \lambda I$的稳定性，建立由 $\mathcal{A} + BK$ 生成的半群的指数稳定性（见第 *5.7* 节），进而获得 K 更为显式的构造，从而有望给出显式估计（尤其是关于衰减率 λ的 K 定量估计）。

- 此外，由于 $u = Tv$ 满足

$$\|v(t)\|_X \leq C\|v_0\|e^{-\mu t}, \quad \forall t \geq 0,$$

我们推得

$$\|u(t)\|_X \leq C\|T\|\|T^{-1}\|\|u_0\|_X e^{-\mu t}, \quad \forall t \geq 0,$$

其中， C 仅取决于 $\mathcal{A}$ （尤其与 λ 或 K无关）。一篇近期预印本 [38]指出，采用这种方法构造的 K （见引理 *5.7* 和第 *5.4* 节）可以用显式公式表示，从而得到关于衰减率 λ的 $\|T\|$和 $\|T^{-1}\|$的精确估计。这将有助于数值模拟和误差估计，并可能带来有限时间稳定化结果。

在 $\mathcal{A}$为斜伴随算子的特殊情形下，这与 [39]的结果一致，但所需条件严格更宽松（当 $\gamma = 0$ 时，它们与 [39] 的条件一致）。此外，在此处也可以得到 [22], 关于线性化薛定谔方程的结果；这里的稳定化条件同样更宽松，因为根据控制算子的正则性， [22, 假设 11] 不一定是必需的；参见第 3.2 节。

根据定理 3.3，我们推导出系统 1 快速稳定化所需的以下条件。

推论 3.5 (快速稳定化**)**。 考虑控制系统 (1) ，其算子 $\mathcal{A}$满足假设 (A_1) (6)和 (7)。设 $(\gamma_1, ..., \gamma_m) \in [0, (\alpha_1 - 1)/2) \times ... \times [0, (\alpha_m - 1)/2)$,

$r_i \in (1/2-\alpha_i+\gamma_i, \alpha_i-1/2-\gamma_i)$，以及 $B=(B_1,\cdots,B_m)\in \mathcal{H}_1^{-\alpha_1}\times\cdots\times\mathcal{H}_m^{-\alpha_m}$，使得存在满足以下条件的 $c_1, c_2>0$

$$c_1 n^{r_i} \le |\langle B_i, \widetilde{\varphi_n^i}\rangle| \le c_2 n^{r_i+\gamma_i}, \tag{15}$$

则对任意 $\mu>0$，存在一个（构造性的）有界线性反馈 $K_\gamma \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^{\vec{\alpha}/2-\vec{r}}, \mathbb{C}^m)$，使得对任意 $\varepsilon>0$，$K_\gamma \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^{1/2+\varepsilon-\vec{r}}, \mathbb{C}^m)$ 成立，其中 $1/2+\varepsilon-\vec{r}:=(1/2-\varepsilon-r_1, ..., 1/2-\varepsilon-r_m)$，并且系统(11) 在 X 中指数稳定，衰减率为 μ。

注 3.6. 关于特征值的条件是渐近的（见(6)、(7)），而对渐近行为的了解可能就已足够（推论 *3.14*、推论 *3.16*）。然而，我们至少需要部分地知道 $\langle B_i、\ \widetilde{\varphi_n^i}\rangle$：此处对$\langle B_i、\ \widetilde{\varphi_n^i}\rangle$ 的增长所要求的精确估计同样是渐近的，但我们需要确保它对所有 n均非零。尽管如此，它对每个 n 均非零这一事实意味着，我们真正需要的是近似可控性，这对于在没有任何进一步假设（例如抛物性）的情况下稳定化一个系统是必不可少的。因此，虽然这确实施加了限制，但无论如何都很难舍弃它。

3.1. 与可控性的联系及现有的可稳定性条件。 通常，对于一般的快速稳定化结果（在 X中），一个典型的"良好"条件是控制算子 B （在 X中）的可容许性，以及精确零可控性（在 X中），有时也会将其改写为可观测性条件。采用黎卡提方法或格拉姆方法进行快速稳定化时，通常需要这些条件（见 [77, 55, 82, 59, 60]）。 [79,命题1] 的结果采用可观测性方法，在一般框架下研究快速稳定化能力时，也将这些条件作为假设（另见 [78, 69]，其中 $\mathcal{A}$ 生成的是群而不仅仅是半群）。

在我们的情形中，由于我们要求 BK 移动 $\mathcal{A}$的整个谱[2]，因此我们的结论比单纯的快速稳定化更强，我们也可能预期需要更强的条件[3]。令人惊讶的是，我们的条件（15）实际上可能限制更少：在我们的框架下，系统不一定在 X 中精确零可控，并且 B 不一定在 X中可容许。当系统为斜自伴时，这一点尤其显著：在这种情况下，我们的充分条件（15）比迄今已有结果中的条件限制更少。具体而言，即使 B 不可容许（在 X中），且系统在状态空间 X 中并非精确（零）可控（而只能在一个正则性更高的空间中可控），系统（1）仍可在 X 中实现快速稳定化。

进一步来说，我们回顾一下，可容许（在 X 中）意味着存在 $T>0$和 $C_T>0$，使得对于每个 $z\in D(\mathcal{A}^*)$（参见 [23, 第 2 节。3] 或 [81]）

$$\int_0^T |B^* S(t)^* z|^2 \le C_T \|z\|_X^2, \ \textit{(admissibility condition)} \tag{16}$$

其中，$\mathcal{A}^*$ 是 $\mathcal{A}$ 的伴随算子，$S(t)^*$ 是 $S(t)$的伴随算子，而 $\{S(t)\}_{t\ge0}$ 是由 $\mathcal{A}$生成的 C^0 半群。另一方面，在时刻 T 实现 X 精确可控，等价于存在 c_T，使得

$$\int_0^T |B^* S(t)^* z|^2 \ge c_T \|z\|_X^2, \ \textit{(exact controllability)}. \tag{17}$$

[2]因为系统应映射到 $\partial_t v=(\mathcal{A}-\lambda Id)v$[3]事实上，我们的问题更接近无限维系统中的极点配置问题，而其条件通常比快速稳定化的条件更强。

对于斜自伴系统这一特殊情形，(17)也等价于精确零可控性。在我们的框架下，由于 $\mathcal{A}$具有特征向量Riesz基，我们得到以下来自[87] 的结果（另见 [76]）

引理 3.7 ([87]). 若 B 可容许，则存在 $C>0$ 使得

$$|\langle B_i, \widetilde{\varphi_n}^i\rangle| \leq C(1+|Re(\lambda_n^i)|)^{1/2},\ \forall\ (i,n)\in\{1,...,m\}\times\mathbb{N}^*, \tag{18}$$

并且，若该系统在 X 中还是精确可控的，则存在 $c>0$ 使得

$$|\langle B_i, \widetilde{\varphi_n}^i\rangle| \geq c(1+|Re(\lambda_n^i)|)^{1/2},\ \forall\ (i,n)\in\{1,...,m\}\times\mathbb{N}^*. \tag{19}$$

这些条件对于 X 中的可容许性和精确可控性是必要的（且并不总是充分的 [44] 一般而言[4]）。注意，在斜伴随算子的情形下，存在特征向量的正交归一基，并且可以假定 $\widetilde{\varphi_n} = \varphi_n$。与我们的条件 (15) 相比较，可见如下：

- 若 λ_n^i 的实部有界（例如若 $\mathcal{A}$ 是斜伴随算子，但不仅限于此）。– 对于 $r_i=0$, $\gamma_i=0$，我们重新得到 X 中的可容许性与精确可控性条件，它们与 [55, 82, 84, 69] 的正则性和可观测性条件相一致（以及 [22, 68] 对于双线性薛定谔方程）。– 对于 $r_i\in(0,\ \alpha_i-1/2-\gamma_i)$，$B$ 在 X 中不一定可容许，特别是 [84, 82, 55, 69]中所要求的正则性条件并不满足。– 对于 $r_i\in(1/2-\alpha_i+\gamma_i,\ 0)$，则该系统在状态空间 X 中不一定精确（零）可控，并且对于 $r_i\in(1/2-\alpha_i+\gamma_i,\ -\gamma_i)$，它不可能精确（零）可控。鉴于 [89, 定理 16.5]（另见 [79]）中给出的通常结果——根据该结果，X 中的快速稳定化能力蕴含斜自伴系统在 X 中的精确（零）可控性——这似乎令人惊讶。事实上，在这些文献中，快速稳定化能力的定义还额外要求 $K\in\mathcal{L}(X,\mathbb{C}^m)$，这有助于分析，尤其是为了确保系统是适定的，但此处并未作此假定（与情形 $r_i\in(1/2,\alpha_i-1/2)$ 相比）：我们只要求较弱的条件，即 $\mathcal{A}+BK$ 生成一个 C^0 半群于 X 上。这使得可以对系统的可控性作更弱的假定：注意，在此情形下，系统在更强的空间 $\mathcal{H}^{-\vec{r}}$ 中仍然是精确可控的（回想在此情形下 $r_i<0$ ）。这种限制较少、更为宽松的可稳定性定义也可在 [63, 64] 中找到，其中作者在 $\mathcal{A}$ 为斜自伴算子时，给出了非常好的以可观测性表述的必要条件（但假定B 是可容许的，而此处并非如此）。

  请注意，$r_i\in(1/2-\alpha_i+\gamma_i,\ 0)$ 和 $r_i+\gamma_i\in(0,\ \alpha_i-1/2)$ 可以同时成立。因此，即使系统在状态空间 X **中** B 不可容许且不可精确可控，我们关于快速稳定化的充分条件 (15) 仍可能成立。

- 若对于某个常数 $c>0$，$\mathrm{Re}(\lambda_n^i)\geq c|\lambda_n|$（例如，当 $\mathcal{A}$ 是自伴算子时，但不只限于此）
  - 如果 $r_i+\gamma_i\in(\alpha_i/2,\ \alpha_i-1/2)$，那么 B 不一定需要是可容许的 .

[4]请注意，若 $(\lambda_n^i)_{n,\ i}$ 的间隔适当 （见 [87, 命题 3.4]），则满足 [87] (19) 是精确可控性的充要条件，但这里的间隔并非总是适当。

当然，如果 B 是可容许的且系统精确可控，那么我们对 B 的条件总是满足的，这正如预期。

3.2. 薛定谔方程在基态附近的应用。 我们考虑在 [22, 68] 中研究的基态附近线性化的双线性薛定谔方程（早期研究另见 [12, 13] 和 [65, 32]）：

$$\begin{aligned} &i\partial_t\Psi = -\Delta\Psi - \sigma_1\Psi + u(t)\mu(x)\Phi_1(x), \\ &\Psi(t,0) = \Psi(t,1) = 0, \end{aligned} \tag{20}$$

其中，$\sigma_1 = \pi^2$ 和 $\Phi_1 = \sqrt{2}\sin(\pi x)$ 分别是具有狄利克雷边界条件的拉普拉斯算子的第一个特征值和特征向量。特征值和特征向量的全体构成如下方程的解：

$$\begin{aligned} -\Delta\Phi_n &= \sigma_n\Phi_n \\ \Phi_n(0) &= \Phi_n(1) = 0, \end{aligned} \tag{21}$$

并且由下式给出

$$\sigma_n = \pi^2 n^2, \ \ \Phi_n(x) = \sqrt{2}\sin(n\pi x), \ \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{22}$$

这里，所考虑的空间与 [22, 68] 中的一样

$$X = \{f \in H^3((0,1);\mathbb{C}), \ f(0) = f(1) = f''(0) = f''(1) = 0, \ \mathrm{Re}\langle f, \Phi_1\rangle_{L^2(0,1)} = 0\}, \tag{23}$$

容易验证，关联算子 $\mathcal{A} = i(\Delta + \sigma_1 Id)$ 是对角的，其特征向量为 $\varphi_n = (\pi n)^{-3}\Phi_n$，对应的特征值为 $\lambda_n = -i(\sigma_n - \sigma_1)$；对于 $n \in \mathbb{N}^*$，它们定义在 X 上，并满足带有 $\alpha = 2$ 的 (6)–(7)。空间 X 自然配备以下内积及其关联范数（见 [22]）：

$$\langle f, g\rangle_X := \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \sigma_n^3 \langle f, \Phi_n\rangle_{L^2}\overline{\langle g, \Phi_n\rangle_{L^2}}, \tag{24}$$

事实上，这对应于 H^3 范数（见 [68, 第 1] 节）。

可以验证，$(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ 是 X 的正交归一基，事实上

$$\langle \varphi_n, \varphi_k\rangle_X = \sum_{m\in\mathbb{N}^*} \sigma_m^3 \pi^{-6} n^{-3} k^{-3} \langle \Phi_n, \Phi_m\rangle_{L^2}\overline{\langle \Phi_k, \Phi_m\rangle_{L^2}} = \delta_{n,k}\sigma_n^3\pi^{-6}n^{-6}, \tag{25}$$

因此，对于 $k \neq n$，$\langle \varphi_n, \varphi_k\rangle_X = 0$ 以及 $\|\varphi_n\|_X = 1$。最后，令 $f \in X$，由于 $X \subset L^2(0,1)$ 且 $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ 是 $L^2(0,1)$ 的一组基，故存在 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ 使得

$$f = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n\Phi_n = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \sigma_n^{3/2} f_n \varphi_n, \tag{26}$$

并且由于 $f \in X$，$(\sigma_n^{3/2} f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in l^2$。

文献 [22, 68] 已证明该系统可以快速稳定化，即对于任意 $\lambda > 0$，存在一个反馈算子 K，使得带有 $u(t) = K(\Psi(t))$ 的系统 (20) 指数稳定，且衰减率为 λ，其中 X，前提是满足以下充分条件

$$\begin{aligned} &\mu \text{ belongs to } H^3(0,1) \\ &|\langle \mu\Phi_1, \Phi_n\rangle_{L^2(0,1)}| \geq cn^{-3}, \ \forall n \in \mathbb{N}^* \end{aligned} \tag{27}$$

对于某个 $c > 0$。特别地，这意味着（参见 [22, 备注 1.2]）

$$cn^{-3} \leq |\langle \mu\Phi_1, \Phi_n\rangle_{L^2(0,1)}| \leq Cn^{-3}, \tag{28}$$

对于某个 c，$C>0$（它们可能随行变化，但与 n 无关）。左侧的不等式等价于系统 (20) 的精确（零）可控性（见 X） [22]。由于 $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ 是 X的一个 Riesz 基（实际上是正交归一基），条件 (28) 等价于：

$$c \le |\langle \mu\Phi_1, \varphi_n\rangle_X| \le C, \tag{29}$$

这对应于带有 $\gamma=\beta=0$ 的条件 (15)。根据推论 3.5，我们可以放宽 [22, 39] 的条件 (27)，并表明带有 $u(t)=K(\Psi(t))$ 的系统 (20) 在 X 中是快速可稳定化的，只要存在 $\gamma\in[0,1/2)$ 和 $r\in(-3/2+\gamma,\ 3/2-\gamma)$ 使得

$$cn^r \le |\langle \mu\Phi_1, \varphi_n\rangle_X| \le Cn^{r+\gamma}. \tag{30}$$

特别地，快速稳定化的一个充分条件现在为

$$\begin{aligned} &\mu \text{ belongs to } H^3(0,1)\\ &|\langle \mu\Phi_1, \Phi_n\rangle_{L^2(0,1)}| \ge cn^{-7/2+\varepsilon},\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \text{for some } \varepsilon>0, \end{aligned} \tag{31}$$

较弱空间中的镇定 在 [22, 68] 中，所考虑的空间是 $X\subset H^3(0,1)$，因为在假设 (27) 下，系统被证明是精确（零）可控的（见 [12]）；如果 μ 具有正则性，则系统不可能在诸如 $H_0^1(0,1;\mathbb{C})$ 或 $H^2(0,1;\mathbb{C})\cap H_0^1(0,1;\mathbb{C})$ 这样的较弱空间中实现精确可控（这是 (28) 和 3.7 的推论）。然而，由于利用我们的结果，不再需要精确可控性即可稳定系统，因此我们可以考虑在较弱空间中的稳定化。特别地，在 [12, 22, 68] 的条件 (27) 下，系统在 $H^2(0,1;\mathbb{C})\cap H_0^1(0,1;\mathbb{C})$ 中是快速可稳定化的：现在令 $X:=L^2(0,1)$，则有以下推论

推论3.8. 假设(27) 成立，则对于任意 $\lambda>0$，存在 $\mathcal{K}\in\mathcal{L}(\mathcal{H}^{7/2+\varepsilon}(0,1);\mathbb{C})$，使得对于任意满足条件的 $\varepsilon>0$，系统(20) 在 $u(t)=\mathcal{K}(\Psi(t))$ 下，对任意 $\mathcal{H}^r$ 及$r\in(3/2,9/2)$均指数稳定，其中

$$\mathcal{H}^s := \{f\in H^s(0,1;\mathbb{C}) \mid \sum_{n\in\mathbb{N}^*} |\langle f,\Phi_n\rangle_{L^2(0,1)}|^2 n^{2s} < +\infty\}. \tag{32}$$

特别地，它在 $H^2(0,1;\mathbb{C})\cap H_0^1(0,1;\mathbb{C})$中指数稳定。

证明. 只需应用定理 3.3，并注意到 $\mathcal{H}^2=H^2(0,1;\mathbb{C})\cap H_0^1(0,1;\mathbb{C})$（参见 [22,第 1 节1]关于这一点的讨论，并注意到 $\mathcal{H}^2$ 在本例中恰好对应于 $H^2_{(0)}$ [22]）。□

一般而言，我们有

推论 3.9. 假设存在 $\beta\in\mathbb{R}$ 和 $\gamma\in[0,1/2)$，使得

$$cn^{-\beta} \le |\langle \mu\Phi_1, \Phi_n\rangle_{L^2(0,1)}| \le Cn^{-\beta+\gamma},\ \textit{for any } n\in\mathbb{N}^*, \tag{33}$$

对于某些正常数 $c,C>0$。那么，对于任意 $\lambda>0$，都存在一个（可显式计算的）线性反馈 $\mathcal{K}\in\mathcal{L}(\mathcal{H}^{\beta+1/2+\varepsilon},\mathbb{C})$，使得对任意 $\varepsilon>0$，具有 $u(t)=\mathcal{K}(\Psi(t))$ 的系统 (20) 在 $\mathcal{H}^{\beta+r}$ 上指数稳定，且对任意 $r\in(-3/2+\gamma,3/2-\gamma)$，其衰减率至少为 λ，其中 $\mathcal{H}^s$ 由 (32) 给出

注记 3.10（与 [39] 的比较）。由于该例中涉及的算子是斜伴随算子，因此也可以应用 [39] 中的结果，得到的条件为 （33），其中$\gamma=0$. 这使得我们的条件比 [39] 中提出的条件更宽松。

注记 3.11。 请注意，在 [68] 中，作者采用了一种截然不同的方法，并给出了关于 λ 的 K 的一个令人印象深刻的定量估计，从而能够对该系统进行有限时间稳定化。由于 F-等价能够相对明确地构造控制 K 和同构T，因此值得探究在我们的情形下能否得到关于K 和 T 的定量估计，进而实现有限时间稳定化。

3.3. **在抛物型系统中的应用**。

3.3.1. 热方程。 首先考虑环面 $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ 上的热方程，它具有两个标量控制

$$\partial_t u = \Delta u + \phi w(t), \tag{34}$$

其中 $\phi = (\phi_1, \phi_2)^T$ 满足 ϕ_1 为偶函数且 ϕ_2 为奇函数，并且 $w(t) \in \mathbb{R}^2$ （该系统在 $H^m(\mathbb{T})$中使用单个控制时不可控，参见 [40]）。所考虑的空间为 $H^m(\mathbb{T})$，算子 $\mathcal{A} = \Delta$ 的特征向量及其对应的特征值为

$$\lambda_n = -n^2,\ \varphi_n^1(x) = n^{-m} c_{1,n} \sin(nx),\ \varphi_{n+1}^2(x) = n^{-m} c_{2,n} \cos(nx), \forall n \in \mathbb{N}^*, \tag{35}$$

以及与特征值 0 对应的常函数 $\varphi_0^2(x) = (2\pi)^{-1}$。注意，除 0 以外，所有特征值的重数均为 2。文献 [40] 证明，对于任意大的 $\lambda > 0$，存在反馈算子 $K \in \mathcal{L}(H^{m+1/2+\varepsilon}; \mathbb{R}^2)$，对任意 $\varepsilon > 0$，使得该系统通过 $w(t) = K(u(t))$ 可逆地映射为指数稳定系统

$$\partial_t u = \Delta u - \lambda u, \tag{36}$$

在 $\mathbb{H}^{m+r}(\mathbb{T})$ 中对任意 $r \in (-1/2, 1/2)$ 成立，只要下列充分条件成立：

$$c \le |\langle \phi_i, \varphi_n^i \rangle_{H^m(\mathbb{T})}| \le C,\ \forall (i,n) \in \{1,2\} \times \mathbb{N}^* \tag{37}$$

我们借助定理 3.3 得到同样的结论，但条件更弱：

推论 3.12. 设 $\gamma \in [0, 1/2)$，若

$$c \le |\langle \phi_i, \varphi_n^i \rangle_{H^m(\mathbb{T})}| \le C n^\gamma,\ \forall (i,n) \in \{1,2\} \times \mathbb{N}^*, \tag{38}$$

则对任意大的 $\lambda > 0$，存在一个反馈算子 $K \in \mathcal{L}(H^{m+1/2+\varepsilon}; \mathbb{R}^2)$，使得系统 (34) 连同 $w(t) = K(u(t))$ 可逆地映射到指数稳定系统 (36)（位于 $H^{m+r}(\mathbb{T})$ 中），特别地，它在 $H^{m+r}(\mathbb{T})$ 中是指数稳定的，对任意 $r \in (-3/2 + \gamma, 3/2 - \gamma)$。

3.3.2. 一个非线性系统：*Burgers* 方程。 事实上，我们的结果可以推广到非线性（半线性）系统，例如 Burgers 方程。我们考虑

$$\partial_t u = \Delta u - u \partial_x u + \phi w(t), \tag{39}$$

其中 $\phi = (\phi_1, \phi_2)^T$ 与前一个例子中的取法相同。所考虑的空间为 $L^2(\mathbb{T})$，我们考虑在 (35) 中定义的函数 (φ_n^i)，得到如下结果

推论 3.13. 设 $\gamma \in [0, 1/2)$，且 $r \in (-1/4,\ 1/2 - \gamma)$。 如果

$$c n^r \le |\langle \phi_i, \varphi_n^i \rangle_{L^2(\mathbb{T})}| \le C n^{r+\gamma},\ \forall (i,n) \in \{1,2\} \times \mathbb{N}^*, \tag{40}$$

那么，对于任意大的 $\lambda > 0$，都存在一个反馈算子 $K \in \mathcal{L}(H^{3/4}; \mathbb{R}^2)$（事实上，对任意 $\varepsilon > 0$，也存在 $K \in \mathcal{L}(H^{1/2-r+\varepsilon}; \mathbb{R}^2)$），使得具有 $w(t) = K(u(t))$ 的非线性系统 (39) 在 $L^2(\mathbb{T})$中局部指数稳定。

这可以通过利用线性系统上的 F-等价，并按照 [40] 中的做法将其用于非线性系统来证明。证明见附录 A.8。据我们所知，这一稳定化结果是新的，并改进了 [40]的结果（对应于 $r = \gamma = 0$ 时推论 3.13 的特例）。

3.3.3. 一般扩散方程。 定理 3.3 还允许我们将这一结果推广到经典扩散方程：

$$\partial_t u = \partial_x(a\partial_x u) + bu + \phi K(u), \quad \text{on} \quad [0,+\infty) \times [0,L], \tag{41}$$

$$\begin{aligned} c_1 u(t,0) + c_2 \partial_x u(t,0) &= 0 \\ c_3 u(t,L) + c_4 \partial_x u(t,L) &= 0, \end{aligned} \tag{42}$$

其中 $a \in C^2([0,L];\mathbb{R}_+^*)$、 $b \in L^2(0,L)$，以及 $c_1^2 + c_2^2 > 0$, $c_3^3 + c_4^2 > 0$。此前，无法在 F-等价框架下考虑这一问题，尽管早已通过其他方法获得了一些稳定化结果：例如，曾在参考空间 X （此处为 $X = L^2(0,L)$）中研究该系统，并施加狄利克雷边界条件和 ϕ 一个有界算子；作者通过黎卡提方法得到了采用最优反馈的稳定化结果。特别地，以下结论成立

C推论 3.14。 若存在 $c_1, c_2 > 0$ 以及 $\gamma \in [0, 1/2)$ 使得 ϕ 满足 s

$$c_1 \leq \left| \int_0^L \phi(x) u_n(x) dx \right| \leq c_2 n^\gamma, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \tag{43}$$

其中$(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ 是算子 $\mathcal{A} := \partial_x(a\partial_x) + b$的特征向量序列，那么对于任意$\lambda \in (0,+\infty)$，存在有界线性反馈 $K \in \mathcal{L}(H^{1/2+\varepsilon}(0,L)\ \mathbb{C})$，对于任意 $\varepsilon > 0$，使扩散方程(41)–(42) 在 $H^r(0,L)$ 中指数稳定，衰减率为 λ，对于任意$r \in (-3/2+\gamma, 3/2-\gamma)$。

注 3.15 （其他边界条件）。 根据我们为系统(41)考虑的边界条件，算子 $\mathcal{A}$ 的特征值可能是单重或二重（见 [56, 86, 67, 7]）。然后，根据特征值的重数调整空间 X （见(2)），即使考虑不同的边界条件(42) （例如狄利克雷边界条件），我们也可以应用我们的结果得到系统(41) 的稳定化条件。

3.4. **在巴格曼空间中应用于格里博夫算子**。 本节考虑的希尔伯特空间 X是以下巴格曼空间

$$X := \left\{ f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \text{ holomorphic } \mid \int_{\mathbb{C}} e^{-|z|^2} |f(z)|^2 dz < \infty \text{ and } f(0) = 0 \right\},$$

其配备的标量积为：

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{C}} e^{-|z|^2} f(z) \bar{g}(z) dz, \quad \forall f, g \in X,$$

其中， dz 表示 $\mathbb{C}$. 上的 2–维勒贝格测度。考虑如下定义的算子 U和 V：

$$\begin{cases} U : D(U) \subset X \to X \\ f \mapsto Uf = \frac{df}{dz} \\ D(U) = \{f \in X \mid Uf \in X\}, \end{cases} \quad \text{and} \quad \begin{cases} V : D(V) \subset X \to X \\ f \mapsto Vf = zf \\ D(V) = \{f \in X \mid Vf \in X\}. \end{cases}$$

算子 U 称为湮灭算子， V 称为产生算子。非自伴格里博夫算子（[1], [49]）由巴格曼空间 X 中的算子 U 和 V 构成多项式定义如下：

$$\mathcal{A} := (VU)^3 + \varepsilon V(U+V)U + \varepsilon^2 (VU)^{3d_2} + \cdots + \varepsilon^k (VU)^{3d_k} + \cdots, \tag{44}$$

其中 $\varepsilon \in \mathbb{C}$ 且 $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 是一个严格递减的正项数列，满足 $d_0 = 2d_1 = 1.$ 。该算子出现在 Gribov 于 [43] 为研究质子和中子之间以及其他一些较不稳定粒子之间的强相互作用而引入的 Reggeon场论中。注意，该算子既非自伴算子，也非斜自伴算子。因此， [39], [40]中陈述的稳定性分析结果无法涵盖这类算子。鉴于 [35], ，可以在定义域 $\mathcal{D}$ 上研究该算子，其定义如下：

$$\mathcal{D} := D((VU)^{3d_2}) \cap D(V(U+V)U).$$

现在考虑与之相关的如下演化方程：

$$\partial_t u = -\mathcal{A}u + \phi w(t) \tag{45}$$

其中 ϕ 是给定函数， w 是该系统的控制。根据 [35, 第 4 节， ε取值较小时，存在一个数列 $(\varphi_n^i)_{n,\ i}$ 使得 $\mathcal{A}$的特征向量系统在 X 中构成一个 Riesz基，并可展开为如下整函数级数：

$$\varphi_n(z) = \frac{z^n}{n!} + p\frac{z^n}{\sqrt{n!}} + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i \varphi_n^i(z),$$

对任意 $p \in (0, \frac{1}{\sqrt{n!}})$。 因此存在一个 Riesz基 $(\widetilde{\varphi_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ ， 它是 $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. 的双正交族。应用推论 3.5，可得：

推论 3.16。 设 $\gamma \in [0,1)$，且 $r \in (-5/2+\gamma, 5/2-\gamma)$。若 ϕ 满足存在$c_1, c_2 > 0$ 使得

$$c_1 n^r \le \left| \int_{\mathbb{C}} e^{-|z|^2} \phi(z) \widetilde{\varphi_n}(z) dz \right| \le c_2 n^{r+\gamma},$$

那么，若 ε 足够小，对于任意 $\lambda \in (0, +\infty)$，存在反馈律 $w(t) = K(u(t,\cdot))$，其中 $K \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^{\frac{3}{2}-r}, \mathbb{C})$，使得系统 (45) 在巴格曼空间 X中指数稳定，衰减率为 λ.

证明。 我们只需证明：格里博夫算子 $-\mathcal{A}$ 生成一个 C^0 半群，且 $-\mathcal{A}$ 的特征值满足假设 (6) 和 (7)，然后即可由推论 3.5 得出结论。根据 [35, 第 4.2 节和定理 3.2], ，存在足够小的 ε及一个序列 $(\lambda_n^i)_{n,\ i}$ ，使得 $-\mathcal{A}$ 的特征值均为单特征值，并可分解如下：

$$\lambda_n = -n^3 + O_\varepsilon(1),$$

其中 $O_\varepsilon(1) := \sum \varepsilon^i \lambda_n^i \simeq O(|\varepsilon|, 1/n)$。 因此，条件 (6) 和 (7) 在 $\alpha = 3$ 下成立。$_{i\in\mathbb{N}^*}$生成 C^0 半群这一事实，是由此以及存在特征向量Riesz基得出的：容易验证，存在 $\lambda_0 > 0$ 使得 $\lambda_n - \omega < 0$ ，因此$-\mathcal{A} - \omega$是耗散的；类似地，借助特征向量Riesz基，对于任意 $\lambda_0 > \omega$ ，$-\mathcal{A} - \lambda_0$都是满射。于是，例如可以应用 Lumer-Phillips定理，得出 C^0 半群存在。

□

4. 策略与提纲

为了证明主要结果，主要挑战在于分别证明每个空间X_i 中的 F-等价，更确切地说：

命题 *4.1.* 假设 $\mathcal{A}$ 满足 *(*A_1*)*、*(6)* 与 *(7)*。设 $\beta = (\beta_1, ..., \beta_m) \in \mathbb{R}^m$ 与$\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_m) \in [0, (\alpha_1 - 1)/2) \times ... \times [0, (\alpha_m - 1)/2)$。对任意 $i \in \{1, ..., m\}$，假设 $B_i \in \mathcal{H}_i^{\beta_i - \frac{\alpha_i}{2}}$满足 *(13)*。则对任意 $\lambda \in \mathbb{R}_+ \backslash \mathcal{N}$，其中 $\overline{\mathcal{N}} = \{\lambda_n^i - \lambda_p^i \,|\, (n, p) \in \mathbb{N}^*, \, i \in \{1, ..., m\}\}$，存在有界线性算子 $K_i \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_i^{\beta_i + \frac{\alpha_i}{2}}; \mathbb{C})$，使得 $K_i \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_i^{\beta_i + \frac{1}{2} + \varepsilon}; \mathbb{C})$ 对任意$\varepsilon > 0$ 成立，以及线性映射 $T_i \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_i^r)$，它是从 $\mathcal{H}_i^r$ 到其自身的同构（对任意$r \in (\beta_i + 1/2 - \alpha_i + \gamma_i, \beta_i + \alpha_i - 1/2 - \gamma_i)$），并将该系统映射为，

$$\partial_t u = \mathcal{A}u + B_i K_i(u), \quad u \in \mathcal{H}_i^r, \tag{46}$$

对系统而言，

$$\partial_t v = \mathcal{A}v - \lambda v, \quad v \in \mathcal{H}_i^r. \tag{47}$$

其思路是，若命题 4.1 成立，则可选取一个反馈，使总系统以衰减率 λ达到指数稳定性。为此，主要步骤是证明采用反馈 $K = (K_1, ..., K_m)^T$的系统是适定的，即

命题 4.2。在定理 *3.3* 的假设下，取 $K = (K_1, ..., K_m)^T$，其中 K_i 由命题 *4.1* 给出。对于任意满足 (14) 的 $\vec{r}$，$\mathcal{A}+BK$ 在 $\mathcal{H}^{\vec{r}}$上生成一个半群，特别地，系统 (11) 有唯一解 $u \in C^0([0, +\infty); \mathcal{H}^{\vec{r}})$。

若命题 4.1 和命题 4.2 成立，则通过选择 $T = T_1 + ... + T_m$，定理 3.3（进而定理 3.1）即可得证。相关细节见第 5.8 节，而命题 4.1 和命题 4.2 的证明分别见第 5.1–5.6 节和第 5.7 节。在本节余下部分，我们将介绍证明主要结果命题 4.1 的策略，以及 F-等价方法的思路。

方法原理。形式上，将系统 (46) 映射到系统 (47) 的 T_i mapping 意味着 $v = T_i u$，其中 T_i 是满足以下算子等式的同构

$$T_i(\mathcal{A} + B_i K_i) = (\mathcal{A} - \lambda) T_i, \tag{48}$$

在某种意义下。确实，仍然从形式上看，如果 (48) 成立且 $v = T_i u$，那么

$$\partial_t v = T_i \partial_t u = T_i(\mathcal{A} + B_i K_i)u = (\mathcal{A} - \lambda) T_i u = (\mathcal{A} - \lambda) v, \tag{49}$$

反过来，由于 T_i 是同构，结论也成立。由于算子等式 (48) 的解（T， K）并不唯一——注意，若（T， K）是一个解，那么对于任意 $a \neq 0$，（aT， K）仍然是一个解——因此很容易想到对 T 添加某种归一化条件，以简化 (48)。在这方面，一个常见的好方法是形式上添加如下形式的条件

$$T_i B_i = B_i, \tag{50}$$

同样，这里所说的意义还有待定义（注意，由于 B_i 可能无界，且不属于我们考虑 T_i 的空间 $\mathcal{H}_i^r$，因此这个不等式可能需要在弱意义下考虑）。加入 (50) 后，算子等式 (48)（形式上）变为

$$T_i \mathcal{A} + B_i K_i = (\mathcal{A} - \lambda) T_i. \tag{51}$$

由于该算子方程关于 (T, K) 是线性的，因此比 (48) 更容易求解。当 X 是有限维时，若 $(\mathcal{A}, B_i)$ 在 X_i 中可控（见 [24, 27]），则 (50)–(51) 存在唯一解，这也进一步说明了加入条件 (50) 的必要性。当 X 是无穷维时，

情况就不那么明朗了，但 (51) 可以用 T 对 $(\varphi_n^i)_{i\in\mathbb{N}}$ 的作用来表述。事实上，将算子等式 (51) 投影到 $\mathcal{A}$ 的特征向量 φ_n^i 上，可得

$$\lambda_n^i T_i\varphi_n^i + B_iK_i(\varphi_n^i) = (\mathcal{A}-\lambda I)T_i\varphi_n^i. \tag{52}$$

我们设 $h_n^i := T_i\varphi_n^i$; $K_n^i := K_i(\varphi_n^i)$，并将 (52) 投影到与 $(\varphi_n^i)_{n\in\mathbb{N}^*}$ 相关联的双正交族 $(\widetilde{\varphi_p^i})_{p\in\mathbb{N}^*}$ 上，得到

$$\begin{aligned}\lambda_n^i\langle h_n^i,\widetilde{\varphi_p^i}\rangle + K_n^i\langle B_i,\widetilde{\varphi_p^i}\rangle &= \langle \mathcal{A}h_n^i,\widetilde{\varphi_p^i}\rangle - \lambda\langle h_n^i,\widetilde{\varphi_p^i}\rangle\\ &= \lambda_p^i\langle h_n^i,\widetilde{\varphi_p^i}\rangle - \lambda\langle h_n^i,\widetilde{\varphi_p^i}\rangle\end{aligned}$$

因此我们得到 假设选择 λ 使得对于任意 $(n,\ p)\in\mathbb{N}^*$，$(\lambda_n^i-\lambda_p^i+\lambda)\neq 0$,

$$\langle h_n^i,\widetilde{\varphi_p^i}\rangle = -K_n^i\frac{\langle B_i,\widetilde{\varphi_p^i}\rangle}{\lambda_n^i-\lambda_p^i+\lambda}.$$

这导出了如下

$$T_i\varphi_n^i = h_n^i = \sum_{p\in\mathbb{N}^*}\langle h_n^i,\widetilde{\varphi_p^i}\rangle\varphi_p^i = -K_n^i\sum_{p\in\mathbb{N}^*}\frac{\langle B_i,\widetilde{\varphi_p^i}\rangle}{\lambda_n^i-\lambda_p^i+\lambda}\varphi_p^i. \tag{53}$$

因此，若 T_i 是 (51) 的一个解，则它必须具有分解 (53)。特别是，一旦选定 K_i，候选变换 T_i 就确定了；我们旨在证明它确实是从 $\mathcal{H}_i^r$ 到其自身的一个同构，并将系统 (46) 映射到系统 (47)。

命题 4.1 证明概要

总体策略如下

(1) 证明算子

$$S_i:\varphi_n^i\to\sum_{p\in\mathbb{N}^*}\frac{\varphi_p^i}{\lambda_n^i-\lambda_p^i+\lambda} \tag{54}$$

是从 $\mathcal{H}_i^r$ 到其自身的指标为 0 的 Fredholm 算子，对任意 $r\in(1/2-\alpha_i,\alpha_i-1/2)$ 均成立。

(2) 证明 $\ker(S_i)=\ker(S_i^*)=\{0\}$，因此 S_i 是从 X_i 到其自身的同构。(3) 证明对任意 $r\in(1/2-\alpha_i,\alpha_i-1/2)$，$S_i$ 是从 $\mathcal{H}_i^r$ 到其自身的同构

(4) 对任意 $\varepsilon>0$，找出一个显式候选 $K_i\in\mathcal{L}(\mathcal{H}^{1/2+\varepsilon};\mathbb{C})$，使得 $T_iB_i=B_i$ 在 $\mathcal{H}_i^{-\alpha_i/2}$ 中成立，其中

$$T_i:\varphi_n^i\to -K_i(\varphi_n^i)\sum_{p\in\mathbb{N}^*}\frac{b_p^i\varphi_p^i}{\lambda_n^i-\lambda_p^i+\lambda} \tag{55}$$

其中 $b_p^i:=\langle B_i,\ \widetilde{\varphi_p^i}\rangle$.

(5) 证明线性算子 T_i 对 $r_i\in(1/2-\alpha_i+\gamma_i,\ \alpha_i-1/2)$ 从 $\mathcal{H}_i^{r_i}$到自身是有界的，并且对任意 $s\in(-(\alpha_i-1)/2+\gamma_i,\ (\alpha_i-1)/2-\gamma_i)$ 在 $\mathcal{L}(\mathcal{H}_i^{\alpha_i/2+s};\mathcal{H}_i^{-\alpha_i/2+s})$ 中满足算子等式 (51)。

(6) 证明对于任意 $r\in(1/2-\alpha_i+\gamma_i,\ \alpha_i-1/2-\gamma_i)$，$T_i$ 是从 $\mathcal{H}_i^r$到其自身的一个同构。

步骤 1、4 和 5 与 [39], 类似。与 [39] 中介绍的对偶紧性方法的主要区别在于步骤 2 和 3：其中 [39] 所用的对偶论证利用了斜伴随性质，但这些性质不再成立；以及步骤 5 和 6：当 $\gamma_i \neq 0$时， T_i 的有界性并非显而易见，而要像 [39] 那样直接证明 T_i 是从 $\mathcal{H}_i^{-\alpha_i/2}$ 到其自身的一个同构，则颇具挑战性。这些步骤见第5.1–5.6节。

5. 定理 3.3 的证明

我们首先按照第 4 节所述的思路证明命题 4.1，然后推导出定理 3.3（见第 5.8 节），进而得到定理 3.1。证明中的若干论证（即步骤 1、4、5）与 [39], 相似，因此我们仅说明其中的新内容，其余部分请读者参见 [39] 。

由于命题 4.1 要证明每个空间 X_i 上的 F-等价，我们先固定 $i \in \{1, ..., m\}$，并将在 X_i（分别为 $\mathcal{H}_i^s$）中进行讨论。我们还采用以下约定：若定义在 X_i（分别为 $\mathcal{H}_i^s$）上的算子由其在 $(\varphi_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$ 上的作用给出，则将其延拓至 X（分别为 $\mathcal{H}^s$），并令其在任意 $j \neq i$ 的情况下于 $(\varphi_n^j)_{n\in\mathbb{N}}$ 上的像为 $\{0\}$ 。为方便读者，在下文中我们省略各个量 B_i、K_i、T_i、β_i、α_i、γ_i、$(\varphi_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$、$(\lambda_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$ 对 i 的依赖。下文还假设 $\beta = 0$；情形 $\beta \neq 0$ 的延拓见附录 A.6。

让我们设定，对于 $n \in \mathbb{N}^*$,

$$q_n := \sum_{p\in\mathbb{N}^*} \frac{\varphi_p}{\lambda_n - \lambda_p + \lambda} = S\varphi_n, \tag{56}$$

5.1. 步骤 1：S 是一个 Fredholm 算子。

我们将证明如下：

命题 5.1。 对于任意 $r \in (1/2 - \alpha, \alpha - 1/2)$，算子 $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^r)$ 是指标 *0* 的 *Fredholm* 算子。更精确地说，存在一个紧算子 $S_c \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^r)$ 使得

$$S = \lambda^{-1} Id + S_c. \tag{57}$$

命题 *5.1* 的证明。 □

设 $r \in (1/2 - \alpha, \alpha - 1/2)$。证明 S 是 $\mathcal{H}^r$ 中阶为 0 的 Fredholm 算子，本质上可以像 [39] 中那样进行。首先需要注意的是如下事实

引理 5.2。 对于任意 $\lambda \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathcal{N}$，存在 $C(\lambda) > 0$ 使得 $|\lambda_n - \lambda_p + \lambda| \geq C(\lambda)|\lambda_n - \lambda_p|$。

证明。对于 $n = p$ ，该不等式对任意常数 $C(\lambda)$成立。对于 $n \neq p$

$$\frac{|\lambda_n - \lambda_p \pm \lambda|}{|\lambda_n - \lambda_p|} \geq 1 - \frac{\lambda}{|\lambda_n - \lambda_p|}. \tag{58}$$

由(7)

$$\lim_{n^2+p^2\to+\infty} \frac{\lambda}{|\lambda_n - \lambda_p|} \leq \lim_{n^2+p^2\to+\infty} \frac{\lambda}{C\max(n,p)^{\alpha-1}} = 0.$$

由于 $\lambda_n - \lambda_p + \lambda \neq 0$ 对于任意 $(n,\ p),\ \in \mathbb{N}^*$ 根据 $\mathcal{N}$ 的定义，存在 $C(\lambda) > 0$，使得

$$|\lambda_n - \lambda_p + \lambda| \geq C(\lambda)|\lambda_n - \lambda_p|$$

□

有鉴于此，这一步的关键在于注意到 [39, 引理 4.6]尽管$\mathcal{A}$ 不是斜自伴的，仍然适用。事实上，我们有

引理 5.3。 对于任意 $s<\alpha-1$，我们有

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*\setminus\{p\}}\frac{n^s}{|\lambda_n-\lambda_p+\lambda|}\lesssim p^{1-\alpha+s}\log(p)+p^{-\alpha},\ \forall p\in\mathbb{N}^*, \tag{59}$$

其中 $\lesssim$ 表示 小于或等于某个乘法常数倍，该常数不依赖于 p或 n .

证明。 根据引理 5.2，只需证明

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*\setminus\{p\}}\frac{n^s}{|\lambda_n-\lambda_p|}\lesssim p^{1-\alpha+s}\log(p)+p^{-\alpha},\ \forall p\in\mathbb{N}^*. \tag{60}$$

由于条件 (6) 和 (7) 成立，这恰好由 [39, 引理 4.2]给出。 □

现在我们可以按照 [39,引理 4.7]的做法证明

$$S_c:\sum_{n\in\mathbb{N}^*}a_nn^{-r}\varphi_n\mapsto\sum_{n\in\mathbb{N}^*}a_nn^{-r}\left(\sum_{p\in\mathbb{N}^*\setminus\{n\}}\frac{\varphi_p}{\lambda_n-\lambda_p+\lambda}\right), \tag{61}$$

是一个从 $\mathcal{H}^r$ 到自身的紧算子:

令 $\varepsilon>0$ 为 b 选取 e，利用富比尼定理，对于任意$a=\sum a_nn^{-r}\varphi_n\in\mathcal{H}^r$、$n\in\mathbb{N}^*$，我们有

$$S_ca=\sum_{n\in\mathbb{N}^*}a_nn^{-r}\left(\sum_{p\in\mathbb{N}^*\setminus\{n\}}\frac{\varphi_p}{\lambda_n-\lambda_p+\lambda}\right)=\sum_{p\in\mathbb{N}^*}\varphi_p\left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*\setminus\{p\}}\frac{a_nn^{-r}}{\lambda_n-\lambda_p+\lambda}\right).$$

因此,

$$\begin{aligned}\|S_ca\|^2_{\mathcal{H}^{r+\varepsilon}}&=\left\|\sum_{p\in\mathbb{N}^*}\varphi_p\left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*\setminus\{p\}}\frac{a_nn^{-r}}{\lambda_n-\lambda_p+\lambda}\right)\right\|^2_{\mathcal{H}^{r+\varepsilon}}\\&=\sum_{p\in\mathbb{N}^*}p^{2r+2\varepsilon}\left|\sum_{n\in\mathbb{N}^*\setminus\{p\}}\frac{a_nn^{-r}}{\lambda_n-\lambda_p+\lambda}\right|^2.\end{aligned} \tag{62}$$

因此，我们可以 利用引理 5.3，并完全按照 [39, 引理 4.7] 中的做法，可得以下 g

引理 5.4。 考虑 $r\in(1/2-\alpha,\alpha-1/2)$。对于任意 $\varepsilon\in\big(0$，最小值$\{\frac{\alpha-1}{2},\alpha+r-\frac{1}{2}\}\big)$，均有

$$\sum_{p\in\mathbb{N}^*}p^{2r+2\varepsilon}\left|\sum_{n\in\mathbb{N}^*\setminus\{p\}}\frac{a_nn^{-r}}{\lambda_n-\lambda_p+\lambda}\right|^2\lesssim\sum_{n\in\mathbb{N}^*}|a_n|^2.$$

利用本引理给出的任意 ε，可得:

$$\|S_ca\|^2_{\mathcal{H}^{r+\varepsilon}}\lesssim\sum_{n\in\mathbb{N}^*}|a_n|^2. \tag{63}$$

由于

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*}|a_n|^2=\left\|\sum_{n\in\mathbb{N}^*}a_n(n^{-r}\varphi_n)\right\|^2_{\mathcal{H}^r}=\|a\|^2_{\mathcal{H}^r}, \tag{64}$$

我们得出结论

$$\|S_c a\|_{\mathcal{H}^{r+\varepsilon}} \lesssim \|a\|_{\mathcal{H}^r} \tag{65}$$

并且，由 $\mathcal{H}^{r+\varepsilon}$ 在 $\mathcal{H}^r$ 中的紧嵌入（见引理 2.2），特别可知，S_c 是一个从 $\mathcal{H}^r$ 到其自身的紧算子。最后，注意到

$$S = \lambda^{-1} Id + S_c, \tag{66}$$

由此得证。

5.2. 步骤 2： S 是从 到其自身的同构。利用步骤 1 对 $r = 0$ 得出的结果，我们推得 S 是一个从 $\mathcal{H}^0$ 到其自身、指标为 0 的弗雷德霍姆算子。于是， S 是同构，当且仅当 $\ker S = \{0\}$. 这一步的思路是证明，这可以归结为等价关系˜ ˜：$(S\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ 的稠密性与 $(S\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ 的 ω-无关性，其中 S 是 $\mathcal{H}^0$ 中 S 的伴随算子。由于 S 的指标为 0，证明 $\ker S = \{0\}$ 也等价于（见 [52, 第 4] 章）

$$\ker \tilde{S} = \{0\} \text{ where } \tilde{S} \text{ is the adjoint of } S. \tag{67}$$

我们先引入

$$\widetilde{q_n} := \sum_{p\in\mathbb{N}^*} \frac{\varphi_p}{\overline{\lambda_p - \lambda_n + \lambda}}. \tag{68}$$

我们首先作如下断言

引理 5.5. 算子 S 在 $\mathcal{H}^0$ 中的伴随算子为

$$\tilde{S} : \varphi_n \mapsto \widetilde{q_n}. \tag{69}$$

证明。 事实上，考虑任意的 $f = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n\varphi_n, \in \mathcal{H}^0$ 和 $g = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} g_n\varphi_n \in \mathcal{H}^0$. 有如下结论

$$\begin{aligned}
\langle Sf, g\rangle_{\mathcal{H}^0} &= \langle \sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n q_n, \sum_{n\in\mathbb{N}^*} g_n\varphi_n\rangle_{\mathcal{H}^0} \\
&= \langle \sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n \sum_{p\in\mathbb{N}^*} \frac{\varphi_p}{\lambda_n - \lambda_p + \lambda}, \sum_{n\in\mathbb{N}^*} g_n\varphi_n\rangle_{\mathcal{H}^0} \\
&= \langle \sum_{p\in\mathbb{N}^*} \varphi_p \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{f_n}{\lambda_n - \lambda_p + \lambda}, \sum_{n\in\mathbb{N}^*} g_n\varphi_n\rangle_{\mathcal{H}^0} \\
&= \sum_{p\in\mathbb{N}^*}\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\overline{g_p} f_n}{\lambda_n - \lambda_p + \lambda}.
\end{aligned}$$

同理，我们有如下结论

$$\begin{aligned}
\langle f, \tilde{S}g\rangle_{\mathcal{H}^0} &= \langle \sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n\varphi_n, \sum_{n\in\mathbb{N}^*} g_n\widetilde{q_n}\rangle_{\mathcal{H}^0} \\
&= \langle \sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n\varphi_n, \sum_{p\in\mathbb{N}^*} \varphi_p \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{g_n}{\overline{\lambda_p - \lambda_n + \lambda}}\rangle_{\mathcal{H}^0} \\
&= \sum_{p\in\mathbb{N}^*}\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{f_p\overline{g_n}}{\lambda_p - \lambda_n + \lambda}
\end{aligned}$$

因此，对于所有 $f, g \in \mathcal{H}^0$.，我们有 $\langle Sf, g\rangle = \langle f, \tilde{S}g\rangle$ □

˜根据 (66)、(67)， S是同构等价于 $\ker\ S=\{0\}$ 或 $\ker S=\{0\},$而这又等价于:

$$\forall(f_n)_n\in l^2,\sum_{n\in\mathbb{N}^*}f_nq_n=0\Leftrightarrow f_n=0\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \text{or}\ \forall(f_n)_n\in l^2\sum_{n\in\mathbb{N}^*}f_n\widetilde{q_n}=0\Leftrightarrow f_n=0\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

这意味着， S 是从 $\mathcal{H}^0$ 到自身的同构，等价于$(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ 在 $\mathcal{H}^0$ 中 ω-无关，或$(\widetilde{q_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ 在 $\mathcal{H}^0$中 ω-无关。借助经典论证（例如参见 [22, 40, 39]），可以证明：对任意 $\lambda\in\mathcal{N}$，$(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ 要么在 $\mathcal{H}^0$ 中 ω-无关，要么 $\mathcal{H}^0$-稠密。这一点在附录 A.2中完成。因此，为证明 S 是从 $\mathcal{H}^0$ 到自身的同构，只需证明如下引理:

引理 5.6. $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ 是 $\mathcal{H}^0$-稠密的 $\Leftrightarrow$ $(\widetilde{q_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ 在 $\mathcal{H}^0$中是 ω-无关的。

证明。 假设$(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ 不是 $\mathcal{H}^0$-稠密的。则存在非平凡的$(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\in l^2$ ，使得对任意 $n\in\mathbb{N}^*$ $\langle q_n,\ f\rangle_{\mathcal{H}^0}=0$ ，其中 $f=\sum_{n\in\mathbb{N}^*}f_n\varphi_n.$

$$\langle q_n,f\rangle_{\mathcal{H}^0}=0\Leftrightarrow\sum_{p\in\mathbb{N}^*}\frac{\overline{f_p}}{\lambda_n-\lambda_p+\lambda}=0$$

$$\Leftrightarrow\sum_{p\in\mathbb{N}^*}\frac{f_p}{\overline{\lambda_n-\lambda_p+\lambda}}=0$$

因此，$\sum_{p\in\mathbb{N}^*}f_p\widetilde{q_p}=\sum_{p\in\mathbb{N}^*}f_p\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{\varphi_n}{\cancel{\lambda_n=\lambda_p+\lambda}}=\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\varphi_n\sum_{p\in\mathbb{N}^*}\frac{f_p}{\cancel{\lambda_n=\lambda_p+\lambda}}=0$，这表明 $(\widetilde{q_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$不是 ω-无关的。反之很直接：假设 $(\widetilde{q_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ 不是 ω-无关的。于是，存在非平凡的 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\in l^2$ 使得 $\sum_{p\in\mathbb{N}^*}f_p\widetilde{q_p}=0$。

$$\sum_{p\in\mathbb{N}^*}f_p\widetilde{q_p}=0\Leftrightarrow\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\varphi_n\sum_{p\in\mathbb{N}^*}\frac{f_p}{\overline{\lambda_n-\lambda_p+\lambda}}=0$$

$$\Leftrightarrow\sum_{p\in\mathbb{N}^*}\frac{f_p}{\overline{\lambda_n-\lambda_p+\lambda}}=0$$

因此，通过令 $f=\sum_{n\in\mathbb{N}^*}f_n\varphi_n,\ \in\mathcal{H}^0$ 可得 $\langle f,\ q_n\rangle_{\mathcal{H}^0}=\sum_{p\in\mathbb{N}^*}\frac{f_p}{\overline{\lambda_n-\lambda_p+\lambda}}=0,$ 这意味着 $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ 不是 $\mathcal{H}^0$-稠密的。□

5.3. 步骤 3： S 是一个从 $\mathcal{H}^r$ 到其自身的同构，对任意 $r\in(1/2-\alpha,\ \alpha-1/2)$。 这一步的思路是，首先利用步骤 2 证明，对于任意 $r\in[0,\alpha-1/2)$， S 是从 $\mathcal{H}^r$ 到其自身的同构；然后对负的 r 重复步骤 2 的思路。不同的是，这次，稠密性与$(S\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ 的 ω-独立性之间的对偶性，以及与伴随族之间的对偶性，并非在 $\mathcal{H}^r$ 中成立，而是在 $\mathcal{H}^r$ 与 $\mathcal{H}^{-r}$之间成立。

˜现在来看算子 $S,\ S$ ，即将它们扩展到 $\mathcal{H}^r$ 上，定义如下

$$S:n^{-r}\varphi_n\mapsto n^{-r}q_n,$$
$$\tilde{S}:n^{-r}\varphi_n\mapsto n^{-r}\widetilde{q_n}.$$

那么，当且仅当 S 是从 $\mathcal{H}^r$ 到其自身的同构时，$(n^{-r}q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ 才是 $\mathcal{H}^r$ 中的 Riesz基。由于 S 是一个指标为 0 的 Fredholm 算子，这等价于 $\ker S = \{0\}$。与情形 $r = 0$ 一样，这等价于证明对于任意 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in l^2$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n n^{-r} q_n = 0 \Leftrightarrow f_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{70}$$

因此，我们有以下几种不同情况：

- $r \in [0, \alpha - 1/2)$，那么 $(n^{-r}f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in l^2$. 并且，由于 $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ 是 $\mathcal{H}^0$中的 Riesz基，因此有

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n n^{-r} q_n = 0 &\Leftrightarrow n^{-r} f_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \\ &\Leftrightarrow f_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\end{aligned}$$

  因此，对于任意 $r \in [0, \alpha - 1/2, \quad S$ 都是从 $\mathcal{H}^r$ 到其自身的同构。

- $r \in (1/2 - \alpha, \ 0)$ 证明性质 (70) 等价于证明 $(n^{-r}q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$在 $\mathcal{H}^r$. 中是 ω-线性无关的。这里我们反设 $(n^{-r}q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ 在 $\mathcal{H}^r$. 中不是 ω-线性无关的。那么，存在一个非零的 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in l^2$，使得 $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n n^{-r} q_n$ =0。将其投影到向量 $m^{-r}\varphi_m$，上，对于任意 $m \in \mathbb{N}^*$，我们得到

$$\begin{aligned}0 &= \langle \sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n n^{-r} q_n, m^{-r}\varphi_m\rangle_{\mathcal{H}^r} \\ &= \langle \sum_{p\in\mathbb{N}^*} \varphi_p \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{f_n n^{-r}}{\lambda_n - \lambda_p + \lambda}, m^{-r}\varphi_m\rangle_{\mathcal{H}^r} \\ 0 &= \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{f_n n^{-r} m^r}{\lambda_n - \lambda_m + \lambda}, \quad \forall m \in \mathbb{N}^*. \end{aligned} \tag{71}$$

  令 $f := \sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n n^r \varphi_n$. As $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in l^2$，则有 $f \in \mathcal{H}^{-r}$. 。由于 $(n^r\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ 是 $\mathcal{H}^{-r}$ 的 Riesz基，且 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ 非平凡，因此有 $f \neq 0$。由于我们在前一种情形中证明了 S对于 $r \in [0, \alpha - 1/2)$ 是 $\mathcal{H}^r$ 上的同构，˜因此 S 对于 $r \in [0, \alpha - 1/2)$ 也是从 $\mathcal{H}^r$ 到自身的同构，因为它是 S.的伴随算子。因此，$(n^{-r}\widetilde{q_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$是 $r \in [0, \alpha - 1/2)$ 上的 $\mathcal{H}^r$ 的 Riesz基。于是，对于 $r \in (1/2 - \alpha, 0)$，$(n^r\widetilde{q_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ 是 $\mathcal{H}^{-r}$. 。特别地，$(n^r\widetilde{q_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ 是 $\mathcal{H}^{-r}$-稠密的。这保证存在 $m_0 \in \mathbb{N}^*$ 使得 $\langle f, m_0^r\tilde{q}_{m_0}\rangle_{\mathcal{H}^{-r}} \neq 0$. 。由此可得

$$\langle f, m_0^r\tilde{q}_{m_0}\rangle_{\mathcal{H}^{-r}} = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{f_n n^{-r} m_0^r}{\lambda_n - \lambda_{m_0} + \lambda} \neq 0$$

  这与（71）矛盾。因此，$(n^{-r}q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ 在 $\mathcal{H}^r$ 中是 ω-线性无关的，由此得出，对于任意 $r \in (1/2 - \alpha, 0)$，S都是从 $\mathcal{H}^r$ 到自身的同构。

因此，对于任意 $r \in (1/2 - \alpha, \alpha - 1/2)$，$S$ 都是从 $\mathcal{H}^r$ 到自身的同构。

5.4. 第4步：的显式候选 K。回想一下，总体目标是构造 T和 K，使得 T 是一个同构，并满足两个算子等式 (50) 和 (51)。由于由 (55) 给出的 T 依赖于 K，并且（形式上）满足算子等式 (51)，因此本步骤的目标是找到 K，使得 T也满足算子等式 (50)。考虑 $r \in (1/2 - \alpha, \alpha - 1/2)$。令

$$\tau : n^{-r}\varphi_n \mapsto b_n n^{-r}\varphi_n, \tag{72}$$

其中 $b_n := \langle B,\ \widetilde{\varphi_n}\rangle$，以及

$$K : \varphi_n \mapsto K(\varphi_n) = K_n. \tag{73}$$

对于任意 $r \in (1/2-\alpha,\ \alpha-1/2)$，根据 (10)，我们可以看到，算子 τ 是从 $\mathcal{H}^r$ 到 $\tau(\mathcal{H}^r)$的同构。注意到，这个空间先验并非在 $\gamma \neq 0$时的 $\mathcal{H}^r$。因此，注意到 T 可以写成如下形式

$$T : n^{-r}\varphi_n \mapsto -K_n n^{-r}\tau q_n, \tag{74}$$

仅凭 K_n 的上下有界性，不足以得出 T 是从 $\mathcal{H}^r$ 到其自身的同构这一结论，而 [39]中正是这样做的。这里，我们改为给出 T 的定义如下

$$T : n^{-r}\varphi_n \mapsto -K_n b_n(\frac{1}{b_n}n^{-r}\tau q_n).$$

在第 5.6 节中，我们将证明，在关于 γ的假设下，算子 $n^{-r}\varphi_n \mapsto b_n^{-1}n^{-r}\tau q_n$是从 $\mathcal{H}^r$ 到其自身的同构，因而 $(b_n^{-1}n^{-r}\tau q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ 构成 $\mathcal{H}^r$的一个 Riesz基。需要注意的是，后一点先验并不显然，因为 τ 与 S 不对易，因此 $b_n^{-1}n^{-r}\tau q_n \neq n^{-r}q_n$。由此我们将能够推导出：若 $(K_n b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ 上下均一致有界，则算子 T 是从 $\mathcal{H}^r$ 到其自身的同构。

回顾一下，我们的目标是得到 T，使其成为(48)和(50)的解。在本节中，我们希望构造 K_n，使得归一化条件(50)成立，并且$(K_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 有上界。$(K_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是否有下界的问题是步骤(5)-(6)的内容。我们首先陈述如下引理

引理 5.7. 存在唯一序列 $(K_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ 使得对任意 $\varepsilon \in (0, \alpha-1)$ 条件 (50) 在 $\tau(\mathcal{H}^{-\frac{1}{2}-\varepsilon})$ 中成立，并且 $(-K_n b_n n^{-(\frac{1}{2}+\varepsilon)})_{n\in\mathbb{N}^*} \in l^2$.

证明. 注意到 $B = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} b_n\varphi_n \in \mathcal{H}^{-\alpha/2}$ 与 $c_1 \leq b_n \leq c_2 n^\gamma$，（回顾我们假设$\beta = 0$ 以简化记号，关于 $\beta \neq 0$见附录 A.6）由定义(72)可知，τ 是从 $\mathcal{H}^r$到 $\tau(\mathcal{H}^r)$的同构，对任意 $r \in (1/2-\alpha, \alpha-1/2)$。因此对任意 $r \in (-1/2-\alpha, \alpha-1/2)$，$\tau(n^{-r}\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$构成 $\tau(\mathcal{H}^r)$的Riesz基。于是该表达式

$$B = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} n^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}\tau(n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\varphi_n) \tag{75}$$

对于任意 $\varepsilon > 0$，在 $\tau(\mathcal{H}^{-\frac{1}{2}-\varepsilon})$ 中都有意义，因为 $\left(n^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \in l^2$。特别地，方程 (75) 表明，对于所有 $\varepsilon > 0$，$B \in \tau(\mathcal{H}^{-\frac{1}{2}-\varepsilon})$。条件 (50) 可以用弱意义表示为

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} -K_n b_n \tau q_n = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} b_n\varphi_n, \tag{76}$$

并且我们已经知道，对于所有 $\varepsilon > 0$，其右侧属于 $\tau(\mathcal{H}^{-\frac{1}{2}-\varepsilon})$。这尤其意味着左侧也属于其中。因此，对于所有 $\varepsilon \in (0, \alpha-1)$，都有 $(-K_n b_n n^{-(\frac{1}{2}+\varepsilon)})_{n\in\mathbb{N}^*} \in l^2$。事实上，根据步骤 5.2，$(n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}q_n)$ 对任意 $\varepsilon \in (0, \alpha-1)$ 都是 $\mathcal{H}^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}$ 的 Riesz基；又由于 τ 是从 $\mathcal{H}^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}$ 到 $\tau(\mathcal{H}^{-\frac{1}{2}-\varepsilon})$ 的同构，那么 $\tau(n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}q_n)_n$ 就是 $\tau(\mathcal{H}^{-\frac{1}{2}-\varepsilon})$ 的 Riesz基。□

引理 5.7 给出的正则性先验上并不足够。为了解决这一问题，我们按照[39] 中的做法，利用 $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的特殊结构，以及$(q_n)_{n\in\mathbb{N}} - \lambda^{-1}$ 比$(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 正则性更高这一事实（见引理 5.3）。我们令

$$k_n := -(K_n b_n + \lambda) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{77}$$

引理 5.8。 考虑 $r \in (1/2-\alpha, \alpha-1/2)$。存在 $\bar{\varepsilon} > 0$，使得序列$(k_n n^{\varepsilon})_{n\in\mathbb{N}^*}$ 对任意 $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$ 均一致有界。特别地，由(77)定义的序列$(K_n b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ 一致有界。

引理 *5.8* 的证明。 对任意 $\varepsilon > 0$，有 $(n^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}\lambda)_{n\in\mathbb{N}^*} \in l^2$，因此利用引理 5.7 和 (77)，对于所有 $\varepsilon \in (0,\ \alpha-1)$，我们有 $(k_n n^{-\frac{1}{2}-\varepsilon})_{n\in\mathbb{N}^*} \in l^2$，特别是

$$(k_n n^{-r})_{n\in\mathbb{N}^*} \in l^2, \quad \forall r \in \left(\frac{1}{2}, \alpha-\frac{1}{2}\right). \tag{78}$$

仍利用引理 5.7，方程 (76) 在 $\tau(\mathcal{H}^{-\frac{1}{2}-\varepsilon})$ 中有意义，并将 $K_n b_n$ 和 τq_n 表示出来后，可得

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \lambda \sum_{p\in\mathbb{N}^*} \frac{b_p\varphi_p}{\lambda_n-\lambda_p+\lambda} + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} k_n \tau q_n = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} b_n\varphi_n.$$

由此得到如下结果

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \lambda \sum_{p\in\mathbb{N}^*\setminus\{n\}} \frac{b_p\varphi_p}{\lambda_n-\lambda_p+\lambda} = -\sum_{n\in\mathbb{N}^*} k_n \tau q_n \tag{79}$$

该结论先验地在 $\tau(\mathcal{H}^{-\frac{1}{2}-\varepsilon})$中成立，对任意 $\varepsilon \in (0,\ \alpha-1)$。 然而，等式 (79) 现在在一个比 $\tau(\mathcal{H}^{-\frac{1}{2}-\varepsilon})$ 更正则的空间中成立。事实上，若 $\alpha > 3/2$，对于 $0 \le \varepsilon \le \alpha - 3/2.$，我们可以在 $\tau(\mathcal{H}^{\varepsilon})$ 中赋予 (79) 以意义。为证明这一点，首先注意到由富比尼定理，在 $\tau(\mathcal{H}^{-\frac{1}{2}-\varepsilon})$ 中有

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \lambda \sum_{p\in\mathbb{N}^*\setminus\{n\}} \frac{b_p\varphi_p}{\lambda_n-\lambda_p+\lambda} = \sum_{p\in\mathbb{N}^*} b_p\varphi_p\lambda \sum_{n\in\mathbb{N}^*\setminus\{p\}} \frac{1}{\lambda_n-\lambda_p+\lambda}.$$

并且成立

$$\sum_{p\in\mathbb{N}^*} b_p\varphi_p\lambda \sum_{n\in\mathbb{N}^*\setminus\{p\}} \frac{1}{\lambda_n-\lambda_p+\lambda} = \sum_{p\in\mathbb{N}^*} \tau(p^{-\varepsilon}\varphi_p) \left(p^{\varepsilon}\lambda \sum_{n\in\mathbb{N}^*\setminus\{p\}} \frac{1}{\lambda_n-\lambda_p+\lambda}\right).$$

由于 $\tau(p^{-\varepsilon}\varphi_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$是 $\tau(\mathcal{H}^{\varepsilon})$ 的 Riesz基，只需证明

$$\left(p^{\varepsilon}\lambda \sum_{n\in\mathbb{N}^*\setminus\{p\}} \frac{1}{\lambda_n-\lambda_p+\lambda}\right)_{p\in\mathbb{N}^*} \in l^2$$

从而得出 (79) 的左端属于 $\tau(\mathcal{H}^{\varepsilon})$。 利用引理 5.2 和引理 5.3，我们有

$$\begin{aligned}
\left\| \left(p^{\varepsilon}\lambda \sum_{n\in\mathbb{N}^*\setminus\{p\}} \frac{1}{\lambda_n-\lambda_p+\lambda}\right)_{p\in\mathbb{N}^*} \right\|_{l^2}^2 &= \sum_{p\in\mathbb{N}^*} p^{2\varepsilon}\lambda^2 \left| \sum_{n\in\mathbb{N}^*\setminus\{p\}} \frac{1}{\lambda_n-\lambda_p+\lambda} \right|^2 \\
&\le \frac{\lambda^2}{C(\lambda)^2} \sum_{p\in\mathbb{N}^*} p^{2\varepsilon} \left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*\setminus\{p\}} \frac{1}{|\lambda_n-\lambda_p|} \right)^2 \\
&\lesssim \sum_{p\in\mathbb{N}^*} p^{2\varepsilon+2(1-\alpha)} \log^2(p),
\end{aligned}$$

并且它在 $\varepsilon \in (0, \alpha - 3/2)$ 上收敛。因此，若 $\alpha > 3/2$，则 (79) 的左端在 $\varepsilon \in (0, \alpha - 3/2)$ 上成立于 $()$ 中。

现在考虑(79)的右端。我们有

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} k_n \tau q_n = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} k_n n^{\varepsilon} \tau(n^{-\varepsilon} q_n). \tag{80}$$

回顾$(n^{-\varepsilon}q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$是 $\varepsilon \in (0, \alpha-3/2)$的 $\mathcal{H}^{\varepsilon}$的Riesz基,由 τ的同构性质可知，$\tau(n^{-\varepsilon}q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$是 $\tau(\mathcal{H}^{\varepsilon})$的Riesz基. 因此，鉴于(79)与(80)，对任意$\varepsilon \in (0, \alpha - 3/2)$,

$$(k_n n^{\varepsilon})_{n\in\mathbb{N}^*} \in l^2.$$

特别地，我们得出：若 $\alpha > 3/2$，$(k_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in l^{\infty}$. 鉴于(77)，我们有 $K_n b_n = -(\lambda + k_n)$，并且由于$(k_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$属于 l^{∞}, 我们得到

$$(K_n b_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in l^{\infty} \quad \forall \alpha > 3/2. \tag{81}$$

现在考虑 $1 < \alpha \leq 3/2$. 在这种情况下，(79)中的正则性增益不足以推出 $K_n b_n$. 的有界性。然而，我们能够证明等式(79)在 $\tau(\mathcal{H}^{-\varepsilon})$中成立, 对$\varepsilon > 3/2 - \alpha$. 成立。事实上，与前一种情形类似，下列结论成立

$$\begin{aligned}
\left\| \left(p^{-\varepsilon} \lambda \sum_{n\in\mathbb{N}^*\setminus\{p\}} \frac{1}{\lambda_n - \lambda_p + \lambda} \right)_{n\in\mathbb{N}^*} \right\|_{l^2}^2 &= \sum_{p\in\mathbb{N}^*} p^{-2\varepsilon} \lambda^2 \left| \sum_{n\in\mathbb{N}^*\setminus\{p\}} \frac{1}{\lambda_n - \lambda_p + \lambda} \right|^2 \\
&\leq \frac{\lambda^2}{C(\lambda)^2} \sum_{p\in\mathbb{N}^*} p^{-2\varepsilon} \left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*\setminus\{p\}} \frac{1}{|\lambda_n - \lambda_p|} \right)^2 \\
&\lesssim \sum_{p\in\mathbb{N}^*} p^{-2\varepsilon + 2(1-\alpha)} \log^2(p).
\end{aligned}$$

这对 $\varepsilon > 3/2 - \alpha$ 收敛，因此 (79) 的左侧属于 $\tau(\mathcal{H}^{-\varepsilon})$。与之前类似，并根据 (79)，

$$(k_n n^{-\varepsilon})_{n\in\mathbb{N}^*} \in l^2 \quad \forall \varepsilon \in \left(\frac{3}{2} - \alpha, \alpha - \frac{1}{2} \right). \tag{82}$$

我们可以看出，在 (82) 和 (78) 之间获得了 $(\alpha - 1)$ 正则性增益。因此，接下来我们将运用迭代原理，在每个阶数上获得这种 $(\alpha - 1)$ 正则性，以证明引理 5.8。现在回到方程 (76)，并表示 τq_n

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} -K_n b_n \left(\frac{b_n \varphi_n}{\lambda} + \sum_{p\in\mathbb{N}^*\setminus\{n\}} \frac{b_p \varphi_p}{\lambda_n - \lambda_p + \lambda} \right) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} b_n \varphi_n.$$

仅将第一项中的 $-K_n b_n$ 替换为 $(\lambda + k_n)$，并在 $\tau(\mathcal{H}^{-\frac{1}{2}-\varepsilon})$ 中使用富比尼定理，我们得到:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{k_n b_n}{\lambda} \varphi_n - \sum_{p\in\mathbb{N}^*} b_p \varphi_p \sum_{n\in\mathbb{N}^*\setminus\{p\}} \frac{K_n b_n}{\lambda_n - \lambda_p + \lambda} = 0.$$

由于 $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ 是 Riesz基，通过辨认可得

$$\frac{k_m b_m}{\lambda} = b_m \sum_{n\in\mathbb{N}^*\setminus\{m\}} \frac{K_n b_n}{\lambda_n - \lambda_m + \lambda} \quad \forall m \in \mathbb{N}^*.$$

由于　对于所有 $b_m \neq 0$ 和 $m \in \mathbb{N}^*$，有 $K_n b_n = -(\lambda + k_n)$，这意味着

$$k_m = -\lambda \sum_{n\in\mathbb{N}^*\setminus\{m\}} \frac{\lambda + k_n}{\lambda_n - \lambda_m + \lambda} \quad \forall m \in \mathbb{N}^*.$$

现在令 $\lambda = e_n^0$ 和 $k_n = k_n^0$. 。可得

$$k_m = -\lambda \sum_{n\in\mathbb{N}^*\setminus\{m\}} \frac{e_n^0 + k_n^0}{\lambda_n - \lambda_m + \lambda} \quad \forall m \in \mathbb{N}^*. \tag{83}$$

因此，k_m 可改写为 $k_m = e_m^1 + k_m^1$，其中

$$e_m^1 = -\lambda \sum_{n\in\mathbb{N}^*\setminus\{m\}} \frac{e_n^0}{\lambda_n - \lambda_m + \lambda}, \quad k_m^1 = -\lambda \sum_{n\in\mathbb{N}^*\setminus\{m\}} \frac{k_n^0}{\lambda_n - \lambda_m + \lambda} \quad \forall m \in \mathbb{N}^*.$$

并利用引理 5.3，可得

$$|e_m^1| \lesssim m^{1-\alpha}\log m + m^{-\alpha} \lesssim 1. \tag{84}$$

因此，我们关注 k_n^1. 的正则性。我们定义 $\varepsilon_0 := \frac{3}{2} - \alpha$，并且我们有

$$\|(m^{-\varepsilon}k_m^1)_m\|_{l^2} \lesssim \sum_{m\in\mathbb{N}^*} m^{-2\varepsilon} \left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*\setminus\{m\}} \frac{k_n^0}{\lambda_n - \lambda_m + \lambda} \right)^2.$$

利用柯西-施瓦茨不等式和引理 5.2，我们得到

$$\|(m^{-\varepsilon}k_m^1)_m\|_{l^2} \lesssim \sum_{m\in\mathbb{N}^*} m^{-2\varepsilon} \left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*\setminus\{m\}} \frac{|k_n^0|^2}{|\lambda_n - \lambda_m|} \right) \left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*\setminus\{m\}} \frac{1}{|\lambda_n - \lambda_m|} \right).$$

然后应用引理(5.3)和富比尼定理，我们有

$$\begin{aligned}
\|(m^{-\varepsilon}k_m^1)_m\|_{l^2} &\lesssim \sum_{m\in\mathbb{N}^*} m^{-2\varepsilon+1-\alpha}\log m \left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*\setminus\{m\}} \frac{|k_n^0|^2}{|\lambda_n - \lambda_m|} \right) \\
&\lesssim \sum_{n\in\mathbb{N}^*} |k_n^0|^2 \left(\sum_{m\in\mathbb{N}^*\setminus\{n\}} \frac{m^{-2\varepsilon+1-\alpha}\log m}{|\lambda_n - \lambda_m|} \right) \\
&\lesssim \sum_{n\in\mathbb{N}^*} |k_n^0|^2 n^{-2(\varepsilon-1+\alpha)+\sigma},
\end{aligned}$$

对任意 $\sigma > 0$。由于 $k_n^0 = k_n$，并且鉴于(82)，对任意 $\varepsilon - (1-\alpha) \in (3/2 - \alpha, \alpha - 1/2)$（即 $\varepsilon \in (5/2 - 2\alpha, 1/2)$），存在 $\sigma > 0$ 使得该式收敛。因此，对 $\alpha \in (1, 3/2]$，下列结论成立

$$(n^{-\varepsilon}k_n^1)_{n\in\mathbb{N}^*} \in l^2, \quad \forall \varepsilon \in \left(\frac{5}{2} - 2\alpha, \frac{1}{2}\right). \tag{85}$$

若 $\alpha > \frac{5}{4}$，我们有 $\varepsilon_1 = 2\alpha - \frac{5}{2} > 0$，于是对于所有 $\delta \in [0, \varepsilon_1)$。这确保了 $(k_n^1)_{n\in\mathbb{N}^*}$ 一致有界。结合 (84)，这也确保了 $(k_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ 同样

一致有界。因此 $(K_nb_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ 一致有界，因为 $K_nb_n=-(\lambda+k_n)$。若 $1<\alpha\leq\frac{5}{4}$，则无法立即推断 K_nb_n 的一致有界性，但我们需要再次迭代。因此，根据定义 (83)，由 $k_n^0=k_n$，可得

$$\begin{aligned}k_m&=-\lambda\sum_{n\in\mathbb{N}^*\setminus\{m\}}\frac{e_n^0+k_n^0}{\lambda_n-\lambda_m+\lambda}\\&=-\lambda\sum_{n\in\mathbb{N}^*\setminus\{m\}}\frac{e_n^0}{\lambda_n-\lambda_m+\lambda}-\lambda\sum_{n\in\mathbb{N}^*\setminus\{m\}}\frac{k_n}{\lambda_n-\lambda_m+\lambda}\\&=-\lambda\sum_{n\in\mathbb{N}^*\setminus\{m\}}\frac{e_n^0}{\lambda_n-\lambda_m+\lambda}-\lambda\sum_{n\in\mathbb{N}^*\setminus\{m\}}\frac{1}{\lambda_n-\lambda_m+\lambda}\left(-\lambda\sum_{p\in\mathbb{N}^*\setminus\{n\}}\frac{e_p^0+k_p^0}{\lambda_p-\lambda_n+\lambda}\right).\end{aligned}$$

参照 e_n^1 和 k_n^1，可得

$$\begin{aligned}k_m&=e_m^1-\lambda\sum_{n\in\mathbb{N}^*\setminus\{m\}}\frac{e_n^1}{\lambda_n-\lambda_m+\lambda}-\lambda\sum_{n\in\mathbb{N}^*\setminus\{m\}}\frac{k_n^1}{\lambda_n-\lambda_m+\lambda}\\&=e_m^1+e_m^2+k_m^2,\end{aligned}\tag{86}$$

其中

$$e_m^2=-\lambda\sum_{n\in\mathbb{N}^*\setminus\{m\}}\frac{e_n^1}{\lambda_n-\lambda_m+\lambda},\quad k_m^2=-\lambda\sum_{n\in\mathbb{N}^*\setminus\{m\}}\frac{k_n^1}{\lambda_n-\lambda_m+\lambda}\quad\forall m\in\mathbb{N}^*.$$

由于 $k_m=e_m^1+k_m^1$，由 (86) 可知 $k_m^1=e_m^2+k_m^2$.。这意味着，如果 $(e_m^2)_{m\in\mathbb{N}}$ 和 $(k_m^2)_{m\in\mathbb{N}}$ 一致有界，那么 $(k_m^1)_{m\in\mathbb{N}}$ 也一致有界，因此 $(k_m)_{m\in\mathbb{N}}$.。首先注意到，结合 (84) 和引理 5.3，可得

$$|e_m^2|\lesssim m^{1-\alpha}\log n+m^{-\alpha}\lesssim 1.$$

对于 $(k_m)_{m\in\mathbb{N}}$ ，我们再次使用引理 (5.3) 和富比尼定理，类似于前面的推导，可得 :

$$\begin{aligned}\|(m^{-\varepsilon}k_m^2)_m\|_{l^2}&\lesssim\sum_{m\in\mathbb{N}^*}m^{-2\varepsilon}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*\setminus\{m\}}\frac{k_n^1}{\lambda_n-\lambda_m+\lambda}\right)^2\\&\lesssim\sum_{n\in\mathbb{N}^*}|k_n^1|^2n^{-2(\varepsilon-1+\alpha)+\sigma},\end{aligned}$$

对任意 $\sigma>0$。由 (85) 可知，存在 $\sigma>0$，使得对于任意 $\varepsilon-(1-\alpha)\in\left(\frac{5}{2}-2\alpha,\frac{1}{2}\right)$，该式均收敛，也就是说，对于 $\varepsilon\in\left(\frac{7}{2}-3\alpha,\frac{3}{2}-\alpha\right)$.。因此，对于 $\alpha\in(1,3/2]$,

$$(n^{-\varepsilon}k_n^2)_{n\in\mathbb{N}^*}\in l^2,\quad\forall\varepsilon\in\left(\frac{7}{2}-3\alpha,\frac{3}{2}-\alpha\right).$$

如果 $\alpha>7/6$，那么 $\varepsilon_2=3\alpha-\frac{7}{2}>0$，并且对于任意 $\delta\in[0,\varepsilon_2)$。，$(n^\delta k_n^2)_{n\in\mathbb{N}^*}\in l^2$，。这保证了 $(k_n^2)_{n\in\mathbb{N}^*}$ 一致有界，进而 $(k_n^2)_{n\in\mathbb{N}^*}$ 也一致有界。因此，$\left(K_nb_n=-(e_n^0+e_n^1+e_n^2+k_n^2)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ 一致有界。

如果 $1<\alpha\leq\frac{7}{6}$，我们可以继续归纳法，并得到对于所有 $i\in\mathbb{N}$，都有 $k_n^i=e_n^{i+1}+k_n^{i+1}$，其中

$$e_n^{i+1}=-\lambda\sum_{m\in\mathbb{N}^*\setminus\{n\}}\frac{e_m^i}{\lambda_m-\lambda_n+\lambda},\quad k_n^{i+1}=-\lambda\sum_{m\in\mathbb{N}^*\setminus\{n\}}\frac{k_m^i}{\lambda_m-\lambda_n+\lambda}\quad\forall n\in\mathbb{N}^*,i\in\mathbb{N}.$$

并且对于任意 $n\in\mathbb{N}^*$,

$$K_nb_n=-\left(k_n^i+\sum_{j=0}^{i}e_n^j\right),\quad\forall i\in\mathbb{N}$$

因此，根据前面的计算，我们通过归纳法得到如下结果 :

$$|e_n^i|\lesssim n^{1-\alpha}\log n+n^{-\alpha}\lesssim 1, \tag{87}$$

$$\|(n^{-\varepsilon}k_n^{i+1})_{n\in\mathbb{N}^*}\|_{l^2}\lesssim\sum_{n\in\mathbb{N}^*}|k_n^i|^2n^{-2(\varepsilon-1+\alpha)+\sigma}\log^2 n \tag{88}$$

对于任意 $\sigma>0$，且 (88) 对 $\varepsilon\in(-\varepsilon_i,\ -\varepsilon_{i-2})$ 收敛，其中 $\varepsilon_i=(\alpha-1)i-\varepsilon_0$，且 $\varepsilon_0=1/2$，对所有 $i\geq 2.$。值得强调的是，存在一个有限的 $i_0\in\mathbb{N}$，使得 $\varepsilon_{i_0}>0.$。在这种情况下，我们有 $(n^\delta k_n^{i_0+1})_{n\in\mathbb{N}^*}\in l^2$，对于任意 $\delta\in[0,\varepsilon_{i_0})$，这意味着 $(k_n^{i_0+1})_{n\in\mathbb{N}^*}\in l^\infty.$。将此与 (87) 结合，我们得出

$$\left(K_nb_n=-\left(k_n^{i_0}+\sum_{j=0}^{i_0}e_n^j\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}\in l^\infty\quad\forall\alpha\in(1,3/2]. \tag{89}$$

因此，由 (81) 和 (89) 可得引理 5.8。 □

注 5.9。 如此定义的反馈控制由其在 $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ 上的作用确定，人们可能会想知道何时可以更简洁地表示这个算子。在某些特殊情况下，如果能够求出该和的显式值，就可能做到这一点，例如在 [90] 中。然而在其他情况下， K 可能无法用更简洁的形式表示；这是采用取值于有限维空间而非无限维空间的反馈控制 K 所必须付出的代价。

注 5.10. 另一个相关且有趣的问题是，若控制反馈中的系数 k_n 在某个步骤之后被替换为0 ，那么会出现什么情况~。这种控制只需要知道 b_n 和 λ_n 截至某个 $N\in\mathbb{N}^*$的信息。如果系统是抛物型的，由于高频是稳定的，可以预期采用~控制反馈律 K 的系统仍然稳定。然而，若系统不是抛物型的，问题就比较复杂。

注 5.11。 在 [38], 中，作者在算子 $\mathcal{A}$ 为自伴算子的情况下，给出了关于 λ 的反馈控制 K 的定量且精确的估计。如果系统并非自伴，了解在我们的情形下是否仍能得到相同的估计将会很有意义（至少在我们选取 γ 为0的情况下）。

5.5. 步骤 5： T 从 到 $\mathcal{H}^r$ 是有界的，并满足算子等式。 在本节中，我们希望证明 F-等价变换 T 是有界的，并且算子等式（48）至少在某个 $\mathcal{H}^s$ 空间中成立。更准确地说，我们证明以下引理:

引理 5.12。 由(55) 给出的算子 T，对于任意$r \in (1/2-\alpha+\gamma, \alpha-1/2)$，都是从 $\mathcal{H}^r$ 到 $\mathcal{H}^r$ 的有界算子。此外，我们有如下算子等式，

$$T(\mathcal{A}+BK) = (\mathcal{A}-\lambda I)T \quad in\ \mathcal{L}(\mathcal{H}^{\alpha/2+s}, \mathcal{H}^{-\alpha/2+s}), \quad \forall s \in \left(-\frac{\alpha-1}{2}+\gamma, \frac{\alpha-1}{2}-\gamma\right). \tag{90}$$

证明。 这里我们回顾一下，对于任意 $r \in \left(\frac{1}{2}-\alpha, \alpha-\frac{1}{2}\right)$——因此对于任意 $r \in \left(\frac{1}{2}-\alpha+\gamma, \alpha-\frac{1}{2}\right)$——算子 T定义为 T: $n^{-r}\varphi_n \overset{-}{\mapsto} -n^{-r}K_n\overset{-}{\tau}q_n$，其中 τ是从 $\mathcal{H}^r$到 $\tau(\mathcal{H}^r)$ 的同构，并且 $(K_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ 一致有界。由于空间 $\tau(\mathcal{H}^r)$ 先验而言既不等于也不包含于 $\mathcal{H}^r$，我们能够得出的结论是，T 定义在从 $\mathcal{H}^r$ 到 $\tau(\mathcal{H}^r)$。 这里我们将利用 K_nb_n 上的正则性，首先证明 T 在其自身上定义良好，然后推导出它是有界的。

Let $r \in \left(\frac{1}{2}-\alpha+\gamma, \alpha-\frac{1}{2}\right)$ and $a = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n n^{-r}\varphi_n \in \mathcal{H}^r$, the following holds

$$\begin{aligned}
Ta &= -\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n K_n n^{-r}\tau q_n \\
&= -\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n K_n n^{-r} \sum_{p\in\mathbb{N}^*} \frac{b_p\varphi_p}{\lambda_n-\lambda_p+\lambda} \\
&= -\frac{1}{\lambda}\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n K_n n^{-r} b_n\varphi_n - \sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n K_n n^{-r} \sum_{p\in\mathbb{N}^*\setminus\{n\}} \frac{b_p\varphi_p}{\lambda_n-\lambda_p+\lambda} \\
&= -\frac{1}{\lambda}\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n K_n b_n n^{-r}\varphi_n - \sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n K_n n^{-r}\tau S_c(\varphi_n).
\end{aligned}$$

通过设定

$$T_1a = -\frac{1}{\lambda}\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n K_n b_n n^{-r}\varphi_n, \quad T_2a = -\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n K_n n^{-r}\tau S_c(\varphi_n),$$

则有 $Ta = T_1a + T_2a$. 注意到，由于$(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in l^2$ 与$(K_nb_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in l^\infty$，项 T_1a属于 $\mathcal{H}^r$，特别地，我们有:

$$\|T_1a\|_{\mathcal{H}^r} \lesssim \|f\|_{\mathcal{H}^r}. \tag{91}$$

因此，只需证明第二项 T_2a 属于 $\mathcal{H}^r$，即可得出 $Ta \in \mathcal{H}^r$。我们有如下断言。

断言 5.13. 对任意$r \in \left(\frac{1}{2}-\alpha, \alpha-\frac{1}{2}\right)$ 与 $s \geq \gamma$，空间 $\tau(\mathcal{H}^{r+s})$ 在赋予范数

$$\|f\|_{\tau(\mathcal{H}^{r+s})} := \|\tau^{-1}f\|_{\mathcal{H}^{r+s}} \tag{92}$$

下是一个希尔伯特空间，并连续嵌入于 $\mathcal{H}^r$。

证明。 对于任意 $q \in \mathbb{R}$，由于 τ 是从希尔伯特空间 $\mathcal{H}^q$ 到 $\tau(\mathcal{H}^q)$的一个同构，空间 $\tau(\mathcal{H}^{r+s})$ 在范数 (92) 下是一个希尔伯特空间。考虑 $g \in \tau(\mathcal{H}^{r+s})$，存在 $f =$

$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n n^{-r-s}\varphi_n \in \mathcal{H}^{r+s}$ 使得 $g=\tau(f)$，因此

$$g=\sum_{n\in\mathbb{N}^*}(f_n b_n n^{-s})n^{-r}\varphi_n.$$

由（13）（取 $\beta=0$）以及 $\gamma\le s$这一事实，我们有 $b_n\le c_2 n^s$，并注意到

$$\|g\|_{\mathcal{H}^r}^2=\|(f_n b_n n^{-s})_{n\in\mathbb{N}^*}\|_{l^2}^2=\sum_{n\in\mathbb{N}^*}|f_n b_n n^{-s}|^2\lesssim\sum_{n\in\mathbb{N}^*}|f_n|^2=\|g\|_{\tau(\mathcal{H}^{r+s})}^2.$$

这就完成了断言 5.13。 □

现在回到 $T_2 a$ 的范数，根据断言 5.13，我们有

$$\|T_2 a\|_{\mathcal{H}^r}=\left\|\sum_{n\in\mathbb{N}^*}a_n K_n n^{-r}\tau S_c(\varphi_n)\right\|_{\mathcal{H}^r}\lesssim\left\|\sum_{n\in\mathbb{N}^*}a_n K_n\tau S_c(n^{-r}\varphi_n)\right\|_{\tau(\mathcal{H}^{r+\gamma})}.$$

由（61）和引理 5.4， S_c 是从 $\mathcal{H}^r$ 到 $\mathcal{H}^{r+\varepsilon}$ 的连续算子，对于任意 $\varepsilon\in[0,\min\{(\alpha-1)/2,\ \alpha+r-1/2\})$。由于根据假设， $r\in(1/2-\alpha+\gamma,\ \alpha-1/2)$ 和 $\gamma\in(0,\ (\alpha-1)/2)$， γ 属于 $[0,\min\{(\alpha-1)/2,\ \alpha+r-1/2\})$，且 S_c 是从 $\mathcal{H}^r$ 到 $\mathcal{H}^{r+\gamma}$ 的连续算子；利用 τ 的同构性质和（92），可得

$$\left\|\sum_{n\in\mathbb{N}^*}a_n K_n\tau S_c(n^{-r}\varphi_n)\right\|_{\tau(\mathcal{H}^{r+\gamma})}\lesssim\left\|\sum_{n\in\mathbb{N}^*}a_n K_n\tau(n^{-r}\varphi_n)\right\|_{\tau(\mathcal{H}^r)}.$$

利用 $(\tau(n^{-r}\varphi_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ 是 $\tau(\mathcal{H}^r)$ 中的 Riesz基，且 $(K_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ 一致有界，可得

$$\left\|\sum_{n\in\mathbb{N}^*}a_n K_n\tau(n^{-r}\varphi_n)\right\|_{\tau(\mathcal{H}^r)}\lesssim\sum_{n\in\mathbb{N}^*}|a_n K_n|^2\lesssim\sum_{n\in\mathbb{N}^*}|a_n|^2=\|a\|_{\mathcal{H}^r}.$$

结合 (91)，可知，

$$\|Ta\|_{\mathcal{H}^r}\lesssim\|a\|_{\mathcal{H}^r},$$

因此 T 是一个从 $\mathcal{H}^r$ 到其自身的有界算子。

现在只需证明算子等式 (90)，即可得出该引理。由引理 5.7 可知，对于任意 $s\in(-(\alpha-1)/2,\ (\alpha-1)/2-\gamma)$，等式 (50) 在 $\tau(\mathcal{H}^{-\alpha/2+s+\gamma})$ 中成立；特别地，根据断言 5.13，该等式在 $\mathcal{H}^{-\alpha/2+s}$ 中成立。因此，证明 (90) 等价于证明对任意 $s\in\left(-\frac{\alpha-1}{2}+\gamma,\ \frac{\alpha-1}{2}-\gamma\right)$

$$T\mathcal{A}+BK=(\mathcal{A}-\lambda I)T\quad\text{in }\mathcal{L}(\mathcal{H}^{\alpha/2+s},\mathcal{H}^{-\alpha/2+s}).\tag{93}$$

首先注意到所有项都有意义：事实上，对于任意 $s>-(\alpha-1)/2$， $K:\ n^{-(\alpha/2+s)}\varphi_n\mapsto n^{-(\alpha/2+s)}K_n$ 是从 $\mathcal{H}^{\alpha/2+s}$ 到 $\mathbb{C}$ 的有界算子。另一方面，根据假设， $B\in\mathcal{H}^{-\alpha/2}$ 实际上对于任意 $s<(\alpha-1)/2-\gamma$，都有 $B\in\mathcal{H}^{-\alpha/2}$ 属于 $\mathcal{H}^{-\alpha/2+s}$。由式（13）可知， B 可形式上视为一个算子，对于任意 $s\in(-(\alpha-1)/2,\ (\alpha-1)/2-\gamma)$，它将 $\mathbb{C}$映射到 $\mathcal{H}^{-\alpha/2+s}$。因此，对于任意 $s\in(-(\alpha-1)/2,\ (\alpha-1)/2-\gamma)$， BK是从$\mathcal{H}^{\alpha/2+s}$到 $\mathcal{H}^{-\alpha/2+s}$的有界算子。类似地，由于对于任意 $r\in(1/2-\alpha+\gamma,\alpha-1/2)$， T是从 $\mathcal{H}^r$ 到其自身的有界算子，可以证明，对于任意 $s\in(-(\alpha-1)/2+\gamma,\ (\alpha-1)/2-\gamma)$， $\mathcal{A}T$和$T\mathcal{A}$是从 $\mathcal{H}^{\alpha/2+s}$到 $\mathcal{H}^{-\alpha/2+s}$的有界算子。

为证明（93），只需检验对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$ 和 $s \in(-(\alpha-1)/2+\gamma,\ (\alpha-1)/2-\gamma)$，该式与 $n^{-\alpha/2-s}\varphi_n$ 配对时成立；而由于这些算子是线性的，这等价于证明该式与任意 φ_n 配对时成立。根据 T 的定义（见（55）），我们有（在 $\mathcal{H}^{-\alpha/2+s}$中）

$$\begin{aligned}[TA+BK-(A-\lambda I)T]\varphi_n &= \lambda_n T\varphi_n + BK_n - (A-\lambda I)T\varphi_n \\ &= \lambda_n(-K_n)\sum_{p\in\mathbb{N}^*}\frac{b_p\varphi_p}{\lambda_n-\lambda_p+\lambda} + BK_n - (-K_n)\sum_{p\in\mathbb{N}^*}\frac{b_p(\lambda_p-\lambda)\varphi_p}{\lambda_n-\lambda_p+\lambda} \\ &= (-K_n)\sum_{p\in\mathbb{N}^*} b_p\varphi_p + BK_n \\ &= 0.\end{aligned}$$

注 5.14。 事实上，算子等式 (93) 对 $s \in \left(-\frac{\alpha-1}{2}、\ \frac{\alpha-1}{2}-\gamma\right)$. 也成立。这是因为对于任意 $s \in \left(-\frac{\alpha-1}{2}、\ -\frac{\alpha-1}{2}+\gamma\right)$，(93) 在 $\mathcal{L}(\mathcal{H}^{\alpha/2+s}、\ \overline{\tau(\mathcal{H}^{\alpha/2+s})}$中成立，并且 $\overline{BK}$和 $\overline{(A-\lambda I)T}$都属于 $\mathcal{L}(\mathcal{H}^{\alpha/2+s}、\ \mathcal{H}^{-\alpha/2+s})$。因此，可以证明，对于任意 $r \in (1/2-\alpha、\ \alpha-1/2)$，$T$ 实际上是从 $\mathcal{H}^r$ 到其自身的有界算子（见附录 *A.3*）。

□

5.6. **步骤 6：** T **是从** $\mathcal{H}^r$ **到其自身的同构**。 为了证明 T 是从 $\mathcal{H}^r$ 到其自身的同构，我们首先证明 $\ker T=\{0\}$ 在 $\mathcal{H}^{-\alpha/2}$中，随后推出 $(K_nb_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 从下方有界，并证明中间算子 ($\tilde{\tau}$ 见下文引理 5.17) 是一个同构，进而证明 T 是从 $\mathcal{H}^r$ 到其自身的同构。换言之，我们首先证明以下引理

引理5.15。核 $T^*=\{0\}$ 在 $\mathcal{H}^{-\alpha/2}$.

证明。 为此，我们将采用最初在 [22] 中用于薛定谔方程、近期又在 [40, 39]中使用的证明方法。其思路是证明以下几个步骤

- 存在 $\rho\in\mathbb{C}$，使得 $A+BK+\lambda I+\rho I$ 和 $A+\rho I$ 是从$\mathcal{H}^{\alpha/2}$ 到 $\mathcal{H}^{-\alpha/2}$.的可逆算子
- 对于这样的 ρ，若核 $T^*\neq\{0\}$，则$(A+\rho I)^{-1}$ 有一个特征向量 h 属于核 T^*.
- $(A+\rho I)^{-1}$ 的任何特征向量都不属于核 T^*.

由最后两个步骤可知，核 $T^*=\{0\}$ 在 $\mathcal{H}^{-\alpha/2}$. 中。由于相同的论证已在 [22, 40, 39], 中给出，我们将严格证明推迟到附录 A.4。□

现在，我们要证明以下引理:

引理 5.16. 对于任意 $r\in(1/2-\alpha+\gamma,\alpha-1/2)$ T，它是从 $\mathcal{H}^r$ 到其自身的同构。

在证明这一点之前，我们先证明以下结论:

引理 5.17. 对于任意 $r\in(1/2-\alpha+\gamma,\alpha-1/2)$，算子 $\tilde{\tau}\colon\ n^{-r}\varphi_n\mapsto\frac{1}{b_n}n^{-r}\tau q_n$ 是指标为0的弗雷德霍姆算子，并且是从 $\mathcal{H}^r$ 到 $\mathcal{H}^r$.的同构

引理 *5.17* 的证明。令 $r\in(1/2-\alpha+\gamma,\alpha-1/2)$，且 $f=\sum f_nn^{-r}\varphi_n\in\mathcal{H}^r$. 有$_{n\in\mathbb{N}^*}$

$$\tilde{\tau}(f)=\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{f_n}{b_n}n^{-r}\tau q_n$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{f_n}{b_n} n^{-r} \sum_{p\in\mathbb{N}^*} \frac{b_p\varphi_p}{\lambda_n-\lambda_p+\lambda} \\
&= \frac{1}{\lambda}\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n n^{-r}\varphi_n + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{f_n}{b_n} n^{-r} \sum_{p\in\mathbb{N}^*\setminus\{n\}} \frac{b_p\varphi_p}{\lambda_n-\lambda_p+\lambda} \\
&= \frac{1}{\lambda} f + \tilde{\tau}_c(f)
\end{aligned}
$$

其中

$$
\tilde{\tau}_c(f) := \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{f_n}{b_n} n^{-r} \sum_{p\in\mathbb{N}^*\setminus\{p\}} \frac{b_p\varphi_p}{\lambda_n-\lambda_p+\lambda}.
$$

我们首先 证明 $\tilde{\tau}_c$ 是 $\mathcal{H}^r$. 上的紧算子。利用富比尼定理，可得 tha t

$$
\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{f_n}{b_n} n^{-r} \sum_{p\in\mathbb{N}^*\setminus\{n\}} \frac{b_p\varphi_p}{\lambda_n-\lambda_p+\lambda} = \sum_{p\in\mathbb{N}^*} \varphi_p \left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*\setminus\{p\}} \frac{f_n}{b_n} n^{-r} \frac{b_p}{\lambda_n-\lambda_p+\lambda} \right).
$$

令 $\varepsilon > 0$ 为所选对象。因此我们有

$$
\begin{aligned}
\|\tilde{\tau}_c(f)\|^2_{\mathcal{H}^{r+\varepsilon}} &= \left\| \sum_{p\in\mathbb{N}^*} \varphi_p \left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*\setminus\{p\}} \frac{f_n}{b_n} n^{-r} \frac{b_p}{\lambda_n-\lambda_p+\lambda} \right) \right\|^2_{\mathcal{H}^{r+\varepsilon}} \\
&= \sum_{p\in\mathbb{N}^*} p^{2r+2\varepsilon} |b_p|^2 \left| \sum_{n\in\mathbb{N}^*\setminus\{p\}} \frac{f_n}{b_n} n^{-r} \frac{1}{\lambda_n-\lambda_p+\lambda} \right|^2.
\end{aligned}
$$

由于 由 (13) 可知 $(1/b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ 一致有界（回想此处 $\beta = 0$），因此我们得到 tha t

$$
\|\tilde{\tau}_c(f)\|_{\mathcal{H}^{r+\varepsilon}} \lesssim \sum_{p\in\mathbb{N}^*} p^{2r+2\varepsilon} |b_p|^2 \left| \sum_{n\in\mathbb{N}^*\setminus\{p\}} \frac{f_n n^{-r}}{\lambda_n-\lambda_p+\lambda} \right|^2.
$$

由于 $|b_p| \le c_2 n^\gamma$，仍由 (13) 可得

$$
\|\tilde{\tau}_c(f)\|_{\mathcal{H}^{r+\varepsilon}} \lesssim \sum_{p\in\mathbb{N}^*} p^{2r+2\varepsilon+2\gamma} \left| \sum_{n\in\mathbb{N}^*\setminus\{p\}} \frac{f_n n^{-r}}{\lambda_n-\lambda_p+\lambda} \right|^2.
$$

由于 $r \in (1/2-\alpha+\gamma, \alpha-1/2)$, 我们有 $\gamma < \alpha + r - 1/2$ ，从而 $\gamma < \varepsilon_r := \min\left\{\frac{\alpha-1}{2}, \alpha+r-\frac{1}{2}\right\}$, 因为由假设可知 $\gamma \prec (\alpha-1)/2$。因此，例如考虑 $\varepsilon = (\varepsilon_r - \gamma)/2$, 由引理 5.4 可得

$$
\sum_{p\in\mathbb{N}^*} p^{2r+2\varepsilon+2\gamma} \left| \sum_{n\in\mathbb{N}^*\setminus\{p\}} \frac{f_n n^{-r}}{\lambda_n-\lambda_p+\lambda} \right|^2 \lesssim \sum_{n\in\mathbb{N}^*} |f_n|^2.
$$

这保证了

$$
\|\tilde{\tau}_c(f)\|_{\mathcal{H}^{r+\varepsilon}} \lesssim \|f\|_{\mathcal{H}^r},
$$

根据引理 2.2，这就得出 $\tilde{\tau}_c$ 是从 $\mathcal{H}^r$ 到 $\mathcal{H}^r$. 的紧算子。因此，算子 $\tilde{\tau}$ 是指标为 0 的 Fredholm 算子。因此， $\tilde{\tau}$ 是从 $\mathcal{H}^r$ 到 $\mathcal{H}^r$ 的同构，当且

仅当 ker $\tilde{\tau} = \{0\}$. 。由 $\tilde{\tau}$ 的表达式可知,

$$f = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n n^{-r}\varphi_n \in \ker\tilde{\tau} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{f_n}{b_n}\tau(n^{-r}q_n) = 0.$$

右侧的等式在 $\mathcal{H}^r$ 中成立，特别是在 $\tau(\mathcal{H}^r)$中成立，因为 $\mathcal{H}^r \subset \tau(\mathcal{H}^r)$。因此，利用 $(\tau(n^{-r}q_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ 是 $\tau(\mathcal{H}^r)$的 Riesz基这一事实， 可得

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{f_n}{b_n}\tau(n^{-r}q_n) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{f_n}{b_n} = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \\ &\Leftrightarrow \quad f_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.\end{aligned}$$

因此，我们已证明 ker$\tilde{\tau} = \{0\}$， 故对于任意$r \in (1/2 - \alpha + \gamma, \ \alpha - 1/2)$. □， $\tilde{\tau}$ 都是从 $\mathcal{H}^r$ 到其自身的同构

现在我们可以给出引理 5.16 的证明。

引理 *5.16* 的证明。 根据 (55) 和引理 5.17，我们现在可以将 T 改写如下

$$T : n^{-r}\varphi_n \mapsto -K_n b_n \tilde{\tau}(n^{-r}\varphi_n).$$

根据引理 5.17， $\tilde{\tau}$ 是从 $\mathcal{H}^r$ 到 $\mathcal{H}^r$. 的同构。这保证了 $(\tilde{\tau}(n^{-r}\varphi_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$是 $\mathcal{H}^r$. 中的 Riesz基。由于 $(n^{-r}\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ 也是 $\mathcal{H}^r$中的 Riesz基，且根据引理 5.8 有 $(K_n b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty$ ，我们只需证明 $(K_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 一致有正下界，即可得出 T是 $\mathcal{H}^r$中的同构。由引理5.15可知，ker $T^* = \{0\}$属于 $\mathcal{H}^{-\alpha/2}$。事实上，由分解 (77) 以及 $\tilde{\tau}$ 是一个 0 阶弗雷德霍姆算子这一事实，我们可以推得T 是从 $\mathcal{H}^{-\alpha/2}$ 到其自身的 0 阶弗雷德霍姆算子（见附录 A.4 中的引理A.2）。因此，ker $T = \{0\}$ 属于 $\mathcal{H}^{-\alpha/2}$。反设存在 $n_0 \in \mathbb{N}^*$ 使得 $K_{n_0} b_{n_0} = 0$. 。我们有

$$T(n_0^{-r}\varphi_{n_0}) = K_{n_0} b_{n_0} \tilde{\tau}(n_0^{-r}\varphi_{n_0}) = 0.$$

这意味着 $n_0^{-r}\varphi_{n_0} \in$核$T$，由于核$T = \{0\}$， $n_0^{-r}\varphi_{n_0} = 0$ 这与矛盾相矛盾。因此，对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$

$$K_n b_n \neq 0. \tag{94}$$

回顾引理 (5.8),

$$|K_n b_n| = |\lambda + k_n|,$$

并且对于某个 $\varepsilon > 0$，有 $(k_n n^{\varepsilon})_{n\in\mathbb{N}^*} \in l^\infty$ ，这意味着当 $n \to +\infty$. 时 $k_n \to 0$ 。然后，存在 $N(\lambda) > 0$，使得对于任意 $n \geq N(\lambda)$,

$$|K_n b_n| \geq \frac{\lambda}{2} > 0. \tag{95}$$

将 (94) 与 (95) 结合可知，对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|K_n b_n| \geq \min\left\{\frac{\lambda}{2}, \min_{n\leq N(\lambda)} |K_n b_n|\right\} > 0.$$

存在 因此， $K_n b_n$ 有下界，从而完成引理 5.16 的证明 . □

5.7. 第 7 步：适定性与命题 4.2 的证明。由于我们已经构造了同构 T 和反馈律 K，并且 (50) 和 (51) 成立，因此需要证明闭环系统 (46) 的适定性。我们将采用 [27]中给出的用于证明闭环水箱适定性的方法，或采用 [39] 中用于证明由斜自伴算子描述的闭环系统适定性的方法。

由于该方法依赖于算子 $\mathcal{A}+BK$ 的半群理论，我们首先介绍其定义域的描述及一些性质：

引理 5.18. 对于任意 $r\in(1/2-\alpha+\gamma,\alpha-1/2-\gamma)$， $D_r(\mathcal{A}+BK)$ 的定义域是一个希尔伯特空间，在 $\mathcal{H}^r$ 中稠密，并且

$$D_r(\mathcal{A}+BK)=T^{-1}(\mathcal{H}^{r+\alpha}). \tag{96}$$

证明. 回顾一下，我们所说的 $D_r(\mathcal{A}+BK)$ 对于 $r\in(1/2-\alpha+\gamma,\alpha-1/2-\gamma)$ 指的是以下内容：

$$D_r(\mathcal{A}+BK):=\{f\in\mathcal{H}^r,(\mathcal{A}+BK)f\in\mathcal{H}^r\}.$$

我们先证明 (96)。对于任意 $f\in D_r(\mathcal{A}+BK)\subset\mathcal{H}^r$，有 $\mathcal{A}f\in\mathcal{H}^{r-\alpha}$，因此根据 $D_r(\mathcal{A}+BK)$ 的定义可知 $BKf\in\mathcal{H}^{r-\alpha}$。由于 $r<\alpha-1/2-\gamma$，存在 $\varepsilon>0$ 使得 $BKf\in\mathcal{H}^{-1/2-\gamma-\varepsilon}$。这说明 $Kf\in\mathbb{C}$，因为对于任意 $\varepsilon>0.$，都有 $B\in\mathcal{H}^{-1/2-\gamma-\varepsilon}$。由于 $Kf\in\mathbb{C}$，对于任意 $\varepsilon>0$，都有 $BKf\in\mathcal{H}^{-1/2-\gamma-\varepsilon}$。结合 $D_r(\mathcal{A}+BK)$ 的定义可知，以下情况之一成立：

- $r<-1/2-\gamma-\varepsilon$ and $\mathcal{A}f\in\mathcal{H}^r$,
- or $r\geq-1/2-\gamma-\varepsilon$ and $\mathcal{A}f\in\mathcal{H}^{-1/2-\gamma-\varepsilon}$.

在第一种情况下，这就得到 $f\in\mathcal{H}^{r+\alpha}$，并且根据引理 5.16， $r+\alpha\in(1/2,\alpha-1/2-\gamma-\varepsilon)\subset(1/2-\alpha+\gamma,\alpha-1/2)$，$\mathcal{H}^{r+\alpha}=T^{-1}(\mathcal{H}^{r+\alpha})$，证明至此结束。在第二种情况下， $\mathcal{A}f\in\mathcal{H}^{-1/2-\gamma-\varepsilon}$,，对任意 $\varepsilon>0$ 均成立。若 $\mathcal{A}$ 可逆，则可直接得到对任意 $\varepsilon>0.$， $f=\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}f\in\mathcal{H}^{\alpha-1/2-\gamma-\varepsilon}$。若 $\mathcal{A}$ 不可逆，则存在唯一的 $n_0\in\mathbb{N}^*$ 使得 $\lambda_{n_0}=0$；并在 $\mathrm{Span}^{n\neq n_0}(n^{-r}\varphi_n)$ 上定义 $\mathcal{A}^{-1}$，便得到 $f=\langle f,n_0^{-r}\varphi_{n_0}\rangle_{\mathcal{H}^r}n_0^{-r}\varphi_{n_0}+\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}f\in\mathcal{H}^{\alpha-1/2-\gamma-\varepsilon}$。两种情况下，这都表明 $D_r(\mathcal{A}+BK)\subset\mathcal{H}^{\alpha-1/2-\gamma-\varepsilon}.$。因此，鉴于算子等式 (90)，对任意$\varepsilon\in(0,(\alpha-1)-2\gamma)$， $\alpha/2-1/2-\gamma-\varepsilon\in(\gamma-(\alpha-1)/2,(\alpha-1)/2-\gamma)$，因此有

$$T(\mathcal{A}+BK)f=(\mathcal{A}-\lambda I)Tf\in\mathcal{H}^{-1/2-\gamma-\varepsilon},\quad\forall f\in D_r(\mathcal{A}+BK).$$

注意，根据 T 的性质和 $D_r(\mathcal{A}+BK)$ $T(\mathcal{A}+BK)f\in\mathcal{H}^r$ 的定义，对于任意 $f\in D_r(\mathcal{A}+BK)$，从而 $(\mathcal{A}-\lambda I)Tf\in\mathcal{H}^r.$ 因此，在以下适当的情形下算子等式成立：对于任意 $r\in(1/2-\alpha+\gamma,\ \alpha-1/2-\gamma)$,

$$T(\mathcal{A}+BK)f=(\mathcal{A}-\lambda I)Tf\in\mathcal{H}^r,\quad\forall f\in D_r(\mathcal{A}+BK). \tag{97}$$

现在考虑 $f\in D_r(\mathcal{A}+BK)$，由 (97) 可得 $(\mathcal{A}-\lambda I)Tf\in\mathcal{H}^r$，进而 $Tf\in\mathcal{H}^{r+\alpha}$.这意味着 $f\in T^{-1}(\mathcal{H}^{r+\alpha})$，从而表明 $D_r(\mathcal{A}+BK)\subset T^{-1}(\mathcal{H}^{r+\alpha})$。
反过来，考虑 $f\in T^{-1}(\mathcal{H}^{r+\alpha})\subset\mathcal{H}^r.$。由于 $r<\alpha-1/2-\gamma$，存在 $\bar{\varepsilon}>0$，使得对于任意 $\varepsilon\in(0,\bar{\varepsilon})$ $f\in\mathcal{H}^{\alpha-1/2-\varepsilon-\gamma}.$ 因此，通过取 ε 足够小，我们可以将算子等式 (90) 应用于 f，并得到

$$T(\mathcal{A}+BK)f=(\mathcal{A}-\lambda I)Tf. \tag{98}$$

注意到 $f\in T^{-1}(\mathcal{H}^{r+\alpha})$ 可推出 $Tf\in\mathcal{H}^{r+\alpha}$，因此 $(\mathcal{A}-\lambda I)Tf\in\mathcal{H}^r.$。由 (98) 可知，这保证了 $T(\mathcal{A}+BK)f\in\mathcal{H}^r.$。由于 T 是从 $\mathcal{H}^r$ 到其自身的同构，因此有 $(\mathcal{A}+BK)f\in\mathcal{H}^r.$。于是 $f\in D_r(\mathcal{A}+BK)$，这意味着 $T^{-1}(\mathcal{H}^{r+\alpha})\subset D_r(\mathcal{A}+BK)$。至此，(96) 得证。

由于 T 是从 $\mathcal{H}^r$ 到其自身的同构，且 $\mathcal{H}^{r+\alpha}$ 在 $\mathcal{H}^r$中稠密，根据 (96) 可立即得出， $D_r(\mathcal{A}+BK)$ 在 $\mathcal{H}^r$ 中稠密（注意，对于任意 $f \in \mathcal{H}^r$，都存在$g \in \mathcal{H}^r$ 使得 $f = T^{-1}g$）。

现在还需证明 $D_r(\mathcal{A}+BK)$ 是一个希尔伯特空间，以得出引理 5.18。为此，我们只需证明 $D_r(\mathcal{A}+BK)$ 是完备的，因为 $D_r(\mathcal{A}+BK) \subset \mathcal{H}^r$，而后者是一个希尔伯特空间。因此，考虑任意柯西序列 $(f_n)_n \subset D_r(\mathcal{A}+BK)$。有

$$\|f_n - f_p\|_{D_r(\mathcal{A}+BK)} \underset{n,p\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Re记 $\|f_n - f_p\|_{D_r(\mathcal{A}+BK)} := \|f_n - f_p\|_{\mathcal{H}^r} + \|(\mathcal{A}+BK)(f_n - f_p)\|_{\mathcal{H}^r}$，我们有 e

$$\|f_n - f_p\|_{\mathcal{H}^r} + \|(\mathcal{A}+BK)(f_n - f_p)\|_{\mathcal{H}^r} \underset{n,p\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{99}$$

Sin由于 $(f_n)_n \subset D_r(\mathcal{A}+BK)$，利用算子等式 (97)，这意味着

$$\|(\mathcal{A}-\lambda I)(Tf_n - Tf_p)\|_{\mathcal{H}^r} = \|T(\mathcal{A}+BK)(f_n - f_p)\|_{\mathcal{H}^r} \lesssim \|(\mathcal{A}+BK)(f_n - f_p)\|_{\mathcal{H}^r} \underset{n,p\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

结合 (99)，可得

$$\|\mathcal{A}(Tf_n - Tf_p)\|_{\mathcal{H}^r} \underset{n,p\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \text{and} \quad \|Tf_n - Tf_p\|_{\mathcal{H}^r} \underset{n,p\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

因此，我们得到

$$\|Tf_n - Tf_p\|_{\mathcal{H}^{r+\alpha}} \underset{n,p\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

这表明 $(Tf_n)_n$ 是 $\mathcal{H}^{r+\alpha}$. 中的柯西序列。于是，由于 $\mathcal{H}^{r+\alpha}$ 是完备的，存在$g \in \mathcal{H}^{r+\alpha}$ 使得 $Tf_n \longrightarrow g$ 属于 $\mathcal{H}^{r+\alpha}$。由于 T 是 $\mathcal{H}^r$上的同构，且 $\mathcal{H}^{r+\alpha} \subset \mathcal{H}^r$，因此存在唯一的 $f \in \mathcal{H}^r$ 使得 $Tf = g$和 $\|Tf_n - Tf\|_{\mathcal{H}^{r+\alpha}} \longrightarrow 0$，这又根据 $\mathcal{H}^{r+\alpha}$ 在 $\mathcal{H}^r$ 中的紧嵌入以及 T 在 $\mathcal{H}^r$中的同构性质

$$\|f_n - f\|_{\mathcal{H}^r} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{100}$$

我们还知道，由于 $f \in T^{-1}\mathcal{H}^{r+\alpha} = D_r(\mathcal{A}+BK)$，并利用（97）

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{A}+BK)(f_n - f)\|_{\mathcal{H}^r} &\lesssim \|T(\mathcal{A}+BK)(f_n - f)\|_{\mathcal{H}^r} \\ &= \|(\mathcal{A}-\lambda I)T(f_n - f)\|_{\mathcal{H}^r} \lesssim \|Tf_n - Tf\|_{\mathcal{H}^{r+\alpha}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned} \tag{101}$$

结合（100）和（101），可得:

$$\|f_n - f\|_{D_r(\mathcal{A}+BK)} = \|f_n - f\|_{\mathcal{H}^r} + \|(\mathcal{A}+BK)(f_n - f)\|_{\mathcal{H}^r} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

因此， $D_r(\mathcal{A}+BK)$是完备的，故为希尔伯特空间。 □

既然我们现在知道定义域 $D_r(\mathcal{A}+BK)$是希尔伯特空间，且它非空，就可以陈述以下引理:

引理 5.19。 定义域为 D_r 的算子 $\mathcal{A}+BK$（$\mathcal{A}+BK$）在 $\mathcal{H}^r$. 上生成一个 C^0 半群

证明。 首先注意，对于任意 $r \in (1/2-\alpha+\gamma, \alpha-1/2-\gamma)$ $D_r(\mathcal{A}-\lambda I) := \{f \in \mathcal{H}^r, (\mathcal{A}-\lambda I) f \in \mathcal{H}^r\} = \mathcal{H}^{r+\alpha}$. 由于 $\mathcal{A}$ 在 $\mathcal{H}^r$, 上生成一个 C^0 半群，因此 $\mathcal{A}-\lambda I$ 也生成一个 C^0 半群，我们将其记为 $e^{t(\mathcal{A}-\lambda I)}$. 现在定义如下的 C^0 半群于 $\mathcal{H}^r$,

$$\mathcal{S}(t) := T^{-1}e^{t(\mathcal{A}-\lambda I)}T, \quad \forall t \geq 0. \tag{102}$$

由于 T是 $\mathcal{H}^r$上的一个同构，且 $D_r(\mathcal{A}-\lambda I) = \mathcal{H}^{r+\alpha}$, 并由引理 5.18，可得

$$\begin{aligned}\left\{f\in\mathcal{H}^r,\ \lim_{t\to0^+}\frac{\mathcal{S}(t)f-f}{t}\text{ exists in }\mathcal{H}^r\right\} &= \left\{f\in\mathcal{H}^r,\ \lim_{t\to0^+}T^{-1}\left(\frac{e^{t(\mathcal{A}-\lambda I)}Tf-Tf}{t}\right)\text{ exists in }\mathcal{H}^r\right\}\\ &= \left\{(f=T^{-1}g)\in\mathcal{H}^r,\ \lim_{t\to0^+}T^{-1}\left(\frac{e^{t(\mathcal{A}-\lambda I)}g-g}{t}\right)\text{ exists in }\mathcal{H}^r\right\}\\ &= \left\{(f=T^{-1}g)\in\mathcal{H}^r,\ \lim_{t\to0^+}\left(\frac{e^{t(\mathcal{A}-\lambda I)}g-g}{t}\right)\text{ exists in }\mathcal{H}^r\right\}\\ &= \left\{(f=T^{-1}g),\ g\in D_r(A-\lambda I)=\mathcal{H}^{r+\alpha}\right\}\\ &= T^{-1}(\mathcal{H}^{r+\alpha}) = D_r(\mathcal{A}+BK).\end{aligned}$$

Thi这表明，生成 $\mathcal{S}(t)$ 的算子的定义域为 $D_r(\mathcal{A}+BK)$。

M此外，对于任意 $f\in D_r(\mathcal{A}+BK)$，我们有 $Tf\in\mathcal{H}^{r+\alpha}$，于是有 t

$$\begin{aligned}\lim_{t\to0^+}\frac{\mathcal{S}(t)f-f}{t} &= \lim_{t\to0^+}T^{-1}\left(\frac{e^{t(\mathcal{A}-\lambda I)}Tf-Tf}{t}\right)\\ &= T^{-1}(\mathcal{A}-\lambda I)Tf.\end{aligned}$$

因此，利用算子等式 (97)（因为 $f\in D_r(\mathcal{A}+BK)$），我们得到

$$\lim_{t\to0^+}\frac{\mathcal{S}(t)f-f}{t} = (\mathcal{A}+BK)f.$$

因此，定义域为 $D_r(\mathcal{A}+BK)$ 的算子 $\mathcal{A}+BK$ 是 C^0 半群 $\mathcal{S}(t)$ 的生成元，这就完成了引理 5.19。□

命题 *4.2* 的证明。 根据引理 5.19，我们知道，对于任意 $i\in\{1,\cdots,m\}$，算子 $\mathcal{A}+B_iK_i$ 在 $\mathcal{H}_i^{r_i}$ 上生成一个 C^0 半群 $\mathcal{S}_i(t)$，其中任意 $r_i\in(1/2-\alpha_i+\gamma_i,\ \alpha_i-1/2-\gamma_i)$。注意，这里的 $(\mathcal{S}_i(t))_{t\geq0}$ 指的是引理 5.19 的证明中所指的 $(\mathcal{S}(t))_{t\geq0}$，因为在命题 4.2 的证明中我们不再省略指标 i。现在，我们想要m m证明，定义域为 $D_{\vec{r}}(\mathcal{A}+BK)$: $=\sum D_{r_i}(\mathcal{A}+B_iK_i)_{i=1}$ $_{i=1}$的算子 $\mathcal{A}+BK=\mathcal{A}+\sum B_iK_i$ 生成 C^0 半群

$$\mathcal{S}(t) := \sum_{i=1}^{m}\mathcal{S}_i(t) \tag{103}$$

在 $\mathcal{H}^{\vec{r}}:=\mathcal{H}_1^{r_1}+\cdots+\mathcal{H}_m^{r_m}$. 回顾 $\mathcal{S}_i(t) = T_i^{-1}e^{t(\mathcal{A}-\lambda I)}T_i$，并且由于 $T_i\varphi_n^j=0$ 对任意 $i\neq j$，都有 $\mathcal{S}_i(t)\varphi_n^j=0$，对任意 $i\neq j$. 都成立。因此，对任意 $f^j\in\mathcal{H}^{r_j}$，都有 $\mathcal{S}_i(t)f^j=0$，对任意$i\neq j$. 均成立。特别地，这保证了对任意 $i\neq j$、 $k\in\{1,...,m\}$ 和 $s,\ t\geq0$，都有 $\mathcal{S}_i(t)\mathcal{S}_j(s)f^k=0$。结合 $(\mathcal{S}_i(t))_{t\geq0}$ 是定义在 $\mathcal{H}_i^{r_i},$ 上的 C^0 半群这一事实，可知 $\mathcal{S}(t)$ 是由 $\mathcal{H}^{\vec{r}}$ 构成的 C^0半群。考察其定义域:

$$\left\{f=\sum_{j=1}^{m}f^j\in\mathcal{H}^{\vec{r}},\ \lim_{t\to0}\frac{\mathcal{S}(t)f-f}{t}\text{ exists}\right\} = \left\{f=\sum_{j=1}^{m}f^j\in\mathcal{H}^{\vec{r}},\ \lim_{t\to0}\frac{\sum_{i=1}^{m}\mathcal{S}_i(t)f-f}{t}\text{ exists}\right\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\{ f = \sum_{j=1}^{m} f^j \in \mathcal{H}^{\vec{r}},\ \lim_{t\to 0} \sum_{i=1}^{m} \frac{\mathcal{S}_i(t) f^i - f^i}{t} \text{ exists} \right\} \\
&= \left\{ f = \sum_{j=1}^{m} f^j \in \mathcal{H}^{\vec{r}},\ \lim_{t\to 0} \frac{\mathcal{S}_i(t) f^i - f^i}{t} \text{ exists} \right. \\
&\left. \forall i \in \{1, \cdots, m\} \right\} \\
&= \sum_{i=1}^{m} D_{r_i}(\mathcal{A} + B_i K_i) = D_{\vec{r}}(\mathcal{A} + BK).
\end{aligned}
$$

这表明 $D_{\vec{r}}(\mathcal{A}+BK)$ 是与 $\mathcal{S}(t)$ 对应的生成元的定义域。此外，对任意 $f \in D_{\vec{r}}(\mathcal{A}+BK)$，都存在 $(f^1, \cdots, f^m) \in \mathcal{H}_1^r \times \cdots \times \mathcal{H}_m^r$，使得 $f = \sum_{i=1}^m f^i$，并且

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to 0^+} \frac{\mathcal{S}(t) f - f}{t} &= \lim_{t\to 0^+} \frac{\sum_{i=1}^m \mathcal{S}_i(t) f^i - \sum_{i=1}^m f^i}{t} \\
&= \sum_{i=1}^{m} \lim_{t\to 0^+} \frac{\mathcal{S}_i(t) f^i - f^i}{t} \\
&= \sum_{i=1}^{m} (\mathcal{A} + B_i K_i) f^i = (\mathcal{A} + BK) f
\end{aligned}
$$

因此，我们得出算子 $\mathcal{A}+BK$ 在 $\mathcal{H}^{\vec{r}}$ 上生成一个 C^0 半群，由此完成命题 4.2 的证明。□

5.8. **定理3.3的证明**。定理 3.1 可由前述所有步骤以及以下引理得出；该引理直接源于 $\mathcal{N}$ 是可数集这一事实。

引理5.20。对于任意 $\lambda_0 > 0$，存在 $\lambda > \lambda_0$，使得 $\lambda \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathcal{N}$。

定理*3.3*的证明。设 $\lambda_0 > 0$，并令 $\lambda > 0$ 为引理 5.2 给出的对象。由命题 4.1，存在 $K_i \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^{\beta_i+1/2+\varepsilon}; \mathbb{C})$ 和 $T_i \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^{\beta_i+r_i})$，使得对于任意 $r_i \in (1/2-\alpha_i+\gamma_i,\ \alpha_i-1/2-\gamma_i)$，$T_i$ 是从 $\mathcal{H}^{\beta_i+r_i}$ 到其自身的一个同构，并将系统 (46) 映射到 (47)。令

$$
K = (K_1, ..., K_m)^T,\ T = T_1 + ... + T_m, \tag{104}
$$

根据命题 4.2，我们知道，对于满足(14)的任意 $\vec{r}$，系统 (11) 在 $\mathcal{H}^{\beta+\vec{r}}$ 中是适定的。接下来需要证明，T 是从 $\mathcal{H}^{\beta+\vec{r}}$ 到自身的同构，它将系统 (11) 映射为 (12)，并由此得到系统 (11) 是指数稳定的。T 显然属于 $\mathcal{L}(\mathcal{H}^{\vec{\beta}+\vec{r}})$。我们定义 $T^{-1} := (T_1^{-1} + ... + T_m^{-1}) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^{\vec{\beta}+\vec{r}})$。回顾可知，对于任意 $j \neq i$ 和 $n \in \mathbb{N}^*$，$T_i \varphi_n^j = 0$、$T_i^{-1} \varphi_n^j = 0$以及 $K_i \varphi_n^j = 0$。因此，对于任意 $f = \sum_{i=1}^{m} \sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n^i \varphi_n^i \in \mathcal{H}^{\vec{\beta}+\vec{r}}$，

$$
T^{-1} T f = T^{-1} \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n^i T_i \varphi_n^i \right) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n^i \varphi_n^i = f, \tag{105}
$$

因此，T 是一个从 $\mathcal{H}^{\beta+\vec{r}}$ 到其自身的同构，逆映射为 T^{-1}。要证明 T 将 (11) 映射为 (12)，只需证明算子等式 (90)——它目前在 $\mathcal{L}(\mathcal{H}_i^{\alpha_i/2+s_i}, \mathcal{H}_i^{-\alpha_i/2+s_i})$ 中对任意 $i \in \{1, ..., m\}$ 以及 T_i、B_i 和 K_i 成立 —— 实际上在 $\mathcal{L}(\mathcal{H}^{\vec{\alpha}/2+\vec{s}}, \mathcal{H}^{-\vec{\alpha}/2+\vec{s}})$ 中对 T、B

以及 K 其中

(106)
$$\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_m),\ \ s=(s_1,...,s_m),\ \ \gamma=(\gamma_1,...,\gamma_m),\ \ s_i\in\left(-\frac{(\alpha_i-1)}{2}+\gamma_i,\frac{\alpha_i-1}{2}-\gamma_i\right).$$

这是由以下事实得出的：根据定义，$T_i\varphi_n^j=0$, $K_i\varphi_n^j=0$ 对于任意 $i\neq j$ 和任意 $n\in\mathbb{N}^*$: 取 $f=\sum_{i=1}^m f^i$，使得 $f^i=\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n^i\varphi_n^i$，并考虑其光滑逼近$\tilde{f}^i=\sum_{n=1}^N f_n^i\varphi_n^i$。注意，$K\tilde{f}=(K_1\tilde{f}^1,\ ...,\ K_m\tilde{f}^m)^T$且 $BK\tilde{f}=\sum B_iK_i\tilde{f}^i$，因此我们有$_{i=1}$

$$T(\mathcal{A}+BK)\tilde{f}=T\left(\sum_{i=1}^m\mathcal{A}\tilde{f}^i+B_iK_i\tilde{f}^i\right)=\sum_{i=1}^m T_i\mathcal{A}\tilde{f}^i+B_iK_i\tilde{f}^i \tag{107}$$

这里用到了：对于任意 $i\in\{1,...,m\}$和 $s\in\mathbb{R}$，有 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_i^{s+\alpha_i},\ \mathcal{H}_i^s)$。因此，对每个 $i\in\{1,...,m\}$应用 (90),

$$T(\mathcal{A}+BK)\tilde{f}=\sum_{i=1}^m T_i(\mathcal{A}+B_iK_i)\tilde{f}^i=\sum_{i=1}^m(\mathcal{A}-\lambda)T_i\tilde{f}_i=(\mathcal{A}-\lambda)\sum_{i=1}^m T_i\tilde{f}_i=(\mathcal{A}-\lambda I)T\tilde{f}. \tag{108}$$

注意，由于 $f\in\mathcal{H}^{\vec{\alpha}/2+s}$，且算子等式 (90) 对任意 $i\in\{1,...,m\}$ 都在 $\mathcal{L}(\mathcal{H}_i^{\alpha_i/2+s},\mathcal{H}_i^{-\alpha_i/2+s})$ 中成立，因此可以在每一项中取极限（关于 $\mathcal{H}^{-\vec{\alpha}/2+s}$）$N\to+\infty$。由此可得,

$$T(\mathcal{A}+BK)=(\mathcal{A}-\lambda I)T \text{ in } \mathcal{L}(\mathcal{H}^{\vec{\alpha}/2+s},\mathcal{H}^{-\vec{\alpha}/2+s}) \text{ with } (106). \tag{109}$$

最后，只需证明：对于任意 $\mu>0$，都可以将 λ_0 选得足够大，使系统 (11) 以衰减率 μ 指数稳定。由于 $\mathcal{A}$ 在 $\mathcal{H}^{\beta+\vec{r}}$ 上生成一个具有有限增长界的 C^0 半群（见附录 A.5 中的引理 A.3），存在 $M\geq1$ 和 $\omega\in\mathbb{R}$，使得对于任意 $f\in\mathcal{H}^{\beta+\vec{r}}$,

$$\|e^{t\mathcal{A}}f\|_{\mathcal{H}^{\vec{\beta}+\vec{r}}}\leq Me^{\omega t}\|f\|_{\mathcal{H}^{\vec{\beta}+\vec{r}}},\ \forall\, t\in[0,+\infty), \tag{110}$$

特别地，对于 $\lambda>\lambda_0>\mu+\omega$,

$$\|e^{t(\mathcal{A}-\lambda I)}f\|_{\mathcal{H}^{\vec{\beta}+\vec{r}}}\leq Me^{-\mu t}\|f\|_{\mathcal{H}^{\vec{\beta}+\vec{r}}},\ \forall\, t\in[0,+\infty). \tag{111}$$

设 $u_0\in\mathcal{H}^{\beta+\vec{r}}$，则闭环系统 (11) 在 $C^0([0,+\infty);\mathcal{H}^{\beta+\vec{r}})$ 中的（唯一）解为$u:\ \ t\to\mathcal{S}(t)u_0$，并利用 (102)

(112)
$$\|\mathcal{S}(t)u_0\|_{\mathcal{H}^{\vec{\beta}+\vec{r}}}=\|T^{-1}e^{t(\mathcal{A}-\lambda I)}Tu_0\|_{\mathcal{H}^{\vec{\beta}+\vec{r}}}\leq\|T^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}^{\vec{\beta}+\vec{r}})}\|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}^{\vec{\beta}+\vec{r}})}Me^{-\mu t}\|u_0\|_{\mathcal{H}^{\vec{\beta}+\vec{r}}},\ \forall\, t\in[0,+\infty).$$

定理 3.1 的证明到此结束。 □

6. 结论与展望

本文将 F-等价方法（有时称为广义反步法）推广到一大类线性系统中。这包括不一定是斜自伴或自伴的系统，前提是其中涉及的微分算子具有特征向量Riesz基（因此不一定是正交归一的），且阶数大于一。我们得到的条件比 [39, 40] 中提出的条件限制更少，并证明即使系统并非精确可控，且控制算子在稳定化空间中不可容许，我们仍能获得良好的快速稳定化性质。我们通过若干实例展示这些结果，包括薛定谔方程、一般扩散

方程、Burgers 方程，以及一个既非自伴也非斜自伴的系统。特别是对于薛定谔方程和 Burgers 方程，我们对控制算子得到的条件比 [22, 68, 40] 中的条件限制更少。这一结果使 F-等价方法向一般理论迈进了一步。尽管如此，这仍是一种新兴方法，还有许多尚未解决的问题值得探讨

- 如果 $\mathcal{A}$ 只有特征向量广义基（而没有我们在此假设的特征向量Riesz基），是否仍能扩展这种方法？这对于偏微分方程组尤其值得探讨，因为 $\mathcal{A}$ 并不总是具有特征向量Riesz基。

- 如果特征值 λ_n 是无穷维的，会发生什么？这尤其可能对多维系统有用。虽然定理 3.1 和 3.3 并不局限于一维系统，但在若干多维系统中，特征值 λ_n 可能具有无穷重数（例如热方程）。如果 $\alpha = 1$，又会怎样？在这种情况下，只有少数关于 F-等价性的结果，而且仅适用于特定情形 [90, 27], ；与此同时，关于若干此类系统的可控性和稳定化已有大量文献，例如波动方程 [50, 83]。

- 这些线性结果能否推广到（非常）非线性（即拟线性）系统？这一问题尤为重要，因为对于无穷维系统，线性化系统稳定并不一定意味着非线性系统即使局部稳定 [31]——即使它们至少是拟线性的；而迄今尚无稳定这类系统的通用方法。

- 能否进一步放宽对 B的条件？
- 这种方法能否用于具有双线性控制的系统（例如 [2]中的系统）？
- 如果我们只掌握部分特征向量和特征值的信息，并且在实践中只能构造一个仅依赖于有限个特征值和 b_n的 K，会出现什么情况？如果系统是抛物型的，由于高频是稳定的，可以预期采用控制反馈律 K 的系统仍然稳定。然而，如果系统不是抛物型的，问题就会复杂得多。

致谢

作者谨此感谢 CNRS-INSMI 的 PEPS计划 JCJC 2022，以及中法青年人才计划（JTFC 2024）和 ANR StarPDE（ANR-24-ERCS-0010）提供的支持，同时感谢北京大学数学科学学院的热情接待，并特别感谢国家自然科学基金项目（批准号：12301562）的资助。

附录 A. 附录

A.1. 引理 2.1 的证明。 我们首先证明，$\|\cdot\|_{\mathcal{H}^r}$ 是 $\mathcal{H}^r$上的一个范数。根据定义，令 $f \in \mathcal{H}^r$，存在 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in l^2$ 使得 $f = \sum f_n\varphi_n$，因此 $\|f\|_{\mathcal{H}^r}$ 是定义良好的。此外，由于 $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个Riesz基，$f = 0$ 与 $f_n = 0$ 等价，对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$，从而也与 $\|f\|_{\mathcal{H}^r} = 0$等价。此外，对于任意 $\mu \in \mathbb{C}$

$$\|\mu f\|_{\mathcal{H}^r} = \|\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mu f_n\varphi_n\|_{\mathcal{H}^r} = |\mu|\left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} n^{2r}|f_n|^2\right)^2 = |\mu|\|f\|_{\mathcal{H}^r}. \tag{113}$$

最后，由于对于任意 $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in l^2$，$(\sum_n n^{2r}|f_n + g_n|^2)^{1/2} \le (\sum_n n^{2r}|f_n|^2)^{1/2} + (\sum_n n^{2r}|g_n|^2)^{1/2}$，确实是一个范数。容易验证，它源自以下内积：

(4)。由于 $l^2(\mathbb{N}^*)$ 与 $\mathcal{H}^r$ 之间存在由下式给出的同构：

$$\iota : (f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n n^{-r}\varphi_n, \tag{114}$$

使得对任意$(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ $\|\iota(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\|_{\mathcal{H}^r} = \|f_n\|_{l^2}$， $\mathcal{H}^r$ 也是完备的，因而为巴拿赫空间。最后，由于 $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^r}$ 对应于内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}^r}$ 故它是希尔伯特空间。

A.2. $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ 要么 $\mathcal{H}^0$-稠密，要么 ω 在 $\mathcal{H}^0$中独立。以下论证是经典的。它最初在 [22] 中针对薛定谔方程给出，最近又分别在 [40]和 [39] 中针对热方程和斜自伴算子给出。为完整起见，我们在此详述。我们假设 $\lambda_n \neq 0$. 该证明可以很容易地改写到 $\lambda_1 = 0$的情形，因为下面定义的预解式 $\mathcal{A}_\lambda$ 在 $\mathcal{H}^0$.上是良定义且可逆的

回顾一下，对于任意 $\varepsilon > 0.$，我们定义 $r_n := (\lambda_n + \lambda/2)^{-1}$，根据式（56）中 q_n 的定义可得

$$(\mathcal{A} - \lambda - \lambda_n)q_n = -\sum_{p\in\mathbb{N}^*} \varphi_p = h, \quad \text{in } \mathcal{H}^{\alpha-1/2-\varepsilon}$$

这就变为 b y，假设不失一般性， $\lambda/2$ 属于 $\mathcal{A}$ 的预解集 ，

$$\mathcal{A}_\lambda q_n = r_n q_n - r_n \mathcal{A}_\lambda h \quad \text{in } \mathcal{H}^{\alpha-1/2-\varepsilon}$$

其中

$$\mathcal{A}_\lambda := (\mathcal{A} + \lambda/2)^{-1}.$$

现在假设族 $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ 在 $\mathcal{H}^0$ 中不 ω 线性独立。那么，存在非平凡的 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in l^2$ 使得

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} c_n q_n = 0 \quad \text{in } \mathcal{H}^0.$$

将 $\mathcal{A}_\lambda$ 应用于该方程，可得

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} c_n r_n q_n = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} c_n r_n\right) \mathcal{A}_\lambda h \quad \text{in } \mathcal{H}^0$$

这是良定义的，因为 $(r_n)_n \in l^2$. 再次应用 $\mathcal{A}_\lambda$，我们得到

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} c_n r_n^2 q_n = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} c_n r_n^2\right) \mathcal{A}_\lambda h + \left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} c_n r_n\right) \mathcal{A}_\lambda^2 h \quad \text{in } \mathcal{H}^0$$

根据归纳法，可得

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} c_n r_n^m q_n = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} c_n r_n^{m+1-i}\right) \mathcal{A}_\lambda^i h = \sum_{i=1}^{m} C_{m+1-i} \mathcal{A}_\lambda^i h \quad \text{in } \mathcal{H}^0, \tag{115}$$

其中

$$C_j := \sum_{n\in\mathbb{N}^*} c_n r_n^j < +\infty, \quad j \in \mathbb{N}^*.$$

现在让我们区分两种情况：

- 这些 $\{C_m\}$ 恒等于零。于是我们定义复变函数

$$G(z) := \sum_{n\in\mathbb{N}^*} c_n r_n e^{r_n z}.$$

该函数是全纯的，并且由于 $\{C_m\}$ 恒等于零，我们有

$$G^{(m)}(0) = 0, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

因此 $G \equiv 0$，所以对所有 $n \in \mathbb{N}^*$.，$c_n = 0$ 。这与 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. 的定义相矛盾。因此，$(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ 在 $\mathcal{H}^0$. 中是 ω 无关的

- $\{C_m\}$ 不恒等于零。记 $m_0 := \inf\{n \in \mathbb{N}^*, C_n \neq 0\}$. 那么，从 $m = m_0$，开始，根据 (115) 通过归纳法可得

$$\mathcal{A}_\lambda^m \in \operatorname{span}\{q_n\}_{n\in\mathbf{N}^*}, \quad \forall m \in \mathbb{N}^*. \tag{116}$$

假设族 $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ 不是 $\mathcal{H}^0$-稠密的。那么存在一个非零的 $d = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} d_n\varphi_n \in \mathcal{H}^0$，使得

$$\langle g, d\rangle_{\mathcal{H}^0} = 0, \quad \forall g \in \operatorname{span}\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$$

这特别意味着，

$$\langle \mathcal{A}_\lambda^m h, d\rangle_{\mathcal{H}^0} = 0, \quad \forall m \in \mathbb{N}^*.$$

注意到 $h = -\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \varphi_n \in \mathcal{H}^{-1}$，我们得到

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \bar{d}_n r_n^m = 0, \quad \forall m \in \mathbb{N}^*. \tag{117}$$

我们定义复变函数，

$$\tilde{G}(z) := \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \bar{d}_n r_n e^{r_n z}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

该函数是全纯的，并且由 (117) 可得，$\tilde{G}^{(m)}(0) = 0$ 对所有 $m \in \mathbb{N}^*$. 均成立。因此 $\tilde{G} \equiv 0$，进一步，对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$，$d_n = 0$，这就产生了矛盾。因此，族 $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$要么是 $\mathcal{H}^0$-稠密的，要么是 ω 线性无关的。

A.3. 的扩展正则性。由引理 5.12 和注 5.14 的第一部分，我们可以推导出以下结论：

引理 A.1。对于任意 $r \in (1/2-\alpha, \alpha-1/2)$ T 是一个从 $\mathcal{H}^r$ 到自身的有界算子。

证明。由引理 5.12 可知，唯一需要处理的情况是 $r \in (1/2-\alpha,\ 1/2-\alpha+\gamma]$。令 $r \in (1/2-\alpha,\ -1/2-\gamma)$，并设 $f \in \mathcal{H}^r$。由于特征值是单的（请记住，在整个证明中，我们都在分解 (2) 的某个子空间上工作），至多存在一个 $n_0 \in \mathbb{N}^*$ 使得 $\lambda_{n_0} = 0$。假设情况如此（否则证明相同，只需将 $\langle f,\ \varphi_{n_0}\rangle_{\mathcal{H}^0} = 0$ 替换为相应项），

$$f = \langle f, \varphi_{n_0}\rangle_{\mathcal{H}^0}\varphi_{n_0} + f^1, \tag{118}$$

其中 $f_1 \in \{f \in \mathcal{H}^r \mid \langle f, \varphi_{n_0}\rangle = 0\}$。注意，可以在该空间上定义 $\mathcal{A}^{-1}$ 以及 $g := \mathcal{A}^{-1}f^1 \in \mathcal{H}^{r+\alpha}$。由于 $r+\alpha \in (1/2,\ \alpha-1/2-\gamma)$，可以对 g应用（93），并利用 g的定义得到，

$$Tf^1 = -BK\mathcal{A}^{-1}f^1 + (\mathcal{A}-\lambda I)T\mathcal{A}^{-1}f^1, \tag{119}$$

并且该等式在 $\mathcal{H}^r$中成立。特别地

$$\begin{aligned}\|Tf^1\|_{\mathcal{H}^r} \leq \big(&\|B\|_{\mathcal{H}^r}\|K\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}^{r+\alpha},\mathbb{R})}\|\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}^r,\mathcal{H}^{r+\alpha})}\\ &+\|(\mathcal{A}-\lambda I)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}^{r+\alpha},\mathcal{H}^r)}\|T\|_{\mathcal{H}^{r+\alpha}}\|\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}^r,\mathcal{H}^{r+\alpha})}\big)\,\|f^1\|_{\mathcal{H}^r}.\end{aligned} \tag{120}$$

其中我们用到了引理 5.12，即 T在 $\mathcal{H}^{r+\alpha}$上有界，因为 $r+\alpha \in (1/2,\ \alpha-1/2-\gamma)$；还用到了 $r<-1/2-\gamma$ 这一事实，因此 $B\in\mathcal{H}^r$。由于当 $r<-1/2-\gamma$时， X 连续嵌入于$\mathcal{H}^r$，$\|T\varphi_{n_0}\|_{\mathcal{H}^r}\leq\|T\varphi_{n_0}\|_X$，因此存在常数 C（可能依赖于 r），使得

$$\|Tf\|_{\mathcal{H}^r} \leq C\left(n_0^r|\langle f,\varphi_{n_0}\rangle_{\mathcal{H}^0}|+\|f^1\|_{\mathcal{H}^r}\right)\leq C\|f\|_{\mathcal{H}^r}. \tag{121}$$

因此，对于任意 $r\in(1/2-\alpha,\ -1/2-\gamma)$， T从 $\mathcal{H}^r$ 到其自身有界；又因为 $-1/2-\gamma>1/2-\alpha-\gamma$，这是因为 $\gamma\in[0,(\alpha-1)/2)$，引理的证明至此结束。□

A.4. 引理5.15的证明。我们按照第 5.6 节中的方法进行。在此之前，我们先证明

引理A.2. *对于任意 $r\in(1/2-\alpha+\gamma,\alpha-1/2)$，算子 T 是一个指标为 0 的 Fredholm 算子，从 $\mathcal{H}^r$ 映射到其自身。*

证明。根据 (74) 和 (77) 给出的 T 的定义，对于任意 $n\in\mathbb{N}^*$，有

$$\begin{aligned}T\varphi_n &= \frac{\lambda+k_n}{b_n}\sum_{p\in\mathbb{N}^*}\frac{b_p\varphi_p}{\lambda_n-\lambda_p+\lambda}\\ &= \lambda\tilde{\tau}\varphi_n + k\circ\tilde{\tau}\varphi_n,\end{aligned} \tag{122}$$

其中 $\tilde{\tau}$由引理 5.17 给出，而 k在 $\mathcal{H}^r$上由 k: $n^{-r}\tilde{\tau}\varphi_n\mapsto k_n n^{-r}\tilde{\tau}\varphi_n$定义。注意，算子 k 是一个紧算子。事实上，设 $f\in\mathcal{H}^r$. 由于 $\tilde{\tau}$ 是从$\mathcal{H}^r$到其自身的同构，因此 $(n^{-r}\tilde{\tau}\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$是 $\mathcal{H}^r$ 的一个 Riesz基，特别地，存在 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\in l^2$使得 $f=\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n n^{-r}\tilde{\tau}\varphi_n$. 令 $\varepsilon>0$为所选对象，

$$k(f)=\sum_{n\in\mathbb{N}^*}k_n f_n n^{-r}\tilde{\tau}\varphi_n=\sum_{n\in\mathbb{N}^*}k_n n^{\varepsilon}f_n n^{-r-\varepsilon}\tilde{\tau}\varphi_n.$$

由引理 5.8 可知，存在 $\varepsilon>0$ 使得 $(k_n n^{\varepsilon})_{n\in\mathbb{N}^*}\in l^\infty$，因此我们有 $(f_n k_n n^{\varepsilon})_{n\in\mathbb{N}^*}\in l^2$. 。这保证了 $k(f)\in\mathcal{H}^{r+\varepsilon}$，并且特别地，

$$\|k(f)\|_{\mathcal{H}^{r+\varepsilon}}=\left\|\sum_{n\in\mathbb{N}^*}k_n n^{\varepsilon}f_n n^{-r-\varepsilon}\tilde{\tau}\varphi_n\right\|_{\mathcal{H}^{r+\varepsilon}}\lesssim\|k_n n^{\varepsilon}f_n\|_{l^2}\lesssim\|f_n\|_{l^2}\lesssim\|f\|_{\mathcal{H}^r}.$$

因此，由引理 2.2 可知， k 在 $\mathcal{H}^r$ 中是紧的。结合 $\tilde{\tau}$ 是指标为 0 的 Fredholm 算子（引理 5.17）这一事实，并利用表达式（122）， T 是 $\mathcal{H}^r$ 中的指标为 0 的 Fredholm 算子，这归功于 [17, 第 169] 页。□

- 定义 $z:=\lambda+\rho$，其中 $\rho\in\mathbb{C}$。不失一般性，我们假设算子 $\mathcal{A}$可逆。否则，由于其谱是可数的，存在足够小的 $\delta\neq0$，使得 $\mathcal{A}+\delta I$ 可逆。因此，证明 $\mathcal{A}+BK+zI$ 可逆，就等同于证明 $I+\mathcal{A}^{-1}BK+z\mathcal{A}^{-1}$ 可逆。现在我们考虑以下两种不同的情况：

(a) $K(\mathcal{A}^{-1}B) \neq -1$.

我们可以验证，对于任意 $f \in \mathcal{H}^{\alpha/2}$，由下式定义的函数 $\varphi \in \mathcal{H}^{\alpha/2}$

$$\varphi := f - \frac{\mathcal{A}^{-1}B(Kf)}{1 + K(\mathcal{A}^{-1}B)}$$

是下式的唯一解

$$(I + \mathcal{A}^{-1}BK)\varphi = f.$$

因此，算子 $I + \mathcal{A}^{-1}BK$ 是可逆的。由于 $\mathcal{A}$ 是微分算子，因此 $\mathcal{A}^{-1}$ 是连续算子。于是，得益于可逆算子集合的开性，存在 $\varepsilon > 0$，使得对于任意 $|z| < \varepsilon$

$$I + \mathcal{A}^{-1}BK + z\mathcal{A}^{-1} \tag{123}$$

在 $\mathcal{H}^{-\alpha/2}$. 中是可逆的

(b) $K(\mathcal{A}^{-1}B) = -1$.

对于任意 $v \in \mathcal{H}^{\alpha/2}$，都有

$$(I + \mathcal{A}^{-1}BK)v = 0 \Leftrightarrow v = -\mathcal{A}^{-1}B(Kv) \in \operatorname{span}\{\mathcal{A}^{-1}B\}.$$

这确保了 0 是 $I + \mathcal{A}^{-1}BK$ 的一个特征值，重数为 1，且对应的特征空间由 $\mathcal{A}^{-1}B.$ 生成。因此，存在 0 的小开邻域 Ω 和 Ω，它们满足：˜borhoods Ω and Ω of 0 in $\mathbb{C}$ satisfying:

$$(I + \mathcal{A}^{-1}BK + z\mathcal{A}^{-1})y(z) = \lambda(z)y(z) \tag{124}$$

$$y : z \mapsto y(z) \in \mathcal{H}^{\alpha/2}, \text{ is holomorphic} \tag{125}$$

$$\lambda : z \mapsto \lambda(z) \in \tilde{\Omega}, \text{ is holomorphic} \tag{126}$$

$$\lambda(0) = 0, \quad y_0 := y(0) = \mathcal{A}^{-1}B \tag{127}$$

˜ 以这种方式，使得对于任意 $z \in \Omega$ λ(z) 都是 Ω 内唯一的特征值。由于λ(0) $= 0$，要么 λ 在 Ω 内恒等于 0，要么存在一个小邻域 ω，使得对于任意 $z \in \omega \setminus \{0\}.$，λ(z) $\neq 0$。我们来证明 λ 并非恒等于 0。为此，我们反设它恒等于 0。根据 y 的全纯性性质，存在一个序列 $(y_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \in \mathcal{H}^{\alpha/2}$，使得

$$y(z) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} y_k z^k,$$

其中 $y_0 = \mathcal{A}^{-1}B.$。那么，鉴于 (124) 以及假设 $\lambda \equiv 0$，有

$$(I + \mathcal{A}^{-1}BK + z\mathcal{A}^{-1}) \sum_{k\in\mathbb{N}^*} y_k z^k = 0, \text{ in } \mathcal{H}^{\alpha/2}$$

由整函数展开的唯一性可知，

$$(I + y_0K)y_k + \mathcal{A}^{-1}y_{k-1} = 0, \text{ in } \mathcal{H}^{\alpha/2}, \ \forall k \in \mathbb{N}^*. \tag{128}$$

将 K 应用于此方程，并注意到 $Ky_0 = -1$，我们得到

$$K(\mathcal{A}^{-1}y_{k-1}) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow K(\mathcal{A}^{-1}y_k) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

现在将 $K\mathcal{A}^{-1}$ 应用于同一个方程 (128)，得到

$$K(\mathcal{A}^{-1}y_k) + K(\mathcal{A}^{-1}y_0)(Ky_k) + K(\mathcal{A}^{-2}y_{k-1}) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

然后

$$K(\mathcal{A}^{-2}y_{k-1}) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow K(\mathcal{A}^{-2}y_k) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

由归纳法，将 $K\mathcal{A}^{-(n-1)}$ 应用于 (128)，可得

$$K(\mathcal{A}^{-n}y_k) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^*.$$

特别地

$$K(\mathcal{A}^{-n}y_0) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

这意味着

$$\sum_{m\in\mathbb{N}^*} \frac{b_m K_m}{\lambda_m^l} = 0, \quad \forall l \geq 2.$$

利用附录 A.2 中的全纯函数技巧，可得 $b_m K_m = 0$，这就产生了矛盾。因此，存在 $\varepsilon > 0$ ，使得对于任意 $z \in \Omega$ 和 $|z| < \varepsilon.$ ， $\lambda(z) \neq 0$ 。由于 $\lambda(z)$ 是 $\tilde{\Omega}$ $I + \mathcal{A}^{-1}BK + z\mathcal{A}^{-1}$ 内唯一的特征值，故其可逆。

在这两种情况下，至少存在一个趋于 0 的 $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 序列，使得$I + \mathcal{A}^{-1}BK + z_k\mathcal{A}^{-1}$ 是从 $\mathcal{H}^{\alpha/2}$ 到 $\mathcal{H}^{-\alpha/2}.$ 的可逆算子。由于 $\mathcal{A} + \rho I$ 的谱是离散的，我们可以找到 $\rho := z_k - \lambda$ ，使得 $\mathcal{A} + \rho I$ 和 $\mathcal{A} + BK + \lambda I + \rho I = \mathcal{A}(I + \mathcal{A}^{-1}BK + z_k\mathcal{A}^{-1})$ 都是从 $\mathcal{H}^{\alpha/2}$ 到 $\mathcal{H}^{-\alpha/2}$的可逆算子。

• 我们在此假设 $\ker T^* \neq \{0\}$，并希望证明 $(\mathcal{A}^* + \bar{\rho}I)^{-1}$ 在 $\ker T^*$ 中有一个特征向量 h，其中 ρ 如上所定义。回顾算子等式

$$T(\mathcal{A} + BK) = (\mathcal{A} - \lambda I)T.$$

根据引理 5.12，该等式至少在算子被视为从 $\mathcal{H}^{\alpha/2}$ 作用到 $\mathcal{H}^{-\alpha/2}.$ 时成立。然后，对于如上所述的任意 ρ ，下列结论成立：

$$T(\mathcal{A} + BK + \lambda I + \rho I) = (\mathcal{A} + \rho I)T.$$

由于 $\mathcal{A} + BK + \lambda I + \rho I$ 与 $\mathcal{A} + \rho I$ 可逆，我们得到

$$(\mathcal{A} + \rho I)^{-1}T = T(\mathcal{A} + BK + \lambda I + \rho I)^{-1}. \tag{129}$$

由于 $\ker T^* \neq \{0\},$我们可以选取 $h \neq 0$，使得 $h \in \ker T^*$ 且 $h \in \mathcal{H}^{-\alpha/2}.$。因此，由 (129)，对任意 $\varphi \in \mathcal{H}^{-\alpha/2},$ 成立

$$\begin{aligned} 0 &= \langle (\mathcal{A} + \rho I)^{-1}T\varphi - T(\mathcal{A} + BK + \lambda I + \rho I)^{-1}\varphi, h\rangle_{\mathcal{H}^{-\alpha/2}} \\ &= \langle \varphi, T^*(\mathcal{A}^* + \bar{\rho}I)^{-1}h\rangle_{\mathcal{H}^{-\alpha/2}} - \langle (\mathcal{A} + BK + \lambda I + \rho I)^{-1}\varphi, T^*h\rangle_{\mathcal{H}^{-\alpha/2}} \\ &= \langle \varphi, T^*(\mathcal{A}^* + \bar{\rho}I)^{-1}h\rangle_{\mathcal{H}^{-\alpha/2}}. \end{aligned}$$

这保证了 $T^*(\mathcal{A}^* + \bar{\rho}I)^{-1}h = 0$ 属于 $\mathcal{H}^{-\alpha/2},$从而 $(\mathcal{A}^* + \bar{\rho}I)^{-1}h \in \ker T^*.$。于是我们证明了，对任意 $f \in \ker T^*, (\mathcal{A}^* + \bar{\rho}I)^{-1}f \in \ker T^*.$

由于 $\ker T^*$是有限维的（回想一下， T是弗雷德霍姆的，因此 T^*也是），且不等于 $\{0\}$，所以 $(\mathcal{A}^* + \bar{\rho}I)^{-1}$在 $\ker T^*$上的限制属于 $\mathcal{L}(\ker T^*)$，并且是有限维空间上的算子，因此存在一个特征函数$h \in \ker T^*$，它是 $(\mathcal{A}^*+\bar{\rho}I)^{-1}$的特征函数，对应于特征值 $\mu \neq 0$（因为算子 $(\mathcal{A}+\bar{\rho}I)^{-1}$是可逆的）。于是我们有

$$(\mathcal{A} + \bar{\rho}I)^{-1}h = \mu h,$$

这尤其意味着

$$\mathcal{A}^*h = \frac{1-\bar{\rho}\mu}{\mu}h, \tag{130}$$

并且 $h \in \mathcal{H}^{\alpha/2}$. 这保证了 h 是 $\mathcal{A}^*$ 的一个特征函数，对应的特征值为 $(1-\bar{\rho}\mu)/\mu$. 由于 $\mathcal{H}^{-\alpha/2}$ 的子空间是 $\mathcal{A}^*$ 的特征子空间，且其维数为 1，因此与 $(1-\bar{\rho}\mu)/\mu$ 对应的特征子空间维数为一。由于 $(n^{\alpha/2}\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ 构成了 $\mathcal{H}^{-\alpha/2}$的 Riesz基，存在 $n_0 \in \mathbb{N}^*$ 使得 $\text{Eig}((1-\bar{\rho}\mu)/\mu) = \text{张成}\{n_0^{\alpha/2}\varphi_{n_0}\}$.根据 (130)， $h \in \text{Eig}((1-\bar{\rho}\mu)/\mu)$，于是存在 $C>0$ 使得 $h = Cn_0^{\alpha/2}\varphi_{n_0}$.因此，我们最终证明了：若 $\ker T^* \neq \{0\}$，则存在 $n_0 \in \mathbb{N}^*$, $C>0$ 使得$Cn_0^{\alpha/2}\varphi_{n_0} \in \ker T^*$，并且 $Cn_0^{\alpha/2}\varphi_{n_0}$是 $(\mathcal{A}^* + \bar{\rho}I)$的一个特征函数。

- 由上述结果可知，若 $\ker T^* \neq \{0\}$，则存在 $n_0 \in \mathbb{N}^*$, $C>0$ 使得$Cn_0^{\alpha/2}\varphi_{n_0} \in \ker T^*$. 因此，对任意 $\varphi \in \mathcal{H}^{-\alpha/2}$,

$$0 = \langle T\varphi, n_0^{\alpha/2}\varphi_{n_0}\rangle_{\mathcal{H}^{-\alpha/2}} = \langle \varphi, T^*(n_0^{\alpha/2}\varphi_{n_0})\rangle_{\mathcal{H}^{-\alpha/2}}$$

特别地，对于 $\varphi = B = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} b_n\varphi_n$ 我们有

$$0 = \langle TB, n_0^{\alpha/2}\varphi_{n_0}\rangle_{\mathcal{H}^{-\alpha/2}}$$

结合 $TB = B$ 属于 $\mathcal{H}^{-\alpha/2}$，这一事实，可得

$$0 = \langle B, n_0^{\alpha/2}\varphi_{n_0}\rangle_{\mathcal{H}^{-\alpha/2}} = \frac{b_{n_0}}{n_0^{\alpha/2}}.$$

这与假设（10）矛盾。因此，$\ker T^* = \{0\}$.

A.5. **$\mathcal{A}$ 在 $\mathcal{H}^{\vec{r}}$上生成一个半群**。我们证明如下结论

引理 A.3。 在定理 *3.3* 的假设下， $\mathcal{A}$在 $\mathcal{H}^{\vec{r}}$ 上生成一个 C^0 半群，任意 $r =$（r_1、...、 r_m）$\in \mathbb{R}^m$均成立。

这源于空间 $\mathcal{H}^{\vec{r}}$ 与 $\mathcal{A}$ 的定义之间的内在联系（见第 2 节）。下面对此进行明确说明。根据 $\mathcal{H}^{\vec{r}}$ 的定义，只需证明对于任意 $i \in \{1,...,m\}$ 和 $r \in \mathbb{R}$， $\mathcal{A}$ 在 $\mathcal{H}_i^r$ 上生成一个 C^0 半群。对任意 $t \geq 0$，定义

$$\begin{aligned} &\mathcal{H}_i^r \to \mathcal{H}_i^r \\ &\mathcal{S}_{i,r}(t) \ : \ \sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n\varphi_n^i \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}^*} e^{\lambda_n^i t} f_n\varphi_n^i. \end{aligned} \tag{131}$$

由于 $\mathcal{A}$ 生成了一个具有有限增长界的 C^0 半群，存在 $\omega > 0$ ，使得对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$ 均有 $|e^{\lambda_n^i t}| \leq e^{\omega t}$ ，因此对于任意 $t \geq 0$, $S_{i,\,r}(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^r)$ 。显然，$S_{i,\,r}(0) = Id$，并且对于（t, s）$\in \mathbb{R}_+$，有 $S_{i,\,r}(t+s) = S_{i,\,r}(t)\,S_{i,\,r}(s)$ 。最后，利用以下事实： τ_r： $\varphi_n^i \to n^{-r}\varphi_n^i$ 是从 $\mathcal{H}_i^0$ 到 $\mathcal{H}_i^r$ 的同构，它与 $\mathcal{A}$ 交换，并满足

$$S_{i,r}\tau_r = \tau_r S_{i,0}, \tag{132}$$

并且，由于 $\mathcal{A}$ 是 $S_{i,0}$ 在 $\mathcal{H}_i^0$ 上的无穷小生成元，我们可直接推得 $S_{i,r}$ 是一个半群，且 $\mathcal{A}$ 是 $S_{i,r}$ 的无穷小生成元，其定义域为 $D_r(\mathcal{A}) := \tau_r(D_0(\mathcal{A})) = \mathcal{H}_i^{r+\alpha_i}$。

A.6. **推广到** $\beta \neq 0$ **的情形**。 假设命题 4.1 对于 $\beta = 0$ 成立，那么与 [39] 中完全相同，它对于 $\beta \neq 0$ 也成立。为此，只需定义 $\tilde{B} = \sum_n n^{\beta} b_n \varphi_n$，将 ˜ ˜ ˜应用于命题 4.1，并结合 B，即可得到一个反馈算子 K 和一个同构 T。于是，命题 4.1 对于 $\beta \neq 0$ 也成立，其中 T: $= M^{-1}\tilde{T}M$，且 $K = \tilde{K}M$，其中 M 是从 $\mathcal{H}^{\beta+s}$ 到 $\mathcal{H}^{s}$ 的同构，对任意由下式定义的 $s \in \mathbb{R}$

$$M : n^{-\beta}\varphi_n \mapsto \varphi_n. \tag{133}$$

更多详情请参见 [39] 。

A.7. **推论 3.14 的证明**。

证明。 相应的 系统 (41) 的算子 $\mathcal{A}$ 是以下 Sturm–Liouville 算子 r

$$\mathcal{A} := \partial_x(a\partial_x) + b,$$

定义在定义域

$$D(\mathcal{A}) = \{f \in H^2([0, L]) \mid c_1 f(0) = -c_2 f'(0),\ \ c_3 f(L) = -c_4 f'(L)\}. \tag{134}$$

这是一个经典的自伴算子，其特征向量族 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ 在 $L^2(0,\ L)$ 中构成一组正交归一基，且其特征值 $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ 是单的、实的、离散的，并构成一个非递减序列 [37]。

我们选择 $X = L^2(0,\ L)$。由于特征值是单的， $X_1 = X := L^2$。

现在我们来确定算子 $\mathcal{A}$ 的特征值，并证明它们满足假设 (6) 和 (7)。对于 $\mathcal{A},$ 的任意特征对 $(\lambda_n,\ u_n)$，有

$$\begin{aligned} \mathcal{A}u_n = \lambda_n u_n &\Leftrightarrow \partial_x(a\partial_x u_n) + bu_n = \lambda_n u_n \\ &\Leftrightarrow \partial_x(a\partial_x u_n) + (b - \lambda_n)u_n = 0. \end{aligned}$$

通过以下变量变换

$$y(x) := \int_0^x \frac{1}{\sqrt{a(s)}} ds, \quad \varphi_n(y) := a(x)^{1/4} u_n(x), \quad \forall x \in [0, L], \tag{135}$$

我们得到

$$\partial_x(a(x)\partial_x u_n(x)) + (b(x) - \lambda_n)u_n(x) = 0, \quad \forall x \in [0, L] \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} &\partial_y^2\varphi_n(y) + Q(y)\varphi_n(y) = \lambda_n\varphi_n(y), \\ &\forall y \in [0, M], \end{aligned}$$

其中

$$Q(y) := b(x(y)) - \frac{\partial_y^2[a(x(y))^{1/4}]}{a(x(y))^{1/4}}, \quad M := \int_0^L \frac{1}{\sqrt{a(s)}} ds. \tag{136}$$

通过变量 变换 (135) 和 (42)，我们得到以下边界条件，作用于 φ_n:

$$\begin{aligned} \tilde{c}_1\varphi_n(0) + \tilde{c}_2\partial_y\varphi_n(0) = 0 \\ \tilde{c}_3\varphi_n(M) + \tilde{c}_4\partial_y\varphi_n(M) = 0, \end{aligned} \tag{137}$$

其中

$$\tilde{c}_1 := c_1 a(0)^{-1/4} - \frac{c_2 a'(0)}{4a(0)^{5/4}},\ \tilde{c}_2 := \frac{c_2}{a(0)^{3/4}},\ \tilde{c}_3 := c_3 a(L)^{-1/4} - \frac{c_4 a'(L)}{4a(L)^{5/4}},\ \tilde{c}_4 := \frac{c_4}{a(L)^{3/4}}.$$

注意，由于 a 仅取正值，因此有 $\tilde{c}_1^2 + \tilde{c}_2^2 > 0$ 和 $\tilde{c}_3^2 + \tilde{c}_4^2 > 0$。我们定义以下算子

$$\tilde{\mathcal{A}} := \partial_y^2 + Q$$

在定义域上

$$D(\tilde{\mathcal{A}}) := \{f \in H^2([0,M]) \mid \tilde{c}_1 f(0) + \tilde{c}_2 \partial_y f(0) = 0,\ \ \tilde{c}_3 f(M) + \tilde{c}_4 \partial_y f(M) = 0\}.$$

特征值 λ_n 在变量变换（135）下保持不变。换言之， $\mathcal{A}$ 的任意特征-˜值 λ_n 也是算子 $\mathcal{A}$ 的特征值，反之亦然，只有特征函数˜发生变化。因此，只需知道 $\mathcal{A}$ 的特征值，就能得知 $\mathcal{A}$. 的特征值。从 [37], 可知，特征值满足以下渐近估计

$$\lambda_n = -cn^2 + O(1) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \tag{138}$$

其中 c 是一个与 n.无关的正常数。因此，假设（6）对$\alpha_i = \alpha = 2$立即成立。

注意，假设（7）对任意 $n = p \in \mathbb{N}^*$.都成立。
然后，我们现在考虑 $n \neq p \in \mathbb{N}^*$， 并且有

$$|\lambda_n - \lambda_p| = |cn^2 - cp^2 + O(1)|.$$

由于

$$\lim_{p^2+n^2\to+\infty, p\neq n} |n^2 - p^2| \geq \lim_{p^2+n^2\to+\infty} |p+n| = +\infty, \tag{139}$$

存在 $\eta > 0$ 使得

$$|\lambda_n - \lambda_p| \geq \eta |n^2 - p^2|, \forall n, p \geq 1. \tag{140}$$

这保证了

$$\begin{aligned} \forall n, p \geq 1, \quad |\lambda_n - \lambda_p| &\geq \eta |(n+p)(n-p)| \\ &\geq \eta n |n-p|, \end{aligned}$$

这使得 (7) 对 $\alpha_i = \alpha = 2$成立。 □

A.8. **推论 3.13 的证明**。推论 3.13 可通过对线性系统采用相同的变换和反馈，并按照 [40] 中的方法处理非线性项而得。首先考虑不含非线性部分的系统 (39) $u\partial_x u$. 此时，它恰好变为热方程 (34)。鉴于推论 3.5（$\alpha_i = \alpha = 2,\ \ B_i = \phi_i,\ \ r_i = r,\ \ \gamma_i = \gamma$），且 (40) 成立，因此存在可逆算子 $T \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{T})\ L^2(\mathbb{T}))$ 和反馈算子 $K \in \mathcal{L}(H^{3/4}(\mathbb{T})\ \mathbb{R}^2)$，它们将线性系统 (34) 变换为 (36)，进而使其在 $L^2(\mathbb{T})$ 中指数稳定。由 (40) 可知， $\phi = (\phi_1,\ \ \phi_2) \in H^{-1}(\mathbb{T})$。结合 $K \in \mathcal{L}(H^{3/4}(\mathbb{T})\ \mathbb{R}^2)$，这一事实，便可将 [40, 引理 5.5], 应用于非线性闭环系统

$$\partial_t u - \Delta u + u\partial_x u = \phi K(u), \tag{141}$$

然后得出结论：对于任意初始条件 u_0 ，它都有唯一解 u ，且该初始条件属于 $L^2(\mathbb{T})$。 特别地，存在 $\omega \in \mathbb{R}$ ，使得：

$$u \in C^0([0,+\infty); L^2(\mathbb{T})) \cap L^2_{loc}((0,+\infty), H^1(\mathbb{T})) \cap H^1_{loc}((0,+\infty); H^{-1}(\mathbb{T})),$$

and

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq e^{\omega t} \|u_0\|_{L^2(\mathbb{T})}, \quad \forall t \geq 0. \tag{142}$$

令 $\tau > 0$ 和 $u_0 \in L^2(\mathbb{T})$，其中$\|u_0\|_{L^2(\mathbb{T}} \leq \delta$, ($\delta$ 稍后选定）。将变换T 应用于 (141)，得到

$$\partial_t Tu - T\Delta u + T(u\partial_x u) = T\phi K(u). \tag{143}$$

由于 (40) 成立， $\phi \in H^{-1}(\mathbb{T})$, 并且根据构造，算子 T 和 K 满足如下算子等式 (90)

$$T\Delta + T\phi K = (\Delta - \lambda I)T.$$

至少，该等式成立于 $\mathcal{L}(H^1(\mathbb{T})\ H^{-1}(\mathbb{T}))$. 由于 $u \in C^0([0,\tau);\ L^2(\mathbb{T})) \cap L^2([0,\tau);\ H^1(\mathbb{T}))$，下列等式在 $L^2([0,\tau);\ H^{-1}(\mathbb{T}))$ 中有意义

$$T\Delta u + T\phi K(u) = \Delta Tu - \lambda Tu.$$

于是，由 (143) 可知，对几乎所有的 $t \in (0,\tau)$,

$$\partial_t Tu(t,\cdot) - \Delta Tu(t,\cdot) + \lambda Tu(t,\cdot) + T(u(t,\cdot)\partial_x u(t,\cdot)) = 0 \text{ in } H^{-1}(\mathbb{T}).$$

通过令 $z(t,\cdot) := Tu(t,\cdot) \in H^1(\mathbb{T})$, 对几乎所有的 $t \in (0,\tau)$，我们得到

$$\partial_t z(t,\cdot) - \Delta z(t,\cdot) + \lambda z(t,\cdot) + T(T^{-1}z(t,\cdot)\partial_x T^{-1}z(t,\cdot)) = 0 \text{ in } H^{-1}(\mathbb{T}).$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\partial_t\|z(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{T})} &= \langle z(t,\cdot), \partial_t z(t,\cdot)\rangle \\ &= \langle z, \Delta z - \lambda z - T(T^{-1}z\partial_x T^{-1}z)\rangle\end{aligned}$$

由于 $\langle z, \Delta z\rangle = -\langle \nabla z, \nabla z\rangle = -\|\nabla z\|^2_{L^2(\mathbb{T})} = \|z\|^2_{L^2(\mathbb{T})} - \|z\|^2_{H^1(\mathbb{T})}$，由此可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\partial_t\|z(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{T})} &= \|z\|^2_{L^2(\mathbb{T})} - \|z\|^2_{H^1(\mathbb{T})} - \lambda\|z\|_{L^2(\mathbb{T})} - \langle z, T(T^{-1}z\partial_x T^{-1}z)\rangle \\ &\le -(\lambda-1)\|z\|^2_{L^2(\mathbb{T})} - \|z\|^2_{H^1(\mathbb{T})} + C\|z\|_{L^2(\mathbb{T})}\|T^{-1}z\partial_x T^{-1}z\|_{L^2(\mathbb{T})} \\ &\le -(\lambda-1)\|z\|^2_{L^2(\mathbb{T})} - \|z\|^2_{H^1(\mathbb{T})} + \frac{C}{2}\|z\|_{L^2(\mathbb{T})}\|\partial_x((T^{-1}z)^2)\|_{L^2(\mathbb{T})} \\ &\le -(\lambda-1)\|z\|^2_{L^2(\mathbb{T})} - \|z\|^2_{H^1(\mathbb{T})} + \frac{C}{2}\|z\|_{L^2(\mathbb{T})}\|(T^{-1}z)^2\|_{H^1(\mathbb{T})} \\ &\le -(\lambda-1)\|z\|^2_{L^2(\mathbb{T})} - \|z\|^2_{H^1(\mathbb{T})} + \frac{C}{2}\|z\|_{L^2(\mathbb{T})}\|z\|^2_{H^1(\mathbb{T})},\end{aligned}$$

其中， C 是一个常数，可以随行变化，但不依赖于 z 或 t。因此，考虑到$\|z\|_{L^2(\mathbb{T})}$ 在 $[0,\tau$上足够小（例如，如果 $\sup_{[0,\tau)}\|z(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{T})} \le 1/C$），我们得到

$$\frac{1}{2}\partial_t\|z(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{T})} \le -(\lambda-1)\|z(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{T})},$$

特别是

$$\|z(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{T})} \le e^{-(\lambda-1)t}\|z_0\|_{L^2(\mathbb{T})}, \quad \forall t \in [0,\tau)$$

当$\|z\|_{L^2(\mathbb{T})}$ 足够小时。利用 T的同构性质，得到:

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{T})} \lesssim e^{-(\lambda-1)t}\|u_0\|_{L^2(\mathbb{T})}, \quad \forall t \in [0,\tau) \tag{144}$$

其中$\|u\|_{L^2(\mathbb{T})}$ 足够小。由于解 u唯一且满足 (142)，只需考虑 $\|u_0\|$ 足够小，使得$\|u\|_{L^2(\mathbb{T})}$ 足够小。因此，存在 $\delta_0(\tau,\lambda)$，使得对任意 $\delta \in (0,\delta_0)$, 都有$\|u_0\|_{L^2(\mathbb{T})}$ ，且 (141) 的解满足指数稳定性估计 (144)。事实上，利用一个经典论证（例如参见 [40, 第 6.2]节），可以按以下意义将估计 (144) 推广到 $[0,+\infty)$：存在一个小的 $\delta_1(\lambda) > 0$，使得对任意 $\delta \in [0,\delta_1)$，若$\|u_0\|_{L^2(\mathbb{T})} \le \delta$，则

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{T})} \lesssim e^{-(\lambda-1)t}\|u_0\|_{L^2(\mathbb{T})}, \quad \forall t \in [0,+\infty).$$

证明到此结束。

参考文献

[1] Marie-Therese Aimar、Abdelkader Intissar 和 Aref Jeribi。《巴格曼空间中非自伴格里博夫算子广义特征向量的无条件基》。Journal of Mathematical Analysis and Applications，231(2):588–602，1999。[2] Fatiha Alabau-Boussouira、Piermarco Cannarsa 和 Cristina Urbani。《通过双线性控制实现抛物型演化方程的超指数可稳定性》。Journal of Evolution Equations，21:941–967，2021。[3] Karl J Astrom。《PID 控制器：理论、设计与调试》。国际测量与控制学会，1995。[4] Mehdi Badra、Debanjana Mitra、Mythily Ramaswamy 和 Jean-Pierre Raymond。《通过有限维控制对时间周期演化方程进行局部反馈稳定化》。ESAIM：控制、优化与变分法，26:101，2020。[5] Mehdi Badra 和 Takéo Takahashi。《通过有限维反馈或动态控制器稳定化抛物型非线性系统：在 Navier–Stokes 系统中的应用》。SIAM控制与优化杂志，49(2):420–463，2011。[6] Mehdi Badra 和 Takéo Takahashi。《关于抛物型系统近似可控性与可稳定性的 Fattorini 判据》。ESAIM：控制、优化与变分法，20(3):924–956，2014。[7] PB Bailey、WN Everitt 和 A Zettl。《具有耦合边界条件的正则与奇异 Sturm-Liouville 问题》。Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics，126(3):505–514，1996。[8] Andras Balogh 和 Miroslav Krstic。《针对具有任意不稳定程度的热方程的无限维反步式反馈变换》。European Journal of Control，8(2):165–175，2002。[9] HT Banks 和 Karl Kunisch。《抛物型系统的线性调节器问题》。SIAM控制与优化杂志，22(5):684–698，1984。[10] Viorel Barbu。《抛物型方程的可控性与稳定化》。施普林格，2018。[11] Georges Bastin 和 Jean-Michel Coron。《一维双曲系统的稳定性与边界稳定化》。非线性微分方程及其应用进展丛书第 88 卷。施普林格国际出版社，2016。[12] Karine Beauchard 和 Camille Laurent。《双线性控制下一维线性与非线性薛定谔方程的局部可控性》。Journal de Mathématiques Pures et Appliquées，94(5):520–554，2010。[13] Karine Beauchard 和 Morgan Morancey。《双线性控制及最短时间条件下的一维薛定谔方程局部可控性》。数学控制与相关领域，4(2):125–160，2014。[14] Vincent Boulard 和 Amaury Hayat。《抛物型系统的 F-等价及其在非线性偏微分方程稳定化中的应用》。arXiv 预印本 arXiv:2508.21605，2025。[15] Dejan M. Bošković、Andras Balogh 和 Miroslav Krstić。《一类抛物型分布参数系统的无限维反步法》。数学控制与信号系统，16(1):44–75，2003。[16] Tobias Breiten 和 Karl Kunisch。《基于 Riccati 方程的反馈控制：针对 FitzHugh–Nagumo 模型的单域方程》。SIAM控制与优化杂志，52(6):4057–4081，2014。[17] Haim Brezis。《泛函分析、Sobolev 空间与偏微分方程》，第 2 卷。施普林格，2011。[18] Pavol Brunovsk`y。《线性可控系统的分类》。Kybernetika，6(3):173–188，1970。[19] Christopher I. Byrnes 和 Alberto Isidori。《非线性反馈稳定化的新结果与实例》。Systems Control Lett.，12(5):437–442，1989。[20] Marco Caponigro、Massimo Fornasier、Benedetto Piccoli 和 Emmanuel Trélat。《Cucker-Smale 模型的稀疏稳定化与最优控制》。数学控制与相关领域，3(4):447–466，2013。[21] Daizhan Cheng、Alessandro Astolfi 和 Romeo Ortega。《关于与端口控制哈密顿系统的反馈等价》。Systems & Control Letters，54(9):911–917，2005。[22] J.-M. Coron、L. Gagnon 和 M. Morancey。《线性化双线性一维薛定谔方程的快速稳定化》。J. Math. Pures Appl. (9)，115:24–73，2018。[23] Jean-Michel Coron。《控制与非线性》。第 136 卷。美国数学学会，2007。[24] Jean-Michel Coron。《控制系统的稳定化与非线性项》。载于《第八届国际工业与应用数学大会论文集》，第 17–40 页。北京高等教育出版社，2015。[25] Jean-Michel Coron。《有限时间稳定化》。法兰西公学院研讨会，2017 年 1 月。[26] Jean-Michel Coron 和 Brigitte d’Andréa Novel。《无阻尼旋转梁体的稳定化》。IEEE Trans. Automat. Control，43(5):608–618，1998。[27] Jean-Michel Coron、Amaury Hayat、Shengquan Xiang 和 Christophe Zhang。《线性化水箱系统的稳定化》。Archive for Rational Mechanics and Analysis，244(3):1019–1097，2022。

[28] Jean-Michel Coron、Long Hu 和 Guillaume Olive. 通过 Fredholm 反步变换对一般线性双曲平衡律进行有限时间边界稳定化. Automatica, 84:95–100, 2017. [29] Jean-Michel Coron 和 Qi Lü. 具有右侧 Neumann 边界控制的 Korteweg-de Vries 方程的局部快速稳定化 . Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 102(6):1080–1120, 2014. [30] Jean-Michel Coron 和 Qi Lü. Kuramoto-Sivashinsky 方程的 Fredholm 变换与局部快速稳定化. Journal of Differential Equations, 259(8):3683–3729, 2015. [31] Jean-Michel Coron 和 Hoai-Minh Nguyen. 非线性一维双曲系统的耗散边界条件：通过时滞系统方法得到的尖锐条件. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 47(3):2220–2240, 2015. [32] B Dehman、P Gérard 和 G Lebeau. 紧曲面上非线性薛定谔方程的稳定化与控制. Mathematische Zeitschrift, 254(4):729–749, 2006.[33] Maria Laura Delle Monache、Thibault Liard、Anaïs Rat、Raphael Stern、Rahul Bhadani、Benjamin Seibold、Jonathan Sprinkle、Daniel B Work 和 Benedetto Piccoli. 利用自动驾驶车辆消散交通波的反馈控制算法. Computational Intelligence and Optimization Methods for Control Engineering, pages 275–299, 2019. [34] Joachim Deutscher 和 Jakob Gabriel. 具有输入和输出时滞的耦合线性抛物型偏微分方程的 Fredholm 反步控制. IEEE Transactions on Automatic Control, 65(7):3128–3135, 2019. [35] Ines Feki、Aref Jeribi 和 Ridha Sfaxi. 关于非自伴解析算子的特征向量 Riesz 基及其应用. Linear and Multilinear Algebra, 62(8):1049–1068, 2014. [36] Michel Fliess、Jean Lévine、Philippe Martin 和 Pierre Rouchon. 非线性系统等价性与平坦性的李-巴克隆方法. IEEE Transactions on automatic control, 44(5):922–937, 1999. [37] Charles T Fulton 和 Steven A Pruess. 正则 Sturm-Liouville 问题的特征值与特征函数渐近. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 188(1):297–340, 1994. [38] Ludovick Gagnon、Amaury Hayat、Swann Marx、Christophe Zhang 和 Shengquan Xiang. Fredholm 反步变换的抽象框架：自伴情形. 2025. [39] Ludovick Gagnon、Amaury Hayat、Shengquan Xiang 和 Christophe Zhang. 临界算子的 Fredholm 反步法及其在线性化水波快速稳定化中的应用. 即将发表于 Ann. Inst. Fourier, 2022. [40] Ludovick Gagnon、Amaury Hayat、Shengquan Xiang 和 Christophe Zhang. 拉普拉斯算子的 Fredholm 变换与热方程的快速稳定化. Journal of Functional Analysis, 283 109664, 2022 12( ): .[41] Ludovick Gagnon、Pierre Lissy 和 Swann Marx. 用于退化抛物方程快速稳定化的 Fredholm 变换. SIAM Journal on Control and Optimization, 59(5):3828–3859, 2021. [42] Paola Goatin. 采用宏观方法利用受控车辆消散交通流中的走走停停波. IEEE Control Systems Letters, pages 1–1, 2024. [43] VN Gribov. 一种 Regge 子图技术. Sov. Phys. JETP, 26(2):414–423, 1968. [44] Scott Hansen 和 George Weiss. 关于算子 Carleson 测度判据的新结果. IMA Journal of Mathematical Control and Information, 14(1):3–32, 1997. [45] Amaury Hayat、Benedetto Piccoli 和 Sydney Truong. 利用环形道路上的单辆自动驾驶车辆消散交通拥堵. SIAM Journal on Applied Mathematics, 83(3):909–937, 2023. [46] Amaury Hayat 和 Peipei Shang. 具有任意摩擦和空间变化坡度的 Saint-Venant 方程的二次 Lyapunov 函数. Automatica, 100:52–60, 2019. [47] Long Hu、Florent Di Meglio、Rafael Vazquez 和 Miroslav Krstic. 同向与一般异向线性耦合双曲偏微分方程的控制. IEEE Transactions on Automatic Control, 61 3314, 2015 11 3301( ): – .[48] Falun Huang. 希尔伯特空间中线性动力系统指数稳定性的特征条件. Ann. of Diff. Eqs., 1:43–56, 1985. [49] A Intissar. 泛函分析与谱理论. Cépadues-éditions, 1997. [50] Stéphane Jaffard、Marius Tucsnak 和 Enrique Zuazua. 波动方程的奇异内部稳定. journal of differential equations, 145(1):184–215, 1998. [51] B Jakubczyk. 关于非线性系统等价性与线性化的评论. In Nonlinear Control Systems Design 1992, pages 143–147. Elsevier, 1993. [52] Tosio Kato. 线性算子扰动理论. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, 柏林, 1995. 1980年版重印. [53] Christopher M Kellett、Steven R Weller、Timm Faulwasser、Lars Grüne 和 Willi Semmler. 气候经济学中的反馈、动力学与最优控制. Annual Reviews in Control, 47:7–20, 2019.

[54] Daniel E Koditschek. 机械系统的自适应技术. Proc. 5th. 耶鲁大学会议, page pp. 259–265, 1987. [55] Vilmos Komornik. 线性分布参数系统的快速边界稳定化. SIAM journal on control and optimization, 35(5):1591–1613, 1997. [56] Q Kong 和 A Zettl. 正则 Sturm-Liouville 问题的特征值. Journal of differential equations, 131(1):1–19, 1996. [57] Miroslav Krstic 和 Andrey Smyshlyaev. 偏微分方程的边界控制：反步设计课程, 设计与控制进展第16卷. 工业与应用数学学会（SIAM）, 费城, PA, 2008. [58] Karl Kunisch、Gengsheng Wang 和 Huaiqiang Yu. 无限维线性控制系统可稳定性的频域判据. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 196:103690, 2025. [59] Irena Lasiecka 和 Roberto Triggiani. 偏微分方程控制理论：连续理论与逼近理论. 1：抽象抛物型系统，Encycl. Math. Appl. 第74卷. 剑桥：剑桥大学出版社, 2000. [60] Irena Lasiecka 和 Roberto Triggiani. 偏微分方程控制理论：连续理论与逼近理论. 2：有限时间范围上的抽象双曲型系统，Encycl. Math. Appl. 第75卷. 剑桥：剑桥大学出版社, 2000. [61] Jacques Louis Lions. 偏微分方程支配系统的最优控制, 第170卷. 施普林格, 1971. [62] Pierre Lissy 和 Claudia Moreno. 采用反步方法快速稳定退化抛物方程：边界控制作用于退化点的情形. Mathematical Control and Related Fields, pages 0–0, 2023. [63] Hanbing Liu、Gengsheng Wang、Yashan Xu 和 Huaiqiang Yu. 完全可稳定性的刻画. SIAM Journal on Control and Optimization, 60(4):2040–2069, 2022. [64] Yaxing Ma、Gengsheng Wang 和 Huaiqiang Yu. 用于稳定线性无限维系统的反馈律. Mathematical Control and Related Fields, 13(3):1160–1183, 2023. [65] Elaine Machtyngier 和 Enrique Zuazua. 薛定谔方程的稳定化. Portugaliae Mathematica, 51(2):243–256, 1994. [66] Philippe Martin、Richard M Murray 和 Pierre Rouchon. 平坦系统、等价性与反馈. In Advances in the control of nonlinear systems, pages 5–32. 施普林格, 2001. [67] Manfred Möller. 关于 Sturm—Liouville 算子下方无界性的研究. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics, 129(5):1011–1015, 1999. [68] Hoai-Minh Nguyen. 双线性薛定谔方程的快速稳定化与有限时间稳定化. arXiv预印本 arXiv:2405.10002, 2024. [69] Hoai-Minh Nguyen. 与强连续群相关的控制系统稳定化. arXiv预印本 arXiv:2402.07560, 2024. [70] A. Pazy. 线性算子半群及其在偏微分方程中的应用，应用数学科学第44卷. Springer-Verlag, 纽约, 1983. [71] Camille Pouchol 和 Emmanuel Trélat. 建模性状结构化种群的积分微分 Lotka-Volterra 系统中具有选择的全局稳定性. Journal of Biological Dynamics, 12(1):872–893, 2018. [72] Jan Prüss. 关于 c_0-半群的谱. Transactions of the American Mathematical Society, 284(2):847– 857, 1984. [73] J-P Raymond. 三维不可压 Navier–Stokes 方程的反馈边界稳定化. Journal de mathématiques pures et appliquées, 87(6):627–669, 2007. [74] Richard Rebarber. 证明振动系统一致稳定性的频域方法. In Analysis and Optimization of Systems: State and Frequency Domain Approaches for Infinite-Dimensional Systems: Proceedings of the 10th International Conference Sophia-Antipolis, France, June 9–12, 1992, pages 366–377. 施普林格, 2007. [75] Jeanne Redaud、Jean Auriol 和 Silviu-Iulian Niculescu. 使用 Fredholm 变换稳定双曲系统的输出反馈控制律. IEEE transactions on automatic control, 67 6666, 2022 12 6651( ): – .[76] David L Russell 和 George Weiss. 精确可观测性的一般必要条件. SIAM Journal on Control and Optimization, 32(1):1–23, 1994. [77] Marshall Slemrod. 希尔伯特空间中的线性稳定化问题. Journal of Functional Analysis, 11(3):334–345, 1972.

[78] Marshall Slemrod. 关于希尔伯特空间中线性控制系统的完全能控性与可稳定性的一则注记。*SIAM* 控制杂志，12(3):500–508，1974。[79] Emmanuel Trélat、Gengsheng Wang 和 Yashan Xu. 通过可观测性不等式刻画可控性与稳定化性质。纯粹与应用分析，2(1):93–122，2019。[80] John Tsinias. 稳定化的充分类李雅普诺夫条件。数学控制与信号系统，2(4):343–357，1989。[81] Marius Tucsnak 和 George Weiss. 算子半群的观测与控制。施普林格科学与商业媒体，2009。[82] Jose Manuel Urquiza. 无界控制算子的快速指数反馈稳定化。*SIAM*控制与优化杂志，43(6):2233–2244，2005。[83] Julie Valein 和 Enrique Zuazua. 一维网络上的波动方程稳定化。*SIAM*控制与优化杂志，48(4):2771–2797，2009。[84] Ambroise Vest. 半群框架下的快速稳定化。*SIAM*控制与优化杂志，51(5):4169–4188，2013。[85] F Viel、Fabrice Jadot 和 Georges Bastin. 输入约束下放热化学反应器的全局稳定化。$Automatica$，33(8):1437–1448，1997。[86] Joachim Weidmann. 常微分算子的谱理论，第1258卷。施普林格，2006。[87] George Weiss 和 Cheng-Zhong Xu. 通过反馈从对角生成元获得的半群生成元的特征值与特征向量。信息与系统通信，11(1):71–104，2011。[88] Shengquan Xiang. 热方程的定量快速稳定化与有限时间稳定化。*ESAIM*：控制、优化与变分法，30:40，2024。[89] Jerzy Zabczyk. 数学控制理论。施普林格，2020。[90] Christophe Zhang. 标量反馈下的一维线性输运方程内部快速稳定化。数学控制与相关领域，12(1):169–200，2022。[91] Enrike Zuazua. 非线性边界反馈对波动方程的一致稳定化。*SIAM*控制与优化杂志，28(2):466–477，1990。