一种用于多目标优化收敛性评估的自适应基于KKT的指标

Thiago Santos欧鲁普雷图联邦大学数学系，*UFOP*巴西，欧鲁普雷图
santostf@ufop.edu.br

Sebasti˜ao Xavier欧鲁普雷图联邦大学数学系，*UFOP*巴西，欧鲁普雷图 semarx@ufop.edu.br

arXiv:2603.04053v1 [math.OC] 4 Mar 2026

摘要—**性能指标是评估多目标优化算法收敛行为的重要工具，尤其是在真实帕累托前沿未知或难以近似时。超体积和反世代距离等经典基于参考点的指标应用广泛，但在多目标情景下可能受到可扩展性限制，并且对参数选择较为敏感。基于Karush–Kuhn–Tucker (KKT) 最优性条件的指标通过量化驻点性而无需依赖外部参考集，提供了一种内在的替代方案。本文重新审视了一种受熵启发的基于KKT的收敛指标，并提出一种基于分位数归一化的稳健自适应重构。该指标保留了原始形式基于驻点性的解释，同时提高了对驻点残差异质分布的稳健性；这一问题在多目标优化中反复出现。**

索引词—**多目标优化，收敛指标，KKT条件，分位数归一化，性能评估。**

I. 引言

性能评估是多目标优化实证研究的基础组成部分，因为它支撑着有关收敛行为、解的质量和算法优越性的论断。近年来，人们日益认识到，性能评估并非中立的后处理步骤，而是一种可能显著影响实验结论的方法选择。全面分析表明，即使针对相同的近似集，不同指标也可能产生相互矛盾的排名；随着目标数量增加，这种现象会愈发明显 [1]。因此，性能指标的可靠性和可解释性仍是当代多目标优化研究关注的核心问题。

除了用于基准测试和排序之外，收敛指标在计算优化中还发挥着重要作用，可用于算法诊断。具体而言，它们有助于设计停止准则、分析瞬态行为，并在帕累托前沿未知或难以实际近似时监测进展。在此背景下，依赖内在最优性信息的指标尤其具有吸引力，因为它们无需外部参考集，便能在不同问题和实验设置中一致地应用。

在多目标设置中，一个主要难点在于帕累托支配导致的选择压力逐渐减弱。随着目标空间维数增加，支配关系日益稀疏，近似集中大多数解都彼此非支配。这一现象不仅使算法设计更加复杂，也削弱了基于支配及由支配关系衍生的性能指标的有效性。因此，评估收敛性以及向帕累托最优性迈进的进展，需要采用在高维权衡下仍具有区分能力的替代机制。

在基于参考点的指标中，超体积度量因其严格满足帕累托一致性，且能够同时反映收敛性与多样性，而得到广泛采用。这些特性使超体积成为许多基准测试研究中的事实标准。尽管如此，其实际应用仍受两个众所周知的问题制约。首先，精确计算超体积的计算成本会随着目标数量增加而迅速上升，往往不得不采用近似方法。其次，该指标高度依赖参考点的选择，而参考点可能显著影响绝对值以及算法之间的相对比较 [2]。这些局限引发了关于超体积在多目标性能评估中作用的持续讨论。

基于距离的指标（例如反世代距离（IGD））通过量化近似集与帕累托前沿预定义参考表示之间的平均接近程度，提供了一种替代方案。尽管在概念上简单明了，IGD 仍严重依赖参考集的构建。研究表明，参考点的密度、分布和位置可能会显著改变评估结果，从而可能偏向某些解的特征，同时对其他特征不利 [3]。在多目标问题中，由于难以获得准确且均匀分布的参考前沿，这种敏感性令人担忧基于 IGD 的比较是否稳健且可复现 [4]。

为应对这些挑战，一条互补的研究路线聚焦于不依赖外部参考信息的内在收敛性指标。对于光滑多目标优化问题，一阶必要

帕累托最优性条件为收敛性评估提供了自然且具有理论基础的依据。这些条件将经典的 Karush–Kuhn–Tucker（KKT）框架扩展到向量值目标，从而引出刻画局部帕累托最优性的驻点性概念。基于 KKT 的邻近度量量化候选解违反这些最优性条件的程度，从而提供一种与问题解析结构直接关联的无参考指标 [5]。

在该框架内，Santos和Xavier提出了一种受熵启发的基于KKT的收敛指标，将驻点残差聚合为一个有界标量度量[6]。该指标的有界性便于解释以及在不同运行之间进行比较，同时其公式避免了对参考集或支配关系的显式依赖。然而，该指标依赖于一个固定的饱和参数，该参数隐含地假设近似集上的驻点残差具有统一尺度。

在实践中，近似集在收敛状态上往往表现出显著的异质性，尤其是在优化过程的中间阶段。一个种群中同时包含接近驻点的解以及仍远未满足最优性条件的其他解，这种情况十分常见。在这种情况下，固定饱和机制可能将范围很广的残差量级映射为相似的指标贡献，从而有效降低对收敛较差的解之间的分辨能力，并限制该指标反映逐步改进的能力 [7]。这种判别力的丧失在多目标情景中尤为成问题，因为收敛性在目标空间的不同区域进展并不均匀。

近期关于性能评估的研究因此强调了针对异质解质量的稳健性需求，主张采用能够适应近似集统计结构的归一化与缩放策略，而不是施加固定的全局参数 [8]。这类方法旨在提升一致性与可解释性，同时不改变其基础收敛概念。受这些考量启发，本文提出了受熵启发的基于 KKT 的收敛指标的自适应重构，旨在保留其理论基础，同时提高其在不同驻点状态下的区分能力。

II. 背景

我们考虑如下形式的光滑多目标优化问题

$$\min_{x\in\Omega} \; F(x) = \big(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)\big), \tag{1}$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是非空可行集，且每个目标函数 $f_i : \Omega \to \mathbb{R}$ 都是连续可微的。若不存在可行点 $x \in \Omega$，使得对于所有 $i \in \{1, \ldots, m\}$ 均有 $f_i(x) \le f_i(x^\star)$，并且至少对一个索引 j 有 $f_j(x) < f_j(x^\star)$，则称点 $x^\star \in \Omega$ 为帕累托最优。

对于光滑问题，帕累托最优性可用一阶必要条件来刻画。一个可行点 $x^\star$ 若存在一个满足以下条件的向量 $\lambda \in \mathbb{R}^m$，则称其为帕累托驻点

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla f_i(x^\star) = 0, \qquad \lambda_i \ge 0, \qquad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1. \tag{2}$$

条件 (2) 将经典的 Karush–Kuhn–Tucker 框架推广到多目标情形，并给出一种无需参考集的一阶驻点性概念，该概念已广泛应用于连续多目标优化 [5]。

给定候选解 $x \in \Omega$，可通过求解以下凸二次规划来量化驻点条件 (2) 的违反程度：

$$\min_{\lambda\in\mathbb{R}^m} \left\| \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla f_i(x) \right\|^2 \quad \text{subject to} \quad \lambda_i \ge 0, \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1, \tag{3}$$

该规划旨在寻找欧几里得范数最小的目标梯度凸组合。令 $\lambda^\star(x)$ 表示问题 (3) 的一个最优解。相应的向量

$$q(x) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^\star(x) \nabla f_i(x) \tag{4}$$

当且仅当 x 满足一阶帕累托驻点条件时，该向量才为零。

因此，可将平稳性违反的标量度量定义为

$$s(x) = \|q(x)\|^2, \tag{5}$$

该度量非负、连续，且在目标函数正比例缩放下保持不变。这类残差构成了若干基于 KKT 的邻近度量和收敛指标的基础，因为它们能够内在地评估最优性，而无需依赖外部参考集或支配关系 [9], [10]。

给定有限近似集 $X = \{x_1, \ldots, x_N\}$，挑战在于将各个残差 $s(x_i)$ 汇总为一个标量，以反映该集合的整体收敛状态。 [6] 中提出的熵启发指标通过固定的饱和常数对各个残差的贡献进行限制，从而确保汇总结果经过归一化且易于解释。然而，这种构造隐含地假设驻点残差在近似集中的尺度相近；当残差分布高度异质或呈重尾时，这一假设在实践中可能不成立。

III. 自适应 $\mathcal{H}$ 指标

设 $X = \{x_1, \ldots, x_N\}$ 为一个有限近似集。对于每个 $x_i \in X$，我们计算式 (5) 中定义的驻点性残差 $s_i = s(x_i)$。 [6]中提出的原始熵启发指标通过固定的饱和映射聚合这些残差，

$$\tilde{s}_i = \min\left\{ \frac{1}{e},\, s_i \right\}, \tag{6}$$

然后进行类熵聚合

$$\mathcal{H}_{old}(X) = -\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \tilde{s}_i \log\big(\tilde{s}_i\big), \tag{7}$$

按照约定，$0\log\ 0 = 0$。

$\mathcal{H}_{old}$ 中采用的固定饱和阈值隐含地假设驻点残差经过了良好缩放，且处于有界范围内。然而，在异质近似集中，残差的数量级可能相差数个数量级。在这种情况下，较大的残差值会被映射为相同的贡献，从而降低指标的区分能力，并限制其反映收敛性逐步改善的能力。为解决这一局限，我们提出一种基于经验分位数的自适应归一化策略。

设 Q_α 和 Q_β 分别表示残差集 $\{s_1, \ldots, s_N\}$的下、上经验分位数，其中 $0 < \alpha < \beta < 1$。我们将温莎化残差定义为

$$\hat{s}_i = \min\left\{\max\left\{s_i,\ Q_\alpha\right\},\ Q_\beta\right\}, \tag{8}$$

这既限制了极端值，又保留了分布中心部分残差的相对排序。

随后，按照下式计算归一化残差:

$$z_i = \frac{\hat{s}_i - Q_\alpha}{Q_\beta - Q_\alpha + \varepsilon}, \tag{9}$$

其中，$\varepsilon > 0$ 是一个数值正则化参数，仅用于避免浮点退化。所提出的自适应指标定义为

$$\mathcal{H}_{adap}(X) = -\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} z_i \log\big(z_i + \varepsilon\big). \tag{10}$$

为进行理论分析，我们考虑通过设定 $\varepsilon = 0$得到的 $\mathcal{H}_{adap}$ 理想化形式。这一简化保留了该指标的全部结构性质，同时便于阐述。

定理1（自适应$\mathcal{H}$指标的有界性与尺度不变性）。 设 $X = \{x_1, \ldots, x_N\}$ 为一个有限近似集，并设 $s_i = s\ (x_i)$ 为由下式定义的*KKT*驻点性残差

$$s(x) = \left\| \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^\star(x) \nabla f_j(x) \right\|^2, \tag{11}$$

其中 $\lambda^\star\ (x)$ 为（3）中二次规划的解。固定 $0 < \alpha < \beta < 1$ 并假设 $Q_\beta > Q_\alpha$。按（10）并取$\varepsilon = 0$定义 $\mathcal{H}_{adap}\ (X)$ 。则:

（i）（有界性） $0 \le \mathcal{H}_{adap}\ (X)\ \le \frac{1}{e}$。（ii）（共同正比例缩放下的不变性）若所有目标均按共同因子 $c > 0$缩放，即对所有 j，有$f_j^{(c)}\ (x)\ = c\, f_j\ (x)$，则 $\mathcal{H}_{adap}\ (X)$ 在该变换下保持不变。

证明。(i) 根据构造，$\hat{s}_i \in [Q_\alpha, Q_\beta]$，这意味着对于所有 i，$z_i \in [0,1]$。考虑函数 $\phi(t) = -t\log\ t$，其定义于 $[0,1]$ 满足 $\phi(0) = 0$。初等微积分表明，ϕ 在 $t = 1/e$ 处取得最大值，并且满足

$$0 \le \phi(t) \le \frac{1}{e} \quad \text{for all } t \in [0,1].$$

因此，

$$0 \le \mathcal{H}_{adap}(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \phi(z_i) \le \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{e} = \frac{1}{e}.$$

(ii) 设 $f_j^{(c)}(c\nabla f_j\ x\qquad\qquad\lambda\qquad\qquad\qquad

规划阶段并非计算瓶颈。

相比之下，当无法获得解析梯度时，通过有限差分进行数值微分，每个解需要进行 $2m$次函数评估。对于计算成本高昂的目标函数，这可能会限制该指标的实际适用性，使其仅适用于评估成本较低或可直接获得导数的问题。

尽管存在这些考量， $\mathcal{H}_{adap}$ 公式在高维目标空间中仍具有结构性优势。在超多目标场景中，由于维数灾难，驻点残差通常呈现重尾分布且方差较高。 $\mathcal{H}_{old}$ 固定的饱和机制会将不同的非驻点幅度压缩为相同的上界，实际上消除了区分能力。相比之下， $\mathcal{H}_{adap}$ 基于分位数的归一化会适应残差的经验分布，在近帕累托驻点解之间保留分辨能力，并为具有 $m \geq 30$的问题提供更可靠的收敛诊断。

当 X 中的所有点趋近帕累托驻点时，两个指标均满足 $\mathcal{H}_{old}(X) \to 0$ 以及 $\mathcal{H}_{adap}(X) \to 0$。此外，当残差分布完全低于 $\mathcal{H}_{old}$的饱和阈值时，自适应公式会简化为原始指标的单调变换。这确保了概念上的一致性，同时提升了指标在异质收敛状态下的稳健性。

在下一节中，我们将展示实验结果，对比 $\mathcal{H}_{old}$ 和 $\mathcal{H}_{adap}$ 与其他经典性能指标。

IV. 仿真结果

本节将考察所提出的自适应指标 $\mathcal{H}_{adap}$ 的实证表现，并将其与原始公式 $\mathcal{H}_{old}$ 以及多目标优化中常用的两种经典性能度量进行比较，即平均豪斯多夫距离 Δ_p 和超体积（HV）。实验目的并非断言某一指标优于其他指标，而是分析它们在不同多目标情景下的一致性、分辨率和稳健性。

实验评估采用了 DTLZ 测试套件中的五个基准问题，即 DTLZ1 至 DTLZ5。这些问题因能够揭示帕累托前沿的不同收敛病态和几何特征，而在多目标优化文献中被广泛采用。DTLZ1 的特点是具有线性帕累托前沿和大量局部最优点，因此适合用于评估收敛可靠性。DTLZ2 和 DTLZ4 具有相同的超球形帕累托前沿，但目标缩放的分布不同；DTLZ4 引入了强偏置，对多样性保持构成挑战。DTLZ3 在 DTLZ2 的基础上加入了高度多峰的景观，从而加剧了支配抗性和指标退化。最后，DTLZ5 形成了一个退化的帕累托前沿

其内在维数有所降低，因此可严格检验性能指标对结构不规则性的敏感度。这些问题共同构成了一组具有代表性的基准，用于评估性能指标在多目标优化中常见的异质收敛机制下的表现。

所有问题均设置为 $m = 12$ 个目标，以确保处于真正的多目标环境中；在这种环境下，支配关系变得稀疏，基于指标的评估发挥着核心作用。这一设置反映了实际应用中的情形，在此类情形下，内在收敛指标最具信息价值。

本研究所考察的算法属于具有代表性的一类先进多目标进化优化方法，均在PlatEMO框架 [11]中实现。它们体现了应对多目标问题所带来挑战的不同算法原理，包括基于参考点的选择、协同约束处理以及几何驱动搜索机制。具体而言，实验评估包括：

- NSGA-III通过针对多目标优化量身设计的基于参考点的选择策略扩展了非支配排序 [12];
- CMOEA-CD 是一种约束多目标进化算法，通过利用协同关联机制来平衡可行性与收敛性 [13];
- NRVMOEA 是一种由法向量引导的进化算法，旨在提升搜索效率并维持高维目标空间中的多样性 [14]。

对于所有基准问题，均采用包含 100 个个体的种群规模。每种算法均独立运行 30 次，每次运行的终止条件为完成 25，000 次目标函数评估。所有仿真均在 PlatEMO 框架下进行，以确保实现一致，并保证所报告性能指标的可复现性。

第一个基准问题的性能比较结果见表I。该表汇总了 30 次独立运行中 $\mathcal{H}_{adap}$、 $\mathcal{H}_{old}$、 Δ_p 和超体积的均值与标准差。对于 $\mathcal{H}_{adap}$、 $\mathcal{H}_{old}$ 和 Δ_p，数值越低表示性能越好；对于超体积，则数值越高越好。

表I中的结果说明了经典指标在高维目标空间中表现出的分辨率损失。尽管 $\mathcal{H}_{old}$ 为 NSGA-III 和 NRVMOEA 赋予了相近的数值，自适应公式 $\mathcal{H}_{adap}$ 却能更清晰地区分这些算法。相比之下，Hyper-volumetric 为 NRVMOEA 和 CMOEA-CD 赋予了接近零的数值，表明在此情形下支配体积覆盖率有限。

表 II 报告了第二个基准问题的相应结果。

对于这个问题，所有指标的表现都更加规律。不过，与原始公式相比，自适应指标能够更明显地区分不同算法，而超体积指标则证实了 NRVMOEA 获得了更优的覆盖范围。

表I DTLZ1 上的性能比较（$m = 12$）。

算法	$\mathcal{H}_{adap}\downarrow$	$\mathcal{H}_{old}\downarrow$	$\Delta_p\downarrow$	HV↑
NSGA-III	7.01e-2 (8.19e-2)	3.50e-2（2.93e-2）	1.17e+0 (1.94e+0)	5。56e-1 (3。81e-1)
NRVMOEA	6.16e-2 (8.88e-2)	3.46e-2 (1.62e-2)	1.43e+2 (1.59e+1)	0.00e+0 (0.00e+0)
CMOEA-CD	2.08e-1（9.88e-3）	2.32e-3 (3.46e-3)	6。27e+1 (5。07e+1)	3.80e-3 (2.08e-2)

表 II DTLZ2 上的性能比较（$m = 12$）。

算法	$\mathcal{H}_{adap}\downarrow$	$\mathcal{H}_{old}\downarrow$	$\Delta_p\downarrow$	HV↑
NSGA-III	5.81e-2 (3.76e-2)	2.28e-2 (2.02e-2)	6.34e-1 (5.43e-2)	9.14e-1 (1.55e-1)
NRVMOEA	6。39e-2 (1。60e-2)	1。33e-2 (3。16e-3)	5.74e-1 (5.27e-3)	9。67e-1 (1。88e-3)
CMOEA-CD	1.36e-1（1.43e-2）	1.98e-1 (2.19e-2)	8.64e-1 (1.25e-1)	4.57e-1 (1.12e-1)

第三个基准问题的结果总结于表 III。

在这种情况下，超体积度量变得毫无信息，因为所有算法的取值都为零。虽然 $\mathcal{H}_{old}$ 由于饱和而呈现压缩的取值，但自适应公式在所有算法中均保持非饱和的尺度，从而保留了有效的分辨率。

其余结果见表 IV 和表 V。

在此，原始指标因饱和效应而失效，而自适应公式则保留了算法之间有意义的差异，并与超体积所指示的排序保持一致。

总体而言，实验结果表明，$\mathcal{H}_{adap}$ 的表现与已有性能指标一致，同时缓解了固定归一化方案引起的饱和和分辨率损失。自适应公式并非要取代经典度量，而是作为一种补充工具，用于多目标优化中的收敛性评估，尤其适用于驻点残差分布具有异质性的场景。

V. 结论

本文重新审视了一种受熵启发、基于 KKT 的收敛性指标，并提出了一种基于分位数归一化的稳健自适应改写方案。所提出的指标保留了原始公式基于驻点性的解释，同时提高了对驻点残差异质分布的稳健性；这种分布异质性是多目标优化中反复面临的挑战。通过以分布感知归一化方案取代固定饱和阈值，自适应公式增强了区分能力，且无需引入依赖问题的调参参数或额外的算法复杂度。

在一系列不同的 DTLZ 基准问题上获得的实证结果表明，该自适应指标的表现与已有收敛度量一致，同时缓解了经典公式中观察到的分辨率损失和饱和效应。尤其是，当原始指标的取值趋于几乎相同，或超体积等基于参考点的指标变得缺乏信息时，这些情形凸显了自适应归一化对于高维目标空间中的收敛性评估具有实际意义。

从更广泛的视角来看，所提出的指标与近期基于最优性的邻近度量以及多目标优化中的内在性能评估研究相契合。自适应公式并未与基于参考点的指标或基于距离的度量直接竞争，而是提供了一种以一阶最优性条件为基础的补充视角。在多目标情形下，这一视角尤为重要，因为此时支配关系会减弱，参考信息变得不可靠，指标退化也屡见不鲜。

未来的研究可探讨自适应指标的理论收敛性质，以及将其扩展至约束、含噪和随机优化场景，并将其集成到自适应停止准则和在线收敛监测等算法组件中。这些方向或可进一步巩固由最优性驱动的指标在复杂多目标优化问题收敛性评估中的作用，使其成为实用且可靠的工具。

参考文献

[1] C. Audet, J. Bigeon, D. Cartier, S. Le Digabel 和 L. Salomon，“多目标优化中的性能指标”，《欧洲运筹学杂志》，第 292 卷，第 2 期，第 397–422 页，2021 年。[2] A. P. Guerreiro、C. M. Fonseca、M. L´opez-Ib´a˜nez、L. Paquete 和 J. Vahrenhold，“超体积指标：计算问题与算法”，《*ACM* 计算调查》，第 54 卷，第 6 期，2021 年。[3] H. Ishibuchi、H. Masuda 和 Y. Nojima，“反世代距离对参考点的性能评估结果的敏感性”，载于*IEEE* 进化计算大会（*CEC*）论文集，第 1107–1114 页，2016 年。[4] H. Ishibuchi、H. Masuda、Y. Tanigaki 和 Y. Nojima，“多目标优化中性能评估参考点设定的难点”，*IEEE*进化计算汇刊，第 22 卷，第 4 期，第 626–641 页，2018 年。[5] M. Abouhawwash 和 K. Deb，“用于多目标优化的 Karush–kuhn–tucker 邻近度量”，载于遗传与进化计算大会（*GECCO*）论文集，第 525–532 页，2016 年。[6] T. Santos 和 S. Xavier，“多目标优化算法的收敛指标”，*TEMA – Tend˜encias em Matem´atica Aplicada e Computacional*，第 19 卷，第 3 期，第 347–366 页，2018 年。[7] Q. Zhang、H. Li 和 A. Zhou，“基于指标的多目标优化性能分析”，《群体与进化计算》，第 65 卷，文章编号 101018，2022 年。

表 III DTLZ3（$m = 12$）上的性能比较。

算法	$\mathcal{H}_{adap} \downarrow$	$\mathcal{H}_{old} \downarrow$	$\Delta_p \downarrow$	HV↑
NSGA-III	4.95e-2 (2.57e-2)	1.46e-1 (5.20e-2)	5.18e+1 (2.72e+1)	0.00e+0 (0.00e+0)
NRVMOEA	9.92e-2（1.84e-2）	2.45e-1 (2.40e-2)	6.41e+2 (4.51e+1)	0.00e+0 (0.00e+0)
CMOEA-CD	1。29e-1 (2。96e-2)	2.33e-1 (3.15e-2)	3.00e+2 (1.46e+2)	0.00e+0 (0.00e+0)

表 IV 在 DTLZ4（$m = 12$）上的性能比较。

算法	$\mathcal{H}_{adap} \downarrow$	$\mathcal{H}_{old} \downarrow$	$\Delta_p \downarrow$	HV↑
NSGA-III	1。95e-1 (1。35e-2)	8.37e-8 (1.00e-8)	6.32e-1 (3.01e-2)	9.46e-1（2.95e-2）
NRVMOEA	1.88e-1 (1.26e-2)	9.37e-8 (7.08e-9)	5.72e-1 (2.70e-3)	9.72e-1 (3.87e-4)
CMOEA-CD	2.19e-1 (9.75e-3)	1.80e-7 (1.23e-8)	6.96e-1 (1.41e-2)	7。14e-1 (4。22e-2)

表 V DTLZ5 上的性能比较 ($m = 12$)。

算法	$\mathcal{H}_{adap} \downarrow$	$\mathcal{H}_{old} \downarrow$	$\Delta_p \downarrow$	HV↑
NSGA-III	1.05e-1 (2.76e-2)	2.87e-2 (1.25e-2)	8.00e-1 (7.57e-2)	7.33e-2（1.18e-2）
NRVMOEA	9。26e-2 (1。74e-2)	3.36e-2 (1.05e-2)	1.36e+0 (7.90e-2)	2.65e-2 (2.45e-2)
CMOEA-CD	8.97e-2 (1.42e-2)	4.22e-2 (6.46e-3)	2.62e+0 (4.95e-2)	1.91e-2 (2.61e-2)

[8] Y. Li、H. Wang 和 Y. Jin，“进化多目标优化中的鲁棒性能评估”，*Information Sciences*，第 620 卷，第 1–18 页，2023 年。[9] K. Deb、M. Abouhawwash 和 H. Seada，“用于多目标优化的快速收敛度量”，*IEEE Transac- tions on Emerging Topics in Computational Intelligence*，第 1 卷，第 4 期，第 280–293 页，2017 年。[10] G. Eichfelder 、 A. Martin 和 A. Otto，“基于 KKT 点的约束多目标优化邻近度量”，*Journal of Global Optimization*，第 79 卷，第 593–617 页，2021 年。[11] Y. Tian、R. Cheng、X. Zhang 和 Y. Jin，“Platemo：进化多目标优化的 MATLAB 平台”，*IEEE*计算智能杂志，第 12 卷，第 4 期，第 73–87 页，2017 年。[12] K. Deb 和 H. Jain，“采用基于参考点的非支配排序方法的进化高维多目标优化算法，第一部分：求解带盒约束的问题”，*IEEE*进化计算汇刊，第 18 卷，第 4 期，第 577–601 页，2013 年。[13] J. Chen、Y. Wang、Z. Shao、H. Zeng 和 S. Zhao，“用于约束多目标优化的双种群协同相关进化算法”，*Mathematics*，第 13 卷，第 9 期，文章编号 1441，2025 年。[14] Y. Hua、Q. Liu 和 K. Hao，“自适应法向量引导的进化多目标与高维多目标优化”，*Complex & Intelligent Systems*，第 10 卷，第 3709–3726 页，2024 年。