arXiv:2603.04036v1 [physics.optics] 4 Mar 2026

用于设计产生指定辐照度分布的自由曲面折射面的二阶支撑二次曲面法

Albert A. Mingazov[a, b], Dmitry A. Bykov[a, b], Evgeni A.Bezus[a, b], Leonid L. Doskolovich[a, b]

[a]俄罗斯萨马拉国立研究大学，*Moskovskoye shosse 34*号，萨马拉，*443086*，俄罗斯[b]图像处理系统研究所，国家研究中心“库尔恰托夫研究所”，*Molodogvardeyskaya*街*151*号，萨马拉，*443001*，俄罗斯

摘要

我们研究了一个逆问题：计算一种折射面，使准直入射光束在远场产生给定辐照度分布。该问题可表述为具有二次代价函数的质量输运问题（MTP）。为求解此问题，我们提出一种支撑二次曲面法（SQM），将二次曲面参数的计算转化为凸函数的最小化问题。我们得到了该函数二阶导数的简单解析表达式，因此可以使用二阶优化方法计算二次曲面参数。由此，我们将所提出的方法称为二阶 SQM。通过设计多个能够产生复杂辐照度分布的光学表面，我们展示了这种方法的高效率。我们还研究了将二阶 SQM 应用于由具有非二次代价函数的 MTP 描述的非成像光学问题。

关键词：非成像光学、自由曲面光学、支撑二次曲面法、辐照度分布

1. 引言

根据在某一区域内生成给定辐照度分布的条件，计算折射或反射光学表面的问题，在各种

照明和背光系统的设计中有许多重要的实际应用 [1, 2, 3, 4]。这一问题属于非成像光学中的逆问题，通常采用几何光学近似求解。解决这一问题最通用、应用最广泛的方法之一，是所谓的支撑二次曲面法（SQM） [5, 6, 7, 8, 9, 10]。一般而言，SQM 包括以下步骤：(1) 将待生成的辐照度分布近似为离散分布，即有限个点的集合；(2) 用特殊的参数形式表示光学表面，该形式对应于一组将入射光束聚焦到离散分布各点的二次曲面的上包络或下包络；(3) 根据聚焦点处形成所需辐照度值的条件，采用特定方法优化二次曲面参数。根据所求解的问题，可使用旋转抛物面 [5, 6], 、椭球面和旋转双曲面 [11, 12], ，以及更复杂的曲面 [13, 14] 作为二次曲面。

在下文所考虑的问题中，需要计算一个折射面，使其对准直入射光束产生规定的远场辐照度分布（或给定的辐射强度分布）。此时二次曲面是“退化的”，并由平面 [15]表示。这些平面的取向使得入射光束在折射后被重新导向目标区域中的各点。决定该区域各点辐照度值的二次曲面参数，是各平面到坐标原点的距离。

SQM 在计算光学表面的问题中效率最高，这类问题可表述为具有特定代价函数的蒙日–康托罗维奇质量传输问题 [9, 16]。在这种情况下，构成光学表面的二次曲面参数的计算可归结为求一个关于二次曲面参数的凹函数或凸函数的极值 [9]。由于文献 [10], 中指定的函数是由质量输运问题（MTP）的拉格朗日泛函推导而来，下文将该函数称为修正拉格朗日函数（MLF）。需要指出的是，该函数的梯度具有简单的解析表达式，因此可以采用各种梯度法来求得 MLF 的极值（即计算二次曲面参数） [9, 10]。此外，由于待优化函数具有凹性（或凸性），其极值至多只有一个，且只能是其全局最大值（或最小值）。由于梯度法属于一阶优化方法，SQM 的相应变体 [9,10] 可称为一阶支撑二次曲面法。

许多重要的光学表面设计逆问题都可表述为具有二次代价函数的 MTP。具体而言，以下问题均属于此类：计算一种折射（或反射）表面，使准直入射光束在远场产生给定辐照度分布 [15]，；计算用于所谓准直光束整形的双反射镜系统 [7]，；以及计算光场的程函函数，使其在近轴近似下聚焦到给定区域 [17]。具有二次代价函数的 MTP 具有若干独特性质，这些性质与最优传输计划的存在性及形式有关 [18]。因此，可以设想，针对上述光学表面计算逆问题，可开发出特殊的 SQM 变体，其效率高于已知的一阶 SQM。尤其值得关注的是开发二阶 SQM，通过采用二阶优化方法计算二次曲面参数来实现这一方法。

本文以计算折射面为例，该折射面可使准直入射光束在远场产生给定辐照度分布。我们首次得到了依赖于二次曲面参数的修正拉格朗日函数二阶导数的简洁解析表达式。这些表达式可高效求值，因此能够采用二阶优化方法进行折射面设计。值得注意的是，尽管修正拉格朗日函数中的变量数量可达数十万，该函数的海森矩阵却是对称稀疏矩阵。这使得在变量数量庞大的问题中应用二阶方法时，可以避免其常见的内存问题。所展示的折射面计算示例表明，二阶方法具有良好的性能。特别是，针对在正方形区域内生成均匀辐照度分布这一“基准”问题，结果表明，采用海森矩阵的信赖域方法计算折射面，所需计算时间比不使用海森矩阵（即仅使用梯度）的方法缩短了两个数量级。更复杂的设计示例也展示了二阶 SQM 的良好性能，包括在零背景上生成箭头形状的均匀辐照度分布，以及生成 A. Einstein 灰度肖像的问题。

需要指出的是，为生成箭头图像而设计的折射面是连续且分段光滑的。该曲面的分段光滑形式源于

这样一个事实：在该问题中，不存在从入射光束区域到箭头形目标区域的连续可积光线映射；后者是一个边界不光滑的非凸区域。需要注意的是，此类问题（在零背景上的不连通或非凸区域内生成均匀的辐照度分布）无法采用基于数值求解椭圆型非线性微分方程（NDE）的广泛使用的光学表面设计方法来解决 [1, 19, 20, 21]。这是因为，将设计问题表述为非线性微分方程，假设了所计算曲面的光滑性。本文所研究的 SQM 的一个重要优势在于，它不受这一约束的限制。

还需注意的是，除了计算由具有二次代价函数的 MTP 表示的折射面这一问题外，所提出的方法也可用于计算由具有非二次代价函数的一般形式的 MTP 描述的光学表面 [9, 16]。在这种情况下，基于一般形式的 MTP 逐次逼近为具有二次代价函数的 MTP，以迭代方式求解该问题，并使用二阶 SQM 求解这些 MTP。本文通过一个具有对数代价函数的 MTP 示例说明了这一方法 [11], ，该示例对应于在球面入射光束情况下计算能够产生给定远场辐照度分布的折射面。

2. 折射面计算问题

2.1. 正问题与逆问题

考虑这样一个问题：在入射光束具有平面波前的情况下，计算能够产生给定远场辐照度分布的折射面 R 。假设折射面分隔折射率分别为 n_1 和 n_2 的两种介质 $n_1 > n_2$。平面光束沿方向 $\vec{e}_z = (0, 0, 1)$ 传播，并具有特定的辐照度分布 $I(\boldsymbol{u})$ $\boldsymbol{u} \in G$ ，该分布位于平面 $z = 0$ 上，其中 $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$ 是该平面内的笛卡尔坐标（图 1）。

我们首先考虑所谓的正问题，该问题在于针对给定的折射面，计算目标平面 $z = f$ 上所产生的辐照度分布。一条从点$(u_1, u_2, 0)$出发、沿方向 $\vec{e}_z = (0, 0, 1)$的光线被曲面 $z = R(\boldsymbol{u})$折射，并获得某一方向 $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$，该方向由斯涅尔定律根据

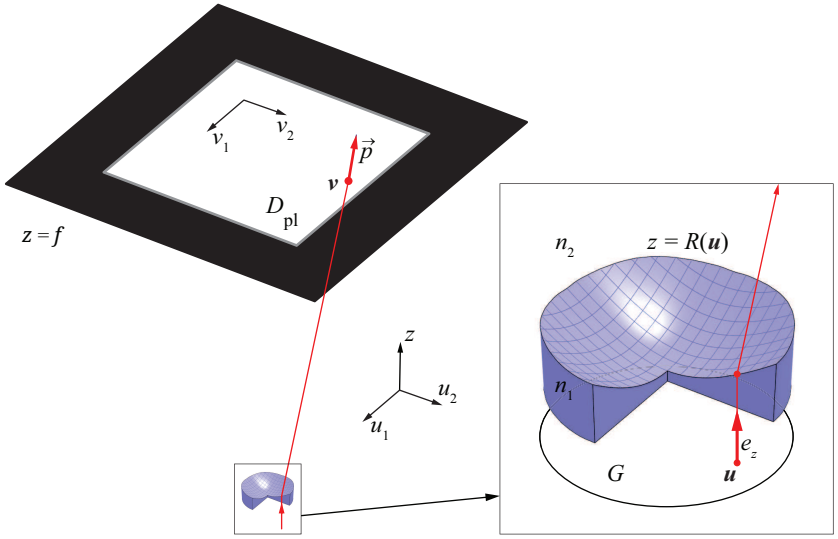

图 1：问题的几何构型。

函数 $R(\boldsymbol{u})$的偏导数确定。该折射光线的方向在目标平面 $z = f$ 上确定一点 $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$，为

$$\boldsymbol{v}(\vec{p}) = \left(\frac{p_1 f}{p_3}, \frac{p_2 f}{p_3} \right). \tag{1}$$

方程 (1) 是在远场近似下写出的。在此近似中，我们忽略光学表面相对于到目标平面的距离f 而言的尺寸，并假设经曲面折射的光线均来自点 (0, 0, 0)；所研究的曲面位于该点附近。方程 (1) 定义了一个光线映射 γ_{pl}: $G \to D_{\mathrm{pl}}$，其中 D_{pl} 是平面 $z = f$上的某个区域。在该区域内，会生成辐照度分布$E(\boldsymbol{v})$，其由光通量守恒定律定义

$$\int_{\gamma_{\mathrm{pl}}^{-1}(Q)} I(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\boldsymbol{u} = \int_{Q} E(\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\boldsymbol{v} \tag{2}$$

对于任意 Borel 集 $Q \subset D_{\mathrm{pl}}$。该定律也可以用以下等价的微分形式 [7]来表述：

$$I(\boldsymbol{u}) = E(\gamma_{\mathrm{pl}}(\boldsymbol{u})) \cdot J_{\gamma_{\mathrm{pl}}}(\boldsymbol{u}),$$

其中， $J_{\gamma_{\rm pl}}(\boldsymbol{u})$ 是在点 $\boldsymbol{u}$ 处计算的映射 $\gamma_{\rm pl}$ 的雅可比行列式。

现在我们来考虑计算折射光学元件的逆问题。假设给定了总光通量相同的分布 $I(\boldsymbol{u})$ 和 $E(\boldsymbol{v})$：

$$\int\limits_G I(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\boldsymbol{u} = \int\limits_{D_{\rm pl}} E(\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}. \tag{3}$$

因此，要解决的逆问题是计算曲面 $z = R(\boldsymbol{u})$，使其对应的光线映射 $\gamma_{\rm pl}$ 满足式 (2)。

2.2. 折射曲面的表示与质量输运问题

本小节将考虑将折射曲面表示为平面族的包络面；这种表示是支撑二次曲面法的固有组成部分。为此，我们先写出一个平面的方程，该平面将入射光束折射至方向 $\vec{p} = (v_1, v_2, f)/\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + f^2}$，并“瞄准”平面 $z = f$ 上的点 (v_1, v_2, f)：

$$z = \mathcal{K}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + w. \tag{4}$$

这里， w 是任意常数，且

$$\mathcal{K}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \frac{n_2(v_1 u_1 + v_2 u_2)}{n_1\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + f^2} - n_2 f}. \tag{5}$$

这些方程可由斯涅尔定律轻易得出，由此可知，所求平面的法线平行于向量 $\rightarrow \quad \rightarrow n_1 e_z - n_2 p$。

值得注意的是，式（5）可以改写为点积。事实上，我们在平面 $z = f$ 中引入新坐标 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$：

$$\begin{cases} x_1(\boldsymbol{v}) = \dfrac{n_2 v_1}{n_1\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + f^2} - n_2 f}, \\[2ex] x_2(\boldsymbol{v}) = \dfrac{n_2 v_2}{n_1\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + f^2} - n_2 f}. \end{cases} \tag{6}$$

在这些坐标下，式 (4) 可简化为以下形式：

$$z = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u} + w. \tag{7}$$

接下来，我们将使用坐标 $\boldsymbol{x}$ ，而不是坐标 $\boldsymbol{v}$。因此，我们将研究分布 $L(\boldsymbol{x})$，而非所需的辐照度分布 $E(\boldsymbol{v})$；两者之间的关系如下：

$$E(\boldsymbol{v}) = L(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{v})) \cdot J_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{v}),$$

其中， $J_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{v})$ 是在点 $\boldsymbol{v}$ 处计算的变换 (6) 的雅可比行列式。需要指出的是，所需的分布 $E(\boldsymbol{v})$ 定义在某个区域 D_{pl} 内。坐标变换 (6) 将该区域变换为新的区域 D，函数 $L(\boldsymbol{x})$ 定义在该区域上。考虑到这一点，我们可以将光通量守恒定律 (2) 改写为

$$\int\limits_{\gamma^{-1}(Q)} I(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\boldsymbol{u} = \int\limits_{Q} L(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \tag{8}$$

其中， $\gamma\colon G \to D$ 是用坐标 $\boldsymbol{x}$ 表示的光线映射（即 $\boldsymbol{x} = \gamma(\boldsymbol{u})$），而 Q 是 D 的任意博雷尔子集。

将支撑二次曲面法应用于所考虑的问题时，应将使入射光束沿目标区域各点方向发生折射的平面 (7) 视为二次曲面。在这种情况下，折射面 $z = R(\boldsymbol{u})$ 表示为关于参数 $\boldsymbol{x} \in D$ [5, 6, 7, 9, 10, 17, 22] 的平面族的“上”包络面：

$$R(\boldsymbol{u}) = \max_{\boldsymbol{x}\in D}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u} + w(\boldsymbol{x})). \tag{9}$$

相应地，光线映射可写为

$$\gamma(\boldsymbol{u}) = \operatorname*{argmax}_{\boldsymbol{x}\in D}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u} + w(\boldsymbol{x})). \tag{10}$$

注意，式 (9) 中的最大值在偏导数为零的点处取得，因此可以将逆映射写为

$$\gamma^{-1}(\boldsymbol{x}) = -\nabla_{\boldsymbol{x}} w. \tag{11}$$

让我们回到折射面计算问题，该问题旨在求得满足式（8）条件的光线映射 γ。正如参考文献 [15], 所示，这种映射可以通过求解以下变分问题得到：

$$\mathcal{F}(T) = \int\limits_{G} \big(\boldsymbol{u}\cdot T(\boldsymbol{u})\big) I(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\boldsymbol{u} \to \max, \tag{12}$$

其中，最大值需在满足光通量守恒定律的映射 T 中求得

$$I(\boldsymbol{u}) = L(T(\boldsymbol{u})) \cdot J_T(\boldsymbol{u}), \tag{13}$$

其中， $J_T(\boldsymbol{u})$ 是在点 $\boldsymbol{u}$ 处计算的映射 T 的雅可比行列式。需要再次强调，T 表示的映射是满足光通量守恒定律（13）的任意映射，但不一定使泛函（12）最大化。因此，上文引入的映射 γ 是使该泛函最大化的特定映射 T。

由公式（12）和（13）定义的变分问题是一个质量输运问题，其代价函数表示为点积。这类问题很容易改写为具有二次代价函数 $\mathcal{K}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{x}\|^2$ [15] 的质量输运问题；不过，对我们而言，采用公式（12）形式的 MTP 更为方便。本文下文提及二次代价函数时，均指以点积形式表示的代价函数。

3. 支撑二次曲面法

使用支撑二次曲面法求解折射面计算问题时，该问题采用半离散形式 [9, 10]，表述，其中区域 D 近似为离散点集 $\{\boldsymbol{x}_j\}_{j=1}^n$，而所需的辐照度分布 $L(\boldsymbol{x})$ 则由离散值集 $L_j,\ j = 1, n$ 取代。在这种情况下，公式（9）的包络面由 n 个平面（7）片段构成的曲面取代，因此具有以下形式：

$$R(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) = \max_{j=\overline{1,n}} (\boldsymbol{x}_j \cdot \boldsymbol{u} + w_j), \tag{14}$$

其中 $\boldsymbol{w} = (w_j)_{j=1}^n$ 是由 n 个分量组成的向量，我们将这些分量称为点 $\boldsymbol{x}_j$ 的权重。式（14）的表示定义了将区域 G（入射光束的定义域）划分为若干子集（多边形） $C^{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{x}_j)$，这些子集由以下条件定义

$$C^{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{x}_j) = \left\{ \boldsymbol{u} \;\middle|\; \boldsymbol{x}_j \cdot \boldsymbol{u} + w_j \geq \boldsymbol{x}_k \cdot \boldsymbol{u} + w_k,\ \ \forall k = \overline{1, n} \right\}. \tag{15}$$

在 $\boldsymbol{u} \in C^{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{x}_j)$ 处，曲面 $z = R(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w})$ 与平面 (7) 重合，该平面将入射光束折射至点 $\boldsymbol{x}_j$，因此，光线映射

由曲面 R 实现，其形式如下：

$$T^{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{x}_j, \text{ where } j = \operatorname*{argmax}_{k=\overline{1,n}}(\boldsymbol{x}_k \cdot \boldsymbol{u} + w_k). \tag{16}$$

由于以某种方式调整权重后，按此方式定义的子集 $C^{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{x}_j)$ 与下文中的加权沃罗诺伊单元 [23, 24], 等价，因此我们将区域 $C^{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{x}_j)$ 称为加权沃罗诺伊单元。

若采用表示式 (14)，则折射面计算问题可归结为寻找一个权重向量 $\boldsymbol{w}$ ，以生成给定的离散分布：

$$\int\limits_{C^{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{x}_j)} I(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\boldsymbol{u} = L_j, \quad \forall j = \overline{1,n}. \tag{17}$$

与参考文献 [9, 10], 类似，可以证明，权重 $\boldsymbol{w}$ 的计算可归结为最小化以下凸函数：

$$h(\boldsymbol{w}) = \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{C^{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{x}_j)} \big(\boldsymbol{x}_j \cdot \boldsymbol{u} + w_j\big) I(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\boldsymbol{u} - \sum_{j=1}^{n} w_j L_j. \tag{18}$$

需要指出的是，函数 h 是对质量输运问题 (12)、(13) 的拉格朗日泛函（即带等式约束的优化问题）进行修正后得到的，正是引言中提到的修正拉格朗日函数。因此，对于使函数 (18) 取得最小值的最优权重集合 $\boldsymbol{w}$ ，映射 $T^{\boldsymbol{w}}$ [（见式 (16)）] 可近似表示连续质量输运问题 (12)、(13) 的解 γ 。

同样需要指出的是，正如引言中所讨论的，除所考虑的折射面计算问题外，非成像光学中的其他一些重要问题也可表述为具有二次代价函数（12）、（13）的MTP。这些问题的求解同样归结为求形如（18）的函数的极值，因此，下文所考虑的用于求解该优化问题的数值方法具有相当的通用性。

函数(18)取决于有限个数值 $\boldsymbol{w} = (w_j)_{j=1}^{n}$，因此，为了求解最小化问题 $h(\boldsymbol{w}) \to \min$，可以使用标准数值方法。为了高效地应用这些方法，必须能够

计算待最小化函数的函数值以及其导数值。如参考文献 [9, 10, 24], 所示, 这些导数可以用以下简单公式计算:

$$\frac{\partial h}{\partial w_j} = S_j(\boldsymbol{w}) - L_j, \tag{19}$$

其中 $S_j(\boldsymbol{w}) = \int_{C^{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{x}_j)} I(\boldsymbol{u})\mathrm{d}\boldsymbol{u}$。该公式使我们能够使用所谓的一阶优化方法来求出使函数 h达到最小值的权重集合 $\boldsymbol{w}$。显然，在最小值点处导数为零，恰好给出 $\boldsymbol{w}$的取值；这些取值能够生成所规定的离散分布 [（见式（17））]。正如我们在引言中所指出的，如果使用某种一阶优化方法来最小化函数 $h(\boldsymbol{w})$，那么相应折射面的计算方法可称为一阶支撑二次曲面法。接下来，我们将考虑使用更先进的二阶方法，这些方法需要计算由二阶导数 $\partial^2 h/(\partial w_k \partial w_j)$构成的海森矩阵。

4. 函数 h的海森矩阵的计算

本节将给出函数 h 的二阶导数的显式表达式，这些表达式以对加权沃罗诺伊单元（15）边界的积分表示。该结果由以下定理给出。

定理4.1。 函数 h 的二阶导数形式如下

$$\frac{\partial^2 h}{\partial w_k \partial w_j} = \begin{cases} \frac{1}{\rho_{jk}} \int\limits_{\Delta_{jk}} I(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}l, & if\ k \neq j; \\ -\sum\limits_{l \neq j} \frac{1}{\rho_{jl}} \int\limits_{\Delta_{jl}} I(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}l, & for\ k = j, \end{cases} \tag{20}$$

其中， Δ_{jk} 是单元 $C^{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{x}_j)$ 与 $C^{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{x}_k)$之间的公共边界， $\rho_{jk} = \rho(\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{x}_k)$ 是点 $\boldsymbol{x}_j$ 与 $\boldsymbol{x}_k$之间的距离。如果这些单元没有公共边界，则在 Δ_{jk} 上的积分等于零。

证明。 为了求函数 h 的二阶导数，我们对表达式 (19) 关于 w_k 求导。 h 的二阶导数与函数 $S_j(\boldsymbol{w})$ 的一阶导数相同，后者是一个积分

在沃罗诺伊单元上的积分。我们考虑 $k \neq j$ 的情形，并将该情形的证明分为三个部分。

1. 首先注意，当权重 w_k 发生变化时，单元 $C^{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{x_j})$ 要么保持不变，此时导数为零（当单元 $C^{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{x_j})$ 与 $C^{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{x_k})$ 没有公共边界时，就会出现这种情况）；要么其一条边发生平行移动。我们用函数 $t_{jk}(w_k)$ 表示这段移动的距离，该函数取决于 w_k。通过写出边界的显式方程，可以轻松计算这个函数。假设第 k 个权重的值从 w_k^0 变为 w_k。那么，根据加权沃罗诺伊单元（15）的定义，单元 $C^{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{x_j})$ 的边移动的距离为

$$t_{jk}(w_k) = \frac{w_k - w_k^0}{\rho_{jk}}.$$

通过求导可得，边界移动距离 $t_{jk}(w_k)$ 对权重 w_k 的导数为

$$\frac{\mathrm{d}t_{jk}}{\mathrm{d}w_k} = \frac{1}{\rho_{jk}}.$$

2. 下面考虑一个更一般的问题：计算多边形的加权面积关于其一条边平行移动的导数。假设 W 是平面上的一个多边形，l 是包含其一条边的直线，l_t 是一条与 l 平行且距其 t 的直线，而 W_t 是将 W 上位于 l 的边移动到直线 l_t 后得到的多边形。图 2 展示了平行移动的几何关系。设 $S(t) = \int_{W_t} I(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\boldsymbol{u}$ 为多边形 W_t 的加权面积。那么，我们的目标是计算导数 $S'(0)$。

我们来考虑增量 $\Delta S = S(t) - S(0)$。从几何角度看，它是梯形$ACDF$的加权面积（权重为 I）。它等于矩形 $ABEF$的面积减去三角形 ABC 和 FED的面积。我们来考虑三角形ABC，并注意到，对于该三角形的加权面积，可以写成

$$|S_{ABC}| = \left| \int\limits_{ABC} I(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\boldsymbol{u} \right| \leq \int\limits_{ABC} |I(\boldsymbol{u})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{u} \leq$$

$$\leq \max_{ABC} |I(\boldsymbol{u})| \cdot \int\limits_{ABC} \mathrm{d}\boldsymbol{u} = \frac{1}{2} \max_{ABC} |I(\boldsymbol{u})| \cdot t^2 \tan\beta = \mathrm{o}(t).$$

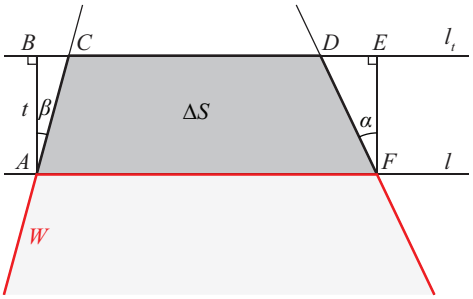

图2：多边形 W 以及因其中一边平移而产生的面积增量 ΔS 。

类似地， $S_{FED} = \mathrm{o}(t)$。对于足够小的位移 t，我们可以认为函数 I 沿垂直于边 AF 的方向上的函数值变化可以忽略不计。于是可以写成

$$S(t) - S(0) = t \cdot \int_{AF} I(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}l + \mathrm{o}(t),$$

即，

$$S'(0) = \int_{AF} I(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}l.$$

3. 让我们回到 $k \neq j$情形下沃罗诺伊单元加权面积导数的计算。利用微分的链式法则，我们得到：

$$\frac{\partial S_j}{\partial w_k} = \frac{\partial S_j}{\partial t_{jk}} \cdot \frac{\mathrm{d}t_{jk}}{\mathrm{d}w_k} = \int_{\Delta_{jk}} I(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}l \cdot \frac{1}{\rho_{jk}},$$

这就证明了定理在 $j \neq k$情形下的第一部分。

接下来考虑 $j = k$ 的情况并计算导数 $\partial S_j/\partial w_j$。为此，我们注意到，如果将相同的值 ε 加到所有权重 $w_1, \ldots, w_n$ 上，单元划分将不会改变 [参见式 (15)]。因此，对于任意 ε，以下等式成立：

$$S_j(w_1 + \varepsilon, \ldots, w_n + \varepsilon) = S_j(w_1, \ldots, w_n).$$

对该表达式关于 ε 求导，并在 $\varepsilon = 0$ 处计算结果，可得

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial S_j}{\partial w_k} = 0,$$

由此可以表示 $\partial S_j / \partial w_j$，并得到定理的第二个结论。

□

注意，根据公式（20），函数 h 的海森矩阵是稀疏的，因为大多数加权沃罗诺伊单元没有公共边界。这一事实对于应用二阶方法很重要，因为在变量数量较多的情况下，使用此类方法的主要障碍之一是存储海森矩阵所需的内存过大。

5. 数值示例

本节将给出若干示例，以展示所提出的二阶 SQM 的性能。为计算光学元件（折射面），我们将采用使用海森矩阵的信赖域方法来寻找函数（18）的最小值。我们将使用该方法的标准 MATLAB 实现（函数 *fminunc*）。为进行优化，需要计算优化函数（18）的值、其梯度（19）以及海森矩阵（20）。在下文所考虑的示例中，假设入射光束的辐照度分布在区域 G 内是均匀的（即 $I(\boldsymbol{u}) = \text{const}$）。在这种情况下，一旦找到与权重向量 $\boldsymbol{w}$ 相对应的加权沃罗诺伊图，优化函数（18）的值、梯度（19）和海森矩阵（20）便可解析求得。需要指出的是，存在计算加权沃罗诺伊图 [25], 的高效方法，能够获得沃罗诺伊单元顶点的坐标。具体而言，一种常用算法基于计算三维空间中一组点的凸包，因此其计算复杂度为 $O(n \log n)$ [25]。在找到沃罗诺伊图之后，对于均匀入射光束的情形（$I(\boldsymbol{u}) = \text{const}$），优化函数（18）的值通过多边形（加权沃罗诺伊单元）的面积以及这些多边形的重心来表示，而这些量均可解析计算 [26]。每个加权沃罗诺伊单元的面积还给出了

梯度的一个分量，依据公式（19）。最后，根据公式（20），海森矩阵通过加权 Voronoi 单元边的长度来表示。

需要指出的是，当初始近似值接近极值时，二阶方法的效率最高。因此，我们将采用所谓的多尺度方法 [24], ，具体如下：在逐渐加密的网格上依次求解，并将前一步的解作为下一步的初始近似值。下面对后续计算中使用的多尺度方法作更正式的说明。每一步中，连续区域 D_{pl} 都由一组点 $\boldsymbol{v}_j$ 取代，这些点是方形网格的节点；网格尺寸为$N \times N$，覆盖 D_{pl}。在每个点处，我们定义所需的能量值E_j。在坐标 $\boldsymbol{x}$中，生成的分布由另一组点 $\boldsymbol{x}_j$ [定义（见式（6））] ，其能量值相同 $L_j = E_j$。应用信赖域方法后，我们得到权重 w_j。随后进入下一步，将数量 N 增加 10%，并通过对前一步的（$\boldsymbol{x}_j$， w_j）数据进行插值，获得权重的初始近似值。以此近似值为基础，我们再次在细化后的网格上应用信赖域方法。重复这一网格细化过程，直到所计算的元件以所需的质量生成规定的分布。下一小节中，我们将这种多尺度方法与传统的“单步方法”进行比较。

5.1. 照亮一个正方形区域

在本小节中，我们将考虑如何计算折射元件（元件的折射率为 $n_1 = 1.5$，周围介质的折射率为 $n_2 = 1$），使其在距离为 $z = f = 1000$ mm 的远场平面上产生均匀照度分布，分布形状为边长 D_{pl} 1000 mm 的正方形。我们假设入射到该元件上的准直光束具有圆形横截面，半径为 $R = 1\,\mathrm{mm}$。在所选参数下，可以忽略入射光束的尺寸，因此可以采用上文讨论的远场近似。

表1展示了使用不同数值方法和不同网格尺寸最小化函数（18）所需的时间。首先考虑不采用多尺度方法求解问题的情况。从表格中可以明显看出，未提供海森矩阵时，信赖域方法只能处理网格尺寸不大于 20×20 的网格，因此不适用于具有实际意义的问题。然而，当我们计算

海森矩阵并通过公式（20）将其传递给信赖域方法后，计算速度提升了几个数量级，使得网格尺寸能够达到100×100。表1最后一列展示了拟牛顿法 BFGS 的结果，其中海森矩阵通过数值方法估算（因此未使用公式（20））。与提供了海森矩阵的信赖域方法相比，拟牛顿法在网格较小时稍慢，但在网格尺寸为 100×100 时速度则快了三倍以上。

表格中最重要的是最后一行，其中给出了使用多尺度方法求解最小化问题 $h(\boldsymbol{w}) \to \min$ 所需的时间。可以看到，拟牛顿法的求解速度提升了一个数量级，而配备海森矩阵的信赖域方法效果最佳，仅需 8 秒即可求解所考虑的问题（即比使用 BFGS 方法快 10 倍）。这是因为多尺度方法给出了良好的初始近似，且该近似与极值相对接近，因此目标函数的二阶近似变得适用。因此，将利用海森矩阵的二阶方法与所提出的多尺度方法结合使用是有意义的，这种做法与其他方法相比可带来数个数量级的加速。

表1：使用不同数值方法求解优化问题 $h(\boldsymbol{w}) \to \min$ 所需的时间

点数	Time, s		
	信赖区域	信赖区域 使用海森矩阵	拟牛顿法 (BFGS)
10×10	19	0.29	0.58
15×15	123	0.63	1.3
20×20	524	1.2	3.6
50×50	—	40	64
100×100	—	1887	541
100×100, 多尺度	—	8.4	83

采用多尺度方法和信赖域方法计算的表格最后一行所对应的光学元件如图 3(a) 所示。该设计元件的尺寸如下：半径$R = 1$mm，厚度为 0.494 mm。计算该元件曲面时使用了公式 (9)，其中函数 $w(\boldsymbol{x})$ 是通过对权重 $w_j = w(\boldsymbol{x}_j)$ 进行样条插值计算得到的。该元件生成的辐照度分布

如图 3(b) 所示。该分布采用内部实现的光线追迹技术，使用 10^7 条光线进行计算。考虑菲涅耳损耗后计算得到，该设计元件的光效（即元件将入射光束的能量导向目标方形区域的比例）为 91%。生成的分布与所需均匀分布之间的归一化均方根偏差为 5.1%，这表明所提出的二阶 SQM 性能优异。

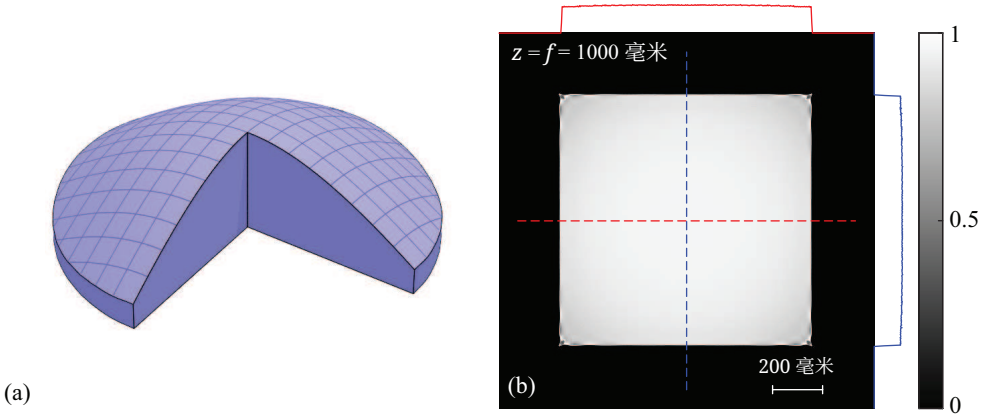

图 3：设计的元件 (a) 及生成的归一化辐照度分布 (b)。(b) 中还显示了沿虚线的横截面。

5.2. 照亮非凸区域并生成灰度图像

在本小节中，我们考虑两个更复杂的示例。第一个示例是设计一个照射箭头形区域的光学元件（见图 4）。我们采用了以下设计参数：到目标平面的距离为 $f = 1000\,\text{mm}$，箭头沿水平方向的“跨度”为 1000 mm，箭头直线宽度为 170 mm，入射光束半径为 $R = 1$ mm，多尺度过程最后一步中表示箭头的点数为 62000。利用二阶 SQM 计算光学表面约耗时 21 分钟。所设计的元件如图 4(a) 所示，其半径为 1 mm，厚度为 0.686 mm。使用包含 10^7 条光线的光线追迹技术计算得到的辐照度分布如图 4(b) 所示。计算所得元件的光效为 91%，而生成分布与所需分布之间的归一化均方根偏差为 10.8%。通过在设计中使用更多的

点 N，可以获得更小的均方根偏差。需要指出的是，所考虑的箭头形区域是非凸的，因此光线映射 $G \to D_{\mathrm{pl}}$ 是不连续的。因此，图 4(a) 所示的所设计折射表面并不光滑，但具有连续性且为分段光滑。该示例表明，与广泛使用的基于求解椭圆型非线性微分方程的方法不同，所述方法在这种情况下仍然适用；后者需要引入非零背景才能应用 [1, 19, 20, 21]。

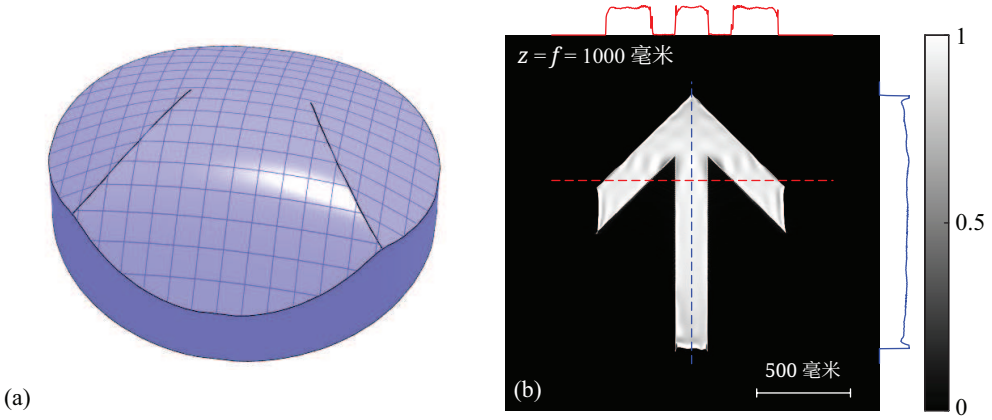

图4：设计的元件 (a) 以及在平面 $z = f = 1000$毫米上生成的归一化箭头形辐照度分布。图中还显示了沿虚线的横截面 (b)。

作为最后一个示例，我们设计了一个能够生成复杂灰度图像的元件，即一张 A. Einstein 的照片（见图 5）。假设在 $z = f = 1000$mm 平面上生成的图像尺寸为 500 mm。其他参数如下：入射光束半径 $R = 1$mm，最后一步的点数为 $560^2 = 313600$。与之前一样，在多尺度过程的每一步中，我们都使用均匀正方形网格；然而，每个点所需的能量 L_j 各不相同，因为必须生成非均匀分布。在每一步中，L_j 的取值均由经过适当缩放的原始图像的像素亮度值确定。元件计算耗时 85 分钟。设计的光学元件（半径 1 mm，厚度 0.248 mm）及生成的辐照度分布见图 5。计算得到的元件光效为 95%，归一化均方根误差为 9.6%。这个示例表明，所提出的方法能够生成相当复杂的

辐照度分布。

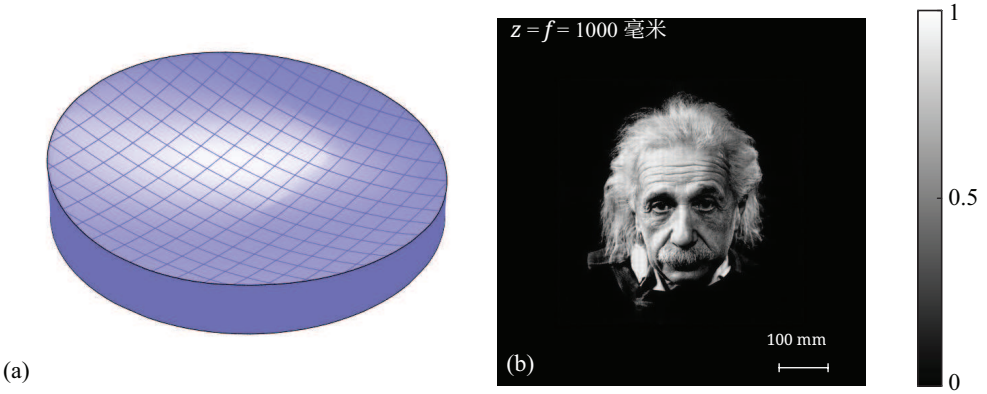

图5：设计元件（a）以及在平面 $z = f = 1000$mm处生成的归一化灰度辐照度分布（b）。

上述示例表明，在折射面计算问题中，所提出的二阶 SQM 具有很高的性能。需要指出的是，只需进行最少的修改，该方法就可以应用于其他几个代价函数同样为二次函数的非成像光学问题，即准直光到远场反射器设计问题，以及用于准直光束整形的镜面对设计。若干近轴问题（例如程函函数的计算）也可以表述为具有二次代价函数的 MTP，因此能够采用所提出的二阶方法求解。有趣的是，二阶 SQM 也可应用于某些具有非二次代价函数的问题，正如下文将要展示的。

6. 应用于具有非二次代价函数的非成像光学问题

在前文讨论的二阶支撑二次曲面法中，我们假设光学表面的计算问题可以表述为一个具有二次代价函数的 MTP。本节将讨论这样一种情况：光学表面的计算问题由具有任意非二次代价函数 $\mathcal{K}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x})$ 的 MTP 描述。文献 [9] 列出了可表述为具有不同代价函数的 MTP 的光学表面设计逆问题。对于非二次

代价函数，会出现具有曲线边界的“广义”沃罗诺伊单元 $C^w(\boldsymbol{x}_j)$ [参见公式 (15)]，而非直线边界单元；这使得海森矩阵难以高效、准确地计算。不过，正如本节将要说明的，求解具有非二次代价函数的 MTP，可以转化为依次求解若干个具有二次代价函数的 MTP。在这种方法中，每一步都用一个标量积来近似非二次代价函数$\mathcal{K}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x})$。

6.1. 代价函数的二次近似

假设计算光学元件的问题可以重述为一个具有某种非二次代价函数 $\mathcal{K}$ 的 MTP。在这种情况下，需要找到一个映射 $P\colon\ D \to G$，使泛函达到最大值

$$\mathcal{F}(P) = \int\limits_D \mathcal{K}(P(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}) L(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \to \max \tag{21}$$

在满足条件 (8) 的类似条件的映射中

$$\int\limits_W I(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\boldsymbol{u} = \int\limits_{P^{-1}(W)} L(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{22}$$

对任意博雷尔子集 $W \subset G$。在此，我们可以方便地考虑沿“反向”方向的 MTP，即从包含所生成辐照度分布的目标区域 D 映射到入射光束所在的区域 G。这是因为，下面使用并描述向二次 MTP 过渡的坐标变换可以在目标域中方便地进行。

假设我们已知某个映射 $P^k\colon\ D \to G$，它接近使泛函 (21) 最大化的“最优”映射。于是，我们可以在该映射附近考虑式 (21) 和 (22) 所述问题的近似。我们引入量 $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x}) = P^{k+1}(\boldsymbol{x}) - P^k(\boldsymbol{x})$，其中$P^{k+1}\colon\ D \to G$是所求映射的下一近似。如果近似 P^k 足够好，我们可以预期 $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x})$ 很小，并用其在 $\boldsymbol{\varepsilon} = 0$ 附近的泰勒级数展开代替代价函数，直

至线性项:

$$\begin{aligned}\mathcal{K}\big(P^{k+1}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x}\big) &= \mathcal{K}\big(P^{k}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x}\big)\\ &\approx \mathcal{K}\big(P^{k}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x}\big)+\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x})\cdot\nabla_{\boldsymbol{u}}\mathcal{K}\big(P^{k}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x}\big)\\ &= \mathcal{K}\big(P^{k}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x}\big)-P^{k}(\boldsymbol{x})\cdot\nabla_{\boldsymbol{u}}\mathcal{K}\big(P^{k}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x}\big)\\ &\quad+P^{k+1}(\boldsymbol{x})\cdot\nabla_{\boldsymbol{u}}\mathcal{K}\big(P^{k}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x}\big),\end{aligned}$$

其中，“·”表示两个二维向量的点积， $\nabla_{\boldsymbol{u}}\mathcal{K}$ 表示相对于第一个自变量计算的 $\mathcal{K}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x})$ 的梯度。

将得到的代价函数近似式代入泛函（21）：

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(P^{k+1}) \approx &\int_D \mathcal{K}\big(P^{k}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x}\big)L(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}-\int_D P^{k}(\boldsymbol{x})\cdot\nabla_{\boldsymbol{u}}\mathcal{K}\big(P^{k}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x}\big)L(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\ &+\int_D P^{k+1}(\boldsymbol{x})\cdot\nabla_{\boldsymbol{u}}\mathcal{K}\big(P^{k}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x}\big)L(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.\end{aligned}$$

根据式（21），为了求出映射的下一个近似 P^{k+1}，我们必须使上述泛函相对于 P^{k+1}最大化。显然，前两项与 P^{k+1}无关，因此，为了使$\mathcal{F}(P^{k+1})$最大化，只需找到以下泛函的最大值

$$\mathcal{G}(P^{k+1})=\int_D P^{k+1}(\boldsymbol{x})\cdot\nabla_{\boldsymbol{u}}\mathcal{K}\big(P^{k}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x}\big)L(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\to\max. \tag{23}$$

记

$$\eta(\boldsymbol{x})=\nabla_{\boldsymbol{u}}\mathcal{K}\big(P^{k}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x}\big) \tag{24}$$

并引入新坐标$\hat{}\boldsymbol{x}=\eta(\boldsymbol{x})$。在这些坐标下，式（23）中的问题变为一个具有二次代价函数 [的 MTP（见式（12））]

$$\hat{\mathcal{G}}(\hat{P}^{k+1})=\int_{\hat{D}}\hat{P}^{k+1}(\hat{\boldsymbol{x}})\cdot\hat{\boldsymbol{x}}\,\hat{L}(\hat{\boldsymbol{x}})\,\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{x}}\to\max. \tag{25}$$

这个 MTP 并非针对 $L(\boldsymbol{x})$，而是针对另一种目标分布$\widehat{L}(\hat{}\boldsymbol{x})=L(\boldsymbol{x})\cdot J^{-1}$建立的，其中 J是变换 (24) 的雅可比行列式。还需指出，映射 $\hat{}P^{k+1}$是坐标 P^{k+1}中的映射

$\hat{\boldsymbol{x}}$，即 $P^{k+1}(\boldsymbol{x}) = \hat{P}^{k+1}(\eta(\boldsymbol{x}))$，而区域 $\hat{D}$ 是区域D 在映射 η下的像。

要用二次代价函数求解式（25）中的 MTP，可以应用上述式（18）、（19）和（20）所述的二阶方法。

如果迭代过程收敛，那么在某个时刻，得到的映射将不再变化，即 $P^{k+1} = P^k$：$D \to G$。不难看出，这意味着 $\hat{P}^k$ 是映射从 D 到 G时，具有 $\hat{}$ 二次代价函数（25）的质量输运问题的解。根据附录 A.1 中证明的定理，在这种情况下，P^k 是具有非二次代价函数的式（21）和（22）所述初始质量输运问题的解。这证明了所提出的迭代方法可用于求解具有任意代价函数的 MTP，其中包括通过具有二次代价函数的 MTP 进行逐次逼近。迭代算法的详细说明见附录 A.2。

6.2. 数值示例

下面考虑将所述迭代方法应用于折射光学元件设计问题：该元件用于为点光源（即球面入射光束的情形）在远场平面上生成给定的辐照度分布。问题的几何结构如图 6 所示。正如文献 [11]，所示，该问题可重新表述为式（21）和（22）中的质量输运问题，其代价函数为

$$\mathcal{K}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}) = -\log\left[1 - \frac{n_2}{n_1} \cdot \frac{x_1 u_1 + x_2 u_2 + f\sqrt{1 - u_1^2 - u_2^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + f^2}}\right].$$

这里，$\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$ 是从光源发出的光线的单位向量$\vec{e}$ 在平面 $z = 0$ 上的投影，而 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ 是目标平面 $z = f$中的坐标。此问题中的质量指源的归一化强度分布 $I(\boldsymbol{u}) = \tilde{I}(\boldsymbol{u})/\sqrt{1 - u_1^2 - u_2^2}$，其中 $\tilde{I}(\boldsymbol{u})$ 为光源强度；同时也指目标平面上的给定强度分布 $L(\boldsymbol{x})$。下文假设点光源为朗伯光源，因此函数 $I(\boldsymbol{u})$ 为常数。

考虑设计一种折射光学元件，其材料的折射率为 $n_1 = 1.5$（周围介质的折射率为 $n_2 = 1$），旨在远场平面 $z = f = 1000\,\text{mm}$处形成边长为750mm的均匀照明正方形。我们假设

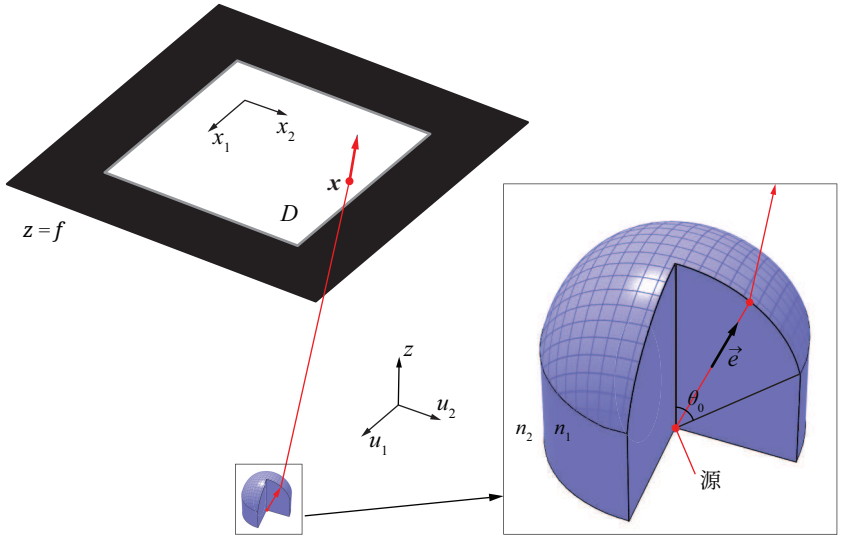

图6：点光源工作的折射光学元件的几何结构。

朗伯光源向一个立体角内辐射，该立体角由一个以原点为中心、顶角（辐射角）为$2\theta_0 = \pi/2$ 的圆锥描述（见图6）。

在计算中，我们使用了 $N^2 = 100^2$ 个点来近似目标方形区域。光学元件的计算采用所提出的迭代方法完成（参见补充材料第 2 节中的说明）。首次迭代求解 MTP 用时 9 秒，后续每次迭代约用 100 秒。各次迭代得到的结果如图 7 所示。首次迭代时，目标平面中的点位于初始正方形区域 D 内。在后续迭代中，根据公式 (24) 的离散类比对这些点进行移动[（见附录 A 中的公式 (A.3)）2]。从图 7 可以看出，对于所研究的示例，该方法在两次迭代后收敛；求解完第二个二次 MTP 后，生成的辐照度分布在视觉上已与所需分布无法区分。设计的光学元件如图 6 所示。其“工作”折射曲面的整体尺寸为： $1.07 \times 1.07 \times 0.458$毫米^3, ，而光源到所设计元件最高点的距离固定为 1 毫米。设计元件的能量效率（计算时考虑了菲涅耳损耗）为 95%。归一化均方根

与所需均匀方形分布的偏差为 6.1%，这证实了所提出的方法能够以高精度求解所研究的问题。

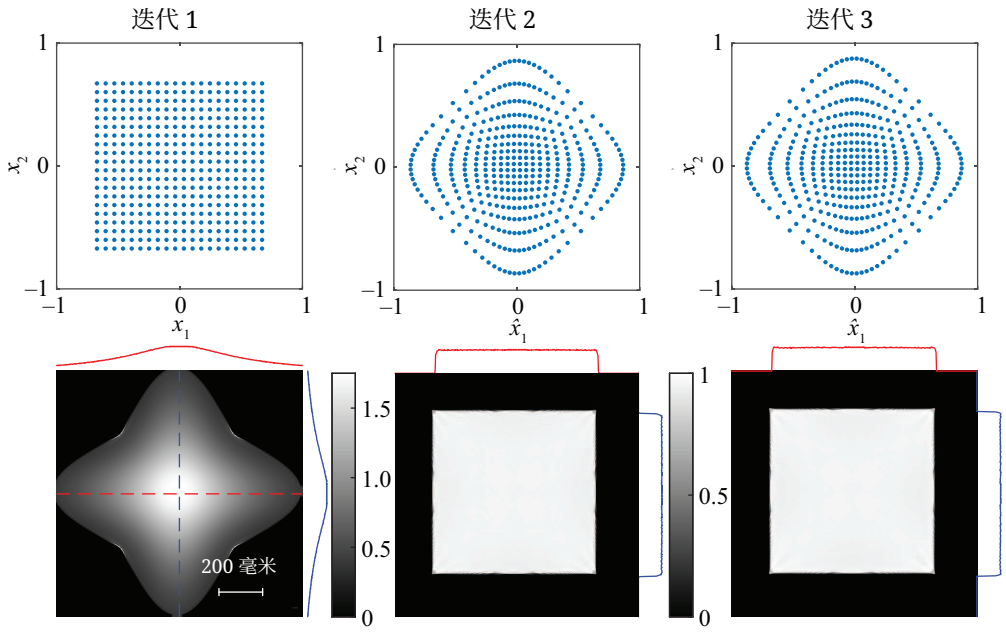

图7：目标区域中的点（上方图）以及平面 $z = f = 1000\text{mm}$ 中生成的归一化辐照度分布（下方图），展示不同迭代次数的结果。

7. 结论

在本研究中，我们考虑了这样一个逆问题：针对准直入射光束，计算能够在远场产生给定辐照度分布的折射面。为解决这一问题，我们提出了二阶支撑二次曲面法。该方法将曲面表示为一组平面（退化二次曲面），这些平面将入射光束折射至被照明区域内的各个点。二次曲面参数（平面到坐标原点的距离）的计算被转化为一个凸函数的最小化问题。该函数及其梯度可通过对加权沃罗诺伊图各单元内的入射光束辐照度分布进行积分来计算。我们得到了优化

函数海森矩阵的显式解析表达式。值得注意的是，海森矩阵的元素通过对沃罗诺伊单元对的公共边界进行积分计算，且该矩阵具有对称稀疏形式，因此能够利用二阶优化方法高效计算二次曲面参数。若干设计示例展示了二阶支撑二次曲面法的出色性能。特别是，通过考虑在正方形区域内生成均匀辐照度分布这一“基准问题”，我们证明，采用信赖域方法并利用海森矩阵计算折射面，相较于一阶方法，计算时间可缩短两个数量级。我们还研究了 SQM 的多尺度版本，并通过上述基准问题的示例表明，该方法比基于拟牛顿 BFGS 方法的类似多尺度方法快一个数量级。

需要指出的是，所提出的二阶 SQM 具有相当广泛的适用性，可用于其他能够表述为具有二次代价函数的质量输运问题的光学设计问题。这是因为，在这类问题中，二次曲面参数的计算同样归结为求一个凸函数的极值，其形式与上述折射面计算问题相同。此外，所提出的方法也可用于由具有非二次代价函数的一般形式 MTP 描述的光学设计问题。在这种情况下，可通过逐次逼近求解该问题：以具有二次代价函数的 MTP 逐步逼近一般形式的 MTP，并使用二阶 SQM 求解这些 MTP。通过一个示例证实了该方法具有很高的效率：计算球面入射光束在远场产生均匀辐照度分布的折射面。此类问题由具有对数代价函数的 MTP 描述；在所展示的示例中，所提出的迭代方法仅经过两次迭代便收敛。

致谢

本研究由俄罗斯科学基金会资助（项目编号：24-19-00080）。

附录 A. 补充材料

附录 *A.1.* 用二次代价函数的 *MTP* 逼近具有任意代价函数的 *MTP*

定理 附录 A.1. 设映射 $P\colon D \to G$ 满足以下条件：由 $\eta\colon D \to \hat{} D$ 定义的映射 $\eta(\boldsymbol{x}) = \nabla_{\boldsymbol{u}} \mathcal{K}\big(P(\boldsymbol{x})\ \boldsymbol{x}\big)$ 是可逆的。如果由条件 $P = P \circ \eta$ 定义的$\hat{}\hat{}$ $\hat{}$ 映射 $P\colon D \to G$ 是式 *(25)* 中具有二次代价函数的 *MTP* 的解，那么映射 P 是式 *(21)* 和 *(22)* 中代价函数为 $\mathcal{K}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x})$的 *MTP* 的一个极值。

证明。 显然，对于 P，光通量守恒定律等价于对于 P 的$\hat{}$ 光通量守恒定律。因此，只需验证所谓的可积条件 [9,10], 是否等价；这些条件是对相应 MTP 的拉格朗日泛函关于映射取极值所得到的。对于式 (21) 和 (22) 中的 MTP，如果映射 P 为极值，则该条件可写为

$$\frac{\partial}{\partial u_i}\Big[\mathcal{K}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}) - s(\boldsymbol{u})\Big]\Big|_{\boldsymbol{u}=P(\boldsymbol{x})} = 0, \qquad i = \overline{1,2} \tag{A.1}$$

对于某个函数 $s(\boldsymbol{u})$，它取决于由 MTP [9,10] 描述的当前设计问题中二次曲面的特定形式。下面进行一些等价变换。条件 (A.1) 可写为

$$\nabla_{\boldsymbol{u}} \mathcal{K}(P(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}) - \nabla s(P(\boldsymbol{x})) = 0$$

or

$$\eta(\boldsymbol{x}) - \nabla s(P(\boldsymbol{x})) = 0.$$

将 $\boldsymbol{x} = \eta^{-1}(\hat{}\boldsymbol{x})$ 代入上一个等式：

$$\hat{\boldsymbol{x}} - \nabla s(\hat{P}(\hat{\boldsymbol{x}})) = 0,$$

进而可改写为

$$\frac{\partial}{\partial u_i}\Big[\boldsymbol{u} \cdot \hat{\boldsymbol{x}} - s(\boldsymbol{u})\Big]\Big|_{\boldsymbol{u}=\hat{P}(\hat{\boldsymbol{x}})} = 0, \qquad i = \overline{1,2}.$$

如果映射 P 是采用二次代价函数的 MTP 的解，则最后一个等式显然成立。因此，在这种情况下，相应的映射 $P(\boldsymbol{x})$ 满足一般形式 MTP 的极值条件 (A.1)。

□

附录 *A.2.* 迭代算法

让我们描述求解具有非二次代价函数 $\mathcal{K}$的质量输运问题的算法。设入射光束由函数 $I(\boldsymbol{u})$定义，并假定其在区域 G内为常数。在区域 D 中产生的辐照度分布 $L(\boldsymbol{x})$可以是任意的。在所提出的方法中，该分布由一组坐标为 $\boldsymbol{x}_i$ 、能量为L_i的点构成的离散分布来近似。

迭代1. 我们利用所发展的二阶方法，通过最小化式(18)中的函数，求解具有式(12)和式(13)中二次代价函数的MTP。由此，我们得到权重集合 $\boldsymbol{w} = (w_i)$，它在一组离散点上近似函数 w 的值。然后，利用对值 $w(\boldsymbol{x}_i) = w_i$的样条插值，我们重构连续函数 $w(\boldsymbol{x})$。以这种方式计算得到的函数 w 使我们既能利用文章正文中的式(10)求得“正向”光线映射 $G \to D$，也能利用下列公式求得逆映射（请注意，该公式是文章正文中式(11)以不同记号写出的形式）：

$$P^1(\boldsymbol{x}) = -\nabla w(\boldsymbol{x}). \tag{A.2}$$

迭代 n。 我们使用文章正文中的公式 (24) 计算这些点的新位置：

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{i}} = \nabla_{\boldsymbol{u}} \mathcal{K}(P^{n-1}(\boldsymbol{x}_i), \boldsymbol{x}_i). \tag{A.3}$$

请注意，这些点的能量值 L_i 与点 $\boldsymbol{x}_i$的能量值相同，而这些点定义了第一次迭代时生成的分布。接下来，我们使用二阶 SQM 求解由公式 (12) 和 (13) 定义的二次代价函数 MTP，找到最优权重集合 $\boldsymbol{w}$，并利用数值 $w(\hat{\boldsymbol{x}}_i) = w_i$对函数 $w(\hat{\boldsymbol{x}})$进行插值。然后，可通过对以下各点处的数值进行插值，求得第 n次迭代时的逆映射$P^n(\boldsymbol{x})$：

$$P^n(\boldsymbol{x}_i) = -\nabla w(\hat{\boldsymbol{x}}_i).$$

如果在某次迭代中，映射 P^M与 P^{M+1}重合，那么根据定理 附录 A.1，即可得到解。在实际计算中，由于问题具有离散性，我们比较点集 $P^{M+1}(\boldsymbol{x}_i)$ 和 $P^M(\boldsymbol{x}_i)$ 的位置。

找到定义逆映射的光滑函数 $P^M(\boldsymbol{x})$ 后，使用公式（9）或

根据所求解的具体非成像光学问题，使用其对应形式重建光学元件的曲面。

参考文献

[1] R. Wu、Z. Feng、Z. Zheng、R. Liang、P. Benitez、J. C. Minano、F. Duerr，《自由曲面照明光学设计》，Laser & Photonics Reviews 12 (7) (2018) 1700310, 10.1002/lpor.201700310[2]S. Wei、Y. Li、D. Ma，《基于自由曲面光学将光场塑造为焦散图案》，Optica 10 (12) (2023) 1688–1699, 10.1364/OP- TICA.506268[3] S. Kumar、Z. Tong、X. Jiang，《新型自由曲面光学设计与制造的进展》，International Journal of Extreme Manufactur- ing 4 (3) (2022) 032004, 10.1088/2631-7990/ac7617[4] X.-H. Lee、I. Moreno、C.-C. Sun，《利用微透镜阵列实现高性能 LED 路灯照明》，Optics Express 21 (9) (2013) 10612–10621, 10.1364/OE.21.010612[5] T. Glimm、V. I. Oliker，《单反射器系统的光学设计与 Monge-Kantorovich 质量传输问题》，Journal of Mathematical Sciences 117 (2003) 4096–4108, 10.1023/A:1024856201493.[6] X.-J. Wang，《反射器天线设计 II》，Calculus of Variations and Partial Differential Equations 20 (2004) 329–341, 10.1007/s00526- 003-0239-4[7] T. Glimm、V. I. Oliker，《双反射器系统的光学设计、Monge-Kantorovich 质量传输问题与费马原理》，Indiana University Mathematics Journal 53 (5) (2004) 1255–1277, 10.1512/iumj.2004.53.2455[8]S. Kochengin、V. Oliker，《构造反射器的计算算法》，Computing and Visualization in Science 6 (2003) 15–21, 10.1007/s00791-003-0103-2[9] A. A. Mingazov. L. L. Doskolovich、D. A. Bykov、E. V. Byzov，《可重构为质量传输问题的非成像光学问题中的支撑二次曲面法》，Computer Optics 46 (3) (2022) 353– 365, 10.18287/2412-6179-CO-1055

[10] A. A. Mingazov、D. A. Bykov、E. A. Bezus、L. L. Doskolovich, 《在准直光束整形双自由曲面设计问题中使用支撑二次曲面法》, Optics Express 28 (15) (2020) 22642–22657, 10.1364/OE.398990[11] L. L. Doskolovich、D. A. Bykov、A. A. Mingazov 和 E. A. Bezus, 《自由曲面折射光学元件设计中的最优质量输运与线性指派问题：生成远场辐照度分布》, Optics Express 27(9) (2019) 13083–13097, 10.1364/AO.58.009131[12] V. Oliker, 《利用支撑二次曲面法（SQM）设计的多焦点自由曲面透镜控制光线》, Optics Express 25 (4) (2017) A58– A72, 10.1364/OE.25.000A58[13] K. V. Andreeva、S. V. Kravchenko、M. A. Moiseev、L. L. Doskolovich, 《使用支撑二次曲面法设计自由曲面全反射光学元件》, Optics Express 25 (19) (2017) 23465–23476, 10.1364/OE.25.023465[14] D. Michaelis、P. Schreiber、A. Bräuer, 《照明系统中自由曲面光学的笛卡尔卵形表示》, Optics Letters 36 (6) (2011) 918–920, 10.1364/OL.36.000918[15] D. A. Bykov、L. L. Doskolovich、A. A. Mingazov、E. A. Bezus, 《为平面入射光束生成远场辐照度分布的自由曲面光学元件设计中的最优质量输运问题》, Applied Optics 58 (33) (2019) 9131–9140, 10.1364/AO.58.009131[16] N. K. Yadav, 《非二次成本函数的 Monge-Ampère 问题：在自由曲面光学中的应用》, 埃因霍温：埃因霍温理工大学（2018）, ISBN:978-90-386-4574-2.[17] L. L. Doskolovich、A. A. Mingazov、D. A. Bykov、E. S. Andreev、E. A. Bezus, 《用于照明指定区域的光场程函函数计算的变分方法》, Optics Express 25 (22) (2017) 26378–26392, 10.1364/OE.25.026378[18]C. Villani, 《最优输运：旧与新》, Springer（2009）, ISBN:978-3-662-50180-1。

[19]X. Mao, J. Li, F. Wang, R. Gao, X. Li, Y. Xie，适用于准直光束整形的任意孔径平滑自由曲面透镜快速设计方法，应用光学 58(10) (2019) 2512–2521, 10.1364/AO.58.002512

[20]S. Wei, Z. Zhu, Z. Fan, Y. Yan, D. Ma. 使用可积光线映射方法对具有非平面波前的光束整形进行双自由曲面设计，Optics Express 27(19)(2019) 26757–26771, 10.1364/OE.27.026757

[21] C. Bösel, H. Gross，基于光线映射方法高效设计连续自由曲面，Optics Express 24 (13) (2016) 14271–14282. 10.1364/OE.24.014271

[22] D.A. Bykov、L. L. Doskolovich、A. A. Mingazov、E. A. Bezus、N. L. Kazanskiy，《用于设计生成指定辐照度分布的自由曲面折射光学元件的线性指派问题》，Optics Express 26(21) (2018) 27812–27825，10.1364/OE.26.027812

[23]F. Aurenhammer、F. Hoffmann、B. Aronov，《闵可夫斯基型定理与最小二乘聚类》，Algorithmica 20 (1998) 61–76，10.1007/PL00009187

[24]Q. Mérigot，《一种用于最优传输的多尺度方法》，Computer Graphics Forum 30 (5) (2011) 1583–1592，10.1111/j.1467-8659.2011.02032.x

[25]F. Aurenhammer，幂图：性质、算法与应用，SIAM Journal on Computing 16 (1) (1987) 78–96，10.1137/0216006[26] H. J. Sommer, polygeom.m，MATLAB Central File Exchange。检索日期：2025年8月12日，https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/319-polygeom-m。