arXiv:2603.04051v1 [math.FA] 4 Mar 2026

Bergman空间与福克空间上的局部化算子

PAN MA、FUGANG YAN、DECHAO ZHENG 与 KEHE ZHU

摘要。我们在加权 Bergman 空间与福克空间上引入局部化算子，并证明：在对符号与窗函数作自然伸缩的条件下，加权伯格曼空间 $A^2_{\beta r^2}$ 上的局部化算子在弱意义下收敛到 Fock 空间 F^2_β 上的局部化算子，当$r \to \infty$时。由此我们导出若干应用，包括关于福克空间上某些托普利兹算子的精确范数估计、关于加权 Bergman 空间的加窗 Berezin 变换，以及关于加权 Bergman 空间上局部化算子的塞格型定理。

1. 引言

局部化算子最早由 Daubechies [7] 在时频分析中引入，是在相空间中对信号进行局部化的数学工具。它们在信号处理、量子力学及相关领域中起着重要作用 [11,24,25]。更确切地说，与 $\mathbb{R}^2$ 上的符号函数 f 以及窗 ϕ、$\psi \in L^2(\mathbb{R})$相关联的、 $L^2(\mathbb{R}) = L^2(\mathbb{R}, dx)$上的时频局部化算子$L^{\phi,\ \psi}_{f}$ 由半双线性型定义

$$\langle L^{\phi,\psi}_f g,\, h\rangle = \int_{\mathbb{R}} d\omega \int_{\mathbb{R}} f(x,\omega)\langle g,\, M_\omega T_x \phi\rangle\langle M_\omega T_x \psi,\, h\rangle\, dx,$$

其中 $\langle\,,\,\rangle$是 $L^2(\mathbb{R})$中的内积， T_x 是平移算子， M_ω是调制算子：

$$T_x f(t) = f(t-x), \quad M_\omega f(t) = e^{2\pi i\omega t} f(t), \qquad f \in L^2(\mathbb{R}).$$

文献中已广泛研究了时频局部化算子的诸多性质，包括有界性、紧性和谱行为；参见 [3,5,6,12,19,20]。

本文介绍并研究复平面上的福克空间以及单位圆盘上带有标准径向权的加权 Bergman空间上的局部化算子。

回忆一下，对于任意正参数 β，复平面 $\mathbb{C}$上的 Fock 空间 F^2_β 由所有满足以下条件的整函数 f 组成

$$\|f\|^2_{F^2_\beta} = \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 d\mu_\beta(z) < \infty,$$

2020 数学学科分类。47B35, 30H20。关键词和短语。Bergman空间；Fock 空间；局部化算子；托普利兹算子；Bargmann 变换；时频分析；Szegö 定理。

其中

$$d\mu_\beta(z) = \frac{\beta}{\pi} e^{-\beta|z|^2} dA(z)$$

是高斯测度。这里， dA 是复平面 $\mathbb{C}$上的面积测度。注意， F^2_β 是一个再生核希尔伯特空间，其核函数为 $e^{\beta z\overline{w}}$。

还要回顾一下，对于任意参数 $\alpha > -1$，开单位圆盘 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$上的加权伯格曼空间 A^2_α由所有满足以下条件的解析函数 f组成：它们定义在 $\mathbb{D}$上，且

$$\|f\|^2_{A^2_\alpha} = \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 \, dA_\alpha(z) < \infty,$$

其中

$$dA_\alpha(z) = \frac{\alpha+1}{\pi}(1-|z|^2)^\alpha \, dA(z).$$

A^2_α 也是一个再生核希尔伯特空间，其核函数为$(1-z\overline{w})^{-(2+\alpha)}$。当 $\alpha = 0$时，我们简单地用 A^2 代替 A^2_0 。众所周知且易于验证，分数阶微分算子 V^α 定义为

$$V^\alpha f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n+1}} \sqrt{\frac{\Gamma(n+\alpha+2)}{n!\,\Gamma(\alpha+2)}}\, z^n, \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

是一个从 A^2 到 A^2_α的酉变换。

粗略地说， $L^2(\mathbb{R})$上的酉平移算子和调制算子对应于 F^2_β 上的所谓 Weyl 酉算子，以及 A^2_α上的一类类似的酉算子。更具体地，对于任意 $\beta > 0$ 和任意 $z \in \mathbb{C}$， F^2_β 上的 Weyl 酉算子 W^β_z 定义为

$$W^\beta_z f(\zeta) = f(\zeta - z) e^{\beta \overline{z}\zeta - (\beta|z|^2/2)}.$$

类似地，对于任意 $\alpha > -1$ 和任意 $z \in \mathbb{D}$，我们可以通过以下方式定义 A^2_α 上的酉算子 U^α_z

$$U^\alpha_z f(\zeta) = f \circ \varphi_z(\zeta) \left[\frac{1-|z|^2}{(1-\overline{z}\zeta)^2}\right]^{(2+\alpha)/2},$$

其中， $\varphi_z(\zeta) = (\zeta - z)/(1 - z\zeta)$是单位圆盘上的一个莫比乌斯映射，且满足 $\varphi_z^{-1} = \varphi_{-z}$。

韦尔算子 W^β_z 构成海森堡群在 F^2_β 上的韦尔酉表示的主要部分。其余部分大致由旋转构成。类似地，算子 U^α_z 构成 $\mathbb{D}$ 的莫比乌斯群在希尔伯特空间 A^2_α上的一种自然酉表示的主要部分，其余部分同样大致对应于旋转。我们用 $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$表示单位圆，它用于表示 $\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{D}$中的旋转。现在，我们如下定义F^2_β 和 A^2_α 上的局部化算子。

定义 1.1。设 ϕ、$\psi \in F^2_\beta$和 $f \in L^\infty(\mathbb{T}\times\mathbb{C})$。我们通过半双线性型在 F^2_β上定义线性算子$\mathbb{L}^{\phi,\ \psi\,\beta}_{f}$，

$$\langle \mathbb{L}^{\phi,\psi,\beta}_f g, h\rangle = \frac{\beta}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} f(e^{i\theta},z)\langle g, W^\beta_z\phi_\theta\rangle\langle W^\beta_z\psi_\theta, h\rangle\, dA(z),$$

其中 $\langle,\rangle$ 是 F^2_β 和 $\phi_\theta(\zeta)=\phi(e^{i\theta}\zeta)$ 中的内积。我们将 $\mathbb{L}^{\phi,\ \ \psi\,\beta}_{f}$，称为 F^2_β 上的局部化算子，其符号为 f，窗函数为 ϕ 和 ψ。当 $\phi = \psi$ 时，我们简记为 $\mathbb{L}^{\psi,\ \ \beta}_{f} = \mathbb{L}^{\psi,\ \ \psi\,\beta}_{f}$。

定义 1.2。设 ϕ、$\psi \in A^2_\alpha$ 和 $f \in L^\infty(\mathbb{T}\times\mathbb{D})$。我们通过半双线性型在 A^2_α 上定义线性算子 $\mathbf{L}^{\phi,\ \psi,\ \ \alpha}_{f}$：

$$\langle \mathbf{L}^{\phi,\psi,\alpha}_f g, h\rangle = (\alpha+1)\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi}\int_{\mathbb{D}} f(e^{i\theta},z)\langle g, U^\alpha_z\phi_\theta\rangle\langle U^\alpha_z\psi_\theta, h\rangle\, d\lambda(z),$$

其中$\langle\ ,\ \rangle$是A^2_α中的内积，$\phi_\theta(\zeta)=\phi(e^{i\theta}\zeta)$，并且

$$d\lambda(z) = \frac{dA(z)}{\pi(1-|z|^2)^2}$$

是 $\mathbb{D}$ 上所谓的莫比乌斯不变面积测度。同样，我们将 $\mathbf{L}^{\phi,\ \psi,\ \ \alpha}_{f}$称为 A^2_α 上的局部化算子，其符号为 f，窗函数为ϕ和ψ。当 $\phi=\psi$时，我们简记为 $\mathbf{L}^{\psi,\ \ \alpha}_{f} = \mathbf{L}^{\psi,\ \psi,\ \ \alpha}_{f}$。

我们的第一个主要结果如下。

定理 1.3. 设 $\phi,\psi \in F^2_\beta$满足 $\beta>0$且 $f\in L^\infty(\mathbb{T}\times\mathbb{C})$。对于任意 $\sigma\ge 0$，有

$$\lim_{r\to\infty}\left\langle \mathbf{L}^{\phi_r,\psi_r,\beta r^2}_{f_{r,\sigma}} g_r,\, h_r\right\rangle_{A^2_{\beta r^2}} = \left\langle \mathbb{L}^{\phi,\psi,\beta}_f g,\, h\right\rangle_{F^2_\beta}, \qquad g,h\in F^2_\beta,$$

其中 $\phi_r(z)=\phi(rz)$ 且

$$f_{r,\sigma}(e^{i\theta},z) = (1-|z|^2)^\sigma f(e^{i\theta},rz), \qquad z\in\mathbb{D}.$$

回顾一下，对于任意 $f\in L^\infty(\mathbb{C})$，托普利兹算子 $\mathbb{T}^\beta_f : F^2_\beta \to F^2_\beta$ 定义为

$$\mathbb{T}^\beta_f g(z) = \int_{\mathbb{C}} f(w)g(w)e^{\beta z\overline{w}}\, d\mu_\beta(w).$$

类似地，对于任意 $f\in L^\infty(\mathbb{D})$，托普利兹算子 $\mathbf{T}^\alpha_f : A^2_\alpha \to A^2_\alpha$ 定义为

$$\mathbf{T}^\alpha_f g(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)g(w)}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}}\, dA_\alpha(w).$$

以下关于加权 Bergman 空间上托普利兹算子范数的最佳不等式隐含地出现在 [18]中：若 $f \in L^1(\mathbb{D}, d\lambda) \cap L^\infty(\mathbb{D})$，则

$$\|\mathbf{T}_f^\alpha\|_{A_\alpha^2} \le \left(1 - \frac{\|f\|_\infty^{\alpha+1}}{(\|f\|_\infty + \|f\|_{L^1(\mathbb{D},d\lambda)})^{\alpha+1}}\right)\|f\|_\infty, \tag{1.1}$$

且当 f 是 $\mathbb{D}$ 中双曲圆盘的示性函数时，等号成立。

如果 $\phi = \psi = 1$ 和 $f(e^{i\theta}, z) = f(z)$ 与 θ 无关，则显然有

$$\mathbb{L}_f^{\phi,\psi,\beta} = \mathbb{T}_f^\beta \qquad \text{and} \qquad \mathbf{L}_f^{\phi,\psi,\alpha} = \mathbf{T}_f^\alpha.$$

结合定理 1.3和（1.1），可得到托普利兹算子在 Fock 空间上的如下新范数估计。

推论 1.4。对于 $f \in L^1(\mathbb{C}) \cap L^\infty(\mathbb{C})$ 和 $\beta > 0$，有

$$\|\mathbb{T}_f^\beta\|_{F_\beta^2} \le \left[1 - \exp\left(-\frac{\beta}{\pi}\frac{\|f\|_{L^1(\mathbb{C})}}{\|f\|_\infty}\right)\right]\|f\|_\infty,$$

当 f 是 $\mathbb{C}$ 中某个欧几里得圆盘的示性函数时，等号成立。此处 $L^1(\mathbb{C}) = L^1(\mathbb{C}, dA)$。

文献中已知该推论在 $\beta = \pi$ 的一些特殊情形。例如，Galbis [14] 得到了实值径向符号的结果，而 Huang-Zhang [15] 研究了实值符号的情形。

我们的下一个结果讨论 A_α^2 上加窗 Berezin 变换的极限行为。回顾一下，与 A_α^2 相关联的普通（未加窗）Berezin 变换是积分算子

$$B_\alpha f(z) = \int_{\mathbb{D}} f(w)\frac{(1-|z|^2)^{2+\alpha}}{|1-\overline{z}w|^{2(2+\alpha)}}\, dA_\alpha(w) = \int_{\mathbb{D}} f(w)\left|U_z^\alpha 1(w)\right|^2\, dA_\alpha(w).$$

Berezin 变换是全纯函数空间算子理论中一种重要且实用的工具；参见 [1, 2, 9, 17, 22, 26]。

给定窗函数 $\psi \in A_\alpha^2$，我们将加窗 Berezin 变换 B_α^ψ 定义为以下积分算子：

$$B_\alpha^\psi f(e^{i\theta}, z) = (\alpha+1)\int_0^{2\pi}\frac{dt}{2\pi}\int_{\mathbb{D}} f(e^{it}, w)\left|\langle U_z^\alpha \psi_\theta, U_w^\alpha \psi_t\rangle_{A_\alpha^2}\right|^2 d\lambda(w),$$

其中 $\psi_t(z) = \psi(e^{it}z)$ 与之前相同。显然，若 $\psi = 1$ 且 $f(e^{i\theta}, z) = f(z)$ 与 θ 无关，则加窗 Berezin 变换退化为普通 Berezin 变换。

现在我们可以陈述本文的第二个主要结果。

定理 1.5。假设 $\psi \in A^2$ 满足 $\|\psi\|_{A^2} = 1$、$\psi^\alpha = V^\alpha \psi$ 和 $1 \le p < \infty$。对于 $f \in L^p(\mathbb{D}, d\lambda)$，我们有

$$\lim_{\alpha\to\infty}\|B_\alpha^{\psi^\alpha} f - f\|_{L^p(\mathbb{T}\times\mathbb{D})} = 0,$$

其中 $L^p(\mathbb{T}\times\mathbb{D}) = L^p(\mathbb{T}\times\mathbb{D}, \frac{d\theta}{2\pi}d\lambda)$。

作为定理 1.5的一个应用，我们得到以下 Szegö 型定理，这是本文关于加权 Bergman 空间上的局部化算子的第三个主要结果。

定理 1.6. 假设 ψ 是 A^2中的单位向量， $\psi^\alpha = V^\alpha\psi$是 f 中的非负函数。如果 h 在闭区间$[0, \|f\|_\infty]$上连续，那么

$$\lim_{\alpha\to\infty} \frac{\operatorname{tr}(\mathbf{L}_f^{\psi^\alpha,\alpha} h(\mathbf{L}_f^{\psi^\alpha,\alpha}))}{\alpha+1} = \int_{\mathbb{D}} f(z)h(f(z))\,d\lambda(z).$$

特殊情形 $\psi = 1$ 已由 Camper 和 Mitkovski 在 [4]中得到。另请参阅 [10]，其中给出了 Gabor-Toeplitz 局部化算子的 Szegö 型定理。下面给出定理 1.6 的两个有趣推论。

推论 1.7. 假设 ψ 是 A^2中的单位向量， $\psi^\alpha = V^\alpha\psi$是 f 中的非负函数。对于 $0 < \delta \le \|f\|_\infty$，有

$$\lim_{\alpha\to\infty} \frac{\#\left\{i : \lambda_i(\mathbf{L}_f^{\psi^\alpha,\alpha}) > \delta\right\}}{\alpha+1} = \lambda(\{z\in\mathbb{D} : f(z) > \delta\}),$$

其中 $\lambda_i(T)$表示 T的第 i个奇异值。

推论 1.8. 设 ψ 是 A^2中的单位向量， $\psi^\alpha = V^\alpha\psi$，且 f 是 $L^1(\mathbb{D}, d\lambda)\cap L^\infty(\mathbb{D})$中的非负函数。则有

$$\lim_{\alpha\to\infty} \|\mathbf{L}_f^{\psi^\alpha,\alpha}\|_{A^2_\alpha} = \|f\|_\infty.$$

2. Fock 空间作为加权 Bergman 空间的极限

Fock 空间 F^2_β是定义在复平面上的解析函数空间。本节将证明， F^2_β 是单位圆盘上某些加权 Bergman 空间的弱极限。尽管该结论在这一领域的专家中早已广为人知（例如，文献 [16] 中曾提及，文献 [27]中也将其作为一道习题），但在现有文献中很难找到详细论证。因此，我们将为以下结果给出完整证明。

定理 2.1. 若 $f\in L^1(\mathbb{C}, d\mu_\beta)$，则对任意 $\sigma\ge 0$，有

$$\lim_{r\to\infty}\int_{\mathbb{D}} f(rz)\,dA_{\beta r^2+\sigma}(z) = \int_{\mathbb{C}} f(z)\,d\mu_\beta(z).$$

证明。 通过变量替换，我们得到

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}} f(rz)\,dA_{\beta r^2+\sigma}(z) &= (\beta r^2+\sigma+1)\int_{\mathbb{D}} f(rz)(1-|z|^2)^{\beta r^2+\sigma}\frac{dA(z)}{\pi}\\ &= \frac{(\beta r^2+\sigma+1)}{r^2}\int_{r\mathbb{D}} f(z)\left(1-\left|\frac{z}{r}\right|^2\right)^{\beta r^2+\sigma}\frac{dA(z)}{\pi}\end{aligned}$$

$$= \frac{(\beta r^2+\sigma+1)}{r^2\pi}\int_{\mathbb{C}} f(z)\psi_r(z)\,dA(z) \tag{2.1}$$

对于 $r>0$，其中

$$\psi_r(z) = \mathbb{1}_{r\mathbb{D}}(z)\left(1-\frac{|z|^2}{r^2}\right)^{\beta r^2+\sigma}$$

且 $\mathbb{1}_{r\mathbb{D}}(z)$ 是 $r\mathbb{D}$ 的示性函数。显然，

$$\lim_{r\to\infty}\frac{(\beta r^2+\sigma+1)}{r^2\pi} = \frac{\beta}{\pi}. \tag{2.2}$$

容易看出，对于 $x\in(0,1)$，$\log(1-x)\le -x$。这意味着

$$(1-x)^{\frac{1}{x}} \le e^{-1}, \quad x\in(0,1). \tag{2.3}$$

由（2.3）可知，对于 $z\in\mathbb{C}$，我们有

$$\begin{aligned}\psi_r(z) &= \mathbb{1}_{r\mathbb{D}}(z)\left(1-\left|\frac{z}{r}\right|^2\right)^{\beta r^2+\sigma} \le \mathbb{1}_{r\mathbb{D}}(z)\left(1-\left|\frac{z}{r}\right|^2\right)^{\beta r^2}\\ &= \mathbb{1}_{r\mathbb{D}}(z)\left[\left(1-\left|\frac{z}{r}\right|^2\right)^{\left|\frac{r}{z}\right|^2}\right]^{\beta|z|^2} \le \mathbb{1}_{r\mathbb{D}}(z)e^{-\beta|z|^2} \le e^{-\beta|z|^2}.\end{aligned}$$

由于 f 属于 $L^1(\mathbb{C},d\mu_\beta)$ 且 $\psi_r(z)$ 当 r 趋于 ∞时收敛到 $e^{-\beta|z|^2}$，由（2.1）、（2.2）以及控制收敛定理可推出

$$\lim_{r\to\infty}\int_{\mathbb{D}} f(rz)dA_{\beta r^2+\sigma}(z) = \frac{\beta}{\pi}\int_{\mathbb{C}} f(z)e^{-\beta|z|^2}\,dA(z).$$

至此，该定理的证明完成。 □

推论 2.2. 设 $\beta>0$ 与 $\sigma\ge 0$。对 $\mathbb{C}$上的任意整函数 f，我们有

$$\lim_{r\to\infty}\|f_r\|_{A^2_{\beta r^2+\sigma}} = \|f\|_{F^2_\beta},$$

其中 $f_r(z)=f(rz)$。

3. Orthogonality relations in A^2_α and F^2_β

回顾一下，时频分析中的正交关系指的是如下恒等式，

$$\int_{\mathbb{R}^2}\langle g, M_\omega T_x\phi\rangle\langle M_\omega T_x\psi, h\rangle\,dxd\omega = \langle g,h\rangle\langle\psi,\phi\rangle,$$

其中 g，h，ϕ，$\psi\in L^2(\mathbb{R})$ 且内积取自 $L^2(\mathbb{R})$。这通常称为 Moyal 恒等式；参见 [13,定理 3.2.1]。相应的局部化算子在 $L^2(\mathbb{R})$ 上是算子 $L^{\phi,\ \psi}_f$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 上定义为

$$\langle L^{\phi,\psi}_f g,h\rangle = \int_{\mathbb{R}^2} f(x,\omega)\langle g,M_\omega T_x\phi\rangle\langle M_\omega T_x\psi,h\rangle\,dx\,d\omega,$$

其中 ϕ 与 ψ 是 $L^2(\mathbb{R})$ 中的窗函数，f 是 $\mathbb{R}^2$ 上的符号函数，且内积取在 $L^2(\mathbb{R})$ 中。

本节将把上述正交关系及其相关的局部化算子推广到加权 Bergman 空间和福克空间的情形。

对于福克空间 $F^2_\beta, \beta > 0$，我们从经典的 Bargmann 变换开始，记作 $\mathcal{B}_\beta$。它是一种特定的积分算子，可将 $L^2(\mathbb{R})$ 酉映射到 F^2_β。Bargmann 变换使我们能够将 $L^2(\mathbb{R})$中的函数变换为 F^2_β 中的函数，并将作用于 $L^2(\mathbb{R})$ 的算子变换为作用于 F^2_β 的算子。例如，众所周知，

$$\mathcal{B}_\beta M_\omega T_x \mathcal{B}_\beta^{-1} = e^{\beta i x\omega} W^\beta_{x-\frac{\pi\omega i}{\beta}}. \tag{3.1}$$

参见 [27]，了解有关福克空间、Weyl 酉算子和 Bargmann 变换的更多信息。

根据（3.1），Bargmann 变换将 $L^2(\mathbb{R})$中的正交关系映射到 F^2_β，如下所示:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \langle \mathcal{B}_\beta g, W_{x-i(\pi\omega/\beta)}\mathcal{B}_\beta\phi\rangle\langle W_{x-i(\pi\omega/\beta)}\mathcal{B}_\beta\psi, \mathcal{B}_\beta h\rangle\, dx\, d\omega = \langle \mathcal{B}_\beta g, \mathcal{B}_\beta h\rangle\langle \mathcal{B}_\beta\phi, \mathcal{B}_\beta\psi\rangle,$$

其中，$\langle\ ,\ \rangle$ 是 F^2_β 中的内积。将 $\mathcal{B}_\beta g, \mathcal{B}_\beta h, \mathcal{B}_\beta\phi, \mathcal{B}_\beta\psi$ 分别替换为 g,h,ϕ, $\psi \in F^2_\beta$，并记 $z = x - i(\pi\omega/\beta)$，即可得到以下福克空间中的 Moyal 恒等式类比形式。

定理 3.1。若 ϕ，ψ，g，$h \in F^2_\beta$，则有

$$\frac{\beta}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \langle g, W^\beta_z\phi\rangle\langle W^\beta_z\psi, h\rangle\, dA(z) = \langle g, h\rangle\langle\psi, \phi\rangle.$$

注意，不使用 Bargmann 变换也可以直接证明定理3.1。事实上，对于 $z \in \mathbb{C}$，若记 $K^\beta_z(\zeta) = e^{\beta z\bar\zeta}$ 为 F^2_β 在 z 处的再生核，则经简单计算可得

$$\langle K^\beta_\zeta, W^\beta_z K^\beta_{z_1}\rangle = \overline{(W^\beta_z K^\beta_{z_1})(\zeta)} = e^{-\frac{\beta}{2}|z|^2} e^{-\beta z_1\bar z} e^{\beta(z_1+z)\bar\zeta},$$

and

$$\langle W^\beta_z K^\beta_{z_2}, K^\beta_\xi\rangle = (W^\beta_z K^\beta_{z_2})(\xi) = e^{-\frac{\beta}{2}|z|^2} e^{-\beta\bar z_2 z} e^{\beta(\bar z_2+\bar z)\xi}.$$

由此可得

$$\begin{aligned}
&\frac{\beta}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \langle K^\beta_\zeta, W^\beta_z K^\beta_{z_1}\rangle\langle W^\beta_z K^\beta_{z_2}, K^\beta_\xi\rangle\, dA(z) \\
&\quad = e^{\beta z_1\bar\xi + \beta\bar z_2\xi}\int_{\mathbb{C}} e^{\beta(\bar\xi-\bar z_2)z} e^{\beta(\xi-z_1)\bar z}\, d\mu_\beta(z) \\
&\quad = e^{\beta\bar\zeta\xi+\beta\bar z_2 z_1} = \langle K^\beta_\zeta, K^\beta_\xi\rangle\langle K^\beta_{z_2}, K^\beta_{z_1}\rangle.
\end{aligned}$$

因此，定理 3.1 中的等式对所有 ϕ、ψ、g、$h \in \mathcal{D}_{F^2_\beta}$ 均成立，其中

$$\mathcal{D}_{F^2_\beta} = \operatorname{span}\{K^\beta_z : z \in \mathbb{C}\},$$

它在 F^2_β 中稠密。

与正交关系类似，我们也可以利用Bargmann 变换证明，局部化算子 $L^{\phi}_{,f}{}^{\psi}$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 上酉等价于由半双线性型定义的算子 L 在 F^2_β 上

$$\langle Lg, h\rangle = \frac{\beta}{\pi}\int_{\mathbb{C}} f(z)\langle g, W^\beta_z\phi\rangle\langle W^\beta_z\psi, h\rangle\, dA(z), \quad g, h \in F^2_\beta. \tag{3.2}$$

这里我们滥用记号，用 g、h、ϕ、$\psi \in F^2_\beta$ 表示原函数 g、h、ϕ、$\psi \in L^2(\mathbb{R})$的巴格曼变换，并用 $f(z)$ 表示原来的 $f(x, -\beta\omega/\pi)$。

该算子 L 与$L^2(\mathbb{R})$上的局部化算子有些不一致。更具体地说，时频局部化算子 $L^{\phi}_{,f}{}^{\psi}$ 是针对符号函数 f 在 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$上定义的，而不是 $\mathbb{R}$，后者才是希尔伯特空间 $L^2(\mathbb{R})$的底测度空间。但算子 L 则基于符号函数 f 在 $\mathbb{C}$上定义，而这正是希尔伯特空间 F^2_β 的底测度空间。为纠正这一差异，并与Bergman空间的设定保持一致，我们注意到，高斯测度的旋转不变性意味着定理3.1中的正交关系可以改写为

$$\frac{\beta}{\pi}\int_{\mathbb{C}}\langle g, W^\beta_z\phi_\theta\rangle\langle W^\beta_z\psi_\theta, h\rangle\, dA(z) = \langle g, h\rangle\langle\psi_\theta, \phi_\theta\rangle = \langle g, h\rangle\langle\psi, \phi\rangle,$$

其中 $\phi_\theta(\zeta) = \phi(e^{i\theta}\zeta)$ 满足 $\theta \in [0, 2\pi]$，且内积取自 F^2_β。因此，

$$\frac{\beta}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi}\int_{\mathbb{C}}\langle g, W^\beta_z\phi_\theta\rangle\langle W^\beta_z\psi_\theta, h\rangle\, dA(z) = \langle g, h\rangle\langle\psi, \phi\rangle.$$

这促使我们给出局部化算子 $\mathbb{L}^{\phi}_{,f}{}^{\psi}$ 在 F^2_β 上的定义 1.1，即

$$\langle \mathbb{L}^{\phi,\psi,\beta}_f g, h\rangle = \frac{\beta}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} f(e^{i\theta}, z)\langle g, W^\beta_z\phi_\theta\rangle\langle W^\beta_z\psi_\theta, h\rangle\, dA(z),$$

其中内积取自 F^2_α，符号函数 f 定义在$\mathbb{T}\times\mathbb{C}$上，而非 $\mathbb{C}$。上文中的算子 $\mathbb{L}^{\phi}_{,f}{}^{\psi}$ 似乎比算子 $L^{\phi}_{,f}{}^{\psi}$ 更符合时频局部化算子 L （3.2）。

接下来，我们将注意力转向加权 Bergman 空间。令 $\operatorname{Aut}(\mathbb{D})$ 表示单位圆盘的莫比乌斯群，该群由$\mathbb{D}$的所有双射解析映射组成。回想一下，每个 $\varphi \in \operatorname{Aut}(\mathbb{D})$ 都可以写成如下形式：$\varphi(z) = e^{i\theta}\varphi_a(z)$,

其中 $e^{i\theta}\in\mathbb{T}$、 $a\in\mathbb{D}$，以及

$$\varphi_a(z)=\frac{z-a}{1-\bar{a}z},\qquad z\in\mathbb{D}.$$

容易看出， $e^{i\theta}$ 与 a 由 φ唯一确定。因此，我们可以在拓扑意义下将$\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$与 $\mathbb{T}\times\mathbb{D}$等同。我们将首先阐明 $\mathbb{T}\times\mathbb{D}$上的何种运算对应于 $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$上的复合（即群运算）。为方便起见，我们将$\varphi_{e^{i\theta},a}(z)=e^{i\theta}\varphi_a(z)$ 记为 $(e^{i\theta},z)\in\mathbb{T}\times\mathbb{D}$。

引理 3.2. 对于 $e^{i\theta},e^{i\eta}\in\mathbb{T}$ 和 $a,b\in\mathbb{D}$， 我们有

$$\varphi_{e^{i\theta},a}\circ\varphi_{e^{i\eta},b}(\zeta)=e^{i(\theta+\eta)}\frac{1+e^{-i\eta}a\bar{b}}{1+e^{i\eta}\bar{a}b}\varphi_{\varphi_{-b}(e^{-i\eta}a)}(\zeta),\qquad \zeta\in\mathbb{D}.$$

证明。 这可由直接计算得出。事实上，

$$\begin{aligned}\varphi_{e^{i\theta},a}\circ\varphi_{e^{i\eta},b}(\zeta)&=e^{i\theta}\frac{\varphi_{e^{i\eta},b}(\zeta)-a}{1-\bar{a}\varphi_{e^{i\eta},b}(\zeta)}=e^{i\theta}\frac{e^{i\eta}(\zeta-b)-a(1-\bar{b}\zeta)}{(1-\bar{b}\zeta)-\bar{a}e^{i\eta}(\zeta-b)}\\&=e^{i(\theta+\eta)}\frac{(1+e^{-i\eta}a\bar{b})\zeta-(e^{-i\eta}a+b)}{(1+e^{i\eta}\bar{a}b)-(e^{i\eta}\bar{a}+\bar{b})\zeta}\\&=e^{i(\theta+\eta)}\frac{1+e^{-i\eta}a\bar{b}}{1+e^{i\eta}\bar{a}b}\frac{\zeta-\frac{e^{-i\eta}a+b}{1+e^{-i\eta}a\bar{b}}}{1-\frac{e^{i\eta}\bar{a}+\bar{b}}{1+e^{i\eta}\bar{a}b}\zeta}\\&=e^{i(\theta+\eta)}\frac{1+e^{-i\eta}a\bar{b}}{1+e^{i\eta}\bar{a}b}\varphi_{\varphi_{-b}(e^{-i\eta}a)}(\zeta).\end{aligned}$$

□

作为引理 3.2的推论，我们可以将 $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})=\mathbb{T}\times\mathbb{D}$ 写成，其中 $\mathbb{T}\times\mathbb{D}$ 上的群运算由下式给出

$$(e^{i\theta},a)\cdot(e^{i\eta},b)=\left(e^{i(\theta+\eta)}\frac{1+e^{-i\eta}a\bar{b}}{1+e^{i\eta}\bar{a}b},\varphi_{-b}(e^{-i\eta}a)\right).\tag{3.3}$$

群单位元是 $(1,0)$， $(e^{i\theta},a)$ 的逆元是 $(e^{-i\theta},-e^{i\theta}a)$。

对于 $\alpha>-1$， 我们用 K_z^α 表示 A_α^2 的再生核，即

$$K_z^\alpha(w)=\frac{1}{(1-\bar{z}w)^{2+\alpha}}.$$

z 处的归一化再生核记为 k_z^α，即

$$k_z^\alpha(w)=\frac{(1-|z|^2)^{1+\frac{\alpha}{2}}}{(1-\bar{z}w)^{2+\alpha}}.$$

对于满足 $\varphi(z)=e^{i\theta}\varphi_a(z)$ 的 $\varphi\in\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$， 我们用 $U_\varphi^\alpha=U_{e^{i\theta},\ a}^\alpha$ 表示定义在 A_α^2 上的酉算子

$$U_{e^{i\theta},a}^\alpha f(z)=f\circ\varphi(z)\left[\varphi'(z)\right]^{(2+\alpha)/2}.$$

简单计算可得

$$(U_{e^{i\theta},a}^\alpha 1)(z)=[\varphi'_{e^{i\theta},a}(z)]^{1+\frac{\alpha}{2}}=e^{i(1+\frac{\alpha}{2})\theta}k_a^\alpha(z).$$

由此可得

$$U^{\alpha}_{e^{i\theta},a}f(z)=e^{i(1+\frac{\alpha}{2})\theta}f(e^{i\theta}\varphi_a(z))k^{\alpha}_a(z)=e^{i(1+\frac{\alpha}{2})\theta}U^{\alpha}_a f_\theta(z), \tag{3.4}$$

其中 $f_\theta(z)=f(e^{i\theta}z)$，并且

$$U^{\alpha}_{e^{i\eta},b}U^{\alpha}_{e^{i\theta},a}=U^{\alpha}_{(e^{i\theta},a)\cdot(e^{i\eta},b)}=U^{\alpha}_{\left(e^{i(\theta+\eta)}\frac{1+e^{-i\eta}a\bar{b}}{1+e^{i\eta}\bar{a}b},\varphi_{-b}(e^{-i\eta}a)\right)}. \tag{3.5}$$

此外， $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})=\mathbb{T}\times\mathbb{D}$ 的 Haar 测度由下式给出

$$dH(e^{i\theta},z)=\frac{d\theta}{2\pi}\,d\lambda(z),$$

其中

$$d\lambda(z)=\frac{dA(z)}{\pi(1-|z|^2)^2}$$

是 $\mathbb{D}$上的莫比乌斯不变面积测度。

在本节余下部分中，内积 $\langle\,,\,\rangle$ 始终表示加权伯格曼空间 A^2_α 上的内积。

引理 3.3。对于 z_1， z_2， ζ， $\xi\in\mathbb{D}$ 和 $\alpha>-1$，有

$$\begin{aligned}(\alpha+1)\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi}\int_{\mathbb{D}}&\langle K^{\alpha}_\zeta,U^{\alpha}_{e^{i\theta},z}K^{\alpha}_{z_1}\rangle\langle U^{\alpha}_{e^{i\theta},z}K^{\alpha}_{z_2},K^{\alpha}_\xi\rangle\,d\lambda(z)\\&=\langle K^{\alpha}_\zeta,K^{\alpha}_\xi\rangle\langle K^{\alpha}_{z_2},K^{\alpha}_{z_1}\rangle.\end{aligned} \tag{3.6}$$

证明。 固定 ζ 和 ξ，注意到（3.6）的两边关于 z_1解析，且关于 z_2共轭解析。根据多复变函数论中的一个著名事实，只需证明（3.6）对 $z_1=z_2$成立。将 $(1-|w|^2)^{2+\alpha}$ 乘到（3.6）两边，并乘以 $w=z_1=z_2$，只需证明

$$(\alpha+1)\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi}\int_{\mathbb{D}}\overline{(U^{\alpha}_{e^{i\theta},z}k^{\alpha}_w)(\zeta)}(U^{\alpha}_{e^{i\theta},z}k^{\alpha}_w)(\xi)d\lambda(z)=K^{\alpha}_\zeta(\xi). \tag{3.7}$$

由（3.4）和（3.5）可得

$$\begin{aligned}U^{\alpha}_{e^{i\theta},z}k^{\alpha}_w&=U^{\alpha}_{e^{i\theta},z}U^{\alpha}_{1,w}1=U^{\alpha}_{e^{i\theta}\frac{1+we^{-i\theta}\bar{z}}{1+\bar{w}e^{i\theta}z},\varphi_{-z}(e^{-i\theta}w)}1\\&=\left[e^{i\theta}\frac{1+we^{-i\theta}\bar{z}}{1+\bar{w}e^{i\theta}z}\right]^{1+\frac{\alpha}{2}}k^{\alpha}_{\varphi_{-z}(e^{-i\theta}w)}.\end{aligned} \tag{3.8}$$

这意味着

$$\left|\overline{(U^{\alpha}_{e^{i\theta},z}k^{\alpha}_w)(\zeta)}(U^{\alpha}_{e^{i\theta},z}k^{\alpha}_w)(\xi)\right|\le\frac{(1+|w|)^{2+\alpha}}{(1-|w|)^{2+\alpha}}\frac{(1-|z|^2)^{2+\alpha}}{(1-|\zeta|)^{2+\alpha}(1-|\xi|)^{2+\alpha}}. \tag{3.9}$$

显然，我们有

$$\varphi_{-z}(e^{-i\theta}w)=-e^{-i\theta}\frac{1+e^{i\theta}z\bar{w}}{1+\overline{e^{i\theta}z}w}\varphi_w(-e^{i\theta}z). \tag{3.10}$$

结合（3.8）、（3.9）和（3.10），并两次应用富比尼定理和两次变量代换，我们得到

$$
\begin{aligned}
&(\alpha+1)\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi}\int_{\mathbb{D}}\overline{(U^\alpha_{e^{i\theta},z}k^\alpha_w)(\zeta)}(U^\alpha_{e^{i\theta},z}k^\alpha_w)(\xi)\,d\lambda(z)\\
&=(\alpha+1)\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi}\int_{\mathbb{D}}\overline{k^\alpha_{\varphi_{-z}(e^{-i\theta}w)}(\zeta)}k^\alpha_{\varphi_{-z}(e^{-i\theta}w)}(\xi)\,d\lambda(z)\\
&=(\alpha+1)\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi}\int_{\mathbb{D}}\overline{k^\alpha_{-e^{-i\theta}\frac{1+e^{i\theta}z\bar{w}}{1+e^{i\theta}z\bar{w}}\varphi_w(-e^{i\theta}z)}(\zeta)}k^\alpha_{-e^{-i\theta}\frac{1+e^{i\theta}z\bar{w}}{1+e^{i\theta}z\bar{w}}\varphi_w(-e^{i\theta}z)}(\xi)\,d\lambda(z)\\
&=(\alpha+1)\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi}\int_{\mathbb{D}}\overline{k^\alpha_{-e^{-i\theta}\frac{1+z\bar{w}}{1+\bar{z}w}\varphi_w(-z)}(\zeta)}k^\alpha_{-e^{-i\theta}\frac{1+z\bar{w}}{1+\bar{z}w}\varphi_w(-z)}(\xi)\,d\lambda(z)\\
&=(\alpha+1)\int_{\mathbb{D}}d\lambda(z)\int_0^{2\pi}\overline{k^\alpha_{-e^{-i\theta}\frac{1+z\bar{w}}{1+\bar{z}w}\varphi_w(-z)}(\zeta)}k^\alpha_{-e^{-i\theta}\frac{1+z\bar{w}}{1+\bar{z}w}\varphi_w(-z)}(\xi)\,\frac{d\theta}{2\pi}\\
&=(\alpha+1)\int_{\mathbb{D}}d\lambda(z)\int_0^{2\pi}\overline{k^\alpha_{-e^{-i\theta}\varphi_w(-z)}(\zeta)}k^\alpha_{-e^{-i\theta}\varphi_w(-z)}(\xi)\,\frac{d\theta}{2\pi}\\
&=(\alpha+1)\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi}\int_{\mathbb{D}}\overline{k^\alpha_{-e^{-i\theta}\varphi_w(-z)}(\zeta)}k^\alpha_{-e^{-i\theta}\varphi_w(-z)}(\xi)\,d\lambda(z)\\
&=(\alpha+1)\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi}\int_{\mathbb{D}}\overline{k^\alpha_z(\zeta)}k^\alpha_z(\xi)\,d\lambda(z)\\
&=\int_{\mathbb{D}}K^\alpha_\zeta(z)\overline{K^\alpha_\xi(z)}\,dA_\alpha(z)\\
&=K^\alpha_\zeta(\xi).
\end{aligned}
$$

这证明了恒等式（3.7），并完成了该引理的证明。 □

下述定理可由舒尔正交关系导出（参见 [8,定理 14.33]，例如），如果我们考虑由$\rho_\alpha(e^{i\theta},z)=U^\alpha_{e^{i\theta},\,z}$定义的 $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ 的不可约酉表示。我们在此基于上文对莫比乌斯映射和伯格曼核的计算给出一个直接证明。

定理 3.4. 对任意满足 $\alpha>-1$ 的 $\phi,\ \psi,\ g,\ h\in A^2_\alpha$，我们有

$$
(\alpha+1)\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi}\int_{\mathbb{D}}\langle g,\,U^\alpha_z\phi_\theta\rangle\langle U^\alpha_z\psi_\theta,\,h\rangle\,d\lambda(z)=\langle g,\,h\rangle\langle\psi,\,\phi\rangle,
$$

其中 $\phi_\theta(z)=\phi(e^{i\theta}z)$和

$$
U^\alpha_z f(\zeta)=f\circ\varphi_z(\zeta)\left[\varphi_z'(\zeta)\right]^{(2+\alpha)/2}.
$$

证明。令 $\mathcal{D}_\alpha$ 表示由 中的再生核的有限线性组合构成的向量空间A^2_α。显然 $\mathcal{D}_\alpha$ 在 A^2_α中稠密。由引理 3.3 和（3.4），

我们有

$$(\alpha+1)\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi}\int_{\mathbb{D}}\langle g,\, U_z^\alpha\phi_\theta\rangle\langle U_z^\alpha\psi_\theta,\, h\rangle\, d\lambda(z)=\langle g,\, h\rangle\langle\psi,\, \phi\rangle \tag{3.11}$$

对所有 ϕ、ψ、g、$h\in\mathcal{D}_\alpha$。

固定 ϕ、$\psi\in\mathcal{D}_\alpha$。半双线性型

$$(g,h)\mapsto(\alpha+1)\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi}\int_{\mathbb{D}}\langle g,\, U_z^\alpha\phi_\theta\rangle\langle U_z^\alpha\psi_\theta,\, h\rangle\, d\lambda(z) \tag{3.12}$$

在 $\mathcal{D}_\alpha\times\mathcal{D}_\alpha$ 上定义良好，并且与半双线性型在 $\mathcal{D}_\alpha\times\mathcal{D}_\alpha$ 上的限制相一致

$$(g,h)\mapsto\langle g,\, h\rangle\langle\psi,\, \phi\rangle,\qquad g,h\in A_\alpha^2.$$

因此（3.12）可延拓为 $A_\alpha^2\times A_\alpha^2$ 上的有界半双线性型。由此，恒等式（3.11）对 g、$h\in A_\alpha^2$和 ϕ、$\psi\in\mathcal{D}_\alpha$成立。类似地，对于任意 g，$h\in A_\alpha^2$，半双线性型

$$(\psi,\phi)\mapsto(\alpha+1)\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi}\int_{\mathbb{D}}\langle g,\, U_z^\alpha\phi_\theta\rangle\langle U_z^\alpha\psi_\theta,\, h\rangle\, d\lambda(z)$$

与 $(\psi,\phi)\mapsto\langle g,\, h\rangle\langle\psi,\, \phi\rangle$ 一致，并且有界地延拓到 $A_\alpha^2\times A_\alpha^2$。这就证明了所需结果。□

定理 3.4 中的正交关系解释了为什么对 A_α^2 的局部化算子要按照定义 1.2来定义。由定理 3.4 和柯西－施瓦茨不等式可知：

$$\|\mathbf{L}_f^{\phi,\psi,\alpha}\|\le\|f\|_\infty$$

对于 $f\in L^\infty(\mathbb{T}\times\mathbb{D})$和 ϕ，$\psi\in A_\alpha^2$。

显然，定义 1.2中给出的 A_α^2 上的局部化算子 $\mathbf{L}^{\phi}_{\psi,f}{}^{\alpha}$，对于属于某些比 $L^\infty(\mathbb{T}\times\mathbb{D})$更一般的符号类的 f，也有意义。例如，若 $f\in L^1(\mathbb{T}\times\mathbb{D},dH)$，则 $\mathbf{L}^{\phi}_{\psi,f}{}^{\alpha}$是良定义的。注意，$\mathbf{L}^{\phi}_{\psi,f}{}^{\alpha}$可改写为如下算子值积分：

$$\mathbf{L}_f^{\phi,\psi,\alpha}=(\alpha+1)\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi}\int_{\mathbb{D}}f(e^{i\theta},z)\big[(U_z^\alpha\psi_\theta)\otimes(U_z^\alpha\phi_\theta)\big]\,d\lambda(z), \tag{3.13}$$

其中，$x\otimes y$是由 $(x\otimes y)z=\langle z,\, y\rangle x$在 A_α^2 上定义的秩一算子。相同的说明也适用于 Fock 空间 F_β^2 上的局部化算子。

4. A_α^2上局部化算子的弱收敛

本节将证明，当 r 趋于无穷时，Bergman空间$A_{\beta r^2}^2$上的局部化算子弱收敛到 Fock 空间 F_β^2 上的一个局部化算子。我们还给出这个极限定理的若干应用。

引理 4.1. 对于任意 $\beta > 0$ 和 $\phi,\ \psi,\ g,\ h \in F^2_\beta$，有

$$\begin{aligned}\lim_{r\to\infty}(\beta r^2+1)\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi}\int_{\mathbb{D}}\langle g_r,\, U_z^{\beta r^2}(\phi_r)_\theta\rangle_{A^2_{\beta r^2}}\langle U_z^{\beta r^2}(\psi_r)_\theta,\, h_r\rangle_{A^2_{\beta r^2}}\,d\lambda(z)\\ =\frac{\beta}{\pi}\int_{\mathbb{C}}\langle g,\, W_z^\beta\phi\rangle_{F^2_\beta}\langle W_z^\beta\psi,\, h\rangle_{F^2_\beta}\,dA(z)\\ =\frac{\beta}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi}\int_{\mathbb{C}}\langle g,\, W_z^\beta\phi_\theta\rangle_{F^2_\beta}\langle W_z^\beta\psi_\theta,\, h\rangle_{F^2_\beta}\,dA(z),\end{aligned}$$

其中 $\phi_\theta(\zeta)=\phi(e^{i\theta}\zeta)$和 $g_r(\zeta)=g(r\zeta)$。

证明。 由定理 2.1、3.4和3.1，我们推得

$$\begin{aligned}&(\beta r^2+1)\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi}\int_{\mathbb{D}}\langle g_r,\, U_z^{\beta r^2}(\phi_r)_\theta\rangle_{A^2_{\beta r^2}}\langle U_z^{\beta r^2}(\psi_r)_\theta,\, h_r\rangle_{A^2_{\beta r^2}}\,d\lambda(z)\\ &=\langle g_r,\, h_r\rangle_{A^2_{\beta r^2}}\langle\psi_r,\, \phi_r\rangle_{A^2_{\beta r^2}}\\ &=\left(\int_{\mathbb{D}} g(rz)\overline{h(rz)}\,dA_{\beta r^2}(z)\right)\left(\int_{\mathbb{D}}\psi(rz)\overline{\phi(rz)}\,dA_{\beta r^2}(z)\right)\\ &\xrightarrow{r\to\infty}\left(\int_{\mathbb{C}} g(z)\overline{h(z)}\,d\mu_\beta(z)\right)\left(\int_{\mathbb{C}}\psi(z)\overline{\phi(z)}\,d\mu_\beta(z)\right)\\ &=\langle g,\, h\rangle_{F^2_\beta}\langle\psi,\, \phi\rangle_{F^2_\beta}\\ &=\frac{\beta}{\pi}\int_{\mathbb{C}}\langle g,\, W_z^\beta\phi\rangle_{F^2_\beta}\langle W_z^\beta\psi,\, h\rangle_{F^2_\beta}\,dA(z)\\ &=\frac{\beta}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi}\int_{\mathbb{C}}\langle g,\, W_z^\beta\phi_\theta\rangle_{F^2_\beta}\langle W_z^\beta\psi_\theta,\, h\rangle_{F^2_\beta}\,dA(z),\end{aligned}$$

其中最后一个等式源于高斯测度的旋转不变性；参见上一节前面的部分。至此，引理得证。□

引理 4.2。 设 $\phi,\ \psi\in F^2_\beta$且 $\beta>0$。对于 $g,\ h\in F^2_\gamma$且 $0<\gamma<\beta$、$z\in\mathbb{C}$和 $\theta\in[0,2\pi)$，有

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\langle g_r,\, U_{z/r}^{\beta r^2}(\phi_r)_\theta\rangle_{A^2_{\beta r^2}}\langle U_{z/r}^{\beta r^2}(\psi_r)_\theta,\, h_r\rangle_{A^2_{\beta r^2}}}{\left(1-\left|\frac{z}{r}\right|^2\right)^2}=\langle g,\, W_z^\beta\phi_\theta\rangle_{F^2_\beta}\langle W_z^\beta\psi_\theta,\, h\rangle_{F^2_\beta}.$$

证明。只需证明

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\langle g_r,\, U_{z/r}^{\beta r^2}(\phi_r)_\theta\rangle_{A^2_{\beta r^2}}}{1-\left|\frac{z}{r}\right|^2}=\langle g,\, W_z^\beta\phi_\theta\rangle_{F^2_\beta}. \tag{4.1}$$

固定 $z \in \mathbb{C}$ 并进行变量替换。对于 $|z| < r$，我们得到

$$\begin{aligned}
&\frac{\langle g_r, U^{\beta r^2}_{z/r}(\phi_r)_\theta\rangle_{A^2_{\beta r^2}}}{1-\left|\frac{z}{r}\right|^2} \\
&= \frac{\beta r^2+1}{1-\left|\frac{z}{r}\right|^2}\int_{\mathbb{D}} g_r(\zeta)\overline{\phi_r\left(e^{i\theta}\frac{\zeta-\frac{z}{r}}{1-\frac{\overline{z}\zeta}{r}}\right)\left[\frac{1-\left|\frac{z}{r}\right|^2}{\left(1-\frac{\overline{z}\zeta}{r}\right)^2}\right]^{1+\frac{\beta r^2}{2}}}\,(1-|\zeta|^2)^{\beta r^2}\,\frac{dA(\zeta)}{\pi} \\
&= \frac{\beta r^2+1}{1-\left|\frac{z}{r}\right|^2}\int_{\mathbb{D}} g(r\zeta)\overline{\phi\left(e^{i\theta}\frac{r\zeta-z}{1-\frac{\overline{z}\zeta}{r}}\right)\left[\frac{1-\left|\frac{z}{r}\right|^2}{\left(1-\frac{\overline{z}\zeta}{r}\right)^2}\right]^{1+\frac{\beta r^2}{2}}}\,(1-|\zeta|^2)^{\beta r^2}\,\frac{dA(\zeta)}{\pi} \\
&= \frac{\beta r^2+1}{r^2}\left(1-\left|\frac{z}{r}\right|^2\right)^{\frac{\beta r^2}{2}}\int_{r\mathbb{D}} g(\zeta)\overline{\phi\left(e^{i\theta}\frac{\zeta-z}{1-\frac{\overline{z}\zeta}{r^2}}\right)\left(1-\frac{\overline{z}\zeta}{r^2}\right)^{-(2+\beta r^2)}}\left(1-\frac{|\zeta|^2}{r^2}\right)^{\beta r^2}\frac{dA(\zeta)}{\pi} \\
&= \frac{\beta r^2+1}{r^2}\left(1-\left|\frac{z}{r}\right|^2\right)^{\frac{\beta r^2}{2}}\int_{\mathbb{C}} g(\zeta)\overline{\phi\left(e^{i\theta}\frac{\zeta-z}{1-\frac{\overline{z}\zeta}{r^2}}\right)F_r(\zeta)}\,\frac{dA(\zeta)}{\pi}, \qquad (4.2)
\end{aligned}$$

其中

$$F_r(\zeta) = \mathbb{1}_{r\mathbb{D}}(\zeta)\left(1-\frac{z\overline{\zeta}}{r^2}\right)^{-(2+\beta r^2)}\left(1-\frac{|\zeta|^2}{r^2}\right)^{\beta r^2}.$$

由（2.3），我们有

$$\mathbb{1}_{r\mathbb{D}}(\zeta)\left(1-\frac{|\zeta|^2}{r^2}\right)^{\beta r^2} = \mathbb{1}_{r\mathbb{D}}(\zeta)\left[\left(1-\frac{|\zeta|^2}{r^2}\right)^{\frac{\beta r^2}{|\zeta|^2}}\right]^{|\zeta|^2} \le e^{-\beta|\zeta|^2}. \qquad (4.3)$$

容易看出

$$\left(1-\frac{1}{x}\right)^{1-x} = \left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{x-1} \le e, \qquad x \in (1,\infty). \qquad (4.4)$$

由于 $\left|1-\frac{\overline{z}\zeta}{r^2}\right| \ge 1-\frac{|z\zeta|}{r^2}$，由（4.4）可得

$$\mathbb{1}_{r\mathbb{D}}(\zeta)\left|1-\frac{z\overline{\zeta}}{r^2}\right|^{-(2+\beta r^2)} \le \mathbb{1}_{r\mathbb{D}}(\zeta)\left(1-\frac{|z\zeta|}{r^2}\right)^{-(2+\beta r^2)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{1}_{r\mathbb{D}}(\zeta)\left[\left(1-\frac{|z\zeta|}{r^2}\right)^{1-\frac{r^2}{|z\zeta|}}\right]^{(2+\beta r^2)\frac{|z\zeta|}{r^2-|z\zeta|}} \\
&\le \mathbb{1}_{r\mathbb{D}}(\zeta)\exp\left[\frac{(2+\beta r^2)|z\zeta|}{r^2-|z\zeta|}\right] \\
&= \mathbb{1}_{r\mathbb{D}}(\zeta)\exp\left[\frac{\beta r^2|z\zeta|}{r^2-|z\zeta|}+\frac{2|z\zeta|}{r^2-|z\zeta|}\right]. \qquad (4.5)
\end{aligned}
$$

由于 $\gamma<\beta$，我们可以选取一个正整数 n，使得 $\gamma<\beta^{\frac{(n-2)^2-2}{(n-1)^2}}$。我们可以假设 r 足够大，使得 $|z|<\frac{r}{n}$。那么对于 $|\zeta|<r$，有

$$
r^2-|z\zeta|\ge r^2-r|z|\ge r^2-\frac{r^2}{n}=\frac{n-1}{n}r^2,
$$

从而

$$
\frac{2|z\zeta|}{r^2-|z\zeta|}\le\frac{2n}{n-1}\frac{|z|}{r}\frac{|\zeta|}{r}\le\frac{2}{n-1},\qquad \frac{\beta r^2|z\zeta|}{r^2-|z\zeta|}\le\frac{\beta n}{n-1}|z\zeta|.
$$

将此与（4.5）结合，我们得到

$$
\mathbb{1}_{r\mathbb{D}}(\zeta)\left|1-\frac{\overline{z}\zeta}{r^2}\right|^{-(2+\beta r^2)}\le e^{\frac{2}{n-1}}e^{\frac{\beta n}{n-1}|z\zeta|}. \qquad (4.6)
$$

由（4.3）和（4.6），

$$
|F_r(\zeta)|\le e^{\frac{2}{n-1}}e^{\frac{\beta n}{n-1}|z\zeta|}e^{-\beta|\zeta|^2}.
$$

由于 $g\in F^2_\gamma$ 且 $\phi\in F^2_\beta$，我们有

$$
|g(\zeta)|\le\|g\|_{F^2_\gamma}e^{\frac{\gamma|\zeta|^2}{2}}
$$

对 $|\zeta|<r$，以及

$$
\left|\phi\left(e^{i\theta}\frac{\zeta-z}{1-\frac{\overline{z}\zeta}{r^2}}\right)\right|\le\|\phi\|_{F^2_\beta}\exp\left[\frac{\beta\left|\frac{\zeta-z}{1-\frac{\overline{z}\zeta}{r^2}}\right|^2}{2}\right]\le\|\phi\|_{F^2_\beta}\exp\left[\frac{\beta n^2}{2(n-1)^2}|\zeta-z|^2\right].
$$

由此可得

$$
\left|g(\zeta)\overline{\phi\left(e^{i\theta}\frac{\zeta-z}{1-\frac{\overline{z}\zeta}{r^2}}\right)}F_r(\zeta)\right|\le\left(e^{\frac{2}{n-1}}\|\phi\|_{F^2_\beta}\|g\|_{F^2_\gamma}\right)e^{\frac{\beta n}{n-1}|z\zeta|+\frac{\beta n^2}{2(n-1)^2}|\zeta-z|^2-(\beta-\frac{\gamma}{2})|\zeta|^2}.
$$

由于 $\gamma < \beta\frac{(n-2)^2-2}{(n-1)^2}$，我们有 $\frac{\beta n^2}{2(n-1)^2} < \beta - \frac{\gamma}{2}$，因此

$$\int_{\mathbb{C}} e^{\frac{\beta n}{n-1}|z\zeta|+\frac{\beta n^2}{2(n-1)^2}|\zeta-z|^2-(\beta-\frac{\gamma}{2})|\zeta|^2}\,dA(\zeta) < \infty.$$

应用控制收敛定理，我们得到

$$\begin{aligned}\lim_{r\to\infty}\int_{\mathbb{C}} g(\zeta)\overline{\phi\left(e^{i\theta}\frac{\zeta-z}{1-\frac{\bar{z}\zeta}{r^2}}\right)}F_r(\zeta)\,\frac{dA(\zeta)}{\pi}\\ = \int_{\mathbb{C}} g(\zeta)\overline{\phi(e^{i\theta}(\zeta-z))e^{\beta\bar{z}\zeta}}e^{-\beta|\zeta|^2}\,\frac{dA(\zeta)}{\pi}. \qquad (4.7)\end{aligned}$$

所需的等式（4.1）现在由（4.2）和（4.7）得出。 □

现在我们证明本节的主要结果。

定理 4.3. 假设 ϕ，$\psi \in F^2_\beta$ 满足 $\beta > 0$ 和 $f \in L^\infty(\mathbb{T}\times\mathbb{C})$。对于任意 $\sigma \geq 0$，我们有

$$\lim_{r\to\infty}\langle \mathbf{L}^{\phi_r,\psi_r,\beta r^2}_{f_{r,\sigma}} g_r,\, h_r\rangle_{A^2_{\beta r^2}} = \langle \mathbb{L}^{\phi,\psi,\beta}_f g,\, h\rangle_{F^2_\beta}, \qquad g,h\in F^2_\beta, \qquad (4.8)$$

其中

$$f_{r,\sigma}(e^{i\theta},z) = (1-|z|^2)^\sigma f(e^{i\theta},rz).$$

证明。首先假设 g、$h \in F^2_\gamma$ 且 $0<\gamma<\beta$。通过变量替换，

$$\begin{aligned}&\langle \mathbf{L}^{\phi_r,\psi_r,\beta r^2}_{f_{r,\sigma}} g_r,\, h_r\rangle_{A^2_{\beta r^2}}\\ &= (\beta r^2+1)\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi}\int_{\mathbb{D}} f_{r,\sigma}(e^{i\theta},z)\langle g_r,\, U^{\beta r^2}_z(\phi_r)_\theta\rangle_{A^2_{\beta r^2}}\langle U^{\beta r^2}_z(\psi_r)_\theta,\, h_r\rangle_{A^2_{\beta r^2}}\,d\lambda(z)\\ &= \frac{\beta r^2+1}{\pi r^2}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi}\int_{r\mathbb{D}}\left(1-\left|\frac{z}{r}\right|^2\right)^\sigma f(e^{i\theta},z)\frac{\langle g_r,\, U^{\beta r^2}_{z/r}(\phi_r)_\theta\rangle_{A^2_{\beta r^2}}\langle U^{\beta r^2}_{z/r}(\psi_r)_\theta,\, h_r\rangle_{A^2_{\beta r^2}}}{\left(1-\left|\frac{z}{r}\right|^2\right)^2}\,dA(z)\\ &= \int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} F_r(z)\,dA(z). \qquad (4.9)\end{aligned}$$

其中

$$F_r(z) = \frac{\beta r^2+1}{\pi r^2}\mathbb{1}_{r\mathbb{D}}(z)\left(1-\left|\frac{z}{r}\right|^2\right)^\sigma f(e^{i\theta},z)\frac{\langle g_r,\, U^{\beta r^2}_{z/r}(\phi_r)_\theta\rangle_{A^2_{\beta r^2}}\langle U^{\beta r^2}_{z/r}(\psi_r)_\theta,\, h_r\rangle_{A^2_{\beta r^2}}}{\left(1-\left|\frac{z}{r}\right|^2\right)^2}.$$

由引理 4.2，可得

$$\lim_{r\to\infty} F_r(z) = \frac{\beta}{\pi} f(e^{i\theta},z)\langle g,\, W^\beta_z\phi_\theta\rangle_{F^2_\beta}\langle W^\beta_z\psi_\theta,\, h\rangle_{F^2_\beta} \qquad (4.10)$$

对几乎处处的 $z \in \mathbb{C}$ 和 $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$成立。我们还有

$$|F_r(z)| \le \|f\|_\infty \frac{\beta r^2+1}{\pi r^2} \mathbb{1}_{r\mathbb{D}}(z) \frac{|\langle g_r,\, U^{\beta r^2}_{z/r}(\phi_r)_\theta \rangle_{A^2_{\beta r^2}}|^2}{2\left(1-\left|\frac{z}{r}\right|^2\right)^2}$$
$$+ \|f\|_\infty \frac{\beta r^2+1}{\pi r^2} \mathbb{1}_{r\mathbb{D}}(z) \frac{|\langle U^{\beta r^2}_{z/r}(\psi_r)_\theta,\, h_r \rangle_{A^2_{\beta r^2}}|^2}{2\left(1-\left|\frac{z}{r}\right|^2\right)^2}. \tag{4.11}$$

由引理 4.2 再次，对几乎每一个 $z \in \mathbb{C}$ 与 $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$，我们有

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\beta r^2+1}{\pi r^2} \mathbb{1}_{r\mathbb{D}}(z) \frac{|\langle g_r,\, U^{\beta r^2}_{z/r}(\phi_r)_\theta \rangle_{A^2_{\beta r^2}}|^2}{2\left(1-\left|\frac{z}{r}\right|^2\right)^2} = \frac{\beta}{2\pi} |\langle g,\, W^\beta_z \phi_\theta \rangle_{F^2_\beta}|^2, \tag{4.12}$$

and

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\beta r^2+1}{\pi r^2} \mathbb{1}_{r\mathbb{D}}(z) \frac{|\langle U^{\beta r^2}_{z/r}(\psi_r)_\theta,\, h_r \rangle_{A^2_{\beta r^2}}|^2}{2\left(1-\left|\frac{z}{r}\right|^2\right)^2} = \frac{\beta}{2\pi} |\langle W^\beta_z \psi_\theta,\, h \rangle_{F^2_\beta}|^2. \tag{4.13}$$

通过变量替换和引理4.1，我们得到

$$\lim_{r\to\infty} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\beta r^2+1}{\pi r^2} \mathbb{1}_{r\mathbb{D}}(z) \frac{|\langle g_r,\, U^{\beta r^2}_{z/r}(\phi_r)_\theta \rangle_{A^2_{\beta r^2}}|^2}{2\left(1-\left|\frac{z}{r}\right|^2\right)^2} dA(z)$$
$$= \lim_{r\to\infty} \frac{\beta r^2+1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \int_{\mathbb{D}} |\langle g_r,\, U^{\beta r^2}_z (\phi_r)_\theta \rangle_{A^2_{\beta r^2}}|^2 d\lambda(z)$$
$$= \frac{\beta}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} |\langle g,\, W^\beta_z \phi_\theta \rangle_{F^2_\beta}|^2 \, dA(z). \tag{4.14}$$

and

$$\lim_{r\to\infty} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\beta r^2+1}{\pi r^2} \mathbb{1}_{r\mathbb{D}}(z) \frac{|\langle U^{\beta r^2}_{z/r}(\psi_r)_\theta,\, h_r \rangle_{A^2_{\beta r^2}}|^2}{2\left(1-\left|\frac{z}{r}\right|^2\right)^2} dA(z)$$
$$= \frac{\beta}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} |\langle W^\beta_z \psi_\theta,\, h \rangle_{F^2_\beta}|^2 \, dA(z). \tag{4.15}$$

鉴于（4.9）、（4.10）、（4.11）、（4.12）、（4.13）、（4.14）和（4.15），我们可以应用控制收敛定理得到

$$\begin{aligned}\lim_{r\to\infty}\langle \mathbf{L}^{\phi_r,\psi_r,\beta r^2}_{f_{r,\sigma}} g,\, h\rangle_{A^2_{\beta r^2}} &= \frac{\beta}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} f(e^{i\theta},z)\langle g,\, W_z^{\beta}\phi_\theta\rangle_{F^2_\beta}\langle W_z^{\beta}\psi_\theta,\, h\rangle_{F^2_\beta}\, dA(z)\\ &= \langle \mathbb{L}^{\phi,\psi,\beta}_f g,\, h\rangle_{F^2_\beta}.\end{aligned}$$

这表明，对于所有 4.8， g， $h\in F^2_\gamma$ 满足 $\gamma<\beta$。

一般而言，设 $g,h\in F^2_\beta$。对于任意 $\varepsilon>0$，存在 g_ε 和 h_ε，属于 F^2_γ，且满足 $\gamma<\beta$，使得

$$\|g-g_\varepsilon\|_{F^2_\beta}<\varepsilon, \qquad \|h-h_\varepsilon\|_{F^2_\beta}<\varepsilon.$$

根据三角不等式，

$$\begin{aligned}\left|\langle \mathbb{L}^{\phi,\psi,\beta}_f g,\, h\rangle_{F^2_\beta} - \langle \mathbf{L}^{\phi_r,\psi_r,\beta r^2}_{f_{r,\sigma}} g_r,\, h_r\rangle_{A^2_{\beta r^2}}\right| &\le \left|\langle \mathbb{L}^{\phi,\psi,\beta}_f g,\, h\rangle_{F^2_\beta} - \langle \mathbb{L}^{\phi,\psi,\beta}_f g_\varepsilon,\, h\rangle_{F^2_\beta}\right|\\ &+ \left|\langle \mathbb{L}^{\phi,\psi,\beta}_f g_\varepsilon,\, h\rangle_{F^2_\beta} - \langle \mathbb{L}^{\phi,\psi,\beta}_f g_\varepsilon,\, h_\varepsilon\rangle_{F^2_\beta}\right|\\ &+ \left|\langle \mathbb{L}^{\phi,\psi,\beta}_f g_\varepsilon,\, h_\varepsilon\rangle_{F^2_\beta} - \langle \mathbf{L}^{\phi_r,\psi_r,\beta r^2}_{f_{r,\sigma}} (g_\varepsilon)_r,\, (h_\varepsilon)_r\rangle_{A^2_{\beta r^2}}\right|\\ &+ \left|\langle \mathbf{L}^{\phi_r,\psi_r,\beta r^2}_{f_{r,\sigma}} (g_\varepsilon)_r,\, (h_\varepsilon)_r\rangle_{A^2_{\beta r^2}} - \langle \mathbf{L}^{\phi_r,\psi_r,\beta r^2}_{f_{r,\sigma}} g_r,\, (h_\varepsilon)_r\rangle_{A^2_{\beta r^2}}\right|\\ &+ \left|\langle \mathbf{L}^{\phi_r,\psi_r,\beta r^2}_{f_{r,\sigma}} g_r,\, (h_\varepsilon)_r\rangle_{A^2_{\beta r^2}} - \langle \mathbf{L}^{\phi_r,\psi_r,\beta r^2}_{f_{r,\sigma}} g_r,\, h_r\rangle_{A^2_{\beta r^2}}\right|\end{aligned}$$

由于 $g_\varepsilon,h_\varepsilon\in F^2_\gamma$，我们先前的分析表明

$$\lim_{r\to\infty}\langle \mathbf{L}^{\phi_r,\psi_r,\beta r^2}_{f_{r,\sigma}} (g_\varepsilon)_r,\, (h_\varepsilon)_r\rangle_{A^2_{\beta r^2}} = \langle \mathbb{L}^{\phi,\psi,\beta}_f g_\varepsilon,\, h_\varepsilon\rangle_{F^2_\beta}.$$

此外，由柯西-施瓦茨不等式可得

$$\left|\langle \mathbb{L}^{\phi,\psi,\beta}_f g,\, h\rangle_{F^2_\beta} - \langle \mathbb{L}^{\phi,\psi,\beta}_f g_\varepsilon,\, h\rangle_{F^2_\beta}\right| = \left|\langle \mathbb{L}^{\phi,\psi,\beta}_f (g-g_\varepsilon),\, h\rangle_{F^2_\beta}\right| \le \|f\|_\infty\|h\|\varepsilon,$$

and

$$\left|\langle \mathbb{L}^{\phi,\psi,\beta}_f g_\varepsilon,\, h\rangle_{F^2_\beta} - \langle \mathbb{L}^{\phi,\psi,\beta}_f g_\varepsilon,\, h_\varepsilon\rangle_{F^2_\beta}\right| \le \|f\|_\infty\|g_\varepsilon\|\varepsilon.$$

由推论2.2 以及再次应用柯西-施瓦茨不等式，

$$\begin{aligned}&\left|\langle \mathbf{L}^{\phi_r,\psi_r,\beta r^2}_{f_{r,\sigma}} (g_\varepsilon)_r,\, (h_\varepsilon)_r\rangle_{A^2_{\beta r^2}} - \langle \mathbf{L}^{\phi_r,\psi_r,\beta r^2}_{f_{r,\sigma}} g_r,\, (h_\varepsilon)_r\rangle_{A^2_{\beta r^2}}\right|\\ &\quad\le \|f\|_\infty\|(h_\varepsilon)_r\|_{A^2_{\beta r^2}}\|(g-g_\varepsilon)_r\|_{A^2_{\beta r^2}}\\ &\quad\to \|f\|_\infty\|h_\varepsilon\|_{F^2_\beta}\|g-g_\varepsilon\|_{F^2_\beta}\end{aligned}$$

作为 $r\to\infty$，并且

$$\begin{aligned}&\left|\langle \mathbf{L}^{\phi_r,\psi_r,\beta r^2}_{f_{r,\sigma}} g_r,\, (h_\varepsilon)_r\rangle_{A^2_{\beta r^2}} - \langle \mathbf{L}^{\phi_r,\psi_r,\beta r^2}_{f_{r,\sigma}} g_r,\, h_r\rangle_{A^2_{\beta r^2}}\right|\\ &\quad\le \|f\|_\infty\|g_r\|_{A^2_{\beta r^2}}\|(h-h_\varepsilon)_r\|_{A^2_{\beta r^2}}\end{aligned}$$

$$\to \|f\|_\infty \|g\|_{F^2_\beta} \|h - h_\varepsilon\|_{F^2_\beta}$$

作为 $r \to \infty$。这表明（4.8）对所有 $g,\ h \in F^2_\beta$。 □

推论 4.4。 设 $\phi,\psi \in F^2_\beta$ 满足 $\beta > 0$ 且 $f \in L^\infty(\mathbb{T}\times\mathbb{C})$。对于任意 $\sigma \geq 0$，有

$$\|\mathbb{L}_f^{\phi,\psi,\beta}\|_{F^2_\beta} \leq \limsup_{r\to\infty} \|\mathbf{L}_{f_{r,\sigma}}^{\phi_r,\psi_r,\beta r^2}\|_{A^2_{\beta r^2}}, \tag{4.16}$$

其中 $f_{r,\sigma}(e^{i\theta},z) = (1-|z|^2)^\sigma f(e^{i\theta},rz)$。

证明。 由定理4.3、推论 2.2以及柯西-施瓦茨不等式，可得

$$\begin{aligned}
|\langle \mathbb{L}_f^{\phi,\psi,\beta} g,\, h\rangle_{F^2_\beta}| &= \lim_{r\to\infty} |\langle \mathbf{L}_{f_{r,\sigma}}^{\phi_r,\psi_r,\beta r^2} g_r,\, h_r\rangle_{A^2_{\beta r^2}}| \\
&\leq \limsup_{r\to\infty} \left(\|\mathbf{L}_{f_{r,\sigma}}^{\phi_r,\psi_r,\beta r^2}\|_{A^2_{\beta r^2}} \|g_r\|_{A^2_{\beta r^2}} \|h_r\|_{A^2_{\beta r^2}}\right) \\
&= \left(\limsup_{r\to\infty} \|\mathbf{L}_{f_{r,\sigma}}^{\phi_r,\psi_r,r^2}\|_{A^2_{\beta r^2}}\right) \|g\|_{F^2_\beta} \|h\|_{F^2_\beta}
\end{aligned}$$

对于所有 $g,h \in F^2_\beta$ 均成立。对所有满足 $\|h\|_{F^2_\beta} \leq 1$ 的 $h \in F^2_\beta$ 取上确界，即得所需不等式。□

若 $\phi = \psi = 1$，定理 4.3 和推论 4.4建立了福克空间上的托普利兹算子与加权伯格曼空间上的托普利兹算子之间的联系。另请注意，(4.16) 对更一般的符号也成立，且该不等式是尖锐的。对于$f \in L^2(\mathbb{C},d\mu_\beta)$ 使得 $fK_z^\beta \in L^2(\mathbb{C},d\mu_\beta)$ 对所有 $z \in \mathbb{C}$，托普利兹算子$\mathbb{T}_f$ 在 F^2_β 上稠密定义，且

$$\mathbb{T}_f^\beta g(z) = \int_{\mathbb{C}} f(w)g(w)e^{\beta z\bar{w}}\, d\mu_\beta(w),$$

其中 $g \in \mathcal{D}_{F^2_\beta} = \operatorname{span}\{K_z^\beta : z \in \mathbb{C}\}$。

定理 4.5。 设 $\beta > 0$。若存在 $f \in L^2(\mathbb{C},d\mu_\beta)$，使得对于所有$z \in \mathbb{C}$，都有 $fK_z^\beta \in L^2(\mathbb{C},d\mu_\beta)$，则

$$\|\mathbb{T}_f^\beta\|_{F^2_\beta} \leq \limsup_{r\to\infty} \|\mathbf{T}_{f_{r,\sigma}}^{\beta r^2}\|_{A^2_{\beta r^2}} \tag{4.17}$$

对于任意 $\sigma \geq 0$，其中 $f_{r,\ \sigma}(z) = (1-|z|^2)^\sigma f(rz)$。此外，当 $f = \mathbb{1}_\Omega$ 时等号成立，其中 Ω 是 $\mathbb{C}$ 中以0为中心的任意欧几里得圆盘，而 $\mathbb{1}_\Omega$ 是 Ω的示性函数。

证明。 由定理2.1 和推论 2.2，可得

$$\begin{aligned}
|\langle \mathbb{T}_f^\beta g,\, h\rangle_{F^2_\beta}| &= \left|\int_{\mathbb{C}} f(w)g(w)\overline{h(w)}d\mu_\beta(w)\right| \\
&= \lim_{r\to\infty} \left|\int_{\mathbb{D}} f_r(w)g_r(w)\overline{h_r(w)}\, dA_{\beta r^2+\sigma}(w)\right|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{r\to\infty} \frac{\beta r^2+\sigma+1}{\beta r^2+1} \left| \int_{\mathbb{D}} f_{r,\sigma}(w) g_r(w) \overline{h_r(w)}\, dA_{\beta r^2}(w) \right| \\
&= \lim_{r\to\infty} \left| \langle \mathbf{T}^{\beta r^2}_{f_{r,\sigma}} g_r,\, h_r \rangle_{A^2_{\beta r^2}} \right| \\
&\le \limsup_{r\to\infty} \left(\|\mathbf{T}^{\beta r^2}_{f_{r,\sigma}}\|_{A^2_{\beta r^2}} \|g_r\|_{A^2_{\beta r^2}} \|h_r\|_{A^2_{\beta r^2}} \right) \\
&= \left(\limsup_{r\to\infty} \|\mathbf{T}^{\beta r^2}_{f_{r,\sigma}}\|_{A^2_{\beta r^2}} \right) \|g\|_{F^2_\beta} \|h\|_{F^2_\beta}
\end{aligned}
$$

对于 $g, h \in \mathcal{D}_{F^2_\beta}$。由此可得

$$\|\mathbb{T}^\beta_f\|_{F^2_\beta} \le \limsup_{r\to\infty} \|\mathbf{T}^{\beta r^2}_{f_{r,\sigma}}\|_{A^2_{\beta r^2}}.$$

接下来，我们证明当 $f = \mathbb{1}_\Omega$时，等式（ Ω4.17）成立，其中$B(0,R)$ 是 $\mathbb{C}$ 中以0 为圆心、半径为 R的圆盘。 F^2_β 的一个标准正交基为

$$\omega^\beta_n(z) = \sqrt{\frac{\beta^n}{n!}}\, z^n, \qquad n \ge 0.$$

对于非负整数 m 和 n，有

$$
\begin{aligned}
\langle \mathbb{T}^\beta_f \omega^\beta_n,\, \omega^\beta_m \rangle_{F^2_\beta} &= \sqrt{\frac{\beta^n \beta^m}{n!m!}} \int_{B(0,R)} \zeta^n \bar{\zeta}^m\, d\mu_\beta(\zeta) \\
&= \frac{\beta}{\pi} \sqrt{\frac{\beta^n \beta^m}{n!m!}} \int_0^R \int_0^{2\pi} x^{n+m+1} e^{i(n-m)\theta} e^{-\beta x^2}\, d\theta\, dx \\
&= \begin{cases} 0, & n \ne m, \\ \dfrac{1}{n!} \displaystyle\int_0^{\beta R^2} x^n e^{-x}\, dx, & n = m. \end{cases}
\end{aligned}
$$

因此， $\mathbb{T}^\beta_f$ 是一个对角算子，且

$$\mathbb{T}^\beta_f \omega^\beta_n = \gamma_n \omega^\beta_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

其中

$$\gamma_n = \frac{1}{n!} \int_0^{\beta R^2} x^n e^{-x}\, dx = 1 - e^{-\beta R^2} \sum_{k=0}^{n} \frac{(\beta R^2)^k}{k!}.$$

由此可得

$$\|\mathbb{T}^\beta_f\|_{F^2_\beta} = \sup_{n\ge 0} |\gamma_n| = 1 - e^{-\beta R^2}. \tag{4.18}$$

A^2_α 的一个标准正交基为

$$e^\alpha_n(z) = \sqrt{\frac{\Gamma(n+\alpha+2)}{n!\Gamma(\alpha+2)}} z^n, \quad n \ge 0.$$

对于 $r>R$，在加权伯格曼空间A^2_α上，我们有

$$\begin{aligned}
&\langle \mathbf{T}^\alpha_{f_{r,\sigma}} e^\alpha_n, e^\alpha_m\rangle_\alpha \\
&= (\alpha+1)\sqrt{\frac{\Gamma(n+\alpha+2)\Gamma(m+\alpha+2)}{n!m!\Gamma(\alpha+2)^2}}\int_{\mathbb{D}}(1-|z|^2)^{\alpha+\sigma}\mathbb{1}_\Omega(rz)z^n\bar{z}^m\,\frac{dA(z)}{\pi} \\
&= (\alpha+1)\sqrt{\frac{\Gamma(n+\alpha+2)\Gamma(m+\alpha+2)}{n!m!\Gamma(\alpha+2)^2}}\int_0^{R/r}\int_0^{2\pi}(1-x^2)^{\alpha+\sigma}x^{n+m+1}e^{i(n-m)\theta}\,\frac{d\theta dx}{\pi} \\
&= \begin{cases} 0, & n\neq m, \\ \dfrac{(\alpha+1)\Gamma(n+\alpha+2)}{n!\Gamma(\alpha+2)}\displaystyle\int_0^{R^2/r^2}(1-x)^{\alpha+\sigma}x^n dx, & n=m. \end{cases}
\end{aligned}$$

因此，对于 $r>R$，我们有

$$\|\mathbf{T}^\alpha_{f_{r,\sigma}}\|_{A^2_\alpha}=\frac{\alpha+1}{\alpha+\sigma+1}\left[1-\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)^{\alpha+\sigma+1}\right].$$

这也可由 [21, 定理 3。1]推出；参见（4.20）。因此，我们有

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to\infty}\|\mathbf{T}^\alpha_{f_{r,\sigma}}\|_{A^2_{\beta r^2}} &= \lim_{r\to\infty}\frac{\beta r^2+1}{\beta r^2+\sigma+1}\left[1-\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)^{\beta r^2+\sigma+1}\right] \\
&= 1-e^{-\beta R^2}=\|\mathbb{T}_f\|_{F^2_\beta},
\end{aligned}$$

至此定理的证明完成。 □

应用（4.17，我们将得到 Fock 空间上一些托普利兹算子的算子范数估计（见推论4.7）。我们需要下面这个定理，它隐含地出现在 [18, 定理 5。2]中。为完整起见，我们在此给出详细证明。

定理 4.6。对于 $f\in L^1(\mathbb{D},d\lambda)\cap L^\infty(\mathbb{D})$，我们有

$$\|\mathbf{T}^\alpha_f\|_{A^2_\alpha}\le\left(1-\frac{\|f\|_\infty^{\alpha+1}}{(\|f\|_\infty+\|f\|_{L^1(\mathbb{D},d\lambda)})^{\alpha+1}}\right)\|f\|_\infty. \tag{4.19}$$

此外，若 f 是 $\mathbb{D}$中一个伯格曼度量圆盘的示性函数，则等式成立。

证明。 设 Ω 是 $\mathbb{D}$ 中满足 $\lambda(\Omega)<\infty$的可测子集。由 Ramos-Tilli 的定理 3.1 [21]，，对每一个满足 $\alpha>-1$的 $g\in A^2_\alpha$，我们有

$$\int_\Omega |g(z)|^2\,dA_\alpha(z)\le\left[1-\frac{1}{(1+\lambda(\Omega))^{\alpha+1}}\right]\|g\|^2_{A^2_\alpha}. \tag{4.20}$$

此外，等式成立当且仅当 Ω 是某个 $z_0\in\mathbb{D}$、 $r>0$和 $g(z)=ck^\alpha_{z_0}(z)$的伯格曼度量圆盘 $D(z_0,r)$（在相差一个伯格曼体积零集的意义下）。

若 $f = \mathbb{1}_\Omega$ 对某个伯格曼度量圆盘 Ω 在 $\mathbb{D}$中，则（4.19）中的等式由上述 Ramos-Tilli结果得出。尚需证明（4.19）中的不等式。由柯西-施瓦茨不等式，对任意 g，$h \in A^2_\alpha$，我们有

$$\begin{aligned}|\langle \mathbf{T}^\alpha_f g, h\rangle_{A^2_\alpha}| &\le \int_{\mathbb{D}} |f(z)||g(z)||h(z)|\, dA_\alpha(z)\\ &\le \left(\int_{\mathbb{D}} |g(z)|^2 |f(z)|\, dA_\alpha(z)\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{D}} |h(z)|^2 |f(z)|\, dA_\alpha(z)\right)^{1/2}\\ &= \langle \mathbf{T}^\alpha_{|f|} g, g\rangle^{1/2}_{A^2_\alpha} \langle \mathbf{T}^\alpha_{|f|} h, h\rangle^{1/2}_{A^2_\alpha}.\end{aligned}$$

这意味着 $\|\mathbf{T}^\alpha_f\|_{A^2_\alpha} \le \|\mathbf{T}^\alpha_{|f|}\|_{A^2_\alpha}$。因此我们可以假设 $f \ge 0$。于是有

$$\|\mathbf{T}^\alpha_f\|_{A^2_\alpha} = \sup\{\langle \mathbf{T}^\alpha_f g, g\rangle_{A^2_\alpha} : g \in A^2_\alpha, \|g\|_{A^2_\alpha} \le 1\}.$$

根据托内利定理，有

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{T}^\alpha_f g, g\rangle_{A^2_\alpha} &= \int_{\mathbb{D}} f(z)|g(z)|^2\, dA_\alpha(z)\\ &= \int_{\mathbb{D}} \int_0^{f(z)} |g(z)|^2\, dt\, dA_\alpha(z)\\ &= \int_0^{\|f\|_\infty} \int_{\{z\in\mathbb{D}\,:\, f(z)>t\}} |g(z)|^2\, dA_\alpha(z)\, dt \qquad (4.21)\end{aligned}$$

对于 $g \in A^2_\alpha$。由（4.20），

$$\int_{\{z\in\mathbb{D}\,:\, f(z)>t\}} |g(z)|^2 dA_\alpha(z) \le \left[1 - \frac{1}{(1+\nu(t))^{\alpha+1}}\right] \|g\|^2_{A^2_\alpha}, \qquad (4.22)$$

其中 $\nu(t)$ 是 f 关于莫比乌斯不变面积测度的分布函数，即，

$$\nu(t) = \lambda(\{z \in \mathbb{D} : f(z) > t\}).$$

令 $h(x) = 1 - \frac{1}{(1+x)^{\alpha+1}}$对于 $x > 0$。则 h 是凹函数。将（4.22）代入（4.21），然后应用詹森不等式，可得

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{T}_f g, g\rangle_{A^2_\alpha} &\le \left(\int_0^{\|f\|_\infty} \left[1 - \frac{1}{(1+\nu(t))^{\alpha+1}}\right] dt\right) \|g\|^2_{A^2_\alpha}\\ &= \|f\|_\infty \left(\int_0^{\|f\|_\infty} h(\nu(t))\, \frac{dt}{\|f\|_\infty}\right) \|g\|^2_{A^2_\alpha}\\ &\le \|f\|_\infty h\left(\int_0^{\|f\|_\infty} \nu(t)\, \frac{dt}{\|f\|_\infty}\right) \|g\|^2_{A^2_\alpha}\\ &= \|f\|_\infty h\left(\frac{\|f\|_{L^1(\mathbb{D},d\lambda)}}{\|f\|_\infty}\right) \|g\|^2_{A^2_\alpha}\end{aligned}$$

$$= \|f\|_\infty \left(1 - \frac{\|f\|_\infty^{\alpha+1}}{(\|f\|_\infty + \|f\|_{L^1(\mathbb{D},d\lambda)})^{\alpha+1}}\right) \|g\|^2_{A^2_\alpha}.$$

至此，定理得证。 □

利用定理4.5 和4.6，现在我们得到 Fock 空间上托普利兹算子的如下精确范数估计F^2_β 。记 $L^1(\mathbb{C})$ 为$L^1(\mathbb{C}, dA)$。

推论 4.7。对于 $f \in L^1(\mathbb{C}) \cap L^\infty(\mathbb{C})$ 和 $\beta > 0$ ，有

$$\|\mathbb{T}^\beta_f\|_{F^2_\beta} \le \|f\|_\infty \left[1 - \exp\left(-\frac{\beta}{\pi}\frac{\|f\|_{L^1(\mathbb{C})}}{\|f\|_\infty}\right)\right].$$

当 f 是 $\mathbb{C}$中某个圆盘的示性函数时，等号成立。

证明。若 $f = \mathbb{1}_\Omega$ 对于某个圆盘 Ω 中的 $\mathbb{C}$，则由（4.18）可得等号。剩下只需证明该不等式。

令$f_{r,\ 2}(z) = (1-|z|^2)^2 f(rz)$，其中 $z \in \mathbb{D}$。于是$f_{r,\ 2} \in L^1(\mathbb{D}, d\lambda) \cap L^\infty(\mathbb{D})$，因此由定理4.6可推出

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{T}^{\beta r^2}_{f_{r,2}}\|_{A^2_{\beta r^2}} &\le \left(1 - \frac{\|f_{r,2}\|_\infty^{\beta r^2+1}}{(\|f_{r,2}\|_\infty + \|f_{r,2}\|_{L^1(\mathbb{D},d\lambda)})^{\beta r^2+1}}\right)\|f_{r,2}\|_\infty \\
&= \left[1 - \left(1 - \frac{\|f_{r,2}\|_{L^1(\mathbb{D},d\lambda)}}{\|f_{r,2}\|_\infty + \|f_{r,2}\|_{L^1(\mathbb{D},d\lambda)}}\right)^{\beta r^2+1}\right]\|f_{r,2}\|_\infty \\
&= \left[1 - \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\|f_{r,2}\|_\infty}{\|f_{r,2}\|_{L^1(\mathbb{D},d\lambda)}}}\right)^{\beta r^2+1}\right]\|f_{r,2}\|_\infty \qquad (4.23)
\end{aligned}$$

其中$\|f_{r,\ 2}\|_\infty = \|f_{r,\ 2}\|_{L^\infty(\mathbb{D})}$。容易看出

$$\lim_{r\to\infty} \|f_{r,2}\|_\infty = \|f\|_\infty. \qquad (4.24)$$

通过变量替换，我们得到

$$\|f_{r,2}\|_{L^1(\mathbb{D},d\lambda)} = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} |f(rz)|\, dA(z) = \frac{1}{\pi r^2}\int_{r\mathbb{D}} |f(z)|\, dA(z).$$

由此可得

$$\lim_{r\to\infty}\left[1 - \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\|f_{r,2}\|_\infty}{\|f_{r,2}\|_{L^1(\mathbb{D},d\lambda)}}}\right)^{\beta r^2+1}\right] = 1 - \exp\left(-\frac{\beta}{\pi}\frac{\|f\|_{L^1(\mathbb{C})}}{\|f\|_\infty}\right). \qquad (4.25)$$

根据定理 4.5，结合（4.23）、（4.24）和（4.25），我们推导出

$$\|\mathbb{T}_f^{\beta}\|_{F_\beta^2} \le \limsup_{r\to\infty} \|\mathbf{T}_{f_{r,2}}^{\beta r^2}\|_{A^2_{\beta r^2}} \le \|f\|_\infty \left[1 - \exp\left(-\frac{\beta}{\pi}\frac{\|f\|_{L^1(\mathbb{C})}}{\|f\|_\infty}\right)\right].$$

证明至此完成。 □

最后，在本节中我们指出，对于 $A^2_{\beta r^2}$ 的标准单项式正交归一基 $\{e_n^{\beta r^2}\}$ 和 F^2_β 的标准单项式正交归一基 $\{\omega_n^\beta\}$，有

$$\lim_{r\to\infty} \langle \mathbf{L}^{\phi_r,\psi_r,\beta r^2}_{f_{r,\sigma}} e_n^{\beta r^2}, e_m^{\beta r^2}\rangle_{A^2_{\beta r^2}} = \langle \mathbb{L}_f^{\phi,\psi} \omega_n^\beta, \omega_m^\beta\rangle_{F^2_\beta}$$

对所有 $n \ge 0$ 和 $m \ge 0$。事实上，若记 $p_n(z) = z^n$，则由（4.8）和斯特林公式，

$$\begin{aligned}
&\langle \mathbf{L}^{\phi_r,\psi_r,\beta r^2}_{f_{r,\sigma}} e_n^{\beta r^2}, e_m^{\beta r^2}\rangle_{A^2_{\beta r^2}} \\
&= \sqrt{\frac{\Gamma(n+\beta r^2+1)\Gamma(m+\beta r^2+1)}{n!m!\Gamma(\beta r^2+1)^2}}\, \langle \mathbf{L}^{\phi_r,\psi_r,\beta r^2}_{f_{r,\sigma}} p_n, p_m\rangle_{A^2_{\beta r^2}} \\
&= \frac{1}{r^n r^m}\sqrt{\frac{\Gamma(n+\beta r^2+1)\Gamma(m+\beta r^2+1)}{n!m!\Gamma(\beta r^2+1)^2}}\, \langle \mathbf{L}^{\phi_r,\psi_r,\beta r^2}_{f_{r,\sigma}} (p_n)_r, (p_m)_r\rangle_{A^2_{\beta r^2}} \\
&\xrightarrow{r\to\infty} \sqrt{\frac{\beta^n\beta^m}{n!m!}}\, \langle \mathbb{L}_f^{\phi,\psi,\beta} p_n, p_m\rangle_{F^2_\beta} \\
&= \langle \mathbb{L}_f^{\phi,\psi,\beta} \omega_n^\beta, \omega_m^\beta\rangle_{F^2_\beta}.
\end{aligned}$$

这个极限公式是定理 4.3 在单项式正交归一基下函数的另一种表述。

5. 窗函数Berezin变换及其应用

给定窗函数 ψ in A^2_α，我们定义函数 f on $\mathbb{T}\times\mathbb{D}$ 关于 ψ 的窗函数 Berezin 变换为

$$B_\alpha^\psi f(e^{i\theta}, z) = (\alpha+1)\int_0^{2\pi}\frac{dt}{2\pi}\int_{\mathbb{D}} f(e^{it}, w)|\langle U_z^\alpha \psi_\theta, U_w^\alpha \psi_t\rangle_{A^2_\alpha}|^2\, d\lambda(w),$$

其中 $\psi_t(\zeta) = \psi(e^{it}\zeta)$。若 $\psi = 1$ 且 $f(e^{i\theta}, z) = f(z)$ 与 θ无关，则这就是经典的 α-Berezin 变换 f；参见 [26, 第 6 节。3]。

回顾一下，对于 $\alpha > -1$，V^α 是从 $A^2\,(= A^2_0)$ 到 A^2_α的酉算子，满足 $V^\alpha e_n^0 = e_n^\alpha$，其中 $\{e_n^\alpha\}$ 是 A^2_α的典范单项式标准正交基。对于 $\psi \in A^2$，记作 $\psi^\alpha = V^\alpha\psi$。

我们用 $L^p(\mathbb{T}\times\mathbb{D})$ 表示 $L^p(\mathbb{T}\times\mathbb{D}, dH)$，其中 $dH = \frac{d\theta}{2\pi}d\lambda$ 是 $\mathrm{Aut}(\mathbb{D}) = \mathbb{T}\times\mathbb{D}$ 上的 Haar 测度。对于定义在 $\mathbb{D}$ 上的函数 f，我们可以将f 视为定义在 $\mathbb{T}\times\mathbb{D}$ 上且与第一个变量无关的函数，即

$f(e^{i\theta},z)=f(z)$。鉴于此，$L^p(\mathbb{D},d\lambda)$ 可视为$L^p(\mathbb{T}\times\mathbb{D})$的子空间。

本节证明带窗 Berezin 变换的一个极限定理，并将其应用于加权 Bergman 空间上局部化算子的 Szegö 型定理。我们首先给出几个技术引理。

引理 5.1。设 $\alpha>-1$，其中 $\|\psi\|_{A^2}=1$，且 $\psi^\alpha=V^\alpha\psi$。则

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int_0^{2\pi}\frac{dt}{2\pi}\int_{r<|w|<1}|\langle U_w^\alpha(\psi^\alpha)_t,\psi^\alpha\rangle_{A^2_\alpha}|^2\,d\lambda(w)=0,$$

其中 $(\psi^\alpha)_t(z)=\psi^\alpha(e^{it}z)$。

证明。对于任意 $0<\varepsilon<1$，存在一个多项式 p，使得$\|p-\psi\|_{A^2}<\varepsilon$。若记 $\psi^\alpha=p^\alpha+(\psi^\alpha-p^\alpha)$，则

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}\frac{dt}{2\pi}\int_{r<|w|<1}|\langle U_w^\alpha(\psi^\alpha)_t,\psi^\alpha\rangle_{A^2_\alpha}|^2\,d\lambda(w)\\
&=\int_0^{2\pi}\frac{dt}{2\pi}\int_{r<|w|<1}|\langle U_w^\alpha[p^\alpha+(\psi^\alpha-p^\alpha)]_t,[p^\alpha+(\psi^\alpha-p^\alpha)]\rangle_{A^2_\alpha}|^2\,d\lambda(w)\\
&\le 4\int_0^{2\pi}\frac{dt}{2\pi}\int_{r<|w|<1}|\langle U_w^\alpha(p^\alpha)_t,p^\alpha\rangle_{A^2_\alpha}|^2\,d\lambda(w)\\
&\quad+4\int_0^{2\pi}\frac{dt}{2\pi}\int_{r<|w|<1}|\langle U_w^\alpha(p^\alpha)_t,\psi^\alpha-p^\alpha\rangle_{A^2_\alpha}|^2\,d\lambda(w)\\
&\quad+4\int_0^{2\pi}\frac{dt}{2\pi}\int_{r<|w|<1}|\langle U_w^\alpha(\psi^\alpha-p^\alpha)_t,p^\alpha\rangle_{A^2_\alpha}|^2\,d\lambda(w)\\
&\quad+4\int_0^{2\pi}\frac{dt}{2\pi}\int_{r<|w|<1}|\langle U_w^\alpha(\psi^\alpha-p^\alpha)_t,\psi^\alpha-p^\alpha\rangle_{A^2_\alpha}|^2\,d\lambda(w).
\end{aligned}$$

根据定理 3.4，有

$$\begin{aligned}
&4(\alpha+1)\int_0^{2\pi}\frac{dt}{2\pi}\int_{r<|w|<1}|\langle U_w^\alpha(p^\alpha)_t,\psi^\alpha-p^\alpha\rangle_{A^2_\alpha}|^2\,d\lambda(w)\\
&\qquad\le 4\|p^\alpha\|^2_{A^2_\alpha}\|\psi^\alpha-p^\alpha\|^2_{A^2_\alpha}=4\|p\|^2_{A^2}\|\psi-p\|^2_{A^2}<16\varepsilon^2.
\end{aligned}$$

同样地，我们有

$$4(\alpha+1)\int_0^{2\pi}\frac{dt}{2\pi}\int_{r<|w|<1}|\langle U_w^\alpha(\psi^\alpha-p^\alpha)_t,p^\alpha\rangle_{A^2_\alpha}|^2\,d\lambda(w)<16\varepsilon^2,$$

and

$$4(\alpha+1)\int_0^{2\pi}\frac{dt}{2\pi}\int_{r<|w|<1}|\langle U_w^\alpha(\psi^\alpha-p^\alpha)_t,\psi^\alpha-p^\alpha\rangle_{A^2_\alpha}|^2\,d\lambda(w)<4\varepsilon^4.$$

为完成证明，我们只需证明

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int_0^{2\pi}\frac{dt}{2\pi}\int_{r<|w|<1}|\langle U_w^\alpha(p^\alpha)_t,\, p^\alpha\rangle_{A_\alpha^2}|^2\,d\lambda(w)=0. \tag{5.1}$$

设

$$p=\sum_{j=0}^{n}a_j e_j^0.$$

Then

$$p^\alpha:=V^\alpha p=\sum_{j=1}^{n}a_j e_j^\alpha.$$

根据柯西-施瓦茨不等式，可得

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}\frac{dt}{2\pi}\int_{r<|w|<1}|\langle U_w^\alpha(p^\alpha)_t,\, p^\alpha\rangle_{A_\alpha^2}|^2\,d\lambda(w)\\
&=\int_0^{2\pi}\frac{dt}{2\pi}\int_{r<|w|<1}\left|\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n}a_j\overline{a_k}\langle U_w^\alpha(e_j^\alpha)_t,\, e_k^\alpha\rangle_{A_\alpha^2}\right|^2 d\lambda(w)\\
&\le\left(\sum_{j=0}^{n}|a_j|^2\right)^2\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n}\int_0^{2\pi}\frac{dt}{2\pi}\int_{r<|w|<1}\left|\langle U_w^\alpha(e_j^\alpha)_t,\, e_k^\alpha\rangle_{A_\alpha^2}\right|^2 d\lambda(w).
\end{aligned}\tag{5.2}$$

经过直接计算可得

$$\begin{aligned}
U_w^\alpha(e_j^\alpha)_t(\zeta)&=\sqrt{\frac{\Gamma(j+\alpha+2)}{j!\Gamma(\alpha+2)}}\left[e^{it}\varphi_w(\zeta)\right]^j\left[\varphi_w'(\zeta)\right]^{1+\frac{\alpha}{2}}\\
&=e^{ijt}\sqrt{\frac{\Gamma(j+\alpha+2)}{j!\Gamma(\alpha+2)}}\left(\frac{\zeta-w}{1-\bar w\zeta}\right)^j\left[\frac{1-|w|^2}{(1-\bar w\zeta)^2}\right]^{1+\frac{\alpha}{2}}\\
&=e^{ijt}(1-|w|^2)^{1+\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\Gamma(j+\alpha+2)}{j!\Gamma(\alpha+2)}}\frac{(\zeta-w)^j}{(1-\bar w\zeta)^{j+2+\alpha}}\\
&=e^{ijt}(1-|w|^2)^{1+\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\Gamma(j+\alpha+2)}{j!\Gamma(\alpha+2)}}\sum_{l=0}^{j}\sum_{m=0}^{\infty}\binom{j}{l}\frac{\Gamma(m+j+2+\alpha)}{m!\Gamma(j+2+\alpha)}(-w)^{j-l}\bar w^m\zeta^{m+l}.
\end{aligned}$$

由斯特林公式可知，存在常数$C_{j,\,k}$其取决于 j和 k ，使得

$$\begin{aligned}
&\left|\langle U_w^\alpha(e_j^\alpha)_t,\, e_k^\alpha\rangle_{A_\alpha^2}\right|^2\\
&=(1-|w|^2)^{2+\alpha}\frac{k!\Gamma(j+\alpha+2)}{j!\Gamma(k+\alpha+2)}\left|\sum_{\{(l,m)\in\mathbb{N}^2:\,l+m=k;l\le j\}}\binom{j}{l}\frac{\Gamma(m+j+2+\alpha)}{m!\Gamma(j+2+\alpha)}(-w)^{j-l}\bar w^m\right|^2\\
&\le C_{j,k}(\alpha+1)^{j+k}(1-|w|^2)^{2+\alpha}.
\end{aligned}\tag{5.3}$$

结合式（5.2）和式（5.3），可得

$$\begin{aligned}
&(\alpha+1)\int_0^{2\pi}\frac{dt}{2\pi}\int_{r<|w|<1}|\langle U_w^\alpha(p^\alpha)_t,\,p^\alpha\rangle_{A^2_\alpha}|^2\,d\lambda(w)\\
&\le\left(\sum_{j=0}^n|a_j|^2\right)^2\left[\sum_{j=0}^n\sum_{k=0}^n C_{j,k}(\alpha+1)^{j+k+1}\right]\int_{r<|w|<1}(1-|w|^2)^\alpha\,\frac{dA(w)}{\pi}\\
&=\left(\sum_{j=0}^n|a_j|^2\right)^2\left[\sum_{j=0}^n\sum_{k=0}^n C_{j,k}(\alpha+1)^{j+k}\right](1-r^2)^{\alpha+1}. \qquad (5.4)
\end{aligned}$$

方程（5.1）由（5.4）令 α 趋于无穷即可得出。证明完毕。□

引理 5.2. 设 $\psi\in A^2$ 满足 $\|\psi\|_{A^2}=1$、$\psi^\alpha=V^\alpha\psi$，且 $f\in C(\mathbb{D})\cap L^\infty(\mathbb{D})$。则

$$\lim_{\alpha\to\infty}B_\alpha^{\psi^\alpha}f(e^{i\theta},z)=f(z)$$

对所有 $(e^{i\theta},z)\in\mathbb{T}\times\mathbb{D}$ 均成立。

证明。回想一下，我们将 f 视为定义在 $\mathbb{T}\times\mathbb{D}$ 上的函数，且它与第一个变量无关。通过变量替换以及（3.4）和（3.5），可得

$$\begin{aligned}
B_\alpha^{\psi^\alpha}f(e^{i\theta},z)&=(\alpha+1)\int_0^{2\pi}\frac{dt}{2\pi}\int_{\mathbb{D}}f(e^{it},w)|\langle U_z^\alpha(\psi^\alpha)_\theta,\,U_w^\alpha(\psi^\alpha)_t\rangle_{A^2_\alpha}|^2\,d\lambda(w)\\
&=(\alpha+1)\int_0^{2\pi}\frac{dt}{2\pi}\int_{\mathbb{D}}f(e^{it},w)|\langle U^\alpha_{e^{i\theta},z}\psi^\alpha,\,U^\alpha_{e^{it},w}\psi^\alpha\rangle_{A^2_\alpha}|^2\,d\lambda(w)\\
&=(\alpha+1)\int_0^{2\pi}\frac{dt}{2\pi}\int_{\mathbb{D}}f(e^{it},w)|\langle (U^\alpha_{e^{it},w})^*U^\alpha_{e^{i\theta},z}\psi^\alpha,\,\psi^\alpha\rangle_{A^2_\alpha}|^2\,d\lambda(w)\\
&=(\alpha+1)\int_0^{2\pi}\frac{dt}{2\pi}\int_{\mathbb{D}}f(e^{it},w)|\langle U^\alpha_{(e^{it},w)^{-1}}U^\alpha_{e^{i\theta},z}\psi^\alpha,\,\psi^\alpha\rangle_{A^2_\alpha}|^2\,d\lambda(w)\\
&=(\alpha+1)\int_0^{2\pi}\frac{dt}{2\pi}\int_{\mathbb{D}}f(e^{it},w)|\langle U^\alpha_{(e^{i\theta},z)\cdot(e^{it},w)^{-1}}\psi^\alpha,\,\psi^\alpha\rangle_{A^2_\alpha}|^2\,d\lambda(w)\\
&=(\alpha+1)\int_0^{2\pi}\frac{dt}{2\pi}\int_{\mathbb{D}}f((e^{it},w)^{-1}\cdot(e^{i\theta},z))|\langle U^\alpha_{e^{it},w}\psi^\alpha,\,\psi^\alpha\rangle_{A^2_\alpha}|^2\,d\lambda(w)\\
&=(\alpha+1)\int_0^{2\pi}\frac{dt}{2\pi}\int_{\mathbb{D}}f(\varphi_{-z}(-e^{i(t-\theta)}w))|\langle U^\alpha_{e^{it},w}\psi^\alpha,\,\psi^\alpha\rangle_{A^2_\alpha}|^2\,d\lambda(w)\\
&=(\alpha+1)\int_0^{2\pi}\frac{dt}{2\pi}\int_{\mathbb{D}}f(\varphi_{-z}(-w))|\langle U^\alpha_{e^{it},e^{i(\theta-t)}w}\psi^\alpha,\,\psi^\alpha\rangle_{A^2_\alpha}|^2\,d\lambda(w).
\end{aligned}$$

由于 f 在 z处连续，对于任意 $\varepsilon>0$ 都存在一个 $\delta>0$ 使得 $|f(w)-f(z)|<\varepsilon$只要 $|w-z|<\delta$。由于 $\|\psi^\alpha\|_{A^2_\alpha}=1$，根据定理 3.4 对于任意固定的 $r\in(0,\delta/2)$，我们有

$$B_\alpha^{\psi^\alpha}f(e^{i\theta},z)-f(z) \qquad (5.5)$$

$$= (\alpha+1)\int_0^{2\pi}\frac{dt}{2\pi}\int_{\mathbb{D}}[f(\varphi_{-z}(-w))-f(z)]|\langle U^{\alpha}_{e^{it},e^{i(\theta-t)}w}\psi^{\alpha},\psi^{\alpha}\rangle_{A^2_\alpha}|^2\,d\lambda(w)$$

$$= (\alpha+1)\int_0^{2\pi}\frac{dt}{2\pi}\int_{\{|w|<r\}}[f(\varphi_{-z}(-w))-f(z)]|\langle U^{\alpha}_{e^{it},e^{i(\theta-t)}w}\psi^{\alpha},\psi^{\alpha}\rangle_{A^2_\alpha}|^2\,d\lambda(w)$$

$$+ (\alpha+1)\int_0^{2\pi}\frac{dt}{2\pi}\int_{\{r<|w|<1\}}[f(\varphi_{-z}(-w))-f(z)]|\langle U^{\alpha}_{e^{it},e^{i(\theta-t)}w}\psi^{\alpha},\psi^{\alpha}\rangle_{A^2_\alpha}|^2\,d\lambda(w).$$

对于 $|w|<r$，我们有

$$|\varphi_{-z}(-w)-z| = \left|\frac{-w+z}{1-\bar{z}w}-z\right| = \frac{(1-|z|^2)|w|}{|1-\bar{z}w|} \le (1+|z|)|w| < 2|w| < \delta.$$

由定理 3.4以及 f 的连续性可得

$$(\alpha+1)\int_0^{2\pi}\frac{dt}{2\pi}\int_{\{|w|<r\}}|f(\varphi_{-z}(-w))-f(z)||\langle U^{\alpha}_{e^{it},e^{i(\theta-t)}w}\psi^{\alpha},\psi^{\alpha}\rangle_{A^2_\alpha}|^2\,d\lambda(w)$$

$$< \varepsilon(\alpha+1)\int_0^{2\pi}\frac{dt}{2\pi}\int_{\{|w|<r\}}|\langle U^{\alpha}_{e^{it},e^{i(\theta-t)}w}\psi^{\alpha},\psi^{\alpha}\rangle_{A^2_\alpha}|^2\,d\lambda(w)$$

$$\le \varepsilon. \tag{5.6}$$

由引理5.1以及 f的有界性可得

$$(\alpha+1)\int_0^{2\pi}\frac{dt}{2\pi}\int_{\{r<|w|<1\}}|f(\varphi_{-z}(-w))-f(z)||\langle U^{\alpha}_{e^{it},e^{i(\theta-t)}w}\psi^{\alpha},\psi^{\alpha}\rangle_{A^2_\alpha}|^2\,d\lambda(w)$$

$$\le 2\|f\|_\infty(\alpha+1)\int_0^{2\pi}\frac{dt}{2\pi}\int_{\{r<|w|<1\}}|\langle U^{\alpha}_{e^{it},e^{i(\theta-t)}w}\psi^{\alpha},\psi^{\alpha}\rangle_{A^2_\alpha}|^2\,d\lambda(w)$$

$$= 2\|f\|_\infty(\alpha+1)\int_0^{2\pi}\frac{dt}{2\pi}\int_{\{r<|w|<1\}}|\langle U^{\alpha}_{e^{it},w}\psi^{\alpha},\psi^{\alpha}\rangle_{A^2_\alpha}|^2\,d\lambda(w)$$

$$= 2\|f\|_\infty(\alpha+1)\int_0^{2\pi}\frac{dt}{2\pi}\int_{\{r<|w|<1\}}|\langle U^{\alpha}_{w}(\psi^{\alpha})_t,\psi^{\alpha}\rangle_{A^2_\alpha}|^2\,d\lambda(w)$$

$$\to 0 \quad \text{as} \quad \alpha\to\infty. \tag{5.7}$$

所需结果现在可由（5.5）、（5.6）和（5.7）得出。 □

引理 5.3。设 $\psi\in A^2_\alpha$ 满足 $\|\psi\|_{A^2_\alpha}=1$且 $1\le p\le\infty$。则 B^{ψ}_{α} 从 $L^p(\mathbb{T}\times\mathbb{D})$ 到 $L^p(\mathbb{T}\times\mathbb{D})$是有界的。此外， B^{ψ}_{α} 的算子范数满足

(a) $\|B^{\psi}_{\alpha}\|_{L^p(\mathbb{T}\times\mathbb{D})\to L^p(\mathbb{T}\times\mathbb{D})}=1$ 若 $p=1$ 或 $p=\infty$。
(b) $\|B^{\psi}_{\alpha}\|_{L^p(\mathbb{T}\times\mathbb{D})\to L^p(\mathbb{T}\times\mathbb{D})}\le 1$ 若 $1<p<\infty$。

证明。 对于 $p=1$，由定理 3.4及富比尼定理可得

$$\|B^{\psi}_{\alpha}f\|_{L^1(\mathbb{T}\times\mathbb{D})} = \int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi}\int_{\mathbb{D}}|B^{\psi}_{\alpha}f(e^{i\theta},z)|\,d\lambda(z)$$

$$\le \int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi}\int_{\mathbb{D}}\left((\alpha+1)\int_0^{2\pi}\frac{dt}{2\pi}\int_{\mathbb{D}}|f(e^{it},w)||\langle U^{\alpha}_{z}\psi_\theta,U^{\alpha}_{w}\psi_t\rangle_{A^2_\alpha}|^2\,d\lambda(w)\right)d\lambda(z)$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2\pi} \int_{\mathbb{D}} |f(e^{it}, w)| \left((\alpha+1) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \int_{\mathbb{D}} |\langle U_z^\alpha \psi_\theta, U_w^\alpha \psi_t \rangle_{A_\alpha^2}|^2 \, d\lambda(z) \right) d\lambda(w) \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2\pi} \int_{\mathbb{D}} |f(e^{it}, w)| \, d\lambda(w) \\
&= \|f\|_{L^1(\mathbb{T}\times\mathbb{D})}. \qquad (5.8)
\end{aligned}
$$

如果 f 非负，则 $B_\alpha^\psi f(e^{i\theta}, z)$ 也非负。因此，在（5.8）中当 f 非负时等式成立。从而 $\|B_\alpha^\psi\|_{L^1(\mathbb{T}\times\mathbb{D})\to L^1(\mathbb{T}\times\mathbb{D})} = 1$。

对于 $p = \infty$，我们使用定理3.4得到

$$
\begin{aligned}
|B_\alpha^\psi f(e^{i\theta}, z)| &\le (\alpha+1) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2\pi} \int_{\mathbb{D}} |f(e^{it}, w)| |\langle U_z^\alpha \psi_\theta, U_w^\alpha \psi_t \rangle_{A_\alpha^2}|^2 \, d\lambda(w) \\
&\le \|f\|_\infty (\alpha+1) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2\pi} \int_{\mathbb{D}} |\langle U_z^\alpha \psi_\theta, U_w^\alpha \psi_t \rangle_{A_\alpha^2}|^2 \, d\lambda(w) \\
&= \|f\|_\infty.
\end{aligned}
$$

对于任意正整数 n，令 f_n 为

$$
\Omega_n = \left\{ z \in \mathbb{D} : |z| < 1 - \frac{1}{n} \right\}.
$$

我们有

$$
\frac{\|B_\alpha^\psi f_n\|_\infty}{\|f_n\|_\infty} \ge \frac{|B_\alpha^\psi f_n(e^{i\theta}, z)|}{\|f_n\|_\infty} = (\alpha+1) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2\pi} \int_{\Omega_n} |\langle U_z^\alpha \psi_\theta, U_w^\alpha \psi_t \rangle_{A_\alpha^2}|^2 \, d\lambda(w) \to 1
$$

当 $n \to \infty$ 时。因此 $\|B_\alpha^\psi\|_{L^\infty(\mathbb{T}\times\mathbb{D})\to L^\infty(\mathbb{T}\times\mathbb{D})} = 1$。

对于 $1 < p < \infty$，应用 Riesz-Thorin 插值定理即可得到所需结论。证明至此完成。□

现在我们证明本节的第一个主要结果。

定理 5.4. 设 $\psi \in A^2$ 满足 $\|\psi\|_{A^2} = 1$、$\psi^\alpha = V^\alpha \psi$和 $1 \le p < \infty$。我们有

$$
\lim_{\alpha\to\infty} \|B_\alpha^{\psi^\alpha} f - f\|_{L^p(\mathbb{T}\times\mathbb{D})} = 0
$$

对任意 $f \in L^p(\mathbb{D}, d\lambda)$,

证明. 对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $g \in C_c(\mathbb{D})$ 使得

$$
\|g - f\|_{L^p(\mathbb{D}, d\lambda)} < \varepsilon.
$$

应用引理 5.3和三角不等式可得

$$
\begin{aligned}
\|B_\alpha^{\psi^\alpha} f - f\|_{L^p(\mathbb{T}\times\mathbb{D})} &= \|B_\alpha^{\psi^\alpha} f - B_\alpha^{\psi^\alpha} g + B_\alpha^{\psi^\alpha} g - g + g - f\|_{L^p(\mathbb{T}\times\mathbb{D})} \\
&\le \|B_\alpha^{\psi^\alpha} (f - g)\|_{L^p(\mathbb{T}\times\mathbb{D})} + \|B_\alpha^{\psi^\alpha} g - g\|_{L^p(\mathbb{T}\times\mathbb{D})} + \|g - f\|_{L^p(\mathbb{D}, d\lambda)} \\
&\le 2\|g - f\|_{L^p(\mathbb{D}, d\lambda)} + \|B_\alpha^{\psi^\alpha} g - g\|_{L^p(\mathbb{T}\times\mathbb{D})} \\
&< 2\varepsilon + \|B_\alpha^{\psi^\alpha} g - g\|_{L^p(\mathbb{T}\times\mathbb{D})}.
\end{aligned}
$$

由引理 5.2可得

$$\lim_{\alpha\to\infty} B_\alpha^{\psi^\alpha} g(e^{i\theta}, z) = g(z), \quad (e^{i\theta}, z) \in \mathbb{T}\times\mathbb{D}.$$

显然,

$$|B_\alpha^{\psi^\alpha} g(e^{i\theta}, z) - g(z)|^p \le 2^{p-1}(|B_\alpha^{\psi^\alpha} g(e^{i\theta}, z)|^p + |g(z)|^p)$$

根据定理 3.4 和 Hölder 不等式,

$$|B_\alpha^{\psi^\alpha} g(e^{i\theta}, z)|^p \le (B_\alpha^{\psi^\alpha} |g|^p)(e^{i\theta}, z).$$

应用富比尼定理和定理3.4 可得

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \int_{\mathbb{D}} (B_\alpha^{\psi^\alpha} |g|^p)(e^{i\theta}, z)\, d\lambda(z) = \|g\|^p_{L^p(\mathbb{D},d\lambda)}.$$

由控制收敛定理可知,

$$\lim_{\alpha\to\infty} \|B_\alpha^{\psi^\alpha} g - g\|_{L^p(\mathbb{T}\times\mathbb{D})} = 0,$$

从而完成定理的证明。 □

作为定理 5.4 的应用，我们将得到一个关于加权 Bergman 空间上局部化算子的 Szegö 型定理（定理 5.6）。为简化记号，我们记为 $\mathbf{L}^{\psi,\ \alpha}_{f\ \ \alpha} := \mathbf{L}^{\psi,\ \psi,}_{f}$。

引理 5.5。设 $\psi \in A^2$ 满足 $\|\psi\|_{A^2} = 1$、$\psi^\alpha = V^\alpha\psi$，且 f 是 $L^1(\mathbb{D}, d\lambda)\cap L^\infty(\mathbb{D})$中的一个非负函数。则有

$$\lim_{\alpha\to\infty} \frac{\mathrm{tr}\,(\mathbf{L}_f^{\psi^\alpha,\alpha}\mathbf{L}_f^{\psi^\alpha,\alpha} - \mathbf{L}_{f^2}^{\psi^\alpha,\alpha})}{\alpha+1} = 0.$$

证明。由（3.13），有

$$\mathbf{L}_f^{\psi^\alpha,\alpha} = (\alpha+1)\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \int_{\mathbb{D}} f(e^{i\theta}, z)\big[(U_z^\alpha(\psi^\alpha)_\theta)\otimes(U_z^\alpha(\psi^\alpha)_\theta)\big]\, d\lambda(z).$$

因此，我们可以将乘积 $\mathbf{L}^{\psi^\alpha,\ \alpha}_{f\ \ \alpha}\mathbf{L}^{\psi^\alpha,\ \alpha}_{f\ \ \alpha}$ 写成如下算子值积分:

$$(\alpha+1)^2\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2\pi} \int_{\mathbb{D}} \left(\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \int_{\mathbb{D}} F(z,w)\big[(U_z^\alpha(\psi^\alpha)_\theta)\otimes(U_w^\alpha(\psi^\alpha)_t)\big]\, d\lambda(z)\right) d\lambda(w),$$

其中

$$F(z,w) = f(z)f(w)\langle U_w^\alpha(\psi^\alpha)_t,\, U_z^\alpha(\psi^\alpha)_\theta\rangle_{A^2_\alpha}.$$

由此可得

$$\frac{\mathrm{tr}\,(\mathbf{L}_f^{\psi^\alpha,\alpha}\mathbf{L}_f^{\psi^\alpha,\alpha})}{\alpha+1}$$
$$= (\alpha+1)\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2\pi} \int_{\mathbb{D}} \left[\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \int_{\mathbb{D}} f(z)f(w)|\langle U_w^\alpha(\psi^\alpha)_t,\, U_z^\alpha(\psi^\alpha)_\theta\rangle_{A^2_\alpha}|^2\, d\lambda(z)\right] d\lambda(w)$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \int_{\mathbb{D}} f(z) \left[(\alpha+1) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2\pi} \int_{\mathbb{D}} f(w) |\langle U_w^\alpha(\psi^\alpha)_t,\, U_z^\alpha(\psi^\alpha)_\theta \rangle_{A_\alpha^2}|^2 \, d\lambda(w) \right] d\lambda(z)$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \int_{\mathbb{D}} f(z) B_\alpha^{\psi^\alpha} f(e^{i\theta}, z) \, d\lambda(z)$$

由于 $f \in L^1(\mathbb{D}, d\lambda) \cap L^\infty(\mathbb{D}) \subset L^2(\mathbb{D}, d\lambda)$，定理5.4 给出

$$\lim_{\alpha\to\infty} \|B_\alpha^{\psi^\alpha} f - f\|_{L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{D})} = 0.$$

那么我们有

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha\to\infty} \frac{\operatorname{tr}(\mathbf{L}_f^{\psi^\alpha,\alpha} \mathbf{L}_f^{\psi^\alpha,\alpha})}{\alpha+1} &= \lim_{\alpha\to\infty} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \int_{\mathbb{D}} f(z) B_\alpha^{\psi^\alpha} f(e^{i\theta}, z) \, d\lambda(z) \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \int_{\mathbb{D}} f(z) f(z) \, d\lambda(z) \\ &= \int_{\mathbb{D}} f(z) f(z) \, d\lambda(z). \end{aligned} \tag{5.9}$$

根据（3.13），我们有

$$\operatorname{tr}(\mathbf{L}_{f^2}^{\psi^\alpha,\alpha}) = (\alpha+1) \int_{\mathbb{D}} f(z)^2 \, d\lambda(z).$$

这与（5.9）结合可推出

$$\lim_{\alpha\to\infty} \frac{\operatorname{tr}(\mathbf{L}_f^{\psi^\alpha,\alpha} \mathbf{L}_f^{\psi^\alpha,\alpha} - \mathbf{L}_{f^2}^{\psi^\alpha,\alpha})}{\alpha+1} = 0,$$

从而完成定理的证明。 □

现在我们来到了本节的第二个主要结果。

定理 5.6. 设 $\psi \in A^2$ 满足 $\|\psi\|_{A^2} = 1$, $\psi^\alpha = V^\alpha \psi$，且 f 是 $L^1(\mathbb{D}, d\lambda) \cap L^\infty(\mathbb{D})$中的非负函数。若 $h \in C[0, \|f\|_\infty]$，则

$$\lim_{\alpha\to\infty} \frac{\operatorname{tr}(\mathbf{L}_f^{\psi^\alpha,\alpha} h(\mathbf{L}_f^{\psi^\alpha,\alpha}))}{\alpha+1} = \int_{\mathbb{D}} f(z) h(f(z)) \, d\lambda(z). \tag{5.10}$$

我们将给出该定理的两种不同的证明。根据（3.13），若ϕ，$\psi \in A_\alpha^2$ 且 $f \in L^1(\mathbb{T}\times\mathbb{D})$，则

$$\operatorname{tr}(\mathbf{L}_f^{\phi,\psi,\alpha}) = (\alpha+1)\langle \phi, \psi \rangle_{A_\alpha^2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \int_{\mathbb{D}} f(e^{i\theta}, z) \, d\lambda(z). \tag{5.11}$$

根据对偶性，我们有

$$|\operatorname{tr}(\mathbf{L}_f^{\psi^\alpha,\alpha} h(\mathbf{L}_f^{\psi^\alpha,\alpha}))| \le \|h(\mathbf{L}_f^{\psi^\alpha,\alpha})\|_{A_\alpha^2} \|\mathbf{L}_f^{\psi^\alpha,\alpha}\|_{\mathcal{S}^1(A_\alpha^2)} \le \|h\|_\infty \|\mathbf{L}_f^{\psi^\alpha,\alpha}\|_{\mathcal{S}^1(A_\alpha^2)}, \tag{5.12}$$

and

$$\|\mathbf{L}_f^{\psi^\alpha,\alpha}\|_{\mathcal{S}^1(A_\alpha^2)} = (\alpha+1) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \int_{\mathbb{D}} f(e^{i\theta}, z) \, d\lambda(z), \tag{5.13}$$

其中 $\|\cdot\|_{S^1(A^2_\alpha)}$ 是迹范数。此外，对于任意多项式 p，我们有

$$\begin{aligned}\left|\frac{\operatorname{tr}(\mathbf{L}_f^{\psi^\alpha,\alpha}h(\mathbf{L}_f^{\psi^\alpha,\alpha}))}{\alpha+1}-\int_{\mathbb{D}}f(z)h(f(z))\,d\lambda(z)\right| &\le \left|\frac{\operatorname{tr}\left[\mathbf{L}_f^{\psi^\alpha,\alpha}(h-p)(\mathbf{L}_f^{\psi^\alpha,\alpha})\right]}{\alpha+1}\right| \\ &+\left|\frac{\operatorname{tr}(\mathbf{L}_f^{\psi^\alpha,\alpha}p(\mathbf{L}_f^{\psi^\alpha,\alpha}))}{\alpha+1}-\int_{\mathbb{D}}f(z)p(f(z))\,d\lambda(z)\right| \\ &+\left|\int_{\mathbb{D}}f(z)\big[p(f(z))-h(f(z))\big]\,d\lambda(z)\right|. \qquad (5.14)\end{aligned}$$

由 (5.12)、(5.13) 和 (5.14) 可知，为了证明定理 5.6，只需证明 (5.10) 对于 $h(x)=x^n$ with $n=0,1,\cdots$ 成立。为此，我们首先证明局部化算子 $\mathbf{L}^{\psi^\alpha,\alpha}_f$ 是 Toeplitz 型算子。

对于 $\psi\in A^2_\alpha$ with $\|\psi\|_{A^2_\alpha}=1$，我们在 A^2_α 上定义线性算子 V^α_ψ：

$$V^\alpha_\psi f(e^{i\theta},z)=\langle f,\,U^\alpha_z\psi_\theta\rangle_{A^2_\alpha},\quad f\in A^2_\alpha,$$

其中 $\psi_\theta(\zeta)=\psi(e^{i\theta}\zeta)$。由定理 3.4，可得

$$\langle f,\,g\rangle_{A^2_\alpha}=\langle V^\alpha_\psi f,\,V^\alpha_\psi g\rangle_{L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{D},(\alpha+1)dH)},\quad f,g\in A^2_\alpha.$$

这意味着 V^α_ψ 是从 A^2_α 到 $L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{D},(\alpha+1)dH)$的等距算子。因此，$V^\alpha_\psi$ 的像是 $L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{D},(\alpha+1)dH)$ 的一个闭子空间。我们用 $\mathcal{V}^\alpha_\psi$ 表示 V^α_ψ 的像，即

$$\mathcal{V}^\alpha_\psi=\{V^\alpha_\psi f:f\in A^2_\alpha\}.$$

那么 V^α_ψ 是从 A^2_α 到 $\mathcal{V}^\alpha_\psi$ 的酉算子。根据定理 3.4，V^α_ψ 的逆元为

$$(V^\alpha_\psi)^{-1}F=(\alpha+1)\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi}\int_{\mathbb{D}}F(z)(U^\alpha_z\psi_\theta)d\lambda(z),\quad F\in\mathcal{V}^\alpha_\psi.$$

对于任意 $(e^{i\theta},z)\in\mathbb{T}\times\mathbb{D}$ 和 $f\in A^2_\alpha$，由定理 3.4 可得

$$|V^\alpha_\psi f(e^{i\theta},z)|=|\langle f,\,U^\alpha_z\psi_\theta\rangle_\alpha|\le\|f\|_{A^2_\alpha}\|\psi\|_{A^2_\alpha}=\|V^\alpha_\psi f\|_{L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{D},(\alpha+1)dH)}.$$

因此，$\mathcal{V}^\alpha_\psi$ 是一个再生核希尔伯特空间。对于任意 $F\in\mathcal{V}^\alpha_\psi$，我们有

$$F(e^{i\theta},z)=V^\alpha_\psi((V^\alpha_\psi)^{-1}F)(e^{i\theta},z)=\langle(V^\alpha_\psi)^{-1}F,\,U^\alpha_z\psi_\theta\rangle_{A^2_\alpha}=\langle F,\,V^\alpha_\psi(U^\alpha_z\psi_\theta)\rangle_{A^2_\alpha}.$$

因此，$\mathcal{V}^\alpha_\varphi$ 在 $(e^{i\theta},z)$ 处的再生核为

$$V^\alpha_\psi(U^\alpha_z\psi_\theta)(e^{it},w)=\langle U^\alpha_z\psi_\theta,\,U^\alpha_w\psi_t\rangle_{A^2_\alpha}.$$

令 P_ψ^α 表示从 $L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{D},(\alpha+1)dH)$ 到 $\mathcal{V}_\psi^\alpha$ 的正交投影。那么 P_ψ^α 具有如下积分表示

$$P_\psi^\alpha F(e^{i\theta},z)=(\alpha+1)\int_0^{2\pi}\frac{dt}{2\pi}\int_{\mathbb{D}}F(e^{it},w)\langle U_w^\alpha\psi_t,\,U_z^\alpha\psi_\theta\rangle_{A_\alpha^2}d\lambda(w).$$

对于 $f\in L^\infty(\mathbb{T}\times\mathbb{D})$，我们将 Toeplitz 型算子 $\mathbf{T}^{\psi,\alpha}_f$ 定义在 $\mathcal{V}_\psi^\alpha$ 上如下：

$$\mathbf{T}_f^{\psi,\alpha}F=P_\psi^\alpha(fF).$$

命题 5.7. 设 $\psi\in A_\alpha^2$ 满足 $\|\psi\|_\alpha=1$。对于 $f\in L^\infty(\mathbb{T}\times\mathbb{D})$，有

$$(V_\psi^\alpha)^{-1}\mathbf{T}_f^{\psi,\alpha}V_\psi^\alpha=\mathbf{L}_f^{\psi,\alpha}.$$

证明. 对于 $g,h\in A_\alpha^2$，有

$$\begin{aligned}\langle(V_\psi^\alpha)^{-1}\mathbf{T}_f^{\psi,\alpha}V_\psi^\alpha g,\,h\rangle_{A_\alpha^2}&=\langle\mathbf{T}_f^{\psi,\alpha}V_\psi^\alpha g,\,V_\psi^\alpha h\rangle_{L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{D},(\alpha+1)dH)}\\&=\langle fV_\psi^\alpha g,\,V_\psi^\alpha h\rangle_{L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{D},(\alpha+1)dH)}\\&=(\alpha+1)\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi}\int_{\mathbb{D}}f(e^{i\theta},z)\langle g,\,U_z^\alpha\psi_\theta\rangle_{A_\alpha^2}\langle U_z^\alpha\psi_\theta,\,h\rangle_{A_\alpha^2}\,d\lambda(z)\\&=\langle\mathbf{L}_f^{\psi,\alpha}g,\,h\rangle_{A_\alpha^2},\end{aligned}$$

由此完成证明。 □

我们注意到，f 的窗函数 Berezin 变换 $B_\alpha^{\psi^\alpha}f$ 实际上是 $\mathbf{T}^{\psi,\alpha}_f$ 在 $\mathcal{V}_\psi^\alpha$ 上的 Berezin 变换：

$$B_\alpha^{\psi^\alpha}f(e^{i\theta},z)=\langle\mathbf{T}_f^{\psi,\alpha}V_\psi^\alpha(U_z^\alpha\psi_\theta),\,V_\psi^\alpha(U_z^\alpha\psi_\theta)\rangle_{L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{D},(\alpha+1)dH)}.\tag{5.15}$$

现在我们可以证明定理5.6。

证明。 由命题 5.7，可得

$$\operatorname{tr}(\mathbf{L}_f^{\psi^\alpha,\alpha}h(\mathbf{L}_f^{\psi^\alpha,\alpha}))=\operatorname{tr}(\mathbf{T}_f^{\psi^\alpha,\alpha}h(\mathbf{T}_f^{\psi^\alpha,\alpha})).$$

由 (5.15) 及 [4,命题 2。1]可知，若 h 是一个单项式，则

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi}\int_{\mathbb{D}}h(B_\alpha^{\psi^\alpha}f(e^{i\theta},z))f(z)\,d\lambda(z)&\le\operatorname{tr}(\mathbf{T}_f^{\psi^\alpha,\alpha}h(\mathbf{T}_f^{\psi^\alpha,\alpha}))\\&\le\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi}\int_{\mathbb{D}}h(f(z))B_\alpha^{\psi^\alpha}f(e^{i\theta},z)\,d\lambda(z).\end{aligned}$$

由于 h 是一个单项式，存在常数 $C_h>0$使得

$$|h(x)-h(y)|\le C_h|x-y|.$$

由定理5.4，我们得到

$$\left|\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi}\int_{\mathbb{D}}h(B_\alpha^{\psi^\alpha}f(e^{i\theta},z))f(z)\,d\lambda(z)-\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi}\int_{\mathbb{D}}f(z)h(f(z))\,d\lambda(z)\right|$$

$$\leq \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \int_{\mathbb{D}} |h(B_\alpha^{\psi^\alpha} f(e^{i\theta}, z)) - h(f(z))||f(z)|\, d\lambda(z)$$
$$\leq C_h \|f\|_\infty \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \int_{\mathbb{D}} |B_\alpha^{\psi^\alpha} f(e^{i\theta}, z) - f(z)|\, d\lambda(z)$$
$$= C_h \|f\|_\infty \|B_\alpha^{\psi^\alpha} f - f\|_{L^1(\mathbb{T}\times\mathbb{D})} \to 0$$

如 $\alpha \to \infty$。另一方面，再由定理5.4，我们得到

$$\left| \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \int_{\mathbb{D}} h(f(z)) B_\alpha^{\psi^\alpha} f(e^{i\theta}, z)\, d\lambda(z) - \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \int_{\mathbb{D}} f(z) h(f(z))\, d\lambda(z) \right|$$
$$\leq \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \int_{\mathbb{D}} |B_\alpha^{\psi^\alpha} f(e^{i\theta}, z) - f(z)||h(f(z))|\, d\lambda(z)$$
$$\leq \|h\|_\infty \|B_\alpha^{\psi^\alpha} f - f\|_{L^1(\mathbb{T}\times\mathbb{D})} \to 0$$

当 $\alpha \to \infty$时。由此可知（5.10）对所有单项式成立。 □

第二个证明。本证明所采用的方法见之于 [10] 与 [23]。

如果 $h(z) \equiv 1$，则所需结论由（5.11）得出。如果 $h(z) = z$，则所需结论由（5.9）得出。鉴于命题5.7 与（5.11），尚需证明对所有 $m \geq 2$，我们有

$$\lim_{\alpha\to\infty} \frac{\operatorname{tr}((\mathbf{T}_f^{\psi^\alpha,\alpha})^m - \mathbf{T}_{f^m}^{\psi^\alpha,\alpha})}{\alpha+1} = 0. \tag{5.16}$$

由引理5.5 与命题5.7,

$$\lim_{\alpha\to\infty} \frac{\operatorname{tr}(\mathbf{T}_f^{\psi^\alpha,\alpha}\mathbf{T}_f^{\psi^\alpha,\alpha} - \mathbf{T}_{f^2}^{\psi^\alpha,\alpha})}{\alpha+1} = 0. \tag{5.17}$$

令 P_ψ^α表示从 $L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{D}, (\alpha+1)dH)$到 $\mathcal{V}_\psi^\alpha$的正交投影，且$Q_\psi^\alpha = I - P_\psi^\alpha$。我们将 $\mathbf{T}^{\psi^\alpha,\ \alpha}_{\ f}$扩展为定义在 $P_\psi^\alpha M_f P_\psi^\alpha$上的算子 $L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{D}, (\alpha+1)dH)$，其中 M_f 是由 f给出的乘法算子。应用定理 2证明中所用的相同论证，我们由（5.16）推出（5.17）。□

令 $\lambda_i(\mathbf{L}_f^{\psi^\alpha,\alpha})$ 表示 $\mathbf{L}^{\psi^\alpha,\ \alpha}_{\ f}$的第 i 个奇异值。注意到

$$\#\left\{i : \lambda_i(\mathbf{L}_f^{\psi^\alpha,\alpha}) > \delta\right\} = \operatorname{tr}(\mathbf{L}_f^{\psi^\alpha,\alpha} h_\delta(\mathbf{L}_f^{\psi^\alpha,\alpha})),$$

其中

$$h_\delta(x) = \frac{\mathbb{1}_{(\delta,\|f\|_\infty]}(x)}{x}.$$

应用定理 5.6 以及在 [10,推论 2.2], 中使用的标准逼近论证，我们得到如下推论。详细证明留给感兴趣的读者。

推论 5.8。 设 $\psi \in A^2$ 满足 $\|\psi\|_{A^2} = 1$， $\psi^\alpha = V^\alpha \psi$，且 f 是 $L^1(\mathbb{D}, d\lambda) \cap L^\infty(\mathbb{D})$中的一个非负函数。对于 $0 < \delta \leq \|f\|_\infty$，有

$$\lim_{\alpha\to\infty} \frac{\#\left\{i : \lambda_i(\mathbf{L}_f^{\psi^\alpha,\alpha}) > \delta\right\}}{\alpha+1} = \lambda(\{z \in \mathbb{D} : f(z) > \delta\}).$$

我们以下述推论结束本文。

推论 5.9. 设 $\psi \in A^2$ 满足 $\|\psi\|_{A^2} = 1$、 $\psi^\alpha = V^\alpha \psi$，且 $f \in L^1(\mathbb{D}, d\lambda) \cap L^\infty(\mathbb{D})$为非负数。则

$$\lim_{\alpha\to\infty} \|\mathbf{L}_f^{\psi^\alpha,\alpha}\|_{A^2_\alpha} = \|f\|_\infty.$$

证明。 显然，我们有 $\|\mathbf{L}^{\psi^\alpha}_{f}{}^{,\alpha}\|_{A^2_\alpha} \leq \|f\|_\infty$。对于任意 $0 < \varepsilon < \|f\|_\infty$，令 $\delta = \|f\|_\infty - \varepsilon$。由推论 5.8，可得

$$\lim_{\alpha\to\infty} \frac{\#\left\{i : \lambda_i(\mathbf{L}_f^{\psi^\alpha,\alpha}) > \delta\right\}}{\alpha+1} = \lambda(\{z \in \mathbb{D} : f(z) > \delta\}).$$

那么存在一个 $\alpha_0 > 0$，使得对任意 $\alpha > \alpha_0$，均有

$$\frac{\#\left\{i : \lambda_i(\mathbf{L}_f^{\psi^\alpha,\alpha}) > \delta\right\}}{\alpha+1} > \lambda(\{z \in \mathbb{D} : f(z) > \delta\})/2.$$

因此，对于 $\alpha > \alpha_0$，有

$$\|\mathbf{L}_f^{\psi^\alpha,\alpha}\|_{A^2_\alpha} > \delta = \|f\|_\infty - \varepsilon.$$

由此可得

$$\lim_{\alpha\to\infty} \|\mathbf{L}_f^{\psi^\alpha,\alpha}\|_{A^2_\alpha} = \|f\|_\infty.$$

证明完毕。 □

致谢

Ma得到中国国家自然科学基金（项目编号12171484、12571140）、湖南省自然科学基金（项目编号2023JJ20056）、湖南省科技创新计划（项目编号2023RC3028）以及中南大学创新驱动研究计划（项目编号2023CXQD032）、湖南数学分析基础科学研究中心（2024JC2002）的资助。Yan得到中国国家自然科学基金（12401150）和中央高校基本科研业务费（2024CDJXY018）的部分资助。

参考文献

[1] P. Ahern, M. Flores, W. Rudin，不变体积平均值性质。《函数分析杂志》**111**(1993)，第 2 期，380-397[2] S. Axler, D. Zheng，通过 Berezin 变换研究紧算子。《印第安纳大学数学杂志》**47**(1998)，第 2 期，387–400。[3] P. Boggiatto, A. Oliaro, M. W. Wong， L^p 局部化算子的有界性与紧性。*J. Math. Anal.Appl.* **322** (2006)，第 1 期，193–206。

[4] T. Camper, M. Mitkovski，托普利兹算子的半经典 Szegő 型极限定理，arXiv:2411.19298v2 [math.FA].[5] E. Cordero, K. Gröchenig，局部化算子的时频分析。《函数分析杂志》205 (2003)，第 1 期，107–131。[6] A. Dasgupta, S. K. Nayak, M. W. Wong，单位圆盘上的局部化算子。《算子理论杂志》90 (2023)，第 2 期，385–400。[7] I. Daubechies，时频局部化算子：一种几何相空间方法。《IEEE 信息论汇刊》34(4)(1988)605–612。[8] J. Dixmier，《C*-代数》。由 Francis Jellett 从法文译出。North-Holland 数学文库，第 15 卷，North-Holland Publishing Co.，阿姆斯特丹-纽约-牛津，1977。[9] M. Engliś，多重调和 Bergman 空间上的 Berezin 变换。《美国数学会汇刊》361 (2009)，第 3 期，1173–1188。[10] H. G. Feichtinger, K. Nowak, Gabor-Töplitz 局部化算子的 Szegő 型定理。《密歇根数学杂志》49 (2001)，第 1 期，13–21。[11] H. G. Feichtinger, K. Nowak，Gabor 乘子初探。载于《Gabor 分析进展》，99–128，应用与数值调和分析，Birkhänser Boston，波士顿，马萨诸塞州，2003。[12] C. Fernández, A. Galbis，$L^2(\mathbb{R}^d)$上时频局部化算子的紧性。《函数分析杂志》233 (2006)，第 2 期，335–350。[13] K. Gröchenig，《时频分析基础》。应用与数值调和分析。Birkhäuser Boston, Inc.，波士顿，马萨诸塞州，2001。[14] A. Galbis，Fock 空间上自伴托普利兹算子的范数估计。《复分析与算子理论》16 (2022)，第 1 期，论文编号 15。[15] Y. Huang, J. Zhang，Fock 空间上带非径向符号的自伴托普利兹算子的范数界，arXiv:2405.11147v1。[16] S. Janson, J. Peetre, and R. Rochberg，Hankel 型与 Fock 空间，《伊比利亚美洲数学杂志》3 (1987)，61-138。[17] M. Mitkovski, D. Suárez, B. D. Wick，$A^p_\alpha(\mathbb{B}_n)$上算子的本质范数。《积分方程与算子理论》75 (2013)，第 2 期，197–233。[18] F. Nicola, P. Tilli，时频与小波局部化算子的范数。《美国数学会汇刊》376 (2023)，第 10 期，7353–7375。[19] J. Ramanathan, P. Topiwala，通过 Weyl 对应实现时频局部化。《SIAM 数学分析杂志》24 (1993)，第 5 期，1378–1393。[20] J. Ramanathan, P. Topiwala，时频局部化与谱图。《应用与计算调和分析》1 (1994)，第 2 期，209–215。[21] J. P. G. Ramos, P. Tilli，小波变换的 Faber-Krahn 不等式。《伦敦数学学会通报》55 (2023)，第 4 期，2018–2034。[22] D. Suárez，$A^p(\mathbb{B}_n)$上 Toeplitz 代数中算子的本质范数。《印第安纳大学数学杂志》56(5)，2185–2232 (2007)。[23] H. Widom，某些齐性空间的特征值分布定理。《函数分析杂志》32 (1979)，第 2 期，139–147。[24] M. W. Wong，《局部化算子》。讲义系列 47。首尔国立大学数学研究所全球分析研究中心，首尔，1999。[25] M. W. Wong，《小波变换与局部化算子》。《算子理论：进展与应用》第 136 卷。Birkhäuser 出版社，巴塞尔，2002。[26] K. Zhu，《函数空间中的算子理论》（第 2 版）。数学调查与专著 138。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2007。[27] K. Zhu，《Fock 空间上的分析》，数学研究生教材 263，施普林格，纽约，2012。

（Pan Ma）数学与统计学院，HNP-LAMA，中南大学，长沙，湖南 410083，中国电子邮箱：pan.ma@csu.edu.cn

（Fugang Yan）数学与统计学院，重庆大学，重庆 401331，中国；以及非线性分析及其应用重点实验室（重庆大学），教育部，重庆 401331，中国

电子邮箱：fugangyan@cqu.edu.cn

（Dechao Zheng）数学系，范德堡大学，纳什维尔，田纳西州 37240，美国。

电子邮箱：dechao.zheng@vanderbilt.edu

(Kehe Zhu) 纽约州立大学奥尔巴尼分校数学与统计系，奥尔巴尼，纽约州 12222，美国。电子邮件地址：kzhu@albany.edu