arXiv:2603.04043v1 [math.LO] 4 Mar 2026

范德瓦尔登定理的一种新超滤子证明

MAURO DI NASSO

Abstract. 我们给出一个简短的新证明，证明范德瓦尔登定理：存在任意长的单色等差数列。该证明运用了超滤子紧空间中的代数方法 $\beta\mathbb{N}$，但与其他已有证明不同，它既不涉及极小超滤子，也不涉及幂等超滤子。

Introduction

范德瓦尔登定理是组合学的一项基本结果，在数学中有大量应用。该定理指出，对于每一种有限划分（染色） $\mathbb{N} = C_1 \cup \ldots \cup C_r$，都存在任意长的“单色”等差数列 $a,\ a+d,\ \ldots\ldots,\ a+(\ell-1)d \in C_i$。在最初那个基于巧妙而颇为复杂的双重归纳过程的纯组合证明之后 [9], ，多年来又出现了其他证明（例如，S. Shelah 在 [8] 给出了一个杰出的证明）。

超滤子证明最早由 V. Bergelson、H. Furstenberg、N. Hindman 和 Y. Katznelson 于 1989年提出 [1]，他们在右拓扑紧半群（$\beta\mathbb{N},\ \oplus$）中使用极小幂等超滤子；事实上，V. Bergelson 和 N. Hindman 不久后证明，每个属于极小超滤子的集合都包含任意长的等差数列 [2]。约十五年后，2004年，萨宾·科佩尔贝格 [7]通过“回缩”提出了范德瓦尔登定理的另一种证明，同样使用了极小幂等超滤子。2020年，作者 [3]提出了一种基于特殊滤子类的证明，这类滤子称为“平移不变滤子”，与极小超滤子密切相关。

在本文中，我们提出了一种新颖且相当简短的超滤子证明。我们采用简单的归纳法，在每一步都考察笛卡尔平方 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 上的适当超滤子，这些超滤子“见证”归纳假设；同时，我们在（$\beta\mathbb{N}, \oplus$）中使用代数方法。值得注意的是，构造过程中既不使用极小超滤子，也不使用幂等超滤子。

2000 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号 05D10；次要分类号 54D80。
Key words and phrases. 分割正则性；范德瓦尔登定理；超滤子空间上的代数。

1. Preliminaries

一族“模式” $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$称为分割正则，如果对于每个有限划分（染色）$\mathbb{N} = C_1 \cup \ldots \cup C_r$，都存在一种颜色 C_i和一个模-式 $G \in \mathcal{G}$，使得 $G \subseteq C_i$。在这种情况下，我们称 G 对于所考虑的划分是单色的。众所周知，分划正则性与超滤子密切相关。事实上，当且仅当存在一个能够“见证”分划正则性的超滤子时，分划正则性才成立；这里的含义是，该超滤子的每个元素都包含该族中的某个模式。

定理 1.1. 设 $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}$ 是一族模式。以下两个性质等价：

(1) 对每一个有限染色 $\mathbb{N} = C_1 \cup \ldots \cup C_r$，存在一个单色模式$G \in \mathcal{G}$，即 对某个 i 有 $G \subseteq C_i$。(2) 存在一个超滤子 $\mathcal{U}$，使得对每一个 $A \in \mathcal{U}$，存在$G \in \mathcal{G}$ 满足 $G \subseteq A$。

证明。 见 [6]定理 5.7。 □

为了我们的证明，我们需要上述刻画的一个变体，它关注等差数列，并考虑笛卡尔平方 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 上的超滤子。

继续之前，我们先列出一些关于超滤子的著名基本概念和事实，供下文使用（一个自然的参考资料是全面的专著 [6]）。

- 若 $\mathcal{U}$ 是集合 I 上的超滤子，且 $f : I \to J$，则 $f(\mathcal{U})$上的像超滤子定义为：对每个 $A \subseteq J$，令 $A \in f(\mathcal{U}) \Leftrightarrow f^{-1}(A) \in \mathcal{U}$。
- 若$\mathcal{U}$和 $\mathcal{V}$ 分别是集合 I 和 J 上的超滤子，则张量积 $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$是笛卡尔积 $I \times J$上的超滤子，定义为：对每个 $X \subseteq I \times J$，令 $X \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V} \Leftrightarrow \{i \in I \mid \{j \in J \mid (i,\ j) \in X\} \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$。
- 集合 $\mathbb{N}$上的超滤子 $\mathcal{U}$，$\mathcal{V}$之间的伪和 $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$定义为：对每个 $A \subseteq \mathbb{N}$，令 $A \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \Leftrightarrow \{n \mid A - n \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$；$A - n = \{m \in \mathbb{N} \mid m + n \in A\}$ 是 A 向左移 n。
- 张量积具有结合性，只要将笛卡尔积（$I \times J$）$\times K$ 与 $I \times$（$J \times K$）视为相同，但它不具有交换性。
- 伪和运算具有结合性，但不具有交换性。
- 伪和 $\mathcal{U}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{U}_k = \mathrm{Sum}(\mathcal{U}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{U}_k)$是张量积在求和函数 $\mathrm{Sum}(n_1, \ldots\ldots,\ n_k) \mapsto n_1 + \ldots + n_k$下的像超滤子。

以下性质可直接由定义推出；验证过程很简单。

引理 1.2。 对于每个 $s = 1, \ldots, k$，令 $\mathcal{U}_s$ 为 I_s 上的一个超滤子，并令 $f_s : I_s \to J_s$ 为一个函数。那么

$$f_1(\mathcal{U}_1) \otimes \ldots \otimes f_k(\mathcal{U}_k) = (f_1, \ldots, f_k)(\mathcal{U}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{U}_k)$$

其中 $(f_1, \dots, f_k) : (n_1, \dots, n_k) \mapsto (f_1(n_1) \dots, f_k(n_k))$。

最后，下面给出我们需要的刻画。

引理 1.3。对于每个 $\ell \in \mathbb{N}$，以下两个性质等价：

(1) 对于每个有限染色 $\mathbb{N} = C_1 \cup \ldots \cup C_r$，都存在一个单色的 ℓ 项等差数列 $a, a+d, \dots, a+(\ell-1)d \in C_i$。(2) 存在一个定义在 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 上的超滤子 $\mathcal{W}$，使得对所有 $j = 0$、1、.....、$\ell - 1$，都有 $T_0(\mathcal{W}) = T_j(\mathcal{W})$，其中 $T_j : (n, m) \mapsto n + jm$。

证明。(2) $\Rightarrow$ (1)。给定一个有限染色 $\mathbb{N} = C_1 \cup \ldots \cup C_r$，选取属于超滤子 $\mathcal{U}$ 的颜色$C = C_i := T_0(\mathcal{W}) = T_1(\mathcal{W}) = \ldots = T_{\ell-1}(\mathcal{W})$。由于对于每个 j，都有 $T_j^{-1}(C) \in \mathcal{W}$，我们可以取一个元素 $(a, d) \in \bigcap_{j=0}^{\ell-1} T_j^{-1}(C) \in \mathcal{W}$。$\ell$ 项等差数列 $a, a+d, \dots, a+(\ell-1)d$包含于 C 中。

(1) $\Rightarrow$ (2)。对于 $A \subseteq \mathbb{N}$，令

$$X(A) := \{(a, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a, a + d, \dots, a + (\ell - 1)d \in A \text{ or } a, a + d, \dots, a + (\ell - 1)d \in A^c\}.$$

我们声称，族 $\mathcal{G} = \{X_A \mid A \subseteq \mathbb{N}\}$ 具有有限交性质。为此，给定 A_1、.....、$A_n \subseteq \mathbb{N}$，对于每个函数 $\chi : \{1, \dots, n\} \to \{+, -\}$，我们定义 $C_\chi := \bigcap_{i=1}^{n} (A_i)^{\chi(i)}$，并约定$A^+ = A$，而 $A^- = A^c$ 是其补集。接着考虑有限染色 $\mathbb{N} = \bigcup_\chi C_\chi$。根据假设，存在一个单色的 ℓ 项等差数列 a、$a + d$、.....、$a + (\ell - 1)d \in C_\chi$，其中 χ 取适当值。根据定义，很容易看出，对于每个$i = 1$、.....、n，有序对 $(a$、$d) \in X(A_i)$。

现在取一个包含 $\mathcal{G}$ 的 $\mathcal{W}$ 超滤子 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$。反设，对于某个 $1 \leq j \leq \ell - 1$，$T_0(\mathcal{W}) \neq T_j(\mathcal{W})$，那么我们可以选取一个集合 $A \in T_0(\mathcal{W})$，使得其补集 $A^c \in T_j(\mathcal{W})$。此时，集合 $Y := T_0^{-1}(A) \cap T_j^{-1}(A^c)$ 将属于 $\mathcal{W}$。最后，我们注意到$Y \cap X_A = \emptyset$，并由此得到所需的矛盾，因为 $X_A \in \mathcal{W}$。□

2. The ultrafilter proof超滤子证明

在给出证明之前，我们先引入一种便于使用的记号来表示 r 迭代张量积和伪和。对于 $n \in \mathbb{N}$ 和 $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$，令：

$$\mathcal{U}^{n\otimes} = \underbrace{\mathcal{U} \otimes \ldots \otimes \mathcal{U}}_{n \text{ times}}; \quad \mathcal{U}^{n\oplus} = \underbrace{\mathcal{U} \oplus \ldots \oplus \mathcal{U}}_{n \text{ times}}.$$

我们约定 $\mathcal{U}^{1\otimes} = \mathcal{U}^{1\oplus} = \mathcal{U}$。

定理 2.1（范德瓦尔登）。对每个 $\ell \in \mathbb{N}$ 以及每个有限染色 $\mathbb{N} = C_1 \cup \ldots \cup C_r$，存在一个单色的 ℓ项等差数列 a，$a + d$，.....，$a +$（$\ell - 1$）$d \in C_i$。

证明。 我们按等差数列的长度 ℓ 进行归纳。基础情形 $\ell = 1$，2是平凡的。在归纳步骤中，考虑任意有限染色 $\mathbb{N} = C_1 \cup \ldots \cup C_r$。根据归纳假设，我们可以选取引理 1.3 所给出的超滤子 $\mathcal{W}$ 。设 $\mathcal{U} := T_\ell(\mathcal{W})$，$\mathcal{V} := T_0(\mathcal{W}) = T_1(\mathcal{W}) = \ldots = T_{\ell-1}(\mathcal{W})$，并考虑 $\mathbb{N}$上的如下超滤子:

- $\mathcal{Z}_s := \mathcal{U}^{s\oplus} \oplus \mathcal{V}^{(r+2-s)\oplus}$ for $s = 1, \ldots, r+1$.

根据超滤子的性质，上述每个 $r+1$ 超滤子都包含分割中的一种颜色，因此根据鸽巢原理，必有一种颜色 $C = C_i$ 同时属于其中两个，即，$C \in \mathcal{Z}_p \cap \mathcal{Z}_q$ 其中 $p < q$。现在令:

- $\Gamma := \{k \in \mathbb{N} \mid C - k \in \mathcal{V}^{(r+2-q)\oplus}\}$.

由于 $C \in \mathcal{Z}_p = \mathcal{U}^{p\oplus} \oplus \mathcal{V}^{(q-p)\oplus} \oplus \mathcal{V}^{(r+2-q)\oplus}$，我们有 $\Gamma \in \mathcal{U}^{p\oplus} \oplus \mathcal{V}^{(q-p)\oplus}$；又由于 $C \in \mathcal{Z}_q = \mathcal{U}^{p\oplus} \oplus \mathcal{U}^{(q-p)\oplus} \oplus \mathcal{V}^{(r+2-q)\oplus}$，我们有 $\Gamma \in \mathcal{U}^{p\oplus} \oplus \mathcal{U}^{(q-p)\oplus}$。于是:

- $\Gamma_1 := \{k' \in \mathbb{N} \mid \Gamma - k' \in \mathcal{V}^{(q-p)\oplus}\} \in \mathcal{U}^{p\oplus}$, and
- $\Gamma_2 := \{k' \in \mathbb{N} \mid \Gamma - k' \in \mathcal{U}^{(q-p)\oplus}\} \in \mathcal{U}^{p\oplus}$.

任取 $k' \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2 \in \mathcal{U}^{p\oplus}$。则 $\Gamma - k' \in \mathcal{V}^{(q-p)\oplus} \cap \mathcal{U}^{(q-p)\oplus}$，因此$\Gamma - k' \in \bigcap_{j=0}^{\ell} T_j(\mathcal{W})^{(q-p)\oplus}$。利用引理 1.2，我们注意到，对每个$j = 0, \ldots, \ell$，都有

$$T_j(\mathcal{W})^{(q-p)\oplus} = \mathrm{Sum}(T_j(\mathcal{W})^{(q-p)\otimes}) = \\ = \mathrm{Sum}\left((T_j, \ldots, T_j)(\mathcal{W}^{(q-p)\otimes})\right) = \psi_j(\mathcal{W}^{(q-p)\otimes})$$

其中 $\psi_j := \mathsf{Sum} \circ (T_j, \ldots, T_j) : (\mathbb{N} \times \mathbb{N})^{q-p} \to \mathbb{N}$是使得下列条件成立的函数

$$\psi_j : ((n_1, m_1), \ldots, (n_{q-p}, m_{q-p})) \longmapsto \sum_{s=1}^{q-p} (n_s + jm_s).$$

由于 $\Gamma - k' \in \bigcap_{j=0}^{\ell} \psi_j(\mathcal{W}^{(q-p)\otimes})$，我们有 $\bigcap_{j=0}^{\ell} \psi_j^{-1}(\Gamma - k') \in \mathcal{W}^{(q-p)\otimes}$。若 $((n_1, m_1) \ldots (n_{q-p}, m_{q-p}))$ 是该交集中的任意元素，则对每个 $j = 0, \ldots \ell$，我们有 $k' + \sum_{s=1}^{q-p} (n_s + jm_s) \in \Gamma$，因此我们可以选取

$$k \in \bigcap_{j=0}^{\ell} C - (k' + \sum_{s=1}^{q-p} (n_s + jm_s)) \in \mathcal{V}^{(r+2-q)\oplus}.$$

由此可得，对 $j = 0, \ldots, \ell$，有 $k + k' + \sum_{s=1}^{q-p} (n_s + jm_s) \in C$。令$a := k + k' + \sum_{s=1}^{q-p} n_s$且 $d := \sum_{s=1}^{q-p} m_s$，我们看到 $a, a+d, \ldots, a+\ell d \in C$即为所求的单色 $(\ell + 1)$ 项等差数列。 □

注记 2.2。 上述证明最初是通过迭代非标准扩张得到的（关于这种非标准技术的基础及其一些应用，参见 [4] ）。由于将其改写为超滤子的表述相当简单，而且似乎包含一些原创性内容，我们决定在此用这种语言加以介绍。

References

[1] V. Bergelson、H. Furstenberg、N. Hindman 和 Y. Katznelson, 《范德瓦尔登定理的一个代数证明》, *Enseignement Mathématique*, 第 35 卷（1989年）, 209–215。[2] V. Bergelson 和 N. Hindman, 《不可度量化拓扑动力学与拉姆齐理论》, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 第 320 卷（1990年）, 293–320。[3] M. Di Nasso, 《平移不变滤子与范德瓦尔登定理》, 载于“*Combinatorial and Additive Number Theory III*”（M.B. Nathanson 编）, 《数学与统计学论文集》297, 施普林格, 2020年, 65–74。[4] M. Di Nasso 和 R. Jin, 《迭代星映射的基础及其在组合学中的应用》, *Ann. Pure Appl. Logic*, 第 176 卷（2025年）, 103511。[5] W. Gasarch、C. Kruskal 和 A. Parrish, *“Applications”* 2018 *Van der Waerden's Theorem: Variants and*, 书稿草案, 。[6] N. Hindman 和 D. Strauss, *Algebra in the Stone-Čech Compactification Theory and*, , nd 版, W. *Applications* 2 2011 de Gruyter, 。[7] S. Kopperlberg, 《通过回缩证明海尔斯-朱厄特定理》, *Topology Proc.* 第 28 卷（2004年）, 595–601。[8] S. Shelah, 《范德瓦尔登数的原始递归界》, *J. Amer. Math.*, 第（ ）卷, –。*Soc.* 1 1988 683 697 [9] B.L. van der Waerden, 《对鲍德特猜想的证明》, *Nieuw Arch. Wiskd.* 第 15 卷（1927年）, 212–216。

Dipartimento di Matematica, Università di Pisa, Italy
Email address: mauro.di.nasso@unipi.it