arXiv:2603.04055v1 [math.NA] 4 Mar 2026

随机 Cahn–Hilliard 方程的标量辅助变量半隐式格式

Jianbo Cui[1], 沈捷[2†], Derui Sheng[1], YahongXiang[1†]

[1]应用数学系，香港理工大学，香港九龙红磡。[2]数学科学学院，东方理工大学，宁波，315200，浙江，中华人民共和国。

通讯作者：jianbo.cui@polyu.edu.hk；jshen@eitech.edu.cn；
sdr@lsec.cc.ac.cn；xiangyahong2025@outlook.com；

†这些作者对本研究的贡献相同。

摘要

本文提出了一种用于乘性噪声驱动的随机 Cahn–Hilliard 方程的新型半隐式数值格式。通过将原方程改写为等价的随机标量辅助变量（SSAV）系统，我们的方法能够以半隐式方式高效、稳定地处理多项式非线性。为准确捕捉随机扰动的影响，我们在 SSAV 近似中谨慎地纳入了伊藤修正项。利用底层半群的平滑性质以及非线性项的 $\boldsymbol{H}^{-1}$-耗散结构，我们证明，在迹类噪声情形下，所提出的格式具有最优的二分之一强收敛阶。此外，我们还证明，修正 SAV 能量渐近地保持能量演化律。最后，我们通过数值实验验证理论结果，并探究尖锐界面极限附近噪声的影响。

关键词：随机标量辅助变量，随机 Cahn–Hilliard 方程，强收敛，能量演化律

1 引言

Cahn–Hilliard 方程最初用于描述二元金属合金中的相分离动力学 [1]。通过引入代表热涨落和随机溶质振动的随机扰动， [2]，随机 Cahn–Hilliard 方程能够更真实地描述微观结构演化。该随机形式已广泛应用于多种过程，包括成核动力学、 [3]，旋节线分解 [4, 5]，粗化现象 [6]，细胞增殖与黏附 [7]，气泡运动 [8]，以及相关过程。

本文考虑如下随机 Cahn–Hilliard 方程

$$\begin{aligned} d\phi(t) &= \Delta\mu(t)\,dt + g(\phi(t))\,dW(t), && \text{in } \mathcal{O}\times(0,T], \\ \mu(t) &:= \frac{\delta E(\phi(t))}{\delta\phi} = -\Delta\phi(t) + F'(\phi(t)), && \text{in } \mathcal{O}\times(0,T], \end{aligned} \tag{1.1}$$

其满足齐次狄利克雷边界条件 $\phi = \mu = 0$ 在 $\partial\mathcal{O}\times(0,T]$ 上，并具有非随机初始条件 $\phi(0) = \phi^0$。空间区域 $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}^d$, $d\in\{1,2,3\}$ 是具有光滑边界的有界区域，或具有多边形边界的有界凸区域。狄利克雷问题具有实际意义，因为它描述了相对于凝固前沿静止的周围介质中的凝固前沿传播过程 [9]；另见 [10, 11]。未知量 ϕ 表示相变的序参量，化学势 μ 定义为金兹堡–朗道自由能泛函的泛函导数

$$E(\phi(t)) = \int_{\mathcal{O}} \Big[\frac{1}{2}|\nabla\phi(t,x)|^2 + f(\phi(t,x))\Big]dx \tag{1.2}$$

其中 f 是一个四次多项式，通常取为双阱势 $f(\phi) = \frac{1}{4}(\phi^2-1)^2$。下文中， F' 和 g 分别表示与 f'及有界函数 $\sigma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$相关联的涅米茨基算子，而 W 是空间齐次的迹类 Wiener 过程（见假设 1 和 2）。关于方程 (1.1)适定性和正则性的结果，参见 [9, 12, 13] 及其中的参考文献。在这些研究中，能量演化律是一个基本工具（例如参见 [14]），也被用于研究长期动力学，例如不变测度的存在性 [15]，、遍历性 [16]，，以及相应系统解的密度的存在性和严格正性 [10, 17, 18]，。

近年来，随机 Cahn–Hilliard 方程已成为数值研究的焦点，因为缺乏闭式解析解，必须发展稳健的计算方法。随机演化方程数值离散中的一个核心挑战在于时间离散的处理 [19]。特别是，随机稳定性与收敛的行为与确定性情形根本不同。对于具有多项式非线性的随机 Cahn–Hilliard 方程，处理稳定性的常见方法是采用全隐式时间步进格式；例如，参见 [9, 20–22] （加性噪声）以及 [10, 23–25] （乘性噪声）。最近，利用截断策略，[26] 发展了一种全离散格式，用于一类四阶随机偏

微分方程，这些方程由空间光滑乘性噪声驱动，该格式基于部分隐式时间步进与混合有限元方法的结合。然而，这些格式要求在每一步求解大型非线性随机系统，这在高维情形或细网格上计算代价高昂。此外，仍缺乏将数值离散与迭代误差相结合的统一误差分析框架，使得整体数值模拟误差尚不明确。

求解随机 Cahn–Hilliard 方程的另一种常用数值方法是采用显式或半隐式格式，旨在提升效率的同时保持稳定性，通常借助保结构策略或驯化策略。例如，已有研究针对加性噪声情形下的（1.1）提出了驯化指数 Euler 方法 [27]，但这类方法可能无法捕捉能量演化律。基于分裂的保结构格式提供了另一种选择，并且在求解随机 Allen–Cahn 方程时效果良好 [28, 29]；然而，这类格式并不适用于随机 Cahn–Hilliard 方程，因为相应的子系统可能无法显式求解。另一种方法是随机标量辅助变量（SSAV）方法，该方法的灵感来自用于确定性梯度流的标量辅助变量（SAV）方法 [30, 31]。SSAV 技术已成功应用于随机模型，包括随机非线性 Klein–Gordon [32] 方程和 Allen–Cahn 方程 [33, 34]。对于具有动态边界条件的随机 Cahn–Hilliard 方程， [35] 有研究提出了一种基于 SAV 的有限元格式，并证明其依分布收敛至适当的弱解，但未能证明强收敛。

众所周知，数值格式的强收敛阶是衡量逐路径精度的关键指标，对于蒙特卡罗方法和多层蒙特卡罗方法的复杂度分析至关重要 [36]。然而，据我们所知，对于具有非全局 Lipschitz 非线性项的随机 Cahn–Hilliard 方程，尚无显式或半隐式格式能够在保持能量演化律的同时实现强收敛。这一空白促使我们开展本研究。

针对 (1.1) 的基于 SAV 的格式的数值分析面临若干挑战。首先，与确定性情形不同，能量演化受随机噪声与非线性势之间复杂相互作用的支配，这使得 SSAV 框架的构造更加复杂。要刻画能量演化，必须谨慎控制对解及其梯度的近似。其次，Wiener过程的时间正则性较低，无法直接将标准 SAV 公式应用于随机系统，因此需要进行适当调整。第三，与随机 Allen–Cahn 方程相比，对 (1.1) 进行强收敛分析还因作用于非线性项的无界线性算子而更加复杂，这给误差估计的建立带来了额外的技术困难。

为应对这些挑战，我们引入一个 SSAV $r(t):=\sqrt{E_{\mathrm{p}}(\phi(t))}$，其中 E_{p}为势泛函（见（3.1））， 并将（1.1）改写为以下 SSAV 系统

$$d\phi(t) = -A^2\phi(t)dt + \frac{r(t)}{\sqrt{E_{\mathrm{p}}(\phi(t))}}AF'(\phi(t))dt + g(\phi(t))dW(t), \tag{1.3}$$

其中 A 是配备齐次狄利克雷边界条件的拉普拉斯算子。通过在每个子区间上固定式（$r(t)\sqrt{E_{\mathrm{p}}(\phi(t))}F'(\phi(t))$）（1.3）中的漂移系数—

$[t_n, t_{n+1}]$ 采用修正非线性项 f^n（稍后给出具体定义），我们提出如下指数欧拉 SSAV 格式

$$X^{n+1} = e^{-A^2\tau} X^n + (I - e^{-A^2\tau}) A^{-1} \tilde{f}^n + e^{-A^2\tau} g(X^n) \delta W^n. \tag{1.4}$$

其中，$\{t_n = n\tau\}_{n=0}^N$ 表示步长为 $\tau = T/N$ 的时间网格，$N \in \mathbb{N}^+$，$\delta W^n = W(t_{n+1}) - W(t_n)$ 表示维纳增量。

修正非线性项

修正非线性项 $\tilde{f}^n$ 的设计是精心设计，因为其中涉及对 SSAV $r(t)$ 的数值逼近，而在确定性情形下，其演化与 SAV 的演化存在本质差异（参见，例如 [31]）。这一点可从下面的渐近展开中看出

$$\begin{aligned} r(t) = r(s) &+ \frac{1}{2\sqrt{E_{\mathrm{p}}(\phi(s))}} \langle F'(\phi(s)), \phi(t) - \phi(s) \rangle \\ &- \frac{1}{8(E_{\mathrm{p}}(\phi(s)))^{3/2}} \langle F'(\phi(s)), \phi(t) - \phi(s) \rangle^2 \\ &+ \frac{1}{4\sqrt{E_{\mathrm{p}}(\phi(s))}} \langle F''(\phi(s))(\phi(t) - \phi(s)), \phi(t) - \phi(s) \rangle + o(|t-s|) \end{aligned} \tag{1.5}$$

由于伊藤–泰勒展开 [37, 第 5 节5] 以及 W 的低正则性结构。由于（1.5）包含另外两个伊藤修正项，直接对（1.5）使用伊藤–泰勒方法会破坏 SSAV 系统的线性结构，使所得格式无法显式求解。受 [35], 的启发，我们将离散 SSAV 设计如下

$$\begin{aligned} r^{n+1} = r^n &+ \frac{1}{2\sqrt{E_{\mathrm{p}}(X^n)}} \left\langle F'(X^n), X^{n+1} - X^n \right\rangle \\ &- \frac{1}{8(E_{\mathrm{p}}(X^n))^{3/2}} \left\langle F'(X^n), g(X^n)\delta W^n \right\rangle \left\langle F'(X^n), X^{n+1} - X^n \right\rangle \\ &+ \frac{1}{4\sqrt{E_{\mathrm{p}}(X^n)}} \left\langle F''(X^n)(X^{n+1} - X^n), g(X^n)\delta W^n \right\rangle, \end{aligned} \tag{1.6}$$

该格式在确保符合伊藤公式的同时，保持了线性结构。因此，非线性项 f^n 随后由以下关系确定（见（3.8））

$$2r^{n+1}(r^{n+1} - r^n) = \langle \tilde{f}^n, X^{n+1} - X^n \rangle. \tag{1.7}$$

尽管在（$X^{n+1} - X^n$ 中用 g（X^n）δW^n 替代（1.6）也能显式更新离散 SSAV，但无法满足标量辅助变量结构（1.7）（见备注2）。我们还想指出，由于所提出的标量辅助变量公式本质上是基于能量的，因此可能不适用于由时空白噪声驱动的随机演化方程（例如，见 [18, 20]）。

为克服超线性非线性项带来的困难，两个关键要素必不可少：获得数值解的正则性估计

X^n，并仔细量化离散势能 $\sqrt{E_{\mathrm{p}}(X^n)}$ 的平方根与离散 SSAV r^n 之间的差异。这些要素对于建立所提出的格式 (1.4) 的强收敛最优阶至关重要。一方面，特殊的代数结构 (1.7) 使我们能够控制 ˜多项式增长漂移项 f^n，进而证明格式 (1.4) 在 $H^1(\mathcal{O})$ 中无条件稳定（见引理4）。因此，我们可以证明指数欧拉 SSAV 格式 (1.4) 的平均能量演化律（见定理 3），该演化律在离散层面刻画了噪声的影响，并渐近保持方程 (1.1) 的平均能量演化律。随后，利用半群方法，我们将数值解的正则性提升至 $H^\beta(\mathcal{O})$ 空间，其中 $\beta > \frac{d}{2}$ 满足一定条件，从而得到数值解的 $L^\infty(\mathcal{O})$ 稳定性。

另一方面，利用数值解在 $L^2(\mathcal{O})$ 和 $H^1(\mathcal{O})$ 范数下的时间 Hölder 连续性估计，我们证明了（见引理11）

$$\mathbb{E}\left[|r^n - \sqrt{E_{\mathrm{p}}(X^n)}|^p\right] \le C(p)\tau^{\frac{p}{2}}, \qquad p \ge 1.$$

作为比较， [38,引理 6.4] 给出了动态边界条件下该 SAV 量的收敛阶 $1/8$ 。此外，利用 $-F'$ 在 $L^2(\mathcal{O})$ 中的单侧 Lipschitz 连续性，以及 F' 在$H^1(\mathcal{O})$中的局部利普希茨连续性，我们建立了以下强收敛最优阶（见定理 2）

$$\mathbb{E}\left[\|\phi(t_n) - X^n\|^2\right] \le C\tau,$$

基于变分方法与半群方法的耦合。强收敛阶 $1/2$ 是最优的，因为它与方程 (1.1) 精确解的时间 Hölder 连续性指数一致。

总之，本文的主要贡献如下:

1. 我们将指数欧拉方法与 SAV 方法相结合，为具有乘性噪声的随机 Cahn–Hilliard 方程构建了一种新颖的半隐式时间离散框架。所得格式无需迭代且无条件稳定。2. 我们通过耦合变分方法与半群方法，建立了所提出格式的最优强收敛率。这一混合分析框架不仅克服了非全局 Lipschitz 非线性和乘性噪声带来的技术挑战，还可推广至相关模型，例如随机 Allen–Cahn 方程。3. 我们证明，所提出的格式渐近地保持底层连续系统的平均能量演化律，从而揭示了离散与连续动力学之间更深层的一致性。数值实验验证了这一理论发现，并进一步表明标准 SAV 格式的平均能量演化律会发生偏离。

本文其余部分安排如下。在第 2 节中，我们介绍预备知识和主要结果。第 3 节介绍指数欧拉 SSAV 格式（1.4）的构造，并说明其显式可解性。在第 4 节中，

我们为数值解建立正则性估计，为第 5 节和第 6 节给出的主要结果的证明奠定基础。最后，第 7 节给出若干数值实验，验证所提出的格式的精度和效率，以及其捕捉尖锐界面动力学的能力。为完整起见，附录给出了文中若干辅助结果的证明。

2 预备知识与主要结果

本节介绍预备知识，并陈述本文的主要结果。在小节 2.1 中，我们说明系数 F' 和 g 以及驱动维纳过程 W所满足的主要假设。在这些假设下，随机 Cahn–Hilliard 方程（1.1）存在唯一的温和解。在小节 2.2 中，我们给出所提出的格式（1.4）的最优强收敛阶和能量演化律。

我们首先介绍一些有用的记号。对于 $p \in [1,\infty)$，用 $L^p(\mathcal{O})$ 表示定义在 $\mathcal{O}$ 上的 p 阶可积函数空间，并赋予范数 $\|v\|_{L^p} := (\int_{\mathcal{O}} |v(x)|^p \, dx)^{1/p}$ for $p \in [1,\infty)$。对于 $p = \infty$, L^∞ 由满足 $\|v\|_{L^\infty} := \operatorname{ess\,sup}_{x\in\mathcal{O}} |v(x)| < \infty$ 的可测函数 v 构成。当 $p = 2$ 时，为简洁起见，记作 $H := L^2(\mathcal{O})$ 和 $\|\cdot\| := \|\cdot\|_{L^2}$。符号 $\langle \cdot,\cdot \rangle$ 表示 H 中的内积。令$\mathcal{L}(H)$ 表示从 Hilbert空间 H 到其自身的有界线性算子空间。给定两个 Hilbert空间 U和 V，定义 $\mathcal{L}_2(U,V)$ 为从 U 到 V 的 Hilbert–Schmidt算子空间，并赋予范数$\|\Psi\|_{\mathcal{L}_2(U,V)} := \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|\Psi f_k\|_V^2\right)^{1/2}$for $\Psi \in \mathcal{L}_2(U,V)$，其中 $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}^+}$ 是 U 的完备标准正交基。全文中，C 表示一个通用正数常数，其值可能因出现位置而异，且与离散化参数无关。为简洁起见，不明确说明该常数可能依赖于终止时间 T、初值 ϕ^0、W 的协方差算子以及系数 F' 和 g。

2.1 预备知识

在本小节中，我们介绍随机 Cahn–Hilliard 方程的主要假设、温和形式和平均能量演化律（1.1）。

由于空间区域 $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \{1,2,3\}$ 是具有光滑边界 $\partial\mathcal{O}$ 的有界区域，或具有多边形边界的有界凸区域，根据 [39, 第 2 节。3], Dirichlet拉普拉斯算子 $A : D(A) \subset H \to H$ 稠密定义、自伴且正定，并具有紧逆算子。下文中，$D(\cdot)$ 表示算子的定义域。于是存在一个非递减序列 $\{\lambda_j\}_{j\geq 1} \subset (0,\infty)$ 以及 H 的完备标准正交基 $\{e_j\}_{j\geq 1} \subset D(A)$，使得 $-Ae_j = \lambda_j e_j$ 且 $\lim_{j\to\infty} \lambda_j = \infty$。对于 $\alpha \in \mathbb{R}$，定义算子 $-A$的分数阶幂 $(-A)^\alpha$ 如下：$(-A)^\alpha v = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^\alpha \langle v, e_j\rangle e_j$，其定义域为 $D((-A)^\alpha) := \{v = \sum_{j=1}^{\infty} \langle v, e_j\rangle e_j : \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{2\alpha} \langle v, e_j\rangle^2 < \infty\}$。众所周知，$-A^2$ 在 H 上生成一个收缩的 C_0-半群$\{S(t) = e^{-tA^2}, t \geq 0\}$（参见，例如，[10]），即对于所有 $t \geq 0$, 均有 $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$。此外，$\{S(t), t > 0\}$ 具有如下平滑效应（参见，例如，[39,

引理 B.9])

$$\|(-A)^{\gamma}S(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \le C(\gamma)t^{-\frac{\gamma}{2}}, \qquad \gamma \ge 0, \tag{2.1}$$

$$\left\|(-A)^{-\nu}(I - S(t))\right\|_{\mathcal{L}(H)} \le C(\nu)t^{\frac{\nu}{2}}, \qquad \nu \in [0,2]. \tag{2.2}$$

对于 $s > 0$，令 $H^s(\mathcal{O})$表示具有范数 $\|\cdot\|_{H^s}$的标准Sobolev空间，并且对于 $s > \frac{1}{2}$， $\dot{H}^s(\mathcal{O}) := \{v \in H^s(\mathcal{O}) : v = 0 \text{在 } \partial\mathcal{O}\}$上。根据 [40, 定理16.12与16.13]，，对于 $s \in (0, \frac{1}{2})$，Sobolev范数 $\|\cdot\|_{H^s}$等价于 $\|(-A)^{\frac{s}{2}}\cdot\|$在$H^s(\mathcal{O})$上，并且对于 $s \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, 2)$，Sobolev范数 $\|\cdot\|_{H^s}$等价于 $\|(-A)^{\frac{s}{2}}\cdot\|$在 $H^s(\mathcal{O})$上。我们还将经常使用 $\|\cdot\|_{H^1}$与 $\|\nabla\cdot\|$ 在$\dot{H}^1(\mathcal{O})$上的等价性，即存在常数 $C > 0$，使得对所有 $u \in \dot{H}^1(\mathcal{O})$有 $C^{-1}\|\nabla u\| \le \|u\|_{H^1} \le C\|\nabla u\|$，这是由于Poincaré不等式。我们指出，所提出的格式的数值分析也可通过轻微修改推广到具有齐次Neumann边界条件的(1.1)。在此设定下，可以首先提取常数模态以计入Neumann拉普拉斯算子的核，然后在零均值子空间上进行分析（参见例如 [20, 22]）。

接下来，我们给出关于漂移系数、扩散系数以及驱动维纳过程的主要假设。

假设1 令 $f(\xi) = c_1\xi^4 + c_2\xi^3 + c_3\xi^2$，其中 $c_1 > 0$且 $c_2, c_3 \in \mathbb{R}$。假设 F': $L^6(\mathcal{O}) \to H$是与 f': $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 相关联的 Nemytskii算子，即 $F'($ v x $=$ f' v x $), x \in \mathcal{O}$ $v \in L^6$ $\mathcal{O}$)( ) (( )) 对于 ( )。

在下文中，令 $\phi^0 \in \dot{H}^1(\mathcal{O})$ 为非随机的，在此条件下

$$E(\phi^0) = \frac{1}{2}\|\nabla\phi^0\|^2 + \int_{\mathcal{O}} f(\phi^0(x))dx \le \frac{1}{2}\|\nabla\phi^0\|^2 + C\left(\|\phi^0\|_{L^4}^4 + 1\right), \tag{2.3}$$

根据假设 1 和 Sobolev嵌入 $H^1(\mathcal{O}) \to L^4(\mathcal{O})$。由假设 1，存在一个正常数 L_f使得 $-f'' \le L_f$，这意味着

$$-\langle F'(u) - F'(v), u - v\rangle \le L_f\|u - v\|^2, \quad u, v \in L^6(\mathcal{O}). \tag{2.4}$$

由 f'' 的二次增长可知

$$\|F'(u) - F'(v)\| \le C\left(1 + \|u\|_{L^\infty}^2 + \|v\|_{L^\infty}^2\right)\|u - v\|, \quad u, v \in L^\infty(\mathcal{O}). \tag{2.5}$$

此外，势能泛函 $\int_{\mathcal{O}} f(v(x))dx$在 $L^4(\mathcal{O})$上是强制的；也就是说，存在正常数 c 和 Θ 使得

$$\int_{\mathcal{O}} f(v(x))dx + \Theta \ge c\int_{\mathcal{O}} (|v(x)|^4 + 1)dx, \qquad v \in L^4(\mathcal{O}). \tag{2.6}$$

设 $W = \{W(t)\}_{t\ge0}$ 在 (1.1) 中为 Q-Wiener过程，定义在完备滤过概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\ge0}, \mathbb{P})$ 上，它具有 Karhunen–Loève 展开

$W(t) = \sum_{k=1}^{\infty} Q^{1/2} e_k \beta_k(t)$，对 $t \geq 0$。这里 $\{\beta_k\}_{k\in\mathbb{N}^+}$ 是一列相互独立的实值标准布朗运动。假设 $Q \in \mathcal{L}(H)$ 对 $k \geq 1$ 满足 $Qe_k = \mathfrak{q}_k e_k$，其中 $\mathfrak{q}_k \geq 0$。记 $Q^{1/2}H$ 为 $Q^{1/2}$ 在 H 上的像，并赋予内积 $(v,w)_0 := \langle Q^{-\frac{1}{2}} v, Q^{-\frac{1}{2}} w\rangle$，对 $v, w \in Q^{1/2}H$，其中 $Q^{-\frac{1}{2}}$ 是 $Q^{\frac{1}{2}}$ 的伪逆。则 $\{Q^{1/2}e_k\}_{k=1}^{\infty}$ 构成 $Q^{1/2}H$ 的完备标准正交基。我们对 (1.1) 的扩散项作如下假设。

假设2 映射 $g: H \to \mathcal{L}_2^0 := \mathcal{L}_2(Q^{1/2}H, H)$ 由 $(g(v)w)(x) := \sigma(v(x))w(x)$ 定义，适用于 $v \in H$ 和 $w \in Q^{1/2}H$，其中 $\sigma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个有界且连续可微的函数，其导数有界。此外，对某个 $C > 0$，有 $\sum_{k=1}^{\infty} \|Q^{\frac{1}{2}} e_k\|_{L^\infty}^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \|\nabla(Q^{\frac{1}{2}} e_k)\|^2 \leq C$。

σ' 的有界性意味着映射 $g: H \to \mathcal{L}_2^0$ 是利普希茨连续的，即

$$\|g(v) - g(w)\|_{\mathcal{L}_2^0} \leq C\|v - w\|, \qquad v, w \in H. \tag{2.7}$$

此外，在假设2下，$g: \dot{H}^1(\mathcal{O}) \to \mathcal{L}_2(Q^{1/2}H, \dot{H}^1(\mathcal{O}))$ 呈现线性增长。事实上，由 σ 和 σ'的有界性以及链式法则，对任意$v \in \dot{H}^1(\mathcal{O})$,

$$\begin{aligned}
\|g(v)\|^2_{\mathcal{L}_2(Q^{\frac{1}{2}}H, \dot{H}^1(\mathcal{O}))} &= \sum_{k=1}^{\infty} \|(-A)^{\frac{1}{2}}(g(v)Q^{\frac{1}{2}}e_k)\|^2 \leq C\sum_{k=1}^{\infty} \|\nabla(g(v)Q^{\frac{1}{2}}e_k)\|^2 \qquad (2.8)\\
&\leq C\sum_{k=1}^{\infty} \|\sigma(v)\|^2_{L^\infty} \|\nabla(Q^{\frac{1}{2}}e_k)\|^2 + C\sum_{k=1}^{\infty} \|\sigma'(v)\|^2_{L^\infty} \|\nabla v\|^2 \|Q^{\frac{1}{2}}e_k\|^2_{L^\infty}\\
&\leq C(1 + \|\nabla v\|^2).
\end{aligned}$$

该性质将在建立 H^1（$\mathcal{O}$）中数值解的无条件稳定性时发挥关键作用（详见引理 4 的证明）。

在假设 1 和 2下，随机 Cahn–Hilliard 方程（1.1）存在唯一温和解 $\phi = \{\phi(t), t \in [0,T]\}$，其给出如下（例如参见 [12, 17]）

$$\phi(t) = S(t)\phi^0 + \int_0^t S(t-s)AF'(\phi(s))ds + \int_0^t S(t-s)g(\phi(s))dW(s).$$

命题 1 设假设 *1* 和 *2* 成立，并设 $\phi^0 \in \dot{H}^\beta(\mathcal{O})$ 对某个 $\beta \in [1,2)$。则对任意 $p \geq 1$，存在常数 $C := C(p,\beta) > 0$，使得

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \|\phi(t)\|^p_{H^\beta}\right] \leq C. \tag{2.9}$$

我们将命题 1 的证明收录于附录 B 中，以求完整。基于标准的有限维近似论证（例如，参见 [15, 第 2 节。3]）

应用伊藤公式可知，随机 Cahn–Hilliard 方程（1.1）满足以下能量演化定律

$$dE(\phi(t)) = -\left\|\nabla\mu(t)\right\|^2 dt + \langle \mu(t), g(\phi(t))\, dW(t)\rangle \\ + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left\langle \left(-A + F''(\phi(t))\right) g(\phi(t)) Q^{\frac{1}{2}} e_k, g(\phi(t)) Q^{\frac{1}{2}} e_k \right\rangle dt, \tag{2.10}$$

其中 $\mu(t)$ 是由 (1.1) 给出的化学势。为方便起见，本文省略此类标准的有限维逼近过程。

2.2 主要结果

我们的第一个主要结果——定理 2——表明，与所提出的格式 (1.4) 对应的数值解强收敛于方程 (ϕ 所对应的温和解 (1.1)。我们指出，定理 1/2 2 中的强收敛阶 是最优的，因为它与 ϕ 的时间 Hölder 连续性指数一致。

定理 2 设假设 *1*和 *2*成立，且设 $\phi^0 \in \dot{H}^2(\mathcal{O})$。则对任意 $p \geq 1$，存在常数 $C > 0$，使得对任意 $n \in \{0, 1, \cdots, N\}$，

$$\mathbb{E}\left[\left\|\phi(t_n) - X^n\right\|^2\right] \leq C\tau.$$

根据 (2.10)，方程 (1.1) 的平均能量演化律为

$$\mathbb{E}[E(\phi(t))] + \Theta = E(\phi^0) + \Theta - \int_0^t \mathbb{E}[\|\nabla\mu(s)\|^2] ds \\ + \frac{1}{2}\int_0^t \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\left\langle \left(-A + F''(\phi(s))\right) g(\phi(s)) Q^{\frac{1}{2}} e_k, g(\phi(s)) Q^{\frac{1}{2}} e_k \right\rangle\right] ds$$

对任意 $t \in [0, T]$。在我们的数值研究中，原始能量 $E(\phi(t_n)) + \Theta = \frac{1}{2}\|\nabla\phi(t)$ $\|^2 + r(t_n)^2$ 由以下修正 SAV 能量近似

$$E^n_{\mathrm{mod}} := E_{\mathrm{mod}}(X^n, r^n) \quad \text{with} \quad E_{\mathrm{mod}}(X, r) := \frac{1}{2}\|\nabla X\|^2 + |r|^2. \tag{2.11}$$

我们的第二个主要结果是关于修正的随机标量辅助变量能量平均演化律的定理3 。

定理 3 *1 2* $\mathcal{O}$ $m \in$ 设假设和成立，且 $\phi^0 \in \dot{H}^2(\ )^{\{1,2,\cdots,N\}}$。那么对于每个，

$$\mathbb{E}\left[E^m_{\mathrm{mod}}\right] = E^0_{\mathrm{mod}} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{m-1}\mathbb{E}\left[\left\|(I - S^2(\tau))^{\frac{1}{2}}(-A)^{-\frac{1}{2}}\tilde{\mu}^n\right\|^2\right]$$

$$+\frac{1}{2}\tau\sum_{n=0}^{m-1}\mathbb{E}\Big[\sum_{k=1}^{\infty}\Big\langle(-A+F''(X^n))g(X^n)Q^{\frac{1}{2}}e_k,g(X^n)Q^{\frac{1}{2}}e_k\Big\rangle\Big]+\mathcal{R}_m^\tau,\quad(2.12)$$

其中修正化学势

$$\tilde{\mu}^n:=-AX^n+\tilde{f}^n-A(g(X^n)\delta W^n),\quad(2.13)$$

且余项 $\mathcal{R}_m^\tau$ 满足$\lim_{\tau\to0}\mathcal{R}_m^\tau=0$。

形式上，修正化学势 $\tilde{\mu}^n$ 作为化学势 $\mu(t_n)=-A\phi(t_n)+F'(\phi(t_n))$, 的数值近似；当驱动维纳过程具有适当的空间正则性时，这一点可以严格证明。因此，当时步趋于零时，修正 SAV 能量的平均离散能量演化律（2.12）恢复了（1.1）的平均能量演化律。从而，所提出的格式（1.4）渐近保持随机 Cahn–Hilliard 方程（1.1）的平均能量演化律。

3 指数欧拉 SSAV 格式

在本节中，我们给出指数欧拉 SSAV 格式（1.4）的构造，并证明其可显式求解。遵循 [30–32], ，将非线性项通过引入一个 SSAV $r:\ [0,T]\times\Omega\to\mathbb{R}$进行显式处理，其定义为$r(t,\omega):=\sqrt{E_{\mathrm{p}}(\phi(t,\omega))}$, ，其中 E_{p} 是势能泛函

$$E_{\mathrm{p}}(v):=\int_{\mathcal{O}}f(v(x))\,dx+\Theta,\qquad v\in L^4(\mathcal{O}).\quad(3.1)$$

这里的常数 $\Theta>0$ 与（2.6）中的相同，因此

$$E_{\mathrm{p}}(v)\geq c\int_{\mathcal{O}}\left(|v(x)|^4+1\right)dx\geq c,\qquad\forall v\in L^4(\mathcal{O}).\quad(3.2)$$

我们指出， E_{p} 的非负性确保 SSAV r 定义良好，而（3.2）中的强制性是出于技术原因而施加的，并将在所提出格式的稳定性与收敛性分析中用到。对于不满足（3.2）的一般非线性项，可以改用凸分裂技术（例如，参见[41]）来求解（1.1）。

根据 (3.1) 和伊藤公式，原方程 (1.1) 可改写为以下 SSAV重构

$$d\phi(t)=-A^2\phi(t)dt+\frac{r(t)}{\sqrt{E_{\mathrm{p}}(\phi(t))}}AF'(\phi(t))dt+g(\phi(t))dW(t),\quad(3.3a)$$

$$dr(t)=\frac{1}{2\sqrt{E_{\mathrm{p}}(\phi(t))}}\langle F'(\phi(t)),d\phi(t)\rangle\quad(3.3b)$$

$$-\frac{1}{8E_{\mathrm{p}}(\phi(t))^{3/2}}\sum_{k=1}^{\infty}\Big\langle F'(\phi(t)),g(\phi(t))Q^{\frac{1}{2}}e_k\Big\rangle^2dt$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{E_{\rm p}(\phi(t))}}\sum_{k=1}^{\infty}\left\langle F''(\phi(t))g(\phi(t))Q^{\frac{1}{2}}e_k, g(\phi(t))Q^{\frac{1}{2}}e_k\right\rangle dt$$

对于 $t\in(0,T]$，满足初始值 $\phi(0)=\phi^0$ 和 $r(0)=\sqrt{E_{\rm p}(\phi^0)}$。

为对（3.3）进行时间离散，我们将 $[0,T]$ 划分为 $N(N\in\mathbb{N}^+)$ 个等长子区间，步长为 $\tau=T/N$，并将时间网格记为 $\{t_n:=n\tau\}_{n=0}^{N}$。在每个子区间 $(t_n,t_{n+1}]$ 上，我们通过适当的近似冻结（3.3a）中的系数 $r(t)\sqrt{E_{\rm p}(\phi(t))}\,F'(\phi(t))$，该近似记为 f^n（将在后文给出），从而得到 $\phi(t)$ 的如下近似：

$$d\tilde{\phi}(t)=-A^2\tilde{\phi}(t)dt+A\tilde{f}^n dt+g(\tilde{\phi}(t))dW(t),\quad t\in(t_n,t_{n+1}]. \tag{3.4}$$

然后，将指数欧拉方法应用于（3.4），对于任意 $n\in\{0,1,\cdots,N-1\}$ 且 $X^0=\phi^0$，我们得到数值格式（1.4）。接下来还需为量 $r(t)\sqrt{E_{\rm p}(\phi(t))}\,F'(\phi(t))$ 构造一个相容的近似 $\tilde{f}^n$，其中 $t\in[t_n,t_{n+1}]$。

注 *1* 对于确定性 Cahn–Hilliard 方程（即 $g\equiv 0$），$\tilde{f}^n$ 的一个合适选择是

$$\tilde{f}_{\rm d}^{\,n}=\frac{r_{\rm d}^{n+1}}{\sqrt{E_{\rm p}(X^n)}}F'(X^n), \tag{3.5}$$

其中 $r^{n+1}{}_{\rm d}$ 是通过以下迭代生成的 $r(t_{n+1})$的数值解

$$r_{\rm d}^{n+1}=r_{\rm d}^{n}+\frac{1}{2\sqrt{E_{\rm p}(X^n)}}\langle F'(X^n),X^{n+1}-X^n\rangle \tag{3.6}$$

对于任意 $n\in\{0,1,\cdots,N-1\}$，初值为 $r_{\rm d}^0=\sqrt{E_{\rm p}(\phi^0)}$（参见，例如 [31]）。然而，这种构造无法直接推广到随机情形。为说明这一问题，我们对 $\sqrt{E_{\rm p}(\phi(t_{n+1}))}$进行泰勒展开，舍弃三阶及更高阶项，可形式化地得到（另见（1.5））

$$r(t_{n+1})\approx r(t_n)+\frac{1}{2\sqrt{E_{\rm p}(\phi(t_n))}}\left\langle F'(\phi(t_n)),\phi(t_{n+1})-\phi(t_n)\right\rangle+R_n, \tag{3.7}$$

其中 R_n 是由下式给出的二次项

$$\begin{aligned}R_n:=&-\frac{1}{8E_{\rm p}(\phi(t_n))^{3/2}}\left\langle F'(\phi(t_n)),\phi(t_{n+1})-\phi(t_n)\right\rangle^2\\&+\frac{1}{4\sqrt{E_{\rm p}(\phi(t_n))}}\left\langle F''(\phi(t_n))(\phi(t_{n+1})-\phi(t_n)),\phi(t_{n+1})-\phi(t_n)\right\rangle.\end{aligned}$$

比较 (3.7) 和 (3.6) 可知，差值 $r(t_N)-r_{\rm d}^N$包含一个望远镜和 $\sum_{n=0}^{N-1}R_n$。粗略来说，在随机情形下，解增量 $\phi(t_{n+1})-\phi(t_n)$ 的阶为 $\mathcal{O}(\tau^{1/2})$。因此，随着 $\tau\to 0$，望远镜和 $\sum_{n=0}^{N-1}R_n$ 不会消失，这使得 $r_{\rm d}^N$无法在 $\tau\to 0$ 时收敛到 $r(T)$。换言之，直接采用标准SAV更新 (3.6) 并结合 (1.4)，且取 $\tilde{f}^n=\tilde{f}^n{\rm d}$，将得到一个数值格式，它要么收敛到不同的随机系统，要么发散，而不是收敛到目标模型 (3.3)。事实上，二次项 R_n 随时间的累积会产生 (3.3b) 中的伊藤修正项，因此，

(3.7) 中的二次项应保留在 $r(t)$ 的数值离散中，以确保与伊藤公式保持一致，并准确捕捉 (2.10) 所描述的 (1.1) 的能量演化律（关于修正的随机标量辅助变量的影响，见图 1 ）。

由于（3.7）中的二次项涉及 $\phi(t_{n+1}) - \phi(t_n)$ 的二次幂，对（3.7）直接采用欧拉型离散会破坏所提出格式的线性结构，且无法得到显式或半隐式数值离散。按照 [35]，中的策略，我们将伊藤修正项中的一个因子 $\phi(t_{n+1}) - \phi(t_n)$ 替换为 $g(X^n)\delta W^n$，并对任意 $n \in \{0, 1, \cdots, N-1\}$，通过（1.6）更新数值 SSAV $\{r^n\}_{n=0}^N$，其初值为 $r^0 = \sqrt{E_{\mathrm{p}}(\phi^0)}$。在随机情形下，我们不采用（3.5），而是采用

$$\tilde{f}^n = \frac{r^{n+1}}{\sqrt{E_{\mathrm{p}}(X^n)}} F'(X^n) + \chi^n, \tag{3.8}$$

其中，修正项

$$\begin{aligned} \chi^n := & -\frac{r^{n+1}}{4E_{\mathrm{p}}(X^n)^{3/2}} F'(X^n)\langle F'(X^n), g(X^n)\delta W^n\rangle \\ & + \frac{r^{n+1}}{2\sqrt{E_{\mathrm{p}}(X^n)}} F''(X^n)(g(X^n)\delta W^n) \end{aligned} \tag{3.9}$$

被添加以补偿（1.6）右端的伊藤修正项（详见（3.10））。时间半离散（1.4）与（1.6）和（3.8）共同构成所提出的格式，称为指数欧拉 SSAV 格式。本文聚焦于（1.4）对（1.1）的时间离散；通过引入适当空间离散构造全离散格式，将在未来工作中讨论。

注 2 对 r^n 在（1.6）中的更新，以及 $\tilde{f}^n$ 在（3.8）中的定义，确保了

$$2r^{n+1}(r^{n+1} - r^n) = \langle \tilde{f}^n, X^{n+1} - X^n\rangle, \qquad n = 0, 1, \cdots, N-1. \tag{3.10}$$

尽管对（ 3 3 $X^{n+1} -$. X^n X^n δW^n 1 6 b）应用欧拉方法，或在（ $g()$ ）的伊藤修正项中用解增量 $g()$ 替代 $g()$，也能得到 $\{r^n\}_{n=0}^N$的显式更新，但这两种方法均不满足（3.10）。正如确定性梯度流的标准 SAV 格式中所示（见 [31]），关系式（3.10）对于建立指数欧拉 SSAV 格式（1.4）的无条件稳定性和平均能量演化律至关重要（详见引理 5 和定理 3 的证明）。

最后，我们指出，指数欧拉 SSAV 格式（1.4）可以按如下方式显式求解。首先，对于每个 $n = 0, 1, \cdots, N-1$，记

$$b^n := \frac{F'(X^n)}{\sqrt{E_{\mathrm{p}}(X^n)}} - \frac{F'(X^n)\langle F'(X^n), g(X^n)\delta W^n\rangle}{4E_{\mathrm{p}}(X^n)^{3/2}} + \frac{F''(X^n)g(X^n)\delta W^n}{2\sqrt{E_{\mathrm{p}}(X^n)}}.$$

于是，（1.6）和（3.8）可改写为 $r^{n+1}=r^n+\frac{1}{2}\langle b^n,X^{n+1}-X^n\rangle$ 和 $\tilde{f}^n=r^{n+1}b^n=r^nb^n+\frac{1}{2}b^n\langle b^n,X^{n+1}-X^n\rangle$.将 $\tilde{f}^n$ 的这一表达式代入（1.4），得到

$$X^{n+1}-\frac{1}{2}(I-S(\tau))A^{-1}b^n\langle b^n,X^{n+1}\rangle=w^n, \tag{3.11}$$

其中 $w^n=S(\tau)X^n+(I-S(\tau))A^{-1}b^nr^n-\frac{1}{2}(I-S(\tau))A^{-1}b^n\langle b^n,X^n\rangle+S(\tau)g(X^n)\delta W^n$.对（3.11）两边与 b^n 取内积，可得 $\langle X^{n+1},b^n\rangle+\gamma^n\langle b^n,X^{n+1}\rangle=\langle w^n,b^n\rangle$,其中

$$\gamma^n=-\frac{1}{2}\left\langle (I-S(\tau))A^{-1}b^n,b^n\right\rangle=\frac{1}{2}\|(I-S(\tau))^{1/2}(-A)^{-1/2}b^n\|^2\geq 0.$$

由此可得 $\langle X^{n+1},b^n\rangle=(1+\gamma^n)^{-1}\langle b^n,w^n\rangle$.因此，更新值 X^{n+1} 可由（3.11）以完全显式的方式计算得到。

4 正则性估计

本节将建立指数欧拉 SSAV 格式（1.4）的若干正则性估计。这些估计对于证明主要结果定理 2 和3至关重要。

4.1 空间正则性估计

我们首先在以下引理中推导数值解的 $H^1(\mathcal{O})$-空间正则性估计，这表明指数欧拉 SSAV 格式（1.4）是无条件稳定的。

引理4 设假设 *1* 和 *2* 成立，并令 $\phi^0\in\dot{H}^1(\mathcal{O})$。则对于任意 $p\geq 1$，存在正常数 $C:=C(p)$ 使得

$$\mathbb{E}\left[\|\nabla X^n\|^{2p}\right]+\mathbb{E}\left[|r^n|^{2p}\right]\leq C(p),\qquad \forall\, n\in\{0,1,\cdots,N\}. \tag{4.1}$$

证明 令 $n\in\{0,1,\cdots,N-1\}$。应用分部积分公式，并利用 $S(\tau)$ 与 A的交换性，由（1.4）可得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left[\|\nabla X^{n+1}\|^2-\|\nabla X^n\|^2\right] \\
&=\frac{1}{2}\left\langle (S^2(\tau)-I)X^n,(-A)X^n\right\rangle+\frac{1}{2}\left\langle (I-S(\tau))^2A^{-1}\tilde{f}^n,-\tilde{f}^n\right\rangle \\
&\quad+\frac{1}{2}\langle S^2(\tau)g(X^n)\delta W^n,(-A)g(X^n)\delta W^n\rangle+\langle S(\tau)(I-S(\tau))X^n,-\tilde{f}^n\rangle \\
&\quad+\langle S^2(\tau)X^n,(-A)g(X^n)\delta W^n\rangle+\langle S(\tau)(I-S(\tau))A^{-1}\tilde{f}^n,(-A)g(X^n)\delta W^n\rangle.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

由（3.10）并利用（1.4），可得

$$2r^{n+1}(r^{n+1}-r^n)=\langle (I-S(\tau))X^n,-\tilde{f}^n\rangle+\langle (S(\tau)-I)A^{-1}\tilde{f}^n,-\tilde{f}^n\rangle \tag{4.3}$$

$$+\langle -S(\tau)A^{-1}\tilde{f}^n,(-A)g(X^n)\delta W^n\rangle.$$

将（4.2）和（4.3）结合起来，并利用初等恒等式 $2a(a-b)=a^2-b^2+(a-b)^2$ 对 $a,b\in\mathbb{R}$，有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left[\left\|\nabla X^{n+1}\right\|^2-\left\|\nabla X^n\right\|^2\right]+|r^{n+1}|^2-|r^n|^2+|r^{n+1}-r^n|^2 \\
&\quad+\frac{1}{2}\|(I-S^2(\tau))^{\frac{1}{2}}(-A)^{\frac{1}{2}}\tilde{\mu}^n\|^2 \\
&=\frac{1}{2}\left\langle(S^2(\tau)-I)(X^n-A^{-1}\tilde{f}^n+g(X^n)\delta W^n),(-A)(X^n-A^{-1}\tilde{f}^n+g(X^n)\delta W^n)\right\rangle \\
&\quad+\left\langle X^n-A^{-1}\tilde{f}^n,(-A)g(X^n)\delta W^n\right\rangle+\frac{1}{2}\left\langle g(X^n)\delta W^n,(-A)g(X^n)\delta W^n\right\rangle \\
&\quad+\frac{1}{2}\|(I-S^2(\tau))^{\frac{1}{2}}(-A)^{\frac{1}{2}}\tilde{\mu}^n\|^2 \\
&=\left\langle -AX^n+\tilde{f}^n,g(X^n)\delta W^n\right\rangle+\frac{1}{2}\|(-A)^{\frac{1}{2}}\left(g(X^n)\delta W^n\right)\|^2,
\end{aligned}\tag{4.4}$$

其中，$\tilde{\mu}^n$ 的定义应用于最后一步。由公式（3.8）~以及 f^n，并结合杨氏不等式，可得

$$\begin{aligned}
&\langle\tilde{f}^n,g(X^n)\delta W^n\rangle \\
&=\frac{r^n}{\sqrt{E_{\mathrm{p}}(X^n)}}\left\langle F'(X^n),g(X^n)\delta W^n\right\rangle+\frac{r^{n+1}-r^n}{\sqrt{E_{\mathrm{p}}(X^n)}}\left\langle F'(X^n),g(X^n)\delta W^n\right\rangle \\
&\quad+\frac{r^{n+1}-r^n}{2\sqrt{E_{\mathrm{p}}(X^n)}}\left\langle F''(X^n)g(X^n)\delta W^n,g(X^n)\delta W^n\right\rangle \\
&\quad-\frac{r^{n+1}-r^n}{4E_{\mathrm{p}}(X^n)^{3/2}}\left\langle F'(X^n),g(X^n)\delta W^n\right\rangle^2 \\
&\quad+\frac{r^n}{2\sqrt{E_{\mathrm{p}}(X^n)}}\left\langle F''(X^n)g(X^n)\delta W^n,g(X^n)\delta W^n\right\rangle \\
&\quad-\frac{r^n}{4E_{\mathrm{p}}(X^n)^{3/2}}\left\langle F'(X^n),g(X^n)\delta W^n\right\rangle^2 \\
&\le\frac{r^n}{\sqrt{E_{\mathrm{p}}(X^n)}}\left\langle F'(X^n),g(X^n)\delta W^n\right\rangle+\frac{3}{4}|r^{n+1}-r^n|^2+\frac{1}{E_{\mathrm{p}}(X^n)}\left\langle F'(X^n),g(X^n)\delta W^n\right\rangle^2 \\
&\quad+C\tau|r^n|^2+C(1+\tau^{-1})\frac{1}{E_{\mathrm{p}}(X^n)}\left\langle F''(X^n)g(X^n)\delta W^n,g(X^n)\delta W^n\right\rangle^2 \\
&\quad+C(1+\tau^{-1})\frac{1}{E_{\mathrm{p}}(X^n)^3}\left\langle F'(X^n),g(X^n)\delta W^n\right\rangle^4.
\end{aligned}$$

将此与（4.4）结合，然后将所得不等式从 $n=0$ 到 m求和，可得

$$\begin{aligned}
&\|\nabla X^{m+1}\|^2+|r^{m+1}|^2+\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{m}|r^{n+1}-r^n|^2+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{m}\|(I-S^2(\tau))^{\frac{1}{2}}(-A)^{-\frac{1}{2}}\tilde{\mu}^n\|^2 \\
&\le\|\nabla\phi^0\|^2+|r^0|^2+C\tau\sum_{n=0}^{m}|r^n|^2+\sum_{n=0}^{m}\frac{1}{E_{\mathrm{p}}(X^n)}\left\langle F'(X^n),g(X^n)\delta W^n\right\rangle^2 \\
&\quad+C(1+\tau^{-1})\sum_{n=0}^{m}\frac{1}{E_{\mathrm{p}}(X^n)}\left\langle F''(X^n)g(X^n)\delta W^n,g(X^n)\delta W^n\right\rangle^2
\end{aligned}\tag{4.5}$$

$$+C(1+\tau^{-1})\sum_{n=0}^{m}\frac{1}{E_{\mathrm{p}}(X^n)^3}\left\langle F'(X^n),g(X^n)\delta W^n\right\rangle^4+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{m}\|(-A)^{\frac{1}{2}}(g(X^n)\delta W^n)\|^2$$
$$+\sum_{n=0}^{m}\Big\langle -AX^n+\frac{r^n}{\sqrt{E_{\mathrm{p}}(X^n)}}F'(X^n),g(X^n)\delta W^n\Big\rangle.$$

取 p次幂作用于（4.5）的两边，由Hölder不等式可得

$$\begin{aligned}
&\|\nabla X^{m+1}\|^{2p}+|r^{m+1}|^{2p}+\left(\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{m}|r^{n+1}-r^n|^2\right)^p \qquad (4.6)\\
&\quad+\left(\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{m}\|(I-S^2(\tau))^{\frac{1}{2}}(-A)^{-\frac{1}{2}}\tilde{\mu}^n\|^2\right)^p\\
&\le C\|\nabla\phi^0\|^{2p}+C|r^0|^{2p}\\
&\quad+C\tau\sum_{n=0}^{m}|r^n|^{2p}+C\left(\sum_{n=0}^{m}\frac{1}{E_{\mathrm{p}}(X^n)}\left|\left\langle F'(X^n),g(X^n)\delta W^n\right\rangle\right|^2\right)^p\\
&\quad+C(1+\tau^{-1})^p\left(\sum_{n=0}^{m}\frac{1}{E_{\mathrm{p}}(X^n)}\left\langle F''(X^n)g(X^n)\delta W^n,g(X^n)\delta W^n\right\rangle^2\right)^p\\
&\quad+C(1+\tau^{-1})^p\left(\sum_{n=0}^{m}\frac{1}{E_{\mathrm{p}}(X^n)^3}\left\langle F'(X^n),g(X^n)\delta W^n\right\rangle^4\right)^p\\
&\quad+C\left(\sum_{n=0}^{m}\frac{1}{2}\|(-A)^{\frac{1}{2}}(g(X^n)\delta W^n)\|^2\right)^p\\
&\quad+C\left|\sum_{n=0}^{m}\Big\langle -AX^n+\frac{r^n}{\sqrt{E_{\mathrm{p}}(X^n)}}F'(X^n),g(X^n)\delta W^n\Big\rangle\right|^p\\
&=:C\|\nabla\phi^0\|^{2p}+C|r^0|^{2p}+C\tau\sum_{n=0}^{m}|r^n|^{2p}+R_1^m+R_2^m+R_3^m+R_4^m+R_5^m.
\end{aligned}$$

接下来，我们分别估计各项 $R_1^m,\cdots,R_5^m$ 的期望。

对 R_1^m的估计。根据假设2 以及 Sobolev嵌入 $L^\infty(\mathcal{O})\to L^q(\mathcal{O})$， $1\le q\le\infty$，可知对于任意 $1\le q\le\infty$,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|g(X^n)Q^{\frac{1}{2}}e_k\|_{L^q}^2\le C\|g(X^n)\|_{L^\infty}^2\sum_{k=1}^{\infty}\|Q^{\frac{1}{2}}e_k\|_{L^\infty}^2\le C. \qquad (4.7)$$

由杨氏不等式、(3.2)以及假设1，可推得对于任意 $q>0$,

$$\left\|F'(X^n)\right\|_{L^{4/3}}^{4q}\le C(1+\|X^n\|_{L^4}^4)^{3q}\le CE_{\mathrm{p}}(X^n)^{3q}. \qquad (4.8)$$

特别地，应用(4.8)可得

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\frac{\left\|F'(X^n)\right\|_{L^{4/3}}^{2p}}{E_{\mathrm{p}}(X^n)^p}\right]&\le C\mathbb{E}\left[\left\|F'(X^n)\right\|_{L^{4/3}}^{\frac{2}{3}p}\right] \qquad (4.9)\\
&\le C\mathbb{E}\left[1+\|X^n\|_{L^4}^{2p}\right]\le C+C\mathbb{E}\left[\|\nabla X^n\|^{2p}\right],
\end{aligned}$$

其中，最后一个不等式由 Sobolev嵌入 $H^1(\mathcal{O})\to L^4(\mathcal{O})$ 以及数值解满足的 Dirichlet边界条件得出。根据 Hölder不等式、随机积分的鞅性质以及 Burkholder–Davis–Gundy（BDG）不等式 [39,

第 2], （4.9），以及（4.7），可得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[R_1^m] &\le C(m+1)^{p-1}\sum_{n=0}^{m}\mathbb{E}\Big[\Big|\int_{t_n}^{t_{n+1}}\Big\langle\frac{1}{\sqrt{E_{\mathrm{p}}(X^n)}}F'(X^n),g(X^n)dW(s)\Big\rangle\Big|^{2p}\Big]\\ &\le C(m+1)^{p-1}\sum_{n=0}^{m}\tau^p\mathbb{E}\Big[\frac{1}{E_{\mathrm{p}}(X^n)^p}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\langle F'(X^n),g(X^n)Q^{\frac12}e_k\rangle^2\Big)^p\Big]\\ &\le C\sum_{n=0}^{m}\tau\mathbb{E}\Big[\frac{\|F'(X^n)\|_{L^{4/3}}^{2p}}{E_{\mathrm{p}}(X^n)^p}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\|g(X^n)Q^{\frac12}e_k\|_{L^4}^2\Big)^p\Big]\\ &\le C+C\sum_{n=0}^{m}\tau\mathbb{E}\left[\|\nabla X^n\|^{2p}\right].\end{aligned}$$

对 R_2^m的估计。由杨氏不等式、（3.2）以及假设1可得

$$\||F''(X^n)|^{1/2}\|_{L^4}^{4p}=\|F''(X^n)\|^{2p}\le C(1+\|X^n\|_{L^4}^4)^p\le CE_{\mathrm{p}}(X^n)^p. \tag{4.10}$$

应用 Hölder不等式和 BDG不等式，结合（4.7）与（4.10），可推得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[R_2^m] &\le C\tau^{-2p+1}\sum_{n=0}^{m}\mathbb{E}\Big[\Big\|\int_{t_n}^{t_{n+1}}\frac{1}{E_{\mathrm{p}}(X^n)^{1/4}}|F''(X^n)|^{\frac12}g(X^n)dW(s)\Big\|^{4p}\Big]\\ &\le C\tau\sum_{n=0}^{m}\mathbb{E}\Big[\frac{1}{E_{\mathrm{p}}(X^n)^p}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\Big\||F''(X^n)|^{\frac12}g(X^n)Q^{\frac12}e_k\Big\|^2\Big)^{2p}\Big]\\ &\le C\tau\sum_{n=0}^{m}\mathbb{E}\Big[\frac{\||F''(X^n)|^{\frac12}\|_{L^4}^{4p}}{E_{\mathrm{p}}(X^n)^p}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\|g(X^n)Q^{\frac12}e_k\|_{L^4}^2\Big)^{2p}\Big]\le C.\end{aligned}$$

对 R_3^m的估计。利用 BDG不等式、（4.7）和（4.8）可得

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\frac{1}{E_{\mathrm{p}}(X^n)^{3p}}\left\langle F'(X^n),g(X^n)\delta W^n\right\rangle^{4p}\right]\\ &\le C\mathbb{E}\Big[\frac{1}{E_{\mathrm{p}}(X^n)^{3p}}\Big(\tau\sum_{k=1}^{\infty}\Big\langle F'(X^n),g(X^n)Q^{\frac12}e_k\Big\rangle^2\Big)^{2p}\Big]\\ &\le C\tau^{2p}\mathbb{E}\Big[\frac{\|F'(X^n)\|_{L^{4/3}}^{4p}}{E_{\mathrm{p}}(X^n)^{3p}}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\|g(X^n)Q^{\frac12}e_k\|_{L^4}^2\Big)^{2p}\Big]\le C\tau^{2p}.\end{aligned} \tag{4.11}$$

由 Hölder不等式和（4.11）可得

$$\mathbb{E}[R_3^m]\le C(1+\tau^{-1})^p(m+1)^{p-1}\sum_{n=0}^{m}\mathbb{E}\left[\frac{1}{E_{\mathrm{p}}(X^n)^{3p}}\left\langle F'(X^n),g(X^n)\delta W^n\right\rangle^{4p}\right]\le C.$$

的估计。根据（2.8）、Hölder不等式和BDG不等式，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[R_4^m] &\le C(m+1)^{p-1}\sum_{n=0}^{m}\mathbb{E}\left[\Big\|(-A)^{\frac12}\int_{t_n}^{t_{n+1}}g(X^n)dW(s)\Big\|^{2p}\right]\\ &\le C(m+1)^{p-1}\sum_{n=0}^{m}\mathbb{E}\Big[\Big(\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|g(X^n)\|_{\mathcal{L}_2(Q^{\frac12}H,\dot H^1(\mathcal{O}))}^2ds\Big)^p\Big]\end{aligned} \tag{4.12}$$

$$\leq C + C\tau \sum_{n=0}^{m} \mathbb{E}\left[\left\|\nabla X^n\right\|^{2p}\right].$$

的估计。 根据Hölder不等式和BDG不等式,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[R_5^m] &\leq C\mathbb{E}\left[\left|\sum_{n=0}^{m}\left\langle -AX^n + \frac{r^n}{\sqrt{E_{\mathrm{p}}(X^n)}}F'(X^n), g(X^n)\delta W^n\right\rangle\right|^p\right] \qquad (4.13)\\
&\leq C\mathbb{E}\left[\left(\sum_{n=0}^{m}\tau\sum_{k=1}^{\infty}\langle -AX^n, g(X^n)Q^{\frac{1}{2}}e_k\rangle^2\right)^{\frac{p}{2}}\right]\\
&\quad + C\mathbb{E}\left[\left(\sum_{n=0}^{m}\tau\sum_{k=1}^{\infty}\left\langle\frac{r^n}{\sqrt{E_{\mathrm{p}}(X^n)}}F'(X^n), g(X^n)Q^{\frac{1}{2}}e_k\right\rangle^2\right)^{\frac{p}{2}}\right]\\
&=: R_{51}^m + R_{52}^m.
\end{aligned}$$

由 Hölder不等式、杨氏不等式、分部积分公式以及（2.8），可推得

$$\begin{aligned}
R_{51}^m &\leq C(m+1)^{\frac{p}{2}-1}\sum_{n=0}^{m}\tau^{\frac{p}{2}}\mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty}\langle\nabla X^n, \nabla(g(X^n)Q^{\frac{1}{2}}e_k)\rangle^2\right)^{\frac{p}{2}}\right] \qquad (4.14)\\
&\leq C\tau\sum_{n=0}^{m}\mathbb{E}\left[\left\|\nabla X^n\right\|^{2p}\right] + C\tau\sum_{n=0}^{m}\mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty}\|\nabla(g(X^n)Q^{\frac{1}{2}}e_k)\|^2\right)^p\right]\\
&\leq C + C\tau\sum_{n=0}^{m}\mathbb{E}\left[\left\|\nabla X^n\right\|^{2p}\right].
\end{aligned}$$

类似地，利用 BDG不等式、Hölder不等式、杨氏不等式、（4.7）以及（4.9），可得

$$\begin{aligned}
R_{52}^m &\leq C(m+1)^{\frac{p}{2}-1}\sum_{n=0}^{m}\tau^{\frac{p}{2}}\mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left\langle\frac{r^n}{\sqrt{E_{\mathrm{p}}(X^n)}}F'(X^n), g(X^n)Q^{\frac{1}{2}}e_k\right\rangle^2\right)^{\frac{p}{2}}\right] \qquad (4.15)\\
&\leq C\tau\sum_{n=0}^{m}\mathbb{E}\left[\left|r^n\right|^{2p}\right] + C\tau\sum_{n=0}^{m}\mathbb{E}\left[\left(\frac{\left\|F'(X^n)\right\|_{L^{4/3}}^2}{E_{\mathrm{p}}(X^n)}\right)^p\left(\sum_{k=1}^{\infty}\|g(X^n)Q^{\frac{1}{2}}e_k\|_{L^4}^2\right)^p\right]\\
&\leq C + C\tau\sum_{n=0}^{m}\mathbb{E}\left[\left|r^n\right|^{2p}\right].
\end{aligned}$$

将（4.14）和（4.15）代入（4.13），得到

$$\mathbb{E}[R_5^m] \leq C + C\tau\sum_{n=0}^{m}\mathbb{E}\left[\left|r^n\right|^{2p}\right] + C\tau\sum_{n=0}^{m}\mathbb{E}\left[\left\|\nabla X^n\right\|^{2p}\right].$$

综合上述对 R_1^m至 R_5^m的估计，对（4.6）两边取期望，可推出对任意 $m \in \{0, 1, \cdots, N-1\}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left\|\nabla X^{m+1}\right\|^{2p}\right] + \mathbb{E}\left[\left|r^{m+1}\right|^{2p}\right] &\leq C + C\mathbb{E}\left[\left\|\nabla\phi^0\right\|^{2p}\right] + C\mathbb{E}\left[\left|r^0\right|^{2p}\right]\\
&\quad + C\tau\sum_{n=0}^{m}\mathbb{E}\left[\left|r^n\right|^{2p}\right] + C\tau\sum_{n=0}^{m}\mathbb{E}\left[\left\|\nabla X^n\right\|^{2p}\right].
\end{aligned}$$

因此，根据（3.2），通过应用离散格朗沃尔不等式，我们可以得出（4.1）。□

我们想指出，引理4 的证明关键依赖于 σ 及其导数 σ'的有界性；特别参见（ R_4^m 在（4.12）中的估计。将分析扩展到更一般的扩散模型（包括具有无界扩散系数或梯度型噪声的模型）需要采用截然不同的技术，因此留待未来工作。

根据引理4，我们得到数值解在更强拓扑下的以下正则性估计；证明见附录A.1 。

推论5 设假设*1* 和*2* 成立，且 $\phi^0 \in \dot{H}^1(\mathcal{O})$。则对任意 $p \geq 1$，存在一个正常数 $C := C(p)$ 使得

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq n\leq N-1}\|\nabla X^{n+1}\|^{2p}\right]+\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq n\leq N-1}|r^{n+1}|^{2p}\right]+\mathbb{E}\left[\Big(\sum_{n=0}^{N-1}|r^{n+1}-r^n|^2\Big)^p\right] + \mathbb{E}\left[\Big(\sum_{n=0}^{N-1}\|(I-S^2(\tau))^{\frac{1}{2}}(-A)^{-\frac{1}{2}}\tilde{\mu}^n\|^2\Big)^p\right]\leq C, \tag{4.16}$$

其中 $\tilde{\mu}^n$ 是式(2.13)中定义的修正化学势。

指数欧拉 SSAV 格式 (1.4) 的精确误差分析涉及精确解和数值解的$H^\beta(\mathcal{O})$ $(\beta > 1)$ 空间正则性估计。为便于获得数值解的更高正则性估计，我们引入其连续时间版本 $X = \{X(t)\}_{t\in[0,T]}$，定义如下：

$$dX(t) = -A^2X(t)dt + A\tilde{f}^{\kappa_N(t)/\tau}dt + S(t-\kappa_N(t))g(X(\kappa_N(t)))dW(t) \tag{4.17}$$

对任意 $t \in (0,T]$，初值为 $X(0) = \phi^0$。下文中，对于 $t \in [0,T]$，定义$\kappa_N(t) := \lfloor t/\tau \rfloor \tau$，其中 $\lfloor\cdot\rfloor$ 表示下取整函数。注意，对所有$n \in \{0,1,\cdots,N\}$，均有 $X(t_n) = X^n$。

为统一呈现数值解和精确解的正则性分析，我们考虑如下定义的随机过程 $\{Z(t)\}_{t\in[0,T]}$

$$dZ(t) = -A^2Z(t)dt + A\tilde{F}(t)dt + \tilde{G}(t)dW(t), \qquad t \in [0,T], \tag{4.18}$$

满足初始条件 $Z(0) = \phi^0$，其中 $\tilde{F}$: $[0,T]\times\Omega \to H$和 $\tilde{G}$:$[0,T]\times\Omega \to \mathcal{L}_2^0$是 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$-适应随机过程。我们重点讨论以下两种情况。

(a) 若 $\tilde{F}(s) = F'(\phi(s))$ 且 $\tilde{G}(s) = g(\phi(s))$，则 $Z = \phi$ 是原问题的温和解（1.1）。(b) 若 $\tilde{F}(s) = \tilde{f}^{\kappa_N(s)/\tau}$且 $\tilde{G}(s) = S(s-\kappa_N(s))g(X^{\kappa_N(s)/\tau})$，则 $Z = X$是数值解 $\{X^n\}_{n=0}^N$的连续版本。

以下引理给出了保证温和解 $H^\beta(\mathcal{O})$-空间正则性的充分条件 Z 对于 (4.18)。

引理 6 设 $\tilde{F} \in L^p(0,T;L^p(\Omega;H))$ 和 $\tilde{G} \in L^p(0,T;L^p(\Omega;\mathcal{L}_2(Q^{\frac{1}{2}}H,H)))$ 对任意 $p \geq 1$ 均成立。若 $\phi^0 \in D(-A)^{\frac{\beta}{2}})$ 对某个 $\beta \in (0,2)$成立，则对任意 $p \geq 1$，存在一个常数 $C := C(p,\beta) > 0$ 使得

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \|(-A)^{\frac{\beta}{2}} Z(t)\|^p\right] \leq C\left(\|(-A)^{\frac{\beta}{2}}\phi^0\|^p + \mathbb{E}\int_0^T \left[\|\tilde{F}(s)\|^p + \|\tilde{G}(s)\|^p_{\mathcal{L}_2^0}\right] ds\right).$$

由于引理 6 的证明是标准的，为了完整起见，我们将其收录于附录 A.2 。现在我们可以推导数值解的更高阶空间正则性估计。

引理 7 设假设 *1* 和 *2* 成立，且 $\phi^0 \in \dot{H}^\beta(\mathcal{O})$ 对某个 $\beta \in [1,2)$成立。则对任意 $p \geq 1$，存在常数 $C := C(p,\beta) > 0$ 使得

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \|(-A)^{\frac{\beta}{2}} X(t)\|^{2p}\right] \leq C. \tag{4.19}$$

证明 该证明基于应用引理 6，其中

$$\tilde{F}(s) = \tilde{f}^{\kappa_N(s)/\tau} \quad \text{and} \quad \tilde{G}(s) = S\big(s-\kappa_N(s)\big)g(X(\kappa_N(s))). \tag{4.20}$$

由半群 $S(\cdot)$ 的压缩性以及（4.7），

$$\mathbb{E}\int_0^T \|\tilde{G}(s)\|^p_{\mathcal{L}_2^0} ds = \sum_{n=0}^{N-1}\int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbb{E}\left[\|S(s-t_n)g(X^n)\|^p_{\mathcal{L}_2^0}\right] ds \tag{4.21}$$
$$\leq \sum_{n=0}^{N-1}\int_{t_n}^{t_{n+1}} \|S(s-t_n)\|^p_{\mathcal{L}(H)}\mathbb{E}\left[\|g(X^n)\|^p_{\mathcal{L}_2^0}\right] ds \leq C.$$

利用 Hölder不等式、推论 5, 1, $\mathcal{O}$ → 假设、L^6 $\mathcal{O}$ $X^n \in \dot{H}^1$ $\mathcal{O}$ $p \geq 1$ Sobolev嵌入 H^1( ) ( )，以及 ( ) 这一事实可得，对任意 ,

$$\mathbb{E}\big[\|F'(X^n)\|^{4p}\big] \leq C + C\mathbb{E}\big[\|\nabla X^n\|^{12p}\big] \leq C(p). \tag{4.22}$$

回顾由（3.2）可知，泛函 E_{p} 有一个正的下界。根据（3.8）、推论 5以及杨氏不等式，可得

$$\mathbb{E}[\|\tilde{f}^n\|^p] \leq C\mathbb{E}[|r^{n+1}|^{2p}] + \mathbb{E}[\|F'(X^n)\|^{2p}] + C\mathbb{E}[\|\chi^n\|^p] \leq C + C\mathbb{E}[\|\chi^n\|^p] \tag{4.23}$$

对任意 $n = 0,1,\cdots,N$ 均成立。我们声称，对任意 $p \geq 1$,

$$\mathbb{E}\left[\|\chi^n\|^p\right] \leq C(p)\tau^{\frac{p}{2}}, \tag{4.24}$$

其证明为完整起见放在附录 A.3 中。将（4.24）代入（4.23）可得，对任意 $p \geq 1$,

$$\mathbb{E}[\|\tilde{f}^n\|^p] \leq C(p). \tag{4.25}$$

这与 (4.21) 一起，验证了引理 6 对在 ($\tilde{F}$ 和 $\tilde{G}$) 中定义的函数 4.20) 的条件。最后，通过应用引理 (4.19)，我们可以得到 6。 □

注释 3 根据引理 7，若进一步满足 $\phi^0 \in \dot{H}^2(\mathcal{O})$，则还可以推导出一个 $H^2(\mathcal{O})$- 空间正则性估计，适用于温和解 $\phi(t)$ 以及数值解的连续版本 $X(t)$ 。例如，对于数值解，注意到 $Z := (-A)^{\frac{1}{2}} X$ 满足

$$dZ(t) = -A^2 Z(t)dt + A(-A)^{\frac{1}{2}} \tilde{f}^{\kappa_N(t)/\tau} dt + S(t-\kappa_N(t))(-A)^{\frac{1}{2}} g(X(\kappa_N(t)))dW(t),$$

可通过选取 $\tilde{F}(s) = (-A)^{1/2} \tilde{f}^{\kappa_N(s)/\tau}$ 以及 $\tilde{G}(s) = (-A)^{1/2} S(s-\kappa_N(s)) g(X(\kappa_N(s)))$ 应用引理 6，从而得到 $(-A)^{\frac{1}{2}} X \in L^p(\Omega; L^\infty(0,T; D((-A)^{\frac{1}{2}}))$。

Sobolev嵌入 $H^\beta(\mathcal{O}) \to L^\infty(\mathcal{O})$ 对于 $\beta > \frac{d}{2}$，空间 $\|\cdot\|_{H^\beta}$ 与 $\|(-A)^{\frac{\beta}{2}} \cdot\|$ 中的范数等价性 $\dot{H}^\beta(\mathcal{O})$，再结合引理 7 以及 $\beta \in (\frac{d}{2}, 2) \cap [1,2)$，可得对任意 $p \geq 1$,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq n\leq N} \|X^n\|_{L^\infty}^p\right] \leq C\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \|(-A)^{\frac{\beta}{2}} X(t)\|^{2p}\right] \leq C(p,\beta). \tag{4.26}$$

4.2 时间正则性估计

本小节给出指数 Euler SSAV 格式数值解的时间正则性结果（1.4），包括$L^2(\mathcal{O})$ 中的时间 Hölder 连续性，以及 $H^1(\mathcal{O})$ 中累积离散增量和的先验界。

引理 8 设假设 1和 2成立，并设 $\phi^0 \in \dot{H}^\beta(\mathcal{O})$ 对某个 $\beta \in (\frac{d}{2}, 2) \cap [1,2)$成立。则对任意 $p \geq 1$, 存在常数 $C := C(p,\beta) > 0$ 使得

$$\|X^{n+1} - X^n\|_{L^{2p}(\Omega;H)} \leq C\tau^{\frac{\beta}{4}}, \qquad n \in \{0,1,\cdots,N-1\}.$$

证明 证明是标准的，依据 (2.1)、(2.2) 以及 $H^\beta(\mathcal{O})$-空间正则性估计，参见 X^n (对于 3 的 $\beta = 2$，参见备注；对于 7，参见引理 $\beta < 2$)。因此略去细节，读者可参阅例如 [39, 定理 2。31] 以了解类似论证。
□

我们注意到，即使初值为 $\phi^0 \notin \dot{H}^2(\mathcal{O})$，仍然可以观察到数值解在初始时刻 $t_0 = 0$ 之后具有关于时间的 1 2-Hölder 连续性。

引理 9 假设条件 1和 2成立，且 $\phi^0 \in \dot{H}^\beta(\mathcal{O})$ 对于某个 $\beta \in (\frac{d}{2}, 2) \cap [1,2)$。那么，对于任意 $p \geq 1$ $C = C(p,\beta) > 0$ $n \in$，存在一个常数 :() 使得对于任意 $\{1,2,\cdots,N-1\}$,

$$\|X^{n+1} - X^n\|_{L^{2p}(\Omega;H)} \leq C\tau^{\frac{1}{2}}(1 + t_n^{\frac{\beta}{4}-\frac{1}{2}}). \tag{4.27}$$

证明 对于任意 $n = 1,2,\cdots,N-1$，我们可以分解

$$X^{n+1} - X^n = (S(\tau) - I)X^n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} S(t_{n+1}-s)A\tilde{f}^n ds$$

$$+\int_{t_n}^{t_{n+1}} S(\tau)g(X^n)dW(s) =: R_1^n + R_2^n + R_3^n.$$

利用（2.2）、闵可夫斯基不等式以及（4.25），可得

$$\mathbb{E}[\|R_2^n\|^{2p}] \le C\mathbb{E}\Big[\Big|\int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_{n+1}-s)^{-\frac{1}{2}}\|\tilde{f}^n\|ds\Big|^{2p}\Big] \le C\tau^p\mathbb{E}[\|\tilde{f}^n\|^{2p}] \le C\tau^p. \tag{4.28}$$

由 BDG不等式、 $S(\cdot)$的压缩性以及（4.7），可得

$$\mathbb{E}[\|R_3^n\|^{2p}] \le C\mathbb{E}\Big[\Big|\int_{t_n}^{t_{n+1}} \|S(\tau)g(X^n)\|_{\mathcal{L}_2^0}^2 ds\Big|^{p}\Big] \le C\tau^p. \tag{4.29}$$

为估计 R_1^n（其中 $1 \le n \le N$），回顾

$$X^n = S(t_n)\phi^0 + \sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} S(t_n-s)A\tilde{f}^i ds + \sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} S(t_n-t_i)g(X^i)dW(s).$$

由于 $\phi^0 \in \dot{H}^\beta(\mathcal{O})$，结合（2.1）和（2.2），对于任意 $\alpha \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}\|(S(\tau)-I)S(t_n)\phi^0\| &= \|(S(\tau)-I)(-A)^{-1-\alpha}(-A)^{-\frac{\beta}{2}+1+\alpha}S(t_n)(-A)^{\frac{\beta}{2}}\phi^0\| \\ &\le C(\beta,\alpha)t_n^{\frac{\beta}{4}-\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}}\tau^{\frac{1}{2}(1+\alpha)}.\end{aligned} \tag{4.30}$$

由于 $\phi^0 \in \dot{H}^1(\mathcal{O})$、BDG不等式、（2.1）、（2.2）、（2.8）以及推论 5 可知，对于任意 $\alpha \in [0, \frac{1}{2})$, –

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\Big[\Big\|\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}(S(\tau)-I)S(t_n-t_i)g(X^i)dW(s)\Big\|^{2p}\Big] \\ &\le C\mathbb{E}\Big[\Big|\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\|(S(\tau)-I)(-A)^{-1-\alpha}(-A)^{\frac{1}{2}+\alpha}S(t_n-t_i)(-A)^{\frac{1}{2}}g(X^i)\|_{\mathcal{L}_2^0}^2 ds\Big|^{p}\Big] \\ &\le C\mathbb{E}\Big[\Big|\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\tau^{1+\alpha}(t_n-t_i)^{-\frac{1}{2}-\alpha}(1+\|\nabla X^i\|^2)ds\Big|^{p}\Big] \le C\tau^{p(1+\alpha)}.\end{aligned} \tag{4.31}$$

由（2.1）和（2.2），对于任意 $\alpha \in [0,\frac{1}{2})$,

$$\begin{aligned}&\Big\|\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}(S(\tau)-I)S(t_n-s)A\tilde{f}^i ds\Big\| \\ &\le \sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\|(-A)^{-1-\alpha}(S(\tau)-I)\|_{\mathcal{L}(H)}\|(-A)^{\frac{3}{2}+\alpha}S(t_n-s)\|_{\mathcal{L}(H)}\|(-A)^{\frac{1}{2}}\tilde{f}^i\|ds \\ &\le C\tau^{\frac{1}{2}(1+\alpha)}\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}(t_n-s)^{-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\alpha}\|(-A)^{\frac{1}{2}}\tilde{f}^i\|ds.\end{aligned}$$

接下来，我们声称，对于任意 $q \ge 1$,

$$\mathbb{E}\left[\|(-A)^{\frac{1}{2}}\tilde{f}^n\|^q\right] \le C(q). \tag{4.32}$$

(4.32) 的证明见附录 A.4。利用（4.32）和闵可夫斯基不等式可得，对于任意 $p \ge 1$ 和 $\alpha \in [0, \frac{1}{2})$ ，

$$\mathbb{E}\Big[\Big\|\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}(S(\tau)-I)S(t_n-s)A\tilde{f}^i ds\Big\|^{2p}\Big] \le C(p,\alpha)\tau^{p(1+\alpha)}.$$

结合（4.30）和（4.31），可得，对于任意 $p \geq 1$ 和 $\alpha \in [0, \frac{1}{2})$，

$$\|R_1^n\|_{L^{2p}(\Omega;H)} = \|(S(\tau) - I)X^n\|_{L^{2p}(\Omega;H)} \leq C(\beta, \alpha)(1 + t_n^{\frac{\beta}{4} - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}})\tau^{\frac{1}{2}(1+\alpha)}. \tag{4.33}$$

对所有 $n \in \{1, 2, \cdots, N\}$ 均成立。因此，由带有 $\alpha = 0$ 的 (4.33)、(4.28) 和 (4.29) 可得所需的 Hölder连续性估计 (4.27)。证明完毕。□

以下引理给出了能量空间 $\dot{H}^1(\mathcal{O})$ 中数值解的离散二次变差的矩估计。

引理10 设假设 *1* 和 *2* 成立，且设 $\phi^0 \in \dot{H}^1(\mathcal{O})$。则对于任意 $p \geq 1$，存在常数 $C := C(p) > 0$ 使得

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{n=0}^{N-1} \|(-A)^{\frac{1}{2}}(X^{n+1} - X^n)\|^2\Big)^p\Big] \leq C.$$

证明 由（1.4），可得

$$X^{n+1} - X^n = (S(\tau) - I)(-A)^{-1}\tilde{\mu}^n + g(X^n)\delta W^n, \tag{4.34}$$

其中 $\tilde{\mu}^n$ 定义见（213）。由 Ḥolder不等式和杨氏不等式，

$$\begin{aligned}
&\Big(\sum_{n=0}^{N-1} \|(-A)^{\frac{1}{2}}(X^{n+1} - X^n)\|^2\Big)^p \qquad (4.35)\\
&\leq C\Big|\sum_{n=0}^{N-1} \Big\langle (I - S(\tau))\tilde{\mu}^n, -(X^{n+1} - X^n)\Big\rangle\Big|^p + C\Big|\sum_{n=0}^{N-1} \langle g(X^n)\delta W^n, (-A)(X^{n+1} - X^n)\rangle\Big|^p\\
&\leq \frac{1}{4}\Big(\sum_{n=0}^{N-1} \|(I - S(\tau))^{\frac{1}{2}}(-A)^{\frac{1}{2}}(X^{n+1} - X^n)\|^2\Big)^p + C\Big(\sum_{n=0}^{N-1} \|(I - S(\tau))^{\frac{1}{2}}(-A)^{-\frac{1}{2}}\tilde{\mu}^n\|^2\Big)^p\\
&\quad + \frac{1}{4}\Big(\sum_{n=0}^{N-1} \|(-A)^{\frac{1}{2}}(X^{n+1} - X^n)\|^2\Big)^p + C\Big(\sum_{n=0}^{N-1} \|(-A)^{\frac{1}{2}}(g(X^n)\delta W^n)\|^2\Big)^p.
\end{aligned}$$

利用 $\|(I - S(\tau))^{\frac{1}{2}}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$ 这一事实，可得

$$\|(I - S(\tau))^{\frac{1}{2}}(-A)^{\frac{1}{2}}(X^{n+1} - X^n)\|^2 \leq \|(-A)^{\frac{1}{2}}(X^{n+1} - X^n)\|^2. \tag{4.36}$$

应用（4.12）和推论 5，可得

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{n=0}^{N-1} \|(-A)^{\frac{1}{2}}(g(X^n)\delta W^n)\|^2\Big)^p\Big] \leq C. \tag{4.37}$$

对（4.35）两边取期望，然后根据（4.36）和（4.37），并利用推论 5，证明完毕。□

5 定理 2的证明

本节致力于证明定理 2 关于指数 Euler SSAV 格式（1.4）的强收敛阶。为此，受例如 [20, 24], 的启发，我们引入辅助过程 $\Phi = \{\Phi(t)\}_{t\in[0,T]}$，定义为

$$d\Phi(t) = -A^2\Phi(t)dt + AF'(X^{\kappa_N(t)/\tau})dt + g(X^{\kappa_N(t)/\tau})dW(t), \qquad t \in (0, T], \tag{5.1}$$

初值为 $\Phi(0)=\phi^0$。由三角不等式，我们有

$$\|\phi(t_n)-X^n\|_{L^2(\Omega;H)}\le\|\phi(t_n)-\Phi(t_n)\|_{L^2(\Omega;H)}+\|\Phi(t_n)-X^n\|_{L^2(\Omega;H)}. \tag{5.2}$$

下文将估计辅助过程 Φ与数值解 X之间的误差，以及 Φ 与精确解 ϕ之间的误差。相应的分析分别见第 5.1 和 5.2小节。

5.1 Φ 与 X之间的误差估计

应用 Hölder不等式，由式（4.17）和（5.1）可得，对于任意 $p\ge 1$和 $n\in\{0,1,\cdots,N-1\}$,

$$\begin{aligned}\|\Phi(t_{n+1})-X(t_{n+1})\|^p\le C&\left\|\sum_{j=0}^{n}\int_{t_j}^{t_{j+1}}S(t_{n+1}-s)A[F'(X^j)-\tilde{f}^j]ds\right\|^p\\&+C\left\|\sum_{j=0}^{n}\int_{t_j}^{t_{j+1}}S(t_{n+1}-s)\left(I-S(s-t_j)\right)g(X^j)dW(s)\right\|^p\\&=:\mathcal{B}_1^n+\mathcal{B}_2^n.\end{aligned} \tag{5.3}$$

应用 BDG不等式、（2.1）、（2.2）、（2.8）以及推论 5，我们可推得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\mathcal{B}_2^n\right]&\le C\mathbb{E}\left[\left\|\sum_{j=0}^{n}\int_{t_j}^{t_{j+1}}(-A)^{\frac12}S(t_{n+1}-s)(-A)^{-\frac12}\left(I-S(s-t_j)\right)g(X^j)dW(s)\right\|^p\right]\\&\le C\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=0}^{n}\int_{t_j}^{t_{j+1}}(t_{n+1}-s)^{-\frac12}\|(-A)^{-1}\left(S(s-t_j)-I\right)(-A)^{\frac12}g(X^j)\|_{\mathcal{L}_2^0}^2ds\right)^{\frac p2}\right]\\&\le C\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=0}^{n}\int_{t_j}^{t_{j+1}}(t_{n+1}-s)^{-\frac12}|s-t_j|\|(-A)^{\frac12}g(X^j)\|_{\mathcal{L}_2^0}^2ds\right)^{\frac p2}\right]\\&\le C\tau^{\frac p2}\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=0}^{n}\int_{t_j}^{t_{j+1}}(t_{n+1}-s)^{-\frac12}(1+\|\nabla X^j\|^2)ds\right)^{\frac p2}\right]\le C\tau^{\frac p2}.\end{aligned} \tag{5.4}$$

根据（3.8），我们进一步将项 $\mathcal{B}_1^n$ 拆分如下

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_1^n\le C&\left\|\sum_{j=0}^{n}\int_{t_j}^{t_{j+1}}S(t_{n+1}-s)A\left(\frac{r^{j+1}-r^j}{\sqrt{E_{\mathrm{p}}(X^j)}}F'(X^j)\right)ds\right\|^p\\&+C\left\|\sum_{j=0}^{n}\int_{t_j}^{t_{j+1}}S(t_{n+1}-s)A\left(\frac{r^j-\sqrt{E_{\mathrm{p}}(X^j)}}{\sqrt{E_{\mathrm{p}}(X^j)}}F'(X^j)+\chi^j\right)ds\right\|^p\\&=:\mathcal{B}_{11}^n+\mathcal{B}_{12}^n.\end{aligned} \tag{5.5}$$

对于第一项 $\mathcal{B}_{11}^n$，利用（2.1）、闵可夫斯基不等式和杨氏不等式，我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\mathcal{B}_{11}^n\right] &\le C\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=0}^{n}\int_{t_j}^{t_{j+1}}\left\|S(t_{n+1}-s)(-A)^{\frac{1}{2}}\frac{r^{j+1}-r^j}{\sqrt{E_{\mathrm{p}}(X^j)}}(-A)^{\frac{1}{2}}F'(X^j)\right\|ds\right)^p\right]\\ &\le C\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=0}^{n}\int_{t_j}^{t_{j+1}}(t_{n+1}-s)^{-\frac{1}{4}}|r^{j+1}-r^j|\|(-A)^{\frac{1}{2}}F'(X^j)\|ds\right)^p\right]\\ &\le C\tau^{\frac{p}{2}}\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=0}^{n}|r^{j+1}-r^j|^2\right)^p\right]\\ &\quad + C\tau^{-\frac{p}{2}}\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=0}^{n}\left(\int_{t_j}^{t_{j+1}}(t_{n+1}-s)^{-\frac{1}{4}}\|(-A)^{\frac{1}{2}}F'(X^j)\|ds\right)^2\right)^p\right].\end{aligned}$$

此外，由推论5、闵可夫斯基不等式以及（A.5），我们得到

$$\mathbb{E}\left[\mathcal{B}_{11}^n\right] \le C\tau^{\frac{p}{2}}. \tag{5.6}$$

对项 $\mathcal{B}_{12}^n$ 的估计需要如下结果，该结果表明，对所有 $m \in \{0,1,\cdots,N\}$，离散 SSAV r^m 以 1/2阶的收敛率逼近 $\sqrt{E_{\mathrm{p}}(X^m)}$。

引理11 设假设1与2成立，并设 $\phi^0 \in \dot{H}^2(\mathcal{O})$。则对任意 $p \ge 1$，存在常数 $C := C(p) > 0$ 使得对任意 $m \in \{0,1,\cdots,N\}$，

$$\mathbb{E}\left[\left|r^m - \sqrt{E_{\mathrm{p}}(X^m)}\right|^p\right] \le C\tau^{\frac{p}{2}}.$$

证明 首先，我们对实值函数 $b_1(\xi) := E_{\mathrm{p}}(\xi X^{n+1} + (1-\xi)X^n)$关于 $\xi \in [0,1]$作一阶与二阶泰勒展开，从而得到

$$\begin{aligned}&E_{\mathrm{p}}(X^{n+1}) - E_{\mathrm{p}}(X^n) = b_1(1) - b_1(0) = \int_0^1 \left\langle F'(\psi_\xi^n), X^{n+1} - X^n\right\rangle d\xi,\\ &E_{\mathrm{p}}(X^{n+1}) - E_{\mathrm{p}}(X^n) = \left\langle F'(X^n), X^{n+1} - X^n\right\rangle\\ &+ \int_0^1 (1-\xi)\left\langle F''(\psi_\xi^n)(X^{n+1} - X^n), X^{n+1} - X^n\right\rangle d\xi,\end{aligned}$$

其中 $\psi_\xi^n := \xi X^{n+1} + (1-\xi)X^n$。类似地，对 $\theta \in [0,1]$处的 $b_2(\theta) := \sqrt{\theta E_{\mathrm{p}}(X^{n+1}) + (1-\theta)E_{\mathrm{p}}(X^n)}$ 进行泰勒展开，可进一步得到

$$\begin{aligned}&\sqrt{E_{\mathrm{p}}(X^{n+1})} - \sqrt{E_{\mathrm{p}}(X^n)} = b_2(1) - b_2(0)\\ &= \frac{1}{2\sqrt{E_{\mathrm{p}}(X^n)}}\left(E_{\mathrm{p}}(X^{n+1}) - E_{\mathrm{p}}(X^n)\right) - \frac{1}{8E_{\mathrm{p}}(X^n)^{3/2}}\left(E_{\mathrm{p}}(X^{n+1}) - E_{\mathrm{p}}(X^n)\right)^2\\ &\quad + \frac{3}{16}\int_0^1 (1-\theta)^2(\tilde{E}_\theta^n)^{-5/2}\left(E_{\mathrm{p}}(X^{n+1}) - E_{\mathrm{p}}(X^n)\right)^3 d\theta,\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{E_{\rm p}(X^n)}}\Big(\Big\langle F'(X^n), X^{n+1}-X^n \Big\rangle + \frac{1}{2}\Big\langle F''(X^n)(X^{n+1}-X^n), X^{n+1}-X^n \Big\rangle \Big)$$
$$- \frac{1}{8E_{\rm p}(X^n)^{3/2}} \Big\langle F'(X^n), X^{n+1}-X^n \Big\rangle^2 + \mathcal{P}_1^n + \mathcal{P}_2^n + \mathcal{P}_3^n + \mathcal{P}_4^n,$$

其中 $\tilde{E}_\theta^n := \theta E_{\rm p}(X^n) + (1-\theta)E_{\rm p}(X^{n+1})$，余项为

$$\mathcal{P}_1^n := \frac{1}{2\sqrt{E_{\rm p}(X^n)}} \int_0^1 (1-\xi) \Big\langle (F''(\psi_\xi^n) - F''(X^n))(X^{n+1}-X^n), X^{n+1}-X^n \Big\rangle d\xi,$$
$$\mathcal{P}_2^n := -\frac{1}{4E_{\rm p}(X^n)^{3/2}} \langle F'(X^n), X^{n+1}-X^n \rangle$$
$$\times \int_0^1 (1-\xi) \Big\langle F''(\psi_\xi^n)(X^{n+1}-X^n), X^{n+1}-X^n \Big\rangle d\xi,$$
$$\mathcal{P}_3^n := -\frac{1}{8E_{\rm p}(X^n)^{3/2}} \Big(\int_0^1 (1-\xi) \Big\langle F''(\psi_\xi^n)(X^{n+1}-X^n), X^{n+1}-X^n \Big\rangle d\xi \Big)^2,$$
$$\mathcal{P}_4^n := \frac{3}{16} \int_0^1 (1-\theta)^2 (\tilde{E}_\theta^n)^{-5/2} \Big(\int_0^1 \Big\langle F'(\psi_\xi^n), X^{n+1}-X^n \Big\rangle d\xi \Big)^3 d\theta.$$

由（4.34）和（1.6），我们可以改写为

$$\sqrt{E_{\rm p}(X^{n+1})} - \sqrt{E_{\rm p}(X^n)} = (r^{n+1}-r^n) + \mathcal{P}_1^n + \mathcal{P}_2^n + \mathcal{P}_3^n + \mathcal{P}_4^n + \mathcal{P}_5^n + \mathcal{P}_6^n,$$

其中

$$\mathcal{P}_5^n := \frac{1}{4\sqrt{E_{\rm p}(X^n)}} \Big\langle F''(X^n)(X^{n+1}-X^n), (S(\tau)-I)(-A)^{-1}\tilde{\mu}^n \Big\rangle,$$
$$\mathcal{P}_6^n : -\frac{1}{8E_{\rm p}(X^n)^{3/2}} \Big\langle F'(X^n), X^{n+1}-X^n \Big\rangle \Big\langle F'(X^n), (S(\tau)-I)(-A)^{-1}\tilde{\mu}^n \Big\rangle.$$

从 $n=0$ 到 m 求和，由于 $r_0 = \sqrt{E_{\rm p}(\phi^0)}$，根据 Hölder不等式可得，对于任意 $p \geq 1$,

$$\mathbb{E}\left[\left| r^{m+1} - \sqrt{E_{\rm p}(X^{m+1})} \right|^p \right] \leq C \sum_{l=1,5,6} \mathbb{E}\Big[\Big| \sum_{n=0}^m \mathcal{P}_l^n \Big|^p \Big] + C(m+1)^{p-1} \sum_{l=2}^4 \sum_{n=0}^m \mathbb{E}\left[|\mathcal{P}_l^n|^p \right]. \tag{5.7}$$

对 $\sum_{n=0}^m \mathcal{P}_1^n$的估计。利用中值定理，我们可以改写为

$$\mathcal{P}_1^n = \frac{1}{2\sqrt{E_{\rm p}(X^n)}} \int_0^1 (1-\xi) \int_0^1 \int_{\mathcal{O}} F'''(\theta\psi_\xi^n + (1-\theta)X^n)(\psi_\xi^n - X^n)(X^{n+1}-X^n)^2 dx d\theta d\xi.$$

Gagliardo–Nirenberg不等式（参见例如 [42, 第 5] 章）表明，对于 $d \in \{1,2,3\}$ 以及任意 $p \in (2,6]$,

$$\|X^{n+1}-X^n\|_{L^p} \leq C(p,d) \|X^{n+1}-X^n\|^{1-d(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} \|\nabla(X^{n+1}-X^n)\|^{d(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}. \tag{5.8}$$

因此，由（3.2）、假设 1、Hölder不等式以及 5.8）和 $p=3$,

$$|\mathcal{P}_1^n| \leq C(1+\|X^n\|_{L^\infty} + \|X^{n+1}\|_{L^\infty}) \|X^{n+1}-X^n\|_{L^3}^3$$
$$\leq C(1+\|X^n\|_{L^\infty} + \|X^{n+1}\|_{L^\infty}) \|X^{n+1}-X^n\|^{3(1-\frac{d}{6})} \|\nabla(X^{n+1}-X^n)\|^{\frac{d}{2}}.$$

此外，根据杨氏不等式和庞加莱不等式，对于 $d \in \{1,2,3\}$,

$$|\mathcal{P}_1^n| \leq C(1+\|X^n\|_{L^\infty} + \|X^{n+1}\|_{L^\infty}) \|X^{n+1}-X^n\|^{\frac{3}{2}} \|\nabla(X^{n+1}-X^n)\|^{\frac{3}{2}}$$

$$\leq C\tau^{-\frac{3}{2}}(1+\|X^n\|_{L^\infty}^4+\|X^{n+1}\|_{L^\infty}^4)\|X^{n+1}-X^n\|^6+C\tau^{\frac{1}{2}}\|\nabla(X^{n+1}-X^n)\|^2$$

由 Hölder不等式、（4.26）以及引理 8 和 10 可得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\Big|\sum_{n=0}^m\mathcal{P}_1^n\Big|^p\Big]&\leq C\mathbb{E}\Big[\Big(\tau^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^m\|(-A)^{\frac{1}{2}}(X^{n+1}-X^n)\|^2\Big)^p\Big]\\&\quad+C\mathbb{E}\Big[\Big(\tau^{-\frac{3}{2}}\sum_{n=0}^m\Big(1+\|X^n\|_{L^\infty}^4+\|X^{n+1}\|_{L^\infty}^4\Big)\|X^{n+1}-X^n\|^6\Big)^p\Big]\\&\leq C\tau^{\frac{p}{2}}.\end{aligned}$$

对 $\sum_{n=0}^m\mathcal{P}_5^n$的估计。 由杨氏不等式（2.2）和推论 5 可得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\Big|\sum_{n=0}^m\mathcal{P}_5^n\Big|^p\Big]&\leq C\mathbb{E}\Big[\Big|\sum_{n=0}^m\tau^{-\frac{1}{2}}\|(I-S(\tau))^{\frac{1}{2}}(-A)^{-\frac{1}{2}}[F''(X^n)(X^{n+1}-X^n)]\|^2\\&\quad+C\tau^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^m\|(I-S(\tau))^{\frac{1}{2}}(-A)^{-\frac{1}{2}}\tilde{\mu}^n\|^2\Big|^p\Big]\\&\leq C\mathbb{E}\Big[\Big|\sum_{n=0}^m\tau^{-\frac{1}{2}}\|(I-S(\tau))^{\frac{1}{2}}(-A)^{-1}(-A)^{\frac{1}{2}}[F''(X^n)(X^{n+1}-X^n)]|^2\Big|^p\Big]+C\tau^{\frac{p}{2}}\\&\leq C\mathbb{E}\Big[\Big|\sum_{n=0}^m\tau^{\frac{1}{2}}\|(-A)^{\frac{1}{2}}[F''(X^n)(X^{n+1}-X^n)]\|^2\Big|^p\Big]+C\tau^{\frac{p}{2}}.\end{aligned}\tag{5.9}$$

利用分部积分公式、链式法则、Hölder不等式、假设 1、Sobolev嵌入 $\dot{H}^1(\mathcal{O})\to L^6(\mathcal{O})$，可知对任意 $\beta\in(\frac{3}{2},2)$，

$$\begin{aligned}&\|(-A)^{\frac{1}{2}}[F''(X^n)(X^{n+1}-X^n)]\|^2=\Big\|\nabla[F''(X^n)(X^{n+1}-X^n)]\Big\|^2\\&\leq C\Big\|F'''(X^n)\nabla X^n(X^{n+1}-X^n)\Big\|^2+C\Big\|F''(X^n)\nabla(X^{n+1}-X^n)\Big\|^2\\&\leq C\|X^{n+1}-X^n\|_{L^6}^2\Big\|(1+X^n)\nabla X^n\Big\|_{L^3}^2+C\Big\|F''(X^n)\Big\|_{L^\infty}^2\|\nabla(X^{n+1}-X^n)\|^2\\&\leq C\|\nabla(X^{n+1}-X^n)\|^2\Big((1+\|X^n\|_{L^\infty}^2)\|\nabla X^n\|_{L^3}^2+C(1+\|X^n\|_{L^\infty}^4)\Big)\\&\leq C\|\nabla(X^{n+1}-X^n)\|^2(1+\|X^n\|_{H^\beta}^4),\end{aligned}$$

其中，最后一步用到了索博列夫嵌入 $H^{\beta-1}(\mathcal{O})\to L^3(\mathcal{O})$ 以及 $H^\beta(\mathcal{O})\to L^\infty(\mathcal{O})$。引理 7 和引理 10 结合可得

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\Big[\Big|\sum_{n=0}^m\|(-A)^{\frac{1}{2}}[F''(X^n)(X^{n+1}-X^n)]\|^2\Big|^p\Big]\\&\leq C\left(1+\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq n\leq m}\|X^n\|_{H^\beta}^{8p}\right]\right)^{\frac{1}{2}}\left(\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{n=0}^m\|\nabla(X^{n+1}-X^n)\|^2\Big)^{2p}\Big]\right)^{\frac{1}{2}}\leq C.\end{aligned}$$

将上述估计代入（5.9）得 $\mathbb{E}[|\sum_{n=0}^m\mathcal{P}_5^n|^p]\leq C\tau^{\frac{p}{2}}$.

对 $\sum_{n=0}^m\mathcal{P}_6^n$的估计。 由柯西–施瓦茨不等式和（3.2），

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{n=0}^m\mathcal{P}_6^n\Big|^2&\leq C\Big(\sum_{n=0}^m\Big\|F'(X^n)\Big\|^2\|X^{n+1}-X^n\|^2\|(I-S(\tau))^{\frac{1}{2}}(-A)^{-\frac{1}{2}}F'(X^n)\|^2\Big)\\&\quad\times\Big(\sum_{n=0}^m\|(I-S(\tau))^{\frac{1}{2}}(-A)^{-\frac{1}{2}}\tilde{\mu}^n\|^2\Big).\end{aligned}$$

此外，利用（2.2）、推论5以及Hölder不等式，

$$\mathbb{E}\Big[\Big|\sum_{n=0}^{m}\mathcal{P}_6^n\Big|^p\Big] \le C\tau^{\frac{p}{2}}\left(\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{n=0}^{m}\|F'(X^n)\|^2\|X^{n+1}-X^n\|^2\|(-A)^{\frac{1}{2}}F'(X^n)\|^2\Big)^p\Big]\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le C\tau^{\frac{p}{2}}(m+1)^{\frac{p-1}{2}}\left(\sum_{n=0}^{m}\mathbb{E}\left[\|F'(X^n)\|^{2p}\|X^{n+1}-X^n\|^{2p}\|(-A)^{\frac{1}{2}}F'(X^n)\|^{2p}\right]\right)^{\frac{1}{2}}.$$

结合引理 8、（4.22）和（A.5），可得 $\mathbb{E}[|\sum_{n=0}^{m}\mathcal{P}_6^n|^p] \le C\tau^{\frac{p}{2}}$.

对 $\mathcal{P}_2^n$ 和 $\mathcal{P}_3^n$进行估计。 根据假设 1 和（4.26），对于任意$q \ge 1$ 和 $\xi \in [0,1]$，有

$$\mathbb{E}\left[\|F''(\psi_\xi^n)\|_{L^\infty}^q\right] \le C\mathbb{E}\left[(1+\|X^n\|_{L^\infty}^2+\|X^{n+1}\|_{L^\infty}^2)^q\right] \le C(q). \tag{5.10}$$

应用 Hölder不等式、（3 2）、引理 8、（422）和（510），可推得

$$\mathbb{E}\left[|\mathcal{P}_2^n|^p\right] \le C\int_0^1 \mathbb{E}\left[\left\|F'(X^n)\right\|^p\left\|F''(\psi_\xi^n)\right\|_{L^\infty}^p\|X^{n+1}-X^n\|^{3p}\right]d\xi \le C\tau^{\frac{3}{2}p}.$$

同理，我们还可以得到

$$\mathbb{E}\left[|\mathcal{P}_3^n|^p\right] \le C\int_0^1 \mathbb{E}\left[\|F''(\psi_\xi^n)\|_{L^\infty}^{2p}\|X^{n+1}-X^n\|^{4p}\right]d\xi \le C\tau^{2p}.$$

对 $\mathcal{P}_4^n$进行估计。 根据（3 2）、Hölder不等式、（4 26）以及引理 8,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[|\mathcal{P}_4^n|^p\right] &\le C\int_0^1 \mathbb{E}\left[\left|\left\langle F'(\psi_\xi^n), X^{n+1}-X^n\right\rangle\right|^{3p}\right]d\xi \\ &\le C\mathbb{E}\left[\left(1+\|X^n\|_{L^\infty}^{9p}+\|X^{n+1}\|_{L^\infty}^{9p}\right)\|X^{n+1}-X^n\|^{3p}\right] \le C\tau^{\frac{3}{2}p}.\end{aligned}$$

最后，将上述关于 $\mathcal{P}_1^n$ 至 $\mathcal{P}_6^n$ 的估计代入（57），证明完成。□

利用引理 11，现在我们给出辅助过程 $\Phi(t_n)$ 与数值解 X^n之间的误差估计。

命题12 设假设 *1*和 *2*成立，并设 $\phi^0 \in \dot{H}^2(\mathcal{O})$。则对任意 $p \ge 1$，存在常数 $C>0$，使得当 $n \in \{0,1,\cdots,N-1\}$时，

$$\mathbb{E}\left[\left\|\Phi(t_{n+1})-X^{n+1}\right\|^p\right] \le C\tau^{\frac{p}{2}}.$$

证明 回顾由（5.3）和（5.5）可得，

$$\left\|\Phi(t_{n+1})-X^{n+1}\right\|^p \le \mathcal{B}_{11}^n+\mathcal{B}_{12}^n+\mathcal{B}_2^n, \tag{5.11}$$

其中，$\mathcal{B}_{11}^n$ 和 $\mathcal{B}_2^n$的期望分别已在（5 6）和（5.4）中进行了估计。为估计 $\mathcal{B}_{12}^n$，我们利用（3.2）、（4.24）、（4.22）以及引理 11，得到对任意 $p \ge 1$,

$$\begin{aligned}&\left\|\frac{r^j-\sqrt{E_{\mathrm{p}}(X^j)}}{\sqrt{E_{\mathrm{p}}(X^j)}}F'(X^j)+\chi^j\right\|_{L^p(\Omega;H)} \\ &\le C\|r^j-\sqrt{E_{\mathrm{p}}(X^j)}\|_{L^{2p}(\Omega)}\|F'(X^j)\|_{L^{2p}(\Omega;H)}+\|\chi^j\|_{L^p(\Omega;H)} \le C(p)\tau^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

然后利用闵可夫斯基不等式和（21），可得 .

$$\mathbb{E}\left[\mathcal{B}_{12}^n\right] \le C\tau^{\frac{p}{2}}.$$

结合（5.11）、（5.6）和（54），证明至此完成。□

5.2 ϕ 与 Φ之间的误差估计

在本小节中，我们估计温和解 $\tilde{\varepsilon}(t) := \phi(t) - \Phi(t)$ 与辅助过程ϕ 之间的误差 Φ。根据（5.1）和（1.1），可得

$$\begin{aligned} d\tilde{\varepsilon}(t) = &-A^2\tilde{\varepsilon}(t)dt + A\left(F'(\phi(t)) - F'(X(\kappa_N(t)))\right)dt \\ &+ \left(g(\phi(t)) - g(X(\kappa_N(t)))\right)dW(t) \end{aligned} \tag{5.12}$$

对于任意 $t \in (0,T]$，初值为 $\tilde{\varepsilon}(0) = 0$。为处理非全局 Lipschitz 非线性 F'，我们将其分解为

$$F'(\phi(t)) - F'(X(\kappa_N(t)) = [F'(\phi(t)) - F'(\Phi(t))] + [F'(\Phi(t)) - F'(X(\kappa_N(t)))],$$

其中，右端第一项可利用 $-F'$ 的单侧利普希茨连续性进行处理。至于第二项，利用 2.5 中 F' 的局部利普希茨连续性性质，可得

$$\begin{aligned} &\|F'(\Phi(t)) - F'(X(\kappa_N(t)))\| \le C(1 + \|\Phi(t)\|_{L^\infty}^2 + \|X(\kappa_N(t))\|_{L^\infty}^2)\|\Phi(t) - X(\kappa_N(t))\| \\ &\le C(1 + \|\Phi(t)\|_{L^\infty}^2 + \|X(\kappa_N(t))\|_{L^\infty}^2)(\|\Phi(t) - \Phi(\kappa_N(t))\| + \|\Phi(\kappa_N(t)) - X(\kappa_N(t))\|). \end{aligned} \tag{5.13}$$

接下来，我们将使用引理 Φ 中给出的辅助过程的空间正则性和时间霍尔德正则性估计 13 和 14。

引理13 设假设 *1*和 *2*成立，且 $\phi^0 \in \dot{H}^\beta(\mathcal{O})$ 对于某个 $\beta \in (\frac{d}{2}, 2) \cap [1,2)$。那么，对于任意 $p \ge 1$，存在一个常数 $C := C(p) > 0$ 使得

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \|\Phi(t)\|_{L^\infty}^p\right] \le C. \tag{5.14}$$

证明 鉴于(5.1)，与引理 7的证明类似，应用引理 6 并结合~ $F(s) =$和 $G(s) = g(X(\kappa_N(s)))$ 可得，对于任意 $\beta \in [1,2)$，

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \|(-A)^\beta \Phi(t)\|^p\right] \le C. \tag{5.15}$$

最后，结果(5.14)由Sobolev嵌入 $H^\beta(\mathcal{O}) \to L^\infty(\mathcal{O})$ 对任意 $\beta > d/2$成立。□

引理14 设假设 *1* 和 *2* 成立，且 $\phi^0 \in \dot{H}^2(\mathcal{O})$。则对于任意 $p \ge 1$，存在一个常数 $C := C(p) > 0$ 使得对于任意 $0 \le s < t \le T$，

$$\mathbb{E}\left[\|\Phi(t) - \Phi(s)\|^p\right] \le C(t-s)^{\frac{p}{2}}.$$

由于引理 14 的证明本质上与引理 8中的论证相同，故为简洁起见略去。现在基于 (5.12) 以及 $-F'$的单侧利普希茨连续性，我们可以为 $\tilde{\varepsilon}(t)$ 在 $H^{-1}(\mathcal{O})$中建立强误差界。

引理 15 设假设 1 和 2 成立，且 $\phi^0 \in \dot{H}^2(\mathcal{O})$。那么对于任意 $p \geq 2$，存在常数 $C := C(p) > 0$ 使得对于任意 $t \in [0,T]$,

$$\mathbb{E}\left[\|(-A)^{-\frac{1}{2}}\tilde{\varepsilon}(t)\|^p\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^t \|(-A)^{-\frac{1}{2}}\tilde{\varepsilon}(s)\|^{p-2}\|(-A)^{\frac{1}{2}}\tilde{\varepsilon}(s)\|^2 ds\right] \leq C\tau^{\frac{p}{2}}.$$

证明 回顾（5.12），然后对 $\|(-A)^{-\frac{1}{2}}\tilde{\varepsilon}(t)\|^p$应用伊藤公式，可得 -

$$\begin{aligned}
d\|(-A)^{-\frac{1}{2}}\tilde{\varepsilon}(t)\|^p &= -p\|(-A)^{-\frac{1}{2}}\tilde{\varepsilon}(t)\|^{p-2}\|(-A)^{\frac{1}{2}}\tilde{\varepsilon}(t)\|^2 dt \\
&\quad + p\|(-A)^{-\frac{1}{2}}\tilde{\varepsilon}(t)\|^{p-2}\left\langle AF'(\phi(t)) - AF'(X(\kappa_N(t))), (-A)^{-1}\tilde{\varepsilon}(t)\right\rangle dt \\
&\quad + p\|(-A)^{-\frac{1}{2}}\tilde{\varepsilon}(t)\|^{p-2}\left\langle (g(\phi(t)) - g(X(\kappa_N(t))))\, dW(t), (-A)^{-1}\tilde{\varepsilon}(t)\right\rangle \\
&\quad + \frac{1}{2}p\|(-A)^{-\frac{1}{2}}\tilde{\varepsilon}(t)\|^{p-2}\|(-A)^{-\frac{1}{2}}(g(\phi(t)) - g(X(\kappa_N(t))))\|_{\mathcal{L}_2^0}^2 dt \\
&\quad + \frac{1}{2}p(p-2)\|(-A)^{-\frac{1}{2}}\tilde{\varepsilon}(t)\|^{p-4} \\
&\qquad \times \sum_{k=1}^{\infty}\left\langle (-A)^{-\frac{1}{2}}\tilde{\varepsilon}(t), (-A)^{-\frac{1}{2}}\left(g(\phi(t)) - g(X(\kappa_N(t)))\right)Q^{\frac{1}{2}}e_k\right\rangle^2 dt. \\
&=: \mathcal{J}_1 dt + \mathcal{J}_2 dt + \mathcal{J}_3 + \mathcal{J}_4 dt + \mathcal{J}_5 dt.
\end{aligned} \tag{5.16}$$

利用 2.4）中 $-F'$的单侧利普希茨连续性、柯西–施瓦茨不等式以及（5.13）中的第一个不等式，可得

$$\begin{aligned}
&-\left\langle F'(\phi(t)) - F'(\Phi(t)) + F'(\Phi(t)) - F'(X(\kappa_N(t))), \tilde{\varepsilon}(t)\right\rangle \\
&\leq L_f\|\tilde{\varepsilon}(t)\|^2 + \|\tilde{\varepsilon}(t)\|\,\|F'(\Phi(t)) - F'(X(\kappa_N(t)))\| \\
&\leq L_f'\langle(-A)^{\frac{1}{2}}\tilde{\varepsilon}(t), (-A)^{-\frac{1}{2}}\tilde{\varepsilon}(t)\rangle + C|\mathbb{I}(t)|^2,
\end{aligned} \tag{5.17}$$

其中 $L_f' := L_f + \frac{1}{2}$- 且

$$\mathbb{I}(t) := (1 + \|\Phi(t)\|_{L^\infty}^2 + \|X(\kappa_N(t))\|_{L^\infty}^2)\|\Phi(t) - X(\kappa_N(t))\|, \quad t \in [0,T]. \tag{5.18}$$

由（5.17）并利用杨氏不等式，对任意 $\upsilon > 0$，有

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_2 &\leq p\|(-A)^{-\frac{1}{2}}\tilde{\varepsilon}(t)\|^{p-2}(L_f'\langle(-A)^{\frac{1}{2}}\tilde{\varepsilon}(t), (-A)^{-\frac{1}{2}}\tilde{\varepsilon}(t)\rangle + C|\mathbb{I}(t)|^2) \\
&\leq pL_f'\left(\frac{\upsilon^2}{2}\|(-A)^{-\frac{1}{2}}\tilde{\varepsilon}(t)\|^{p-2}\|(-A)^{\frac{1}{2}}\tilde{\varepsilon}(t)\|^2 + \frac{1}{2\upsilon^2}\|(-A)^{-\frac{1}{2}}\tilde{\varepsilon}(t)\|^p\right) \\
&\quad + C\|(-A)^{-\frac{1}{2}}\tilde{\varepsilon}(t)\|^p + C|\mathbb{I}(t)|^p.
\end{aligned} \tag{5.19}$$

为估计（ $\mathcal{J}_4$ 和 $\mathcal{J}_5$ ）右端的项，我们记5.16为

$$\mathbb{K}_p(t) := \|(-A)^{-\frac{1}{2}}\tilde{\varepsilon}(t)\|^{p-2}\|(-A)^{-\frac{1}{2}}(g(\phi(t)) - g(X(\kappa_N(t))))\|_{\mathcal{L}_2^0}^2 \tag{5.20}$$

对于 $t \in [0,T]$，使得

$$\mathcal{J}_4 = \frac{1}{2}p\mathbb{K}_p(t) \qquad \text{and} \qquad \mathcal{J}_5 \leq \frac{1}{2}p(p-2)\mathbb{K}_p(t). \tag{5.21}$$

将估计式（5.19）和（5.21）代入（5.16）可得

$$d\|(-A)^{-\frac{1}{2}}\tilde{\varepsilon}(t)\|^p + p\|(-A)^{-\frac{1}{2}}\tilde{\varepsilon}(t)\|^{p-2}\|(-A)^{\frac{1}{2}}\tilde{\varepsilon}(t)\|^2 dt \tag{5.22}$$

$$\leq pL_f'\left(\frac{\upsilon^2}{2}\|(-A)^{-\frac{1}{2}}\tilde{\varepsilon}(t)\|^{p-2}\|(-A)^{\frac{1}{2}}\tilde{\varepsilon}(t)\|^2dt+\frac{1}{2\upsilon^2}\|(-A)^{-\frac{1}{2}}\tilde{\varepsilon}(t)\|^pdt\right)$$
$$+C\|(-A)^{-\frac{1}{2}}\tilde{\varepsilon}(t)\|^pdt+C|\mathbb{I}(t)|^pdt+\frac{1}{2}p(p-1)\mathbb{K}_p(t)dt$$
$$+p\|(-A)^{-\frac{1}{2}}\tilde{\varepsilon}(t)\|^{p-2}\left\langle\left(g(\phi(t))-g(X(\kappa_N(t)))\right)dW(t),(-A)^{-1}\tilde{\varepsilon}(t)\right\rangle.$$

在此证明中，我们令 $\upsilon>0$，其中 $L_f'\upsilon^2=1$。对时间积分（5.22），然后对等式两边取期望，我们推得对于任意 $t\in[0,T]$,

$$\mathbb{E}\left[\|(-A)^{-\frac{1}{2}}\tilde{\varepsilon}(t)\|^p\right]+\frac{p}{2}\mathbb{E}\int_0^t\|(-A)^{-\frac{1}{2}}\tilde{\varepsilon}(s)\|^{p-2}\|(-A)^{\frac{1}{2}}\tilde{\varepsilon}(s)\|^2ds \tag{5.23}$$
$$\leq C\mathbb{E}\int_0^t\|(-A)^{-\frac{1}{2}}\tilde{\varepsilon}(s)\|^pds+C\int_0^t\mathbb{E}[|\mathbb{I}(s)|^p]ds+\frac{1}{2}p(p-1)\int_0^t\mathbb{E}[\mathbb{K}_p(s)]ds,$$

因为随机积分的期望为零。接下来，我们分别估计 $\mathbb{I}(\cdot)$ 和 $\mathbb{K}_p(\cdot)$。

对于 $\mathbb{I}(\cdot)$ 中定义于（5.18）的项，根据 Hölder不等式，对于任意 $p\geq1$ 和$s\in[0,T]$，有

$$\mathbb{E}[|\mathbb{I}(s)|^p]\leq C\left(\mathbb{E}\left[1+\|\Phi(s)\|_{L^\infty}^{4p}+\|X(\kappa_N(s))\|_{L^\infty}^{4p}\right]\right)^{\frac{1}{2}}\left(\mathbb{E}\left[\|\Phi(s)-X(\kappa_N(s))\|^{2p}\right]\right)^{\frac{1}{2}}.$$

引理14 和命题12 保证对于任意 $q\geq1$ 和 $s\in[0,T]$，有

$$\mathbb{E}\left[\|\Phi(s)-X(\kappa_N(s))\|^q\right]\leq C\mathbb{E}\left[\|\Phi(s)-\Phi(\kappa_N(s))\|^q\right] \tag{5.24}$$
$$+C\mathbb{E}\left[\|\Phi(\kappa_N(s))-X(\kappa_N(s))\|^q\right]\leq C(q)\tau^{\frac{q}{2}}.$$

进一步考虑（4 26）和引理13，可得对于任意 $p\geq1$，有

$$\mathbb{E}[|\mathbb{I}(s)|^p]\leq C(p)\tau^{\frac{p}{2}},\qquad s\in[0,T]. \tag{5.25}$$

为估计 $\mathbb{K}_p(\cdot)$ 中定义于（5.20）的项，注意到当 $p=2$时，根据（2.7）和杨氏不等式，对于任意 $\upsilon_1>0$，有

$$\mathbb{K}_2(s)=\|(-A)^{-\frac{1}{2}}(g(\phi(s))-g(X(\kappa_N(s))))\|_{\mathcal{L}_2^0}^2\leq C\left\|g(\phi(s))-g(X(\kappa_N(s)))\right\|_{\mathcal{L}_2^0}^2$$
$$\leq C\|\Phi(s)-X(\kappa_N(s))\|^2\leq C\left\|\tilde{\varepsilon}(s)\right\|^2+C\|\Phi(s)-X(\kappa_N(s))\|^2$$
$$\leq\frac{1}{2}\upsilon_1^2\|(-A)^{\frac{1}{2}}\tilde{\varepsilon}(s)\|^2+C(\upsilon_1)\|(-A)^{-\frac{1}{2}}\tilde{\varepsilon}(s)\|^2+C\|\Phi(s)-X(\kappa_N(s))\|^2. \tag{5.26}$$

现在在（ $\upsilon_1=1/\sqrt{p-1}$中取（5.26），然后利用杨氏不等式，可得对于任意 $p\geq2$，有

$$\mathbb{K}_p(s)=\|(-A)^{-\frac{1}{2}}\tilde{\varepsilon}(t)\|^{p-2}\mathbb{K}_2(s)\leq C(\upsilon_1)\|(-A)^{-\frac{1}{2}}\tilde{\varepsilon}(s)\|^p$$
$$+\frac{1}{2(p-1)}\|(-A)^{-\frac{1}{2}}\tilde{\varepsilon}(s)\|^{p-2}\|(-A)^{\frac{1}{2}}\tilde{\varepsilon}(s)\|^2+\|\Phi(s)-X(\kappa_N(s))\|^p.$$

对上述不等式两边取期望，再对时间积分，由（5.24）可得

$$\int_0^t\mathbb{E}[\mathbb{K}_p(s)]ds\leq C\int_0^t\mathbb{E}\left[\|(-A)^{-\frac{1}{2}}\tilde{\varepsilon}(s)\|^p\right]ds \tag{5.27}$$
$$+\frac{1}{2(p-1)}\int_0^t\mathbb{E}\left[\|(-A)^{-\frac{1}{2}}\tilde{\varepsilon}(s)\|^{p-2}\|(-A)^{\frac{1}{2}}\tilde{\varepsilon}(s)\|^2\right]ds+C\tau^{\frac{p}{2}}.$$

将估计式（5.25）和（5.27）代入（5.23），即可应用Gronwall不等式完成证明。□

至此，我们可以估计 $\phi(t)$与 $\Phi(t)$在 $L^2(\Omega;H)$中的误差。

命题 16 设假设 *1* 和 *2* 成立，且 $\phi^0 \in \dot{H}^2(\mathcal{O})$。则存在一个常数 $C>0$，使得对任意 $t\in[0,T]$,

$$\mathbb{E}\left[\|\phi(t)-\Phi(t)\|^2\right] \le C\tau. \tag{5.28}$$

证明 我们将证明分为两步。第一步，我们证明存在常数 $C>0$，使得

$$\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t \|(-A)^{\frac{1}{2}}\tilde{\varepsilon}(s)\|^2 ds\right|^2\right] \le C\tau^2, \quad t\in[0,T]. \tag{5.29}$$

然后基于对 $L^4(\Omega;\, L^2(0,T;\, H^1(\mathcal{O})))$范数意义下 $\tilde{\varepsilon}=\phi-\Phi$在（5.29）中的估计，我们进一步证明（5.28）中关于 $L^\infty(0,T;\, L^2(\Omega;\, H))$范数下 $\tilde{\varepsilon}$的所需估计。

第一步。（5.22）在 $p=2$ 下的积分形式为

$$\begin{aligned}
&\|(-A)^{-\frac{1}{2}}\tilde{\varepsilon}(t)\|^2 + \int_0^t \|(-A)^{\frac{1}{2}}\tilde{\varepsilon}(s)\|^2 ds \\
&\le C\int_0^t \|(-A)^{-\frac{1}{2}}\tilde{\varepsilon}(s)\|^2 ds + C\int_0^t |\mathbb{I}(s)|^2 ds + \int_0^t \mathbb{K}_2(s) ds \\
&\quad + 2\int_0^t \left\langle \left(g(\phi(s)) - g(X(\kappa_N(s)))\right) dW(s), (-A)^{-1}\tilde{\varepsilon}(s)\right\rangle.
\end{aligned}$$

将上述不等式两边平方，由Hölder不等式可得，对任意$t\in[0,T]$,

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^t \|(-A)^{\frac{1}{2}}\tilde{\varepsilon}(s)\|^2 ds\right|^2 \le C\int_0^t \|(-A)^{-\frac{1}{2}}\tilde{\varepsilon}(s)\|^4 ds + C\int_0^t |\mathbb{I}(t)|^4 ds \\
&\quad + 4\left|\int_0^t \mathbb{K}_2(s) ds\right|^2 + C\left|\int_0^t \left\langle \left(g(\phi(s)) - g(X(\kappa_N(s)))\right) dW(s), (-A)^{-1}\tilde{\varepsilon}(s)\right\rangle\right|^2.
\end{aligned} \tag{5.30}$$

由BDG不等式、（5.27）以及引理15（取 $p=4$）可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t \left\langle \left(g(\phi(s)) - g(X(\kappa_N(s)))\right) dW(s), (-A)^{-1}\tilde{\varepsilon}(s)\right\rangle\right|^2\right] \\
&\le C\mathbb{E}\left[\int_0^t \|(-A)^{-\frac{1}{2}}\left(g(\phi(s)) - g(X(\kappa_N(s)))\right)\|_{\mathcal{L}_2^0}^2 \|(-A)^{-\frac{1}{2}}\tilde{\varepsilon}(s)\|^2 ds\right] \\
&= C\mathbb{E}\left[\int_0^t \mathbb{K}_4(s) ds\right] \le C\tau^2.
\end{aligned} \tag{5.31}$$

根据(5.26) 中的 $\upsilon_1 = 1/2$、柯西–施瓦茨不等式以及 (5.24)，可得

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t \mathbb{K}_2(s) ds\right|^2\right] &\le 2\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t \frac{1}{8}\|(-A)^{\frac{1}{2}}\tilde{\varepsilon}(t)\|^2 + C\|(-A)^{-\frac{1}{2}}\tilde{\varepsilon}(t)\|^2 ds\right|^2\right] \\
&\quad + C\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t \|\Phi(s) - X(\kappa_N(s))\|^2 ds\right|^2\right] \\
&\le \frac{1}{16}\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t \|(-A)^{\frac{1}{2}}\tilde{\varepsilon}(t)\|^2 ds\right|^2\right]
\end{aligned} \tag{5.32}$$

$$+C\mathbb{E}\left[\int_0^t \|(-A)^{-\frac{1}{2}}\tilde{\varepsilon}(t)\|^4 ds\right]+C\tau^2.$$

对 (5.30) 两边取期望，然后利用 (5.25) 中的 $p=4$、(5.31) 和 (5.32)，可知对于任意 $t\in[0,T]$,

$$\frac{3}{4}\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t \|(-A)^{\frac{1}{2}}\tilde{\varepsilon}(s)\|^2 ds\right|^2\right]\leq C\mathbb{E}\int_0^t \|(-A)^{-\frac{1}{2}}\tilde{\varepsilon}(s)\|^4 ds+C\tau^2,$$

结合引理 15，可得（5.29）。

步骤 *2*。由（5.12）和柯西–施瓦茨不等式可知

$$\begin{aligned}\|\tilde{\varepsilon}(t)\|^2_{L^2(\Omega;H)}&\leq 3\left\|\int_0^t S(t-s)A\left(F'(\phi(s))-F'(\Phi(s))\right)ds\right\|^2_{L^2(\Omega;H)}\\&\quad+3\left\|\int_0^t S(t-s)A\left(F'(\Phi(s))-F'(X(\kappa_N(s)))\right)ds\right\|^2_{L^2(\Omega;H)}\\&\quad+3\left\|\int_0^t S(t-s)\left(g(\phi(s))-g(X(\kappa_N(s))\right)dW(s)\right\|^2_{L^2(\Omega;H)}\\&=:\mathcal{Q}_{1,t}+\mathcal{Q}_{2,t}+\mathcal{Q}_{3,t}.\end{aligned}\tag{5.33}$$

根据假设 1，对于任意 $\beta_1\in(\frac{3}{2},2)$，存在一个常数 $C>0$，使得对于任意 $v,w\in\dot{H}^1(\mathcal{O})$，

$$\begin{aligned}&\|(-A)^{\frac{1}{2}}(F'(v)-F'(w))\|^2=\|\nabla(F'(v)-F'(w))\|^2\\&=\int_{\mathcal{O}}|f''(v(x))\nabla v(x)-f''(w(x))\nabla w(x)|^2dx\\&\leq 2\int_{\mathcal{O}}|f''(v(x))-f''(w(x))|^2|\nabla v(x)|^2dx+2\int_{\mathcal{O}}|f''(w(x))|^2|\nabla(v-w)(x)|^2dx\\&\leq C(1+\|v\|^2_{L^\infty}+\|w\|^2_{L^\infty})\|v-w\|^2_{L^6}\|\nabla v\|^2_{L^3}+C(1+\|v(x)\|^4_{L^\infty})\|\nabla(v-w)\|^2\\&\leq C(1+\|v\|^4_{H^{\beta_1}}+\|w\|^4_{H^{\beta_1}})\|(-A)^{\frac{1}{2}}(v-w)\|^2,\end{aligned}$$

其中最后一步是由 Sobolev嵌入 $H^1(\mathcal{O})\to L^6(\mathcal{O})$、$H^{\beta_1-1}(\mathcal{O})\to H^{1/2}(\mathcal{O})\to L^3(\mathcal{O})$ 以及 $H^{\beta_1}(\mathcal{O})\to L^\infty(\mathcal{O})$（对任意 $\beta_1\in(\frac{3}{2},2)$）得到的。因此，我们可以应用 (2.2)、Hölder不等式、(5.15)、命题 1 和 (5.29)，得到

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_{1,t}&\leq C\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t\left\|S(t-s)(-A)^{\frac{1}{2}}(-A)^{\frac{1}{2}}\left(F'(\phi(s))-F'(\Phi(s))\right)\right\|ds\right)^2\right]\\&\leq C\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t(t-s)^{-\frac{1}{4}}\|(-A)^{\frac{1}{2}}(F'(\phi(s))-F'(\Phi(s)))\|ds\right)^2\right]\\&\leq C\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t(t-s)^{-\frac{1}{4}}\|(-A)^{\frac{1}{2}}\tilde{\varepsilon}(s)\|\left(1+\|\phi(s)\|^2_{H^{\beta_1}}+\|\Phi(s)\|^2_{H^{\beta_1}}\right)ds\right)^2\right]\\&\leq C\left(\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t\|(-A)^{\frac{1}{2}}\tilde{\varepsilon}(s)\|^2ds\right)^2\right]\right)^{\frac{1}{2}}\\&\quad\times\left(\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t(t-s)^{-\frac{1}{2}}\left(1+\|\phi(s)\|^4_{H^{\beta_1}}+\|\Phi(s)\|^4_{H^{\beta_1}}\right)ds\right)^2\right]\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

$\leq C\tau.$

(5.13) 的第一个不等式以及闵可夫斯基不等式给出

$$\mathcal{Q}_{2,t} \leq C\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \left\|F'(\Phi(s)) - F'(X(\kappa_N(s)))\right\| ds\right)^2\right] \tag{5.34}$$
$$\leq C\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \mathbb{I}(s) ds\right)^2\right] \leq C\left(\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|\mathbb{I}(s)\|_{L^2(\Omega)} ds\right)^2,$$

其中 $\mathbb{I}(\cdot)$ 在 (5.18) 中定义。此外，将带有 $p=2$ 的 (5.25) 代入 (5.34)，得到 $\mathcal{Q}_{2,t} \leq C\tau$ 对任意 $t \in [0,T]$ 均成立。应用 BDG不等式、$S(\cdot)$的压缩性、(2.7)、(5.24) 和 (5.29)，可得

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_{3,t} &\leq 2\mathbb{E}\left[\int_0^t \|S(t-s)\left(g(\phi(s)) - g(X(\kappa_N(s)))\right\|_{\mathcal{L}_2^0}^2 ds\right] \\
&\leq C\int_0^t \mathbb{E}\left[\|\tilde{\varepsilon}(s)\|^2\right] + \mathbb{E}\left[\|\Phi(s) - X(\kappa_N(s))\|^2\right] ds \\
&\leq C\int_0^t \mathbb{E}\left[\|(-A)^{\frac{1}{2}}\tilde{\varepsilon}(s)\|^2\right] ds + C\int_0^t \mathbb{E}\left[\|(-A)^{-\frac{1}{2}}\tilde{\varepsilon}(s)\|^2\right] ds + C\tau \leq C\tau.
\end{aligned}$$

最后，将 $\mathcal{Q}_{i,t}$、$i=1,2,3$的估计代入 (5.33)，即可得到所需结果。 □

最后，我们现在可以完成定理 2 的证明。

定理 2 的证明。结合命题 12 和 16，根据 (5.2) 即可完成证明。 □

6 定理 3 的证明

本节旨在证明关于修正的标量辅助变量能量（2.11）的平均演化律的定理 3 。

定理 3 的证明。 回顾一下，根据（4.4），对于任意 $n \in \{0,1,\cdots,N-1\}$,

$$\begin{aligned}
E_{\text{mod}}^{n+1} - E_{\text{mod}}^n &= \frac{1}{2}\left[\|\nabla X^{n+1}\|^2 - \|\nabla X^n\|^2\right] + |r^{n+1}|^2 - |r^n|^2 \\
&= -\frac{1}{2}\|(I - S^2(\tau))^{\frac{1}{2}}(-A)^{-\frac{1}{2}}\tilde{\mu}^n\|^2 + \frac{1}{2}\|(-A)^{\frac{1}{2}}\left(g(X^n)\delta W^n\right)\|^2 \\
&\quad - |r^{n+1} - r^n|^2 + \langle -AX^n + \tilde{f}^n, g(X^n)\delta W^n\rangle.
\end{aligned} \tag{6.1}$$

根据（3.8）和（3.9），可得

$$\begin{aligned}
\langle -AX^n + \tilde{f}^n, g(X^n)\delta W^n\rangle &= \left\langle -AX^n + \frac{r^n}{\sqrt{E_{\text{p}}(X^n)}}F'(X^n), g(X^n)\delta W^n\right\rangle \\
&+ \frac{1}{2}\langle F''(X^n)g(X^n)\delta W^n, g(X^n)\delta W^n\rangle \\
&+ \frac{r^{n+1} - r^n}{\sqrt{E_{\text{p}}(X^n)}}\langle F'(X^n), g(X^n)\delta W^n\rangle - \frac{r^{n+1}}{4E_{\text{p}}(X^n)^{3/2}}\langle F'(X^n), g(X^n)\delta W^n\rangle^2 \\
&+ \frac{1}{2}\left(\frac{r^{n+1}}{\sqrt{E_{\text{p}}(X^n)}} - 1\right)\langle F''(X^n)g(X^n)\delta W^n, g(X^n)\delta W^n\rangle.
\end{aligned} \tag{6.2}$$

将（6.2）代入（6.1）可得

$$
\begin{aligned}
E_{\mathrm{mod}}^{n+1}-E_{\mathrm{mod}}^{n}=&-\frac{1}{2}\|(I-S^{2}(\tau))^{\frac{1}{2}}(-A)^{-\frac{1}{2}}\tilde{\mu}^{n}\|^{2}\\
&+\Big\langle -AX^{n}+\frac{r^{n}}{\sqrt{E_{\mathrm{p}}(X^{n})}}F'(X^{n}),g(X^{n})\delta W^{n}\Big\rangle\\
&+\frac{1}{2}\left\langle(-A+F''(X^{n}))g(X^{n})\delta W^{n},g(X^{n})\delta W^{n}\right\rangle+\mathcal{J}^{n},
\end{aligned}
\tag{6.3}
$$

其中余项

$$
\begin{aligned}
\mathcal{J}^{n}=&-|r^{n+1}-r^{n}|^{2}+\frac{r^{n+1}-r^{n}}{\sqrt{E_{\mathrm{p}}(X^{n})}}\left\langle F'(X^{n}),g(X^{n})\delta W^{n}\right\rangle\\
&-\frac{r^{n+1}}{4E_{\mathrm{p}}(X^{n})^{3/2}}\left\langle F'(X^{n}),g(X^{n})\delta W^{n}\right\rangle^{2},\\
&+\frac{1}{2}\left(\frac{r^{n+1}}{\sqrt{E_{\mathrm{p}}(X^{n})}}-1\right)\left\langle F''(X^{n})g(X^{n})\delta W^{n},g(X^{n})\delta W^{n}\right\rangle.
\end{aligned}
\tag{6.4}
$$

对 $n=0$ 至 $n=m-1$ 将（6.3）两边求和，然后对所得方程两边取期望，得到所需的方程（3），其中 $\mathcal{R}_{m}^{\tau}=\sum_{n=0}^{m-1}\mathbb{E}[\mathcal{J}^{n}]$。

还需证明$\lim_{\tau\to\infty}\mathcal{R}_{m}^{\tau}=0$，这需要仔细估计。乍看之下，（6.4）右端的前三项似乎只有强收敛阶1，因此在对 $\tau\to0$ 求和 n后不会趋于零。因此，有必要对余项 $\mathcal{J}^{n}$ 进行更精细的分解。事实上，（6.4）右端的前三项包含相互抵消的贡献。为说明这一点，我们注意到 $-|r^{n+1}-r^{n}|^{2}=J_{1}^{n}+J_{2}^{n}+J_{3}^{n}$, 其中

$$
\begin{aligned}
J_{1}^{n}&:=-\frac{1}{4E_{\mathrm{p}}(X^{n})}\left|\left\langle F'(X^{n}),g(X^{n})\delta W^{n}\right\rangle\right|^{2},\\
J_{2}^{n}&:=\frac{1}{4E_{\mathrm{p}}(X^{n})}\left(\left|\left\langle F'(X^{n}),g(X^{n})\delta W^{n}\right\rangle\right|^{2}-\left|\left\langle F'(X^{n}),X^{n+1}-X^{n}\right\rangle\right|^{2}\right),\\
J_{3}^{n}&:=-|r^{n+1}-r^{n}|^{2}+\frac{1}{4E_{\mathrm{p}}(X^{n})}\left|\left\langle F'(X^{n}),X^{n+1}-X^{n}\right\rangle\right|^{2}.
\end{aligned}
\tag{6.5}
$$

此外，利用（1.6）可得

$$
\begin{aligned}
\frac{r^{n+1}-r^{n}}{\sqrt{E_{\mathrm{p}}(X^{n})}}\left\langle F'(X^{n}),g(X^{n})\,\delta W^{n}\right\rangle&=\frac{1}{2E_{\mathrm{p}}(X^{n})}\left\langle F'(X^{n}),g(X^{n})\,\delta W^{n}\right\rangle^{2}\\
&+\frac{1}{2E_{\mathrm{p}}(X^{n})}\left\langle F'(X^{n}),g(X^{n})\,\delta W^{n}\right\rangle\left\langle F'(X^{n}),X^{n+1}-X^{n}-g(X^{n})\delta W^{n}\right\rangle\\
&-\frac{1}{8E_{\mathrm{p}}(X^{n})^{2}}\left\langle F'(X^{n}),g(X^{n})\,\delta W^{n}\right\rangle^{2}\left\langle F'(X^{n}),X^{n+1}-X^{n}\right\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{4E_{\mathrm{p}}(X^n)}\left\langle F'(X^n),g(X^n)\,\delta W^n\right\rangle\left\langle F''(X^n)(X^{n+1}-X^n),g(X^n)\delta W^n\right\rangle\\
&=:J_4^n+J_5^n+J_6^n+J_7^n,
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
&-\frac{r^{n+1}}{4E_{\mathrm{p}}(X^n)^{3/2}}\left\langle F'(X^n),g(X^n)\delta W^n\right\rangle^2=-\frac{1}{4E_{\mathrm{p}}(X^n)}\left\langle F'(X^n),g(X^n)\delta W^n\right\rangle^2\\
&-\frac{1}{4}\left(\frac{r^{n+1}}{\sqrt{E_{\mathrm{p}}(X^n)}}-1\right)\frac{1}{E_{\mathrm{p}}(X^n)}\left\langle F'(X^n),g(X^n)\delta W^n\right\rangle^2=:J_8^n+J_9^n.
\end{aligned}
$$

由于 $J_1^n+J_4^n+J_8^n=0$，可得

$$
\mathcal{J}^n=\sum_{i\in\mathcal{I}}J_i^n \tag{6.6}
$$

其中 $\mathcal{I}:=\{2,3,5,6,7,9,10\}$，并且

$$
J_{10}^n:=\frac{1}{2}\left(\frac{r^{n+1}}{\sqrt{E_{\mathrm{p}}(X^n)}}-1\right)\left\langle F''(X^n)g(X^n)\delta W^n,g(X^n)\delta W^n\right\rangle
$$

是式（6.4）右端的最后一项。

利用 Hölder不等式、式（4.22）、（A.7）以及引理 8，可推得

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[|J_2^n|]&\le C\left(\|X^{n+1}-X^n\|_{L^4(\Omega;H)}+\|g(X^n)\delta W^n\|_{L^4(\Omega;H)}\right)\\
&\quad\times\|X^{n+1}-X^n-g(X^n)\delta W^n\|_{L^2(\Omega;H)}\\
&\le C\tau^{\frac{1}{2}}\|X^{n+1}-X^n-g(X^n)\delta W^n\|_{L^2(\Omega;H)}
\end{aligned} \tag{6.7}
$$

对任意 $n\in\{0,1,\cdots,N-1\}$ 均成立。类似地，我们还有

$$
\mathbb{E}[|J_5^n|]\le C\tau^{\frac{1}{2}}\|X^{n+1}-X^n-g(X^n)\delta W^n\|_{L^2(\Omega;H)}. \tag{6.8}
$$

参见式（1.4），可知

$$
\begin{aligned}
X^{n+1}-X^n-g(X^n)\delta W^n&=(S(\tau)-I)X^n+(I-S(\tau))\,A^{-1}\tilde{f}^n\\
&\quad+(S(\tau)-I)g(X^n)\delta W^n.
\end{aligned}
$$

回顾式（4.33），对于任意 $\alpha\in(0,\frac{1}{2}-)$，

$$
\|(S(\tau)-I)X^n\|_{L^2(\Omega;H)}\le C(\alpha)(1+t_n^{-\frac{1}{2}\alpha})\tau^{\frac{1}{2}(1+\alpha)},\qquad n=1,2,\cdots,N-1 \tag{6.9}
$$

对于 $n=0$，由式（2.2）和 $\phi^0 \in \dot{H}^2(\mathcal{O})$ 可得 $\|(S(\tau)-I)X^0\|_{L^2(\Omega;H)}$。由于式（2.2）和（4.32），

$$\|(I-S(\tau))A^{-1}\tilde{f}^n\|_{L^2(\Omega;H)} = \|(I-S(\tau))(-A)^{-\frac{3}{2}}(-A)^{\frac{1}{2}}\tilde{f}^n\|_{L^2(\Omega;H)} \le C\tau^{\frac{3}{4}}. \quad (6.10)$$

由 BDG不等式和（2.8），结合（2.2）及推论 5，可得

$$\begin{aligned}\|(S(\tau)-I)g(X^n)\delta W^n\|_{L^2(\Omega;H)} &= \|(S(\tau)-I)(-A)^{-\frac{1}{2}}(-A)^{\frac{1}{2}}g(X^n)\delta W^n\|_{L^2(\Omega;H)} \\ &\le C\tau^{\frac{3}{4}}\|(-A)^{\frac{1}{2}}g(X^n)\|_{L^2(\Omega;\mathcal{L}_2^0)} \le C\tau^{\frac{3}{4}}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

结合（6.9）、（6.10）和（6.11），可知对任意 $\alpha \in (0,\frac{1}{2})$，

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{m-1}\|X^{n+1}-X^n-g(X^n)\delta W^n\|_{L^2(\Omega;H)} \\ &\le C\tau^{-\frac{1}{4}} + C\tau^{\frac{1}{2}} + C(\alpha)\sum_{n=1}^{m-1}(1+t_n^{-\frac{1}{2}\alpha})\tau^{\frac{1}{2}(1+\alpha)} \le C(\alpha)\tau^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\alpha}.\end{aligned}$$

因此，由（6.7）和（6.8）可知，对任意 $\alpha \in (0,\frac{1}{2})$，

$$\sum_{n=0}^{m-1}\mathbb{E}\left[|J_2^n|+|J_5^n|\right] \le C\tau^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{m-1}\|X^{n+1}-X^n-g(X^n)\delta W^n\|_{L^2(\Omega;H)} \le C(\alpha)\tau^{\frac{1}{2}\alpha}.$$

对于其他项，我们声称，对任意 $i \in \{3,6,7,9,10\}$（其证明见附录 A.5），

$$\mathbb{E}[|J_i^n|] \le C\tau^{\frac{3}{2}}, \qquad n \in \{0,1,\cdots,N-1\}. \quad (6.12)$$

最后，由（6.6）可得 $\alpha \in (0,\frac{1}{2})$，

$$|\mathcal{R}_m^\tau| = |\sum_{n=0}^{m-1}\mathbb{E}[\mathcal{J}^n]| \le \sum_{i\in\mathcal{I}}\sum_{n=0}^{m-1}\mathbb{E}\left[|J_i^n|\right] \le C(\alpha)\tau^{\frac{1}{2}\alpha}.$$

证明完毕。 □

7 数值实验

在本节中，我们给出一系列数值实验，以说明指数欧拉 SSAV 格式（1.4）的性能。在实现中，我们取$\mathcal{O} = (0,1)^2$ 为单位正方形，并逼近驱动过程 W，采用其有限秩 Karhunen–Loève截断 W^J，即

$$W^J(t,x) = \sum_{j_1=1}^{J}\sum_{j_2=1}^{J}\sqrt{q_{j_1,j_2}}\,e_{j_1,j_2}(x)\,\beta_{j_1,j_2}(t), \qquad x=(x_1,x_2)\in\mathcal{O}$$

其中 $J = 4$。这里，$\{\beta_{j_1,j_2}(t)\}$ 是相互独立的实值布朗运动，空间模态为

$$e_{j_1,j_2}(x) = 2\sin(j_1\pi x_1)\,\sin(j_2\pi x_2),$$

以及$q_{j_1,\,j_2} = (j_1^2 + j_2^2)^{-1}$。请注意，对于规则区域 $(0,1)^d$，Dirichlet拉普拉斯算子的特征值和特征函数是显式已知的。这使得利用谱伽辽金方法进行空间离散化十分高效。下文在有限维子空间中进行空间离散化（例如，参见 [43]）

$$H_M := \operatorname{span}\{e_{j_1,j_2} : 1 \le j_1, j_2 \le M\}.$$

对于更一般且可能不规则的空间区域，谱伽辽金方法的实用性较低。在这种情况下，可以采用其他空间离散化方法，例如有限差分法或有限元方法。除非另有说明，我们在 $\Theta = 1$ （3.1）中取 $M = 128$。随机变量 Y的期望始终用蒙特卡洛系综均值近似，即 $\mathbb{E}[Y] \approx \frac{1}{P}\sum_{i=1}^{P} Y(\omega_i)$，其中 $\{Y(\omega_i)\}_{i=1}^{P}$ 是 P的样本： Y。

–

7.1 平均能量演化

在本小节中，我们通过研究以下随机 Cahn–Hilliard 方程，验证所提出的格式（1.4）的平均能量演化律

$$\begin{aligned} d\phi(t) &= -A^2\phi(t) + A\left(\phi(t)^3 - \phi(t)\right)dt + 2.5(1+\phi(t)^2)^{-\frac{1}{2}}\,dW(t), \\ \phi^0(x) &= 0.6\,\sin(\pi x_1)\sin(\pi x_2) + 0.4\,\sin(2\pi x_1)\sin(3\pi x_2). \end{aligned} \tag{7.1}$$

在 $(0,1)^2 \times (0,T]$中。对于方程（7.1），图 1 比较了指数欧拉 SSAV 格式（1.4）与标准 SAV ˜ ˜格式（即在（ 1.4 ）中将 f^n 替换为 f_{d}^n （见（ 3.5 ））所得的平均能量演化。期望值通过 $P = 1000$ 个蒙特卡洛样本进行近似，时间步长取为 $\tau = 5\times 10^{-4}$。由于随机 Cahn–Hilliard 方程（1.1）的精确解无法获得，参考平均能量采用时间上的全隐式欧拉法计算（例如，见 [22]），参考步长为 $\tau = 5\times 10^{-5}$。

如图所示 1，与所提出的格式（1.4）相关的平均修正 SAV 能量在整个时间区间内始终与参考平均能量高度吻合，这与定理 3一致。相比之下，标准 SAV 格式产生的平均能量持续向上漂移，似乎收敛到不同的能量水平。从能量演化律的角度来看，图 1 表明，标准 SAV 方法已不再适用于随机 Cahn–Hilliard 方程，因此有必要考虑其随机修正，例如指数欧拉 SSAV 格式（1.4）；另见注 1。

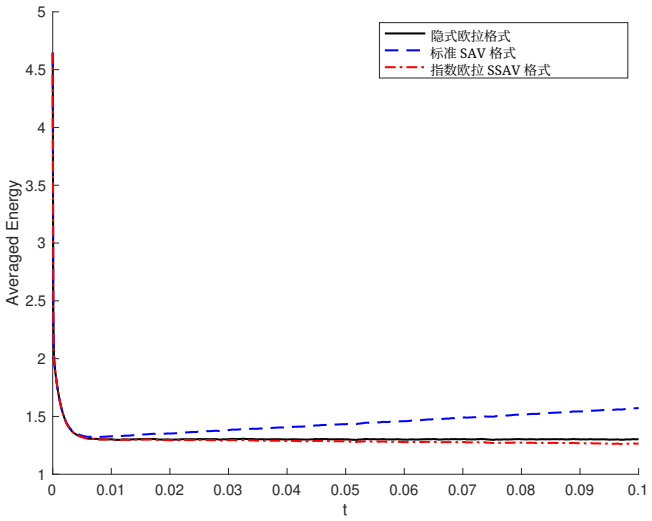

图 1 方程 (7.1) 中指数欧拉 SSAV 格式与标准 SAV 格式的平均能量比较。

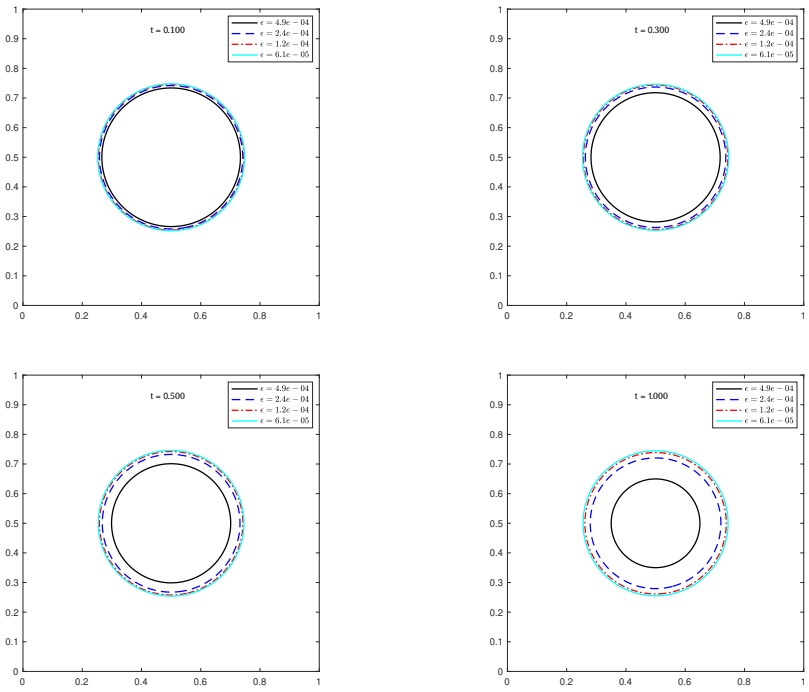

图 2 方程 (7.2) 在 $\gamma = 1$ 时解的零水平集在若干时间点的单独快照。

7.2 尖锐界面动力学

在本小节中，我们考虑尖锐界面极限附近的随机 Cahn–Hilliard 方程

$$\begin{aligned} d\phi(t) &= A\left(-\epsilon A\phi(t) + \frac{1}{\epsilon}(\phi(t)^3 - \phi(t))\right)dt + \epsilon^{\gamma}\frac{10}{\sqrt{1+\phi(t)^2}}\,dW(t), \\ \phi^0(x) &= \tanh\left(\frac{R-0.25}{\sqrt{2}\,\epsilon}\right), \text{ with } R = \sqrt{(x_1-0.5)^2+(x_2-0.5)^2} \end{aligned} \tag{7.2}$$

在 $(0,1)^2 \times (0,T]$。引入界面宽度 ϵ和噪声缩放指数γ （7.2）的动机，来自文献 [44] 中的渐近研究以及文献[45]中的数值分析。

7.2.1 界面演化

在本部分中，我们研究较小的界面参数 $\epsilon > 0$ 和噪声强度对随机 Cahn–Hilliard 方程中界面演化的影响。在数值测试中，我们选取不同的界面宽度参数 $\epsilon = 2^{-i}/64$, $i = 5,6,7,8$，并将数值模拟运行至终止时间$T = 1$。我们首先研究尖锐界面极限下噪声强度对几何演化的影响。图 2 (分别，图 4）展示了方程（7.2）在不同时间 $t = 0.1, 0.3, 0.5, 1$ 且 $\gamma = 1$ (分别为 $\gamma = 0$）时数值解零水平集的一次实现。

当 $\gamma = 1$时，时空噪声的强度会随着 ϵ 减小而降低，由此产生的零水平集演化（图 2）与相同初始构型下确定性 Cahn–Hilliard 方程的演化（图 3）几乎无法区分。此外，界面基本保持静止，小幅随机扰动只引起轻微波动，并未改变整体形态。这一数值观察与理论预测一致：随机 Cahn–Hilliard 方程的动力学（7.2）收敛至确定性问题，当 $\epsilon \to 0$ 时（见 [44]）。当 $\gamma = 0$时，噪声振幅仍为 $\mathcal{O}(1)$量级，图 4 中的零水平集则围绕其确定性轮廓呈现明显的随机振荡。零水平集中持续存在的随机性表明，极限界面动力学保留了随机特征，这与猜想的随机尖锐界面极限一致（见 [44]）。

此外，我们在图5 中给出了方程（7.2）的数值解的平均零水平集，其中 $\gamma = 0$ 取自 $P = 100$ 个样本实现。尽管平均界面并未完全与确定性轮廓重合，但仍可观察到当参数 ϵ 趋于零时预期的收缩行为。随机 Cahn–Hilliard 方程在尖锐界面极限附近由不同噪声缩放诱导的 $\gamma = 1$ 和 $\gamma = 0$ 两种情形之间的这种定性差异，凸显了不同的渐近机制。

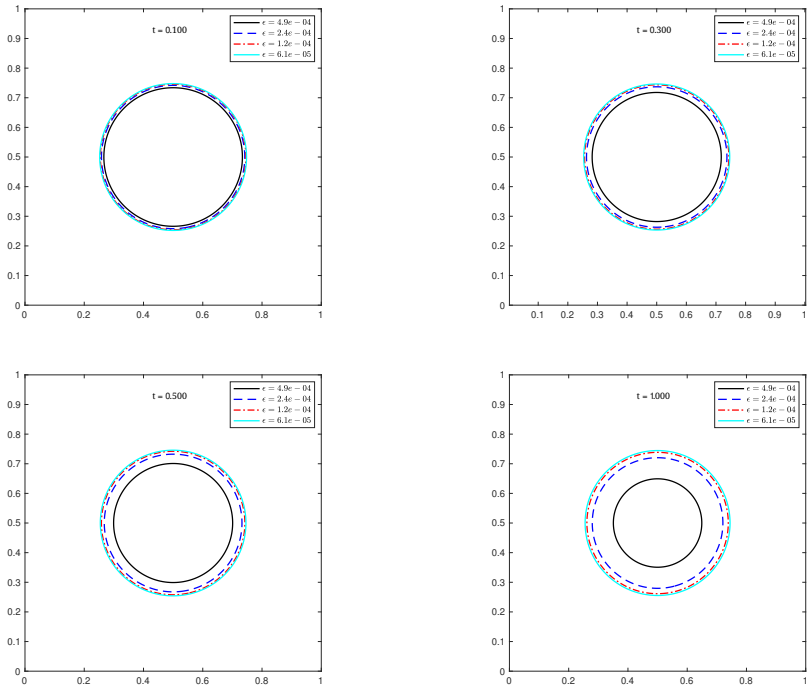

图 3 确定性卡恩–希利亚德方程在若干时间点的解的零水平集快照。

7.2.2 离散误差与收敛阶

继续考察方程（7.2）在 $\gamma = 0$下的情形，接下来我们测试指数欧拉 SSAV 格式（1.4）的收敛阶。此外，我们还数值研究了均方误差对界面参数 ϵ的依赖性。数值模拟进行至终止时间 $T = 0.1$，并对 $P = 100$ 个样本取蒙特卡罗平均。

我们首先将空间离散化参数固定为 $M = 128$，并使用时间步长最细的数值解 $\tau_{\text{ref}} = T/3200$ 作为参考解。在不同的界面参数 $\epsilon = 0.16, 0.08, 0.04, 0.02, 0.01, 0.005$. 下，对一系列更粗的时间步长 $\tau = 2 \times 10^{-3}, 1 \times 10^{-3}, 5 \times 10^{-4}, 2.5 \times 10^{-4}, 1.25 \times 10^{-4}$ 进行测试。对于每一组(τ, ϵ)，计算终止时间 T 处相对于参考解的均方误差。表1中的结果表明，时间离散误差随 $1/\epsilon$呈多项式关系，没有显示出指数增长的迹象。此外，表1 显示，在测试范围内，对每个固定的 ϵ，时间强误差的经验收敛阶接近 $O(\tau^{1/2})$，这验证了定理2中陈述的理论结果。

接下来，我们将时间步长固定为 $\tau = T/800$，并将空间分辨率最精细的 $M_{\text{ref}} = 256$ 所对应的数值解作为参考解。对于不同的界面参数，我们考虑空间分辨率 $M = 16, 32, 64, 128$

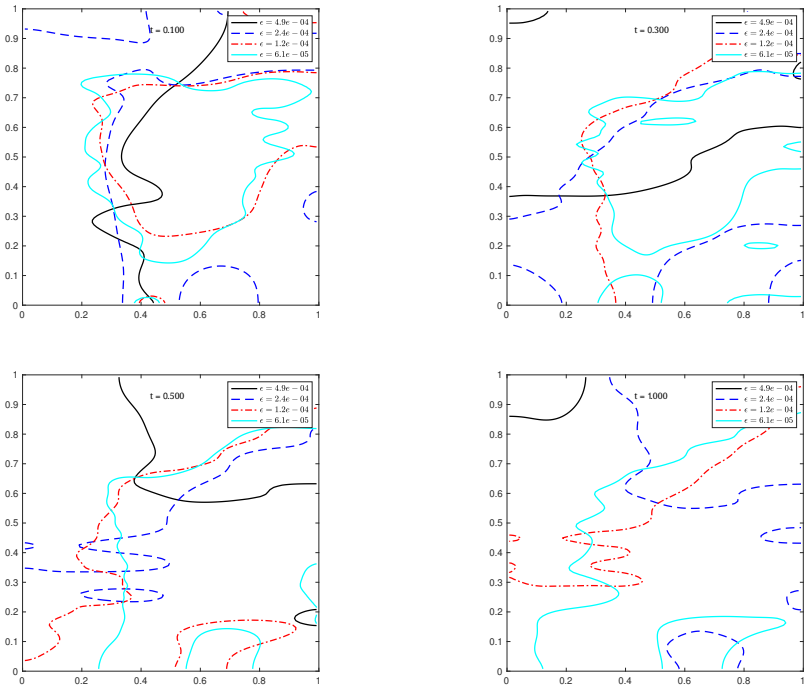

图 4 方程 (7.2)（其中 $\gamma = 0$）在若干时间点的解的零水平集单独快照。

$\epsilon = 0.16, 0.08, 0.04, 0.02, 0.01$. 对于每一对 (M, ϵ)，终止时间处的均方误差 T 列于表 2中。该实验同样表明，空间离散误差关于 $1/\epsilon$呈多项式依赖。

8 结语

本文提出并分析了由乘性噪声驱动的随机 Cahn–Hilliard 方程的一种半隐式数值格式，将 SSAV 方法与指数欧拉方法相结合。所得指数欧拉 SSAV 格式在迹类噪声情形下被证明可达到最优强收敛阶 1 2 。此外，我们证明该格式渐近保持底层连续系统的平均能量演化律。我们还进行了一系列数值实验，以研究界面参数和噪声强度对界面演化的影响，以及离散误差对界面参数的依赖关系。对这些数值现象的理论研究将在未来工作中开展。同时，我们还计划将所提出的框架推广到更一般的噪声结构和更复杂的相场模型，并发展更高阶的保结构数值格式。

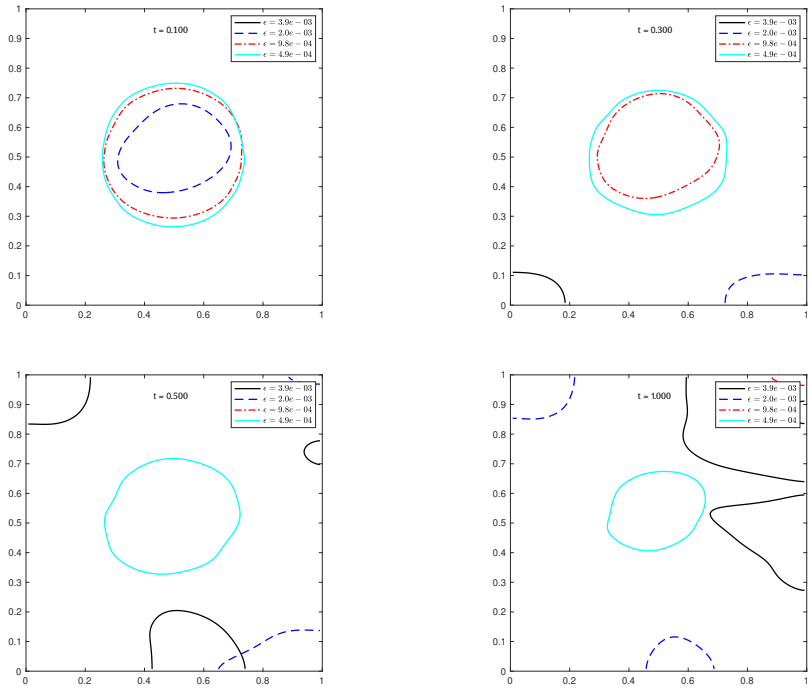

图5 方程（7.2）在若干时间点处解的零水平集快照的平均值 $\gamma = 0$。

辅助结果的证明

A.1 推论的证明 5

由（4.6）出发，我们首先在计算期望之前对 $m \in \{0, 1, \cdots, N-1\}$ 取上确界，从而得到

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{0\le m\le N-1}\left\|\nabla X^{m+1}\right\|^{2p}\right]+\mathbb{E}\left[\sup_{0\le m\le N-1}|r^{m+1}|^{2p}\right]+\mathbb{E}\left[\left(\sum_{n=0}^{N-1}|r^{n+1}-r^{n}|^{2}\right)^{p}\right]\\
&\quad+\mathbb{E}\left[\left(\sum_{n=0}^{N-1}\|(I-S^{2}(\tau))^{\frac{1}{2}}(-A)^{-\frac{1}{2}}\tilde{\mu}^{n}\|^{2}\right)^{p}\right]\\
&\le C+C\mathbb{E}\left[\left\|\nabla\phi^{0}\right\|^{2p}\right]+C\mathbb{E}\left[|r^{0}|^{2p}\right]+C\tau\sum_{n=0}^{N-1}\mathbb{E}\left[|r^{n}|^{2p}\right]+\sum_{i=1}^{5}\mathbb{E}\left[\sup_{0\le m\le N-1}R_{i}^{m}\right].
\end{aligned}\tag{A.1}$$

由于序列 $\{R_1^m\}_{m=0}^{N-1}, \cdots, \{R_4^m\}_{m=0}^{N-1}$ 在 m中单调不减，因此它们在 $m = N-1$处达到最大值，这使我们能够利用先前推导出的估计

表 1 不同时间步长 τ 和界面参数 ϵ下的时间平均平方误差及阶数。

τ	$\epsilon=0.16$		$\epsilon=0.08$		$\epsilon=0.04$	
	误差	阶	误差	阶	误差	阶
2e-3	1.1860	–	1.4749	–	1.9236	–
1e-3	0.9356	0.3427	1.1546	0.3520	1.4467	0.4118
5e-4	0.7063	0.4053	0.9119	0.3400	1.1079	0.3847
2.5e-4	0.4996	0.4989	0.6812	0.4210	0.8287	0.4183
1.25e-4	0.3151	0.6657	0.4686	0.5397	0.5908	0.4871
τ	$\epsilon=0.02$		$\epsilon=0.01$		$\epsilon=0.005$	
	误差	阶	误差	阶	误差	阶
2e-3	2.1091	–	2.3045	–	2.7373	–
1e-3	1.5721	0.4249	1.7443	0.4022	2.0518	0.4158
5e-4	1.1574	0.4420	1.2580	0.4716	1.4500	0.5012
2.5e-4	0.8187	0.4990	0.9135	0.4619	1.0188	0.5099
1.25e-4	0.5830	0.4895	0.6641	0.4600	0.7213	0.4970

表 2 不同空间参数 M 和界面参数 ϵ下的空间强 L^2-误差。

误差 ϵ / M	0.16	0.08	0.04	0.02	0.01
16	0.1685	0.3423	0.5660	0.7264	0.7496
32	0.1072	0.1520	0.2319	0.3543	0.5167
64	0.0583	0.0959	0.1327	0.1546	0.2441
128	0.0245	0.0361	0.0557	0.0728	0.1100

用于 $R_1^{N-1},\cdots,R_4^{N-1}$并得到

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le m\le N-1} R_i^m\right]=\mathbb{E}\left[R_i^{N-1}\right]\le C,\qquad i=1,2,3,4.$$

由 Doob 鞅不等式，结合（4.14）、（4.15）以及（4.1），可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{0\le m\le N-1} R_5^m\right]\\
&=C\mathbb{E}\left[\sup_{0\le m\le N-1}\left|\sum_{n=0}^{m}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\left\langle -AX^n+\frac{r^n}{\sqrt{E_{\mathrm{p}}(X^n)}}F'(X^n),g(X^n)dW(s)\right\rangle\right|^p\right]\\
&\le C\mathbb{E}\left[\left|\sum_{n=0}^{N-1}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\sum_{k=1}^{\infty}\left\langle -AX^n+\frac{r^n}{\sqrt{E_{\mathrm{p}}(X^n)}}F'(X^n),g(X^n)Q^{\frac12}e_k\right\rangle^2 ds\right|^{\frac p2}\right]\\
&\le C(R_{51}^{N-1}+R_{52}^{N-1})\le C+C\tau\sum_{n=0}^{N-1}\mathbb{E}\left[|r^n|^{2p}\right]+C\tau\sum_{n=0}^{N-1}\mathbb{E}\left[\|\nabla X^n\|^{2p}\right]\le C.
\end{aligned}$$

最后，考虑到（4.1）、 $\phi^0 \in \dot{H}^1(\mathcal{O})$ 以及（3.2），我们由（4.16）得出（A.1）的证明。□

A.2 引理 6 的证明

根据 Hölder不等式，只需考虑 $p > 1$ 充分大时的情形。对于$\beta \in (0,2)$，由（4.18）的温和形式、 $S(\cdot)$的压缩性以及 Hölder不等式，可得

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \|(-A)^{\frac{\beta}{2}} Z(t)\|^p\right] \le C\|(-A)^{\frac{\beta}{2}}\phi^0\|^p + R_{1,\beta} + R_{2,\beta},$$

with

$$R_{1,\beta} := \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \left\|\int_0^t S(t-s)(-A)^{\frac{\beta}{2}+1}\tilde{F}(s)ds\right\|^p\right],$$
$$R_{2,\beta} := \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \left\|\int_0^t (-A)^{\frac{\beta}{2}} S(t-s)\tilde{G}(s)dW(s)\right\|^p\right].$$

由闵可夫斯基不等式、（2.1）和 Hölder不等式，我们选取 $q_1 = \frac{1}{2}(1 + \frac{4}{\beta+2}) > 1$使得$(\frac{\beta}{4} + \frac{1}{2})q_1 \in (0,1)$，从而对任意 $p \ge \frac{q_1}{q_1-1}$，

$$\begin{aligned} R_{1,\beta} &\le C\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \left(\left(\int_0^t (t-s)^{(-\frac{\beta}{4}-\frac{1}{2})q_1} ds\right)^{\frac{1}{q_1}} \left(\int_0^t \|\tilde{F}(s)\|^{\frac{q_1}{q_1-1}} ds\right)^{\frac{q_1-1}{q_1}}\right)^p\right] \\ &\le C\,\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T \|\tilde{F}(s)\|^{\frac{q_1}{q_1-1}} ds\right)^{\frac{(q_1-1)p}{q_1}}\right] \le C\mathbb{E}\int_0^T \|\tilde{F}(s)\|^p ds. \end{aligned} \tag{A.2}$$

因式分解公式 [46, 命题 5.9 和定理 5.10] 表明，对于 $p > 1$和 $\rho > 1/p$，

$$R_{2,\beta} = C\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \left\|\int_0^t (-A)^{\frac{\beta}{2}} S(t-s)\tilde{G}(s)dW(s)\right\|^p\right] \le C(T,p)\mathbb{E}\int_0^T \|\tilde{Y}(u)\|^p du, \tag{A.3}$$

其中，对于任意 $u \in (0,T)$， $\tilde{Y}(u) := \int_0^u (u-s)^{-\varrho} S(u-s)(-A)^{\frac{\beta}{2}}\tilde{G}(s)dW(s)$。接下来，利用 BDG不等式、闵可夫斯基不等式和（2.1），并选取充分小的 $\rho \in (0,1)$ 以及满足 $2(\frac{\beta}{4} + \rho)q_2 \in (0,1)$ 的 $q_2 > 1$，可得对于任意$p > \max\{\frac{2q_2}{q_2-1}, \frac{1}{\rho}\}$和 $u \in (0,T)$，

$$\mathbb{E}\left[\|\tilde{Y}(u)\|^p\right] \le C\mathbb{E}\left[\left(\int_0^u (u-s)^{-2(\frac{\beta}{4}+\varrho)} \|\tilde{G}(s)\|^2_{\mathcal{L}_2^0} ds\right)^{\frac{p}{2}}\right]$$

$$\leq C\mathbb{E}\left[\left(\left(\int_0^u (u-s)^{-2(\frac{\beta}{4}+\varrho)q_2}ds\right)^{\frac{1}{q_2}}\left(\int_0^u \|\tilde{G}(s)\|_{\mathcal{L}_2^0}^{2\frac{q_2}{q_2-1}}ds\right)^{\frac{q_2-1}{q_2}}\right)^{\frac{p}{2}}\right]$$
$$\leq C\mathbb{E}\int_0^T \|\tilde{G}(s)\|_{\mathcal{L}_2^0}^p ds. \tag{A.4}$$

将不等式（A.4）和（A.3结合起来，可得到 R_2、β 的估计。然后将 R_1、β 和 R_2、β 代入（A.2），即可完成引理6的证明。□

A.3 证明（4.24）

根据 χ^n 3 9 $\|\chi^n\|^p \leq$ 在（.）中的定义，并 $C\tau^{\frac{p}{2}}|r^{n+1}|^{2p} + C\tau^{-\frac{p}{2}} J_1^n + J_2^n$ 利用杨氏不等式，可得 ()，其中

$$J_1^n := \frac{1}{E_{\mathrm{p}}(X^n)^{3p}}\|F'(X^n)\|^{2p}\left|\langle F'(X^n), g(X^n)\delta W^n\rangle\right|^{2p},$$
$$J_2^n := \frac{1}{E_{\mathrm{p}}(X^n)^{p}}\|F''(X^n)g(X^n)\delta W^n\|^{2p}.$$

因此，应用 Hölder不等式，并利用（4.11）以及（4.22），可得对于任意 $p \geq 1$,

$$\mathbb{E}[J_1^n] \leq C(\mathbb{E}[\|F'(X^n)\|^{4p}])^{\frac{1}{2}}\left(\mathbb{E}\left[\frac{1}{E_{\mathrm{p}}(X^n)^{3p}}\left|\langle F'(X^n), g(X^n)\delta W^n\rangle\right|^{4p}\right]\right)^{\frac{1}{2}} \leq C\tau^p.$$

对于 J_2^n，由 BDG不等式、（4.10）和（4.7）可知，对于任意 $p \geq 1$,

$$\mathbb{E}\left[J_2^n\right] \leq C\mathbb{E}\left[\frac{1}{E_{\mathrm{p}}(X^n)^{p}}\left(\tau\sum_{k=1}^{\infty}\|F''(X^n)g(X^n)Q^{\frac{1}{2}}e_k\|^2\right)^p\right]$$
$$\leq C\tau^p\mathbb{E}\left[\frac{\|F''(X^n)\|^{2p}}{E_{\mathrm{p}}(X^n)^{p}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\|g(X^n)Q^{\frac{1}{2}}e_k\|_{L^\infty}^2\right)^p\right] \leq C\tau^p.$$

此外，结合推论 5 可知，对于任意 $p \geq 1$,

$$\mathbb{E}\left[\|\chi^n\|^p\right] \leq C\tau^{\frac{p}{2}}\mathbb{E}\left[|r^{n+1}|^{2p}\right] + C\tau^{-\frac{p}{2}}\left(\mathbb{E}\left[J_1^n\right] + \mathbb{E}\left[J_2^n\right]\right) \leq C\tau^{\frac{p}{2}}.$$

□

A.4 证明（4.32）

在假设 1 和 2下，数值解的 Dirichlet边界条件和分部积分公式保证 $\|\nabla\tilde{f}^n\| = \|(-A)^{\frac{1}{2}}\tilde{f}^n\|$。由

假设 1、链式法则、分部积分公式、引理 5以及（4.26），对于任意 $q \geq 1$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\|(-A)^{\frac{1}{2}}F'(X^n)\|^{2q}\right] = \mathbb{E}\left[\|\nabla F'(X^n)\|^{2q}\right] = \mathbb{E}\left[\|F''(X^n)\nabla X^n\|^{2q}\right] \qquad \text{(A.5)}\\
&\leq C\mathbb{E}\left[\|F''(X^n)\|_{L^\infty}^{4q}\right] + C\mathbb{E}\left[\|\nabla X^n\|^{4q}\right]\\
&\leq C + C\mathbb{E}\left[\|X^n\|_{L^\infty}^{8q}\right] + C\mathbb{E}\left[\|\nabla X^n\|^{4q}\right] \leq C.
\end{aligned}$$

因此，由（3.8）、推论 5以及 Hölder不等式，对于任意 $q \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\|(-A)^{\frac{1}{2}}\tilde{f}^n\|^{2q}] &\leq C(\mathbb{E}[|r^{n+1}|^{4q}])^{\frac{1}{2}}(\mathbb{E}[\|(-A)^{\frac{1}{2}}F'(X^n)\|^{4q}])^{\frac{1}{2}} + C\mathbb{E}[\|(-A)^{\frac{1}{2}}\chi^n\|^{2q}]\\
&\leq C + C\mathbb{E}[\|(-A)^{\frac{1}{2}}\chi^n\|^{2q}]. \qquad \text{(A.6)}
\end{aligned}$$

根据 χ^n 在（3.9）中的定义，可得

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\|(-A)^{\frac{1}{2}}\chi^n\|^{2q}] \leq C\mathbb{E}&\left[\left\|\frac{1}{4E_{\mathrm{p}}(X^n)^{3/2}}\langle F'(X^n), g(X^n)\delta W^n\rangle(-A)^{\frac{1}{2}}F'(X^n)\right\|^{2q}\right]\\
&+ C\mathbb{E}\left[\left\|\frac{1}{2\sqrt{E_{\mathrm{p}}(X^n)}}(-A)^{\frac{1}{2}}\left(F''(X^n)g(X^n)\delta W^n\right)\right\|^{2q}\right]\\
&=: \mathrm{I}_q^n + \mathrm{II}_q^n.
\end{aligned}$$

对 I_q^n 的估计。 由 BDG不等式和（4.7），对于任意 $q_1 \geq 1$，有

$$\mathbb{E}[\|g(X^n)\delta W^n\|^{2q_1}] \leq C\mathbb{E}[(\tau\|g(X^n)\|_{\mathcal{L}_2^0}^2)^{q_1}] \leq C\tau^{q_1}. \qquad \text{(A.7)}$$

然后应用 Hölder不等式、（A.7）、（A.5）和（4.22），可得 $\mathrm{I}_q^n \leq C(q)\tau^q$ 对于任意 $q \geq 1$。

对 II_q^n 的估计。 由 BDG不等式可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{II}_q^n &\leq C\mathbb{E}\left[\left\|(-A)^{\frac{1}{2}}\int_{t_n}^{t_{n+1}}F''(X^n)g(X^n)dW(s)\right\|^{2q}\right]\\
&\leq C\mathbb{E}\left[\left(\tau\sum_{k=1}^{\infty}\|(-A)^{\frac{1}{2}}(F''(X^n)g(X^n)Q^{\frac{1}{2}}e_k)\|^2\right)^q\right].
\end{aligned}$$

分部积分并应用链式法则，可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty}\|(-A)^{\frac{1}{2}}(F''(X^n)g(X^n)Q^{\frac{1}{2}}e_k)\|^2\right)^q\right]\\
&= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty}\|\nabla(F''(X^n)g(X^n)Q^{\frac{1}{2}}e_k)\|^2\right)^q\right]
\end{aligned}$$

$$\leq C\mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty}\|F'''(X^n)\nabla X^n g(X^n)Q^{\frac{1}{2}}e_k\|^2\right)^q\right]$$
$$+C\mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty}\|F''(X^n)\nabla(g(X^n)Q^{\frac{1}{2}}e_k)\|^2\right)^q\right].$$

由杨氏不等式、（4.7）、（4.26）以及推论 5 可知

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty}\|F'''(X^n)\nabla X^n g(X^n)Q^{\frac{1}{2}}e_k\|^2\right)^q\right]\\
&\leq C\mathbb{E}\left[\|F'''(X^n)\nabla X^n\|^{4q}\right]+C\mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty}\|g(X^n)Q^{\frac{1}{2}}e_k\|_{L^\infty}^2\right)^{2q}\right]\\
&\leq C\left(1+\mathbb{E}\left[\|X^n\|_{L^\infty}^{8q}\right]+\mathbb{E}\left[\|\nabla X^n\|^{8q}\right]\right)\leq C.
\end{aligned}$$

同样，由杨氏不等式、（2.8）、引理 5以及（4.26），还可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty}\|F''(X^n)\nabla(g(X^n)Q^{\frac{1}{2}}e_k)\|^2\right)^q\right]\\
&\leq C\mathbb{E}\left[\|F''(X^n)\|_{L^\infty}^{4q}\right]+C\mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty}\|\nabla(g(X^n)Q^{\frac{1}{2}}e_k)\|^2\right)^{2q}\right]\\
&\leq C\left(1+\mathbb{E}\left[\|X^n\|_{L^\infty}^{8q}\right]+\mathbb{E}\left[\|\nabla X^n\|^{4q}\right]\right)\leq C.
\end{aligned}$$

因此，我们可以推得，对于任意 $q\geq 1$，$\mathrm{II}_q^n\leq C(q)\tau^q$。

结合 I_q^n 和 II_q^n的估计，可得对于任意 $q\geq 1$,

$$\mathbb{E}[\|(-A)^{\frac{1}{2}}\chi^n\|^{2q}]\leq C(q)\tau^q. \tag{A.8}$$

最后，将（A.8）代入（A.6），得到（4.32）。 □

A.5 （证明6.12）

我们先估计 J_3^n。由（6.5），

$$\mathbb{E}[|J_3^n|]=\mathbb{E}\left[\Big|-|r^{n+1}-r^n|^2+\frac{1}{4E_{\mathrm{p}}(X^n)}\left|\left\langle F'(X^n),X^{n+1}-X^n\right\rangle\right|^2\Big|\right].$$

利用Hölder不等式，（4.22）和引理8，我们有

$$\mathbb{E}[|\langle F'(X^n),X^{n+1}-X^n\rangle|^2]\leq C\mathbb{E}[\|F'(X^n)\|^2\|X^{n+1}-X^n\|^2]\leq C\tau. \tag{A.9}$$

应用Hölder不等式、假设1、Sobolev嵌入 $L^\infty(\mathcal{O}) \to L^6(\mathcal{O})$、引理8、（4.26）和（A.7），我们得到，对任意 $q \geq 1$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left|\langle F'(X^n), g(X^n)\delta W^n\rangle\langle F'(X^n), X^{n+1}-X^n\rangle\right|^{2q}\right] \\
&\leq C\mathbb{E}\left[\|F'(X^n)\|^{4q}\|g(X^n)\delta W^n\|^{2q}\|X^{n+1}-X^n\|^{2q}\right] \\
&\leq C\left(\mathbb{E}\left[(1+\|X^n\|_{L^\infty}^{24q})\|X^{n+1}-X^n\|^{4q}\right]\right)^{\frac{1}{2}}\left(\mathbb{E}\left[\|g(X^n)\delta W^n\|^{4q}\right]\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\tau^{2q}.
\end{aligned} \tag{A.10}$$

同理，可以验证对于任意 $q \geq 1$,

$$\mathbb{E}\left[\left|\langle F''(X^n)(X^{n+1}-X^n), g(X^n)\delta W^n\rangle\right|^{2q}\right] \leq C\tau^{2q}. \tag{A.11}$$

由（1.6）、（A.9）、（A.10）和（A.11），可得对于任意 $q \geq 1$,

$$\mathbb{E}\left[|r^{n+1}-r^n|^{2q}\right] + \mathbb{E}\left[\left|r^{n+1}-r^n+\frac{\langle F'(X^n), X^{n+1}-X^n\rangle}{2\sqrt{E_{\mathrm{p}}(X^n)}}\right|^{2q}\right] \leq C\tau^q, \tag{A.12}$$

$$\mathbb{E}\left[\left|r^{n+1}-r^n-\frac{\langle F'(X^n), X^{n+1}-X^n\rangle}{2\sqrt{E_{\mathrm{p}}(X^n)}}\right|^{2q}\right] \leq C\tau^{2q}. \tag{A.13}$$

应用 Hölder不等式并结合（A.12）和（A.13），可得

$$\mathbb{E}[|J_3^n|] = \mathbb{E}\left[\left|-|r^{n+1}-r^n|^2+\frac{1}{4E_{\mathrm{p}}(X^n)}\left|\langle F'(X^n), X^{n+1}-X^n\rangle\right|^2\right|\right] \leq C\tau^{\frac{3}{2}}.$$

为了估计 J_6^n、J_7^n、J_9^n 和 J_{10}^n，注意到由（A.12）和引理 11，因子 $\frac{r^{n+1}}{\sqrt{E_{\mathrm{p}}}}($ $X^n)-1$ 在 $L^q(\Omega;H)$ 中对于任意 $q \geq 1$ 也具有 $\mathcal{O}(\tau^{\frac{1}{2}})$ 的量级。也就是说，

$$\left\|\frac{r^{n+1}}{\sqrt{E_{\mathrm{p}}(X^n)}}-1\right\|_{L^q(\Omega)} \leq C\|r^{n+1}-r^n\|_{L^q(\Omega)} + C\|r^n-\sqrt{E_{\mathrm{p}}(X^n)}\|_{L^q(\Omega)} \leq C(q)\tau^{\frac{1}{2}}$$

对于任意 $q \geq 1$。另一方面，由于 (A.7) 和引理 7，增量$g(X^n)\delta W^n$和 $X^{n+1}-X^n$ 在 $L^q(\Omega;H)$ 中对于任意 $q \geq 1$的大小均为 $\mathcal{O}(\tau^{\frac{1}{2}})$。由于每个余项 J_6^n、J_7^n、J_9^n和 J_{10}^n 都包含三个大小为 $\mathcal{O}(\tau^{1/2})$ 的因子，且它们属于 $L^q(\Omega;H)$，因此可以证明

$$\mathbb{E}[|J_6^n|+|J_7^n|+|J_9^n|+|J_{10}^n|] \leq C\tau^{\frac{3}{2}}, \qquad n \in \{0,1,\cdots,N-1\}.$$

□

B 命题1的证明

证明 证明分三步进行。在前两步中，我们分别建立温和解的 $L^2(\mathcal{O})$-和 $H^1(\mathcal{O})$-空间正则性。在最后一步中，我们应用引理 6，推导出温和解在 $H^\beta(\mathcal{O})$-空间正则性估计，其中 $\beta \in (1,2)$。

步骤 *1*。根据假设 1 并通过分部积分，我们得到

$$\begin{aligned}-\langle \nabla\phi(t), \nabla F'(\phi(t))\rangle &= -\int_{\mathcal{O}} |\nabla\phi(t,x)|^2 f''(\phi(t,x))dx \le L_f\|\nabla\phi(t)\|^2\\ &= L_f\|(-A)^{\frac{1}{2}}\phi(t)\|^2 \le \frac{1}{2}\|A\phi(t)\|^2 + \frac{1}{2}L_f^2\|\phi(t)\|^2.\end{aligned}$$

因此，由（1.1），我们可以应用伊藤公式，得到

$$\begin{aligned}d\|\phi(t)\|^2 &= 2\langle\phi(t), -A^2\phi(t)\rangle dt - 2\langle\nabla\phi(t), \nabla F'(\phi(t))\rangle dt\\ &\quad + 2\langle\phi(t), g(\phi(t))dW(t)\rangle + \|g(\phi(t))\|^2_{\mathcal{L}_2^0}dt\\ &\le -\|A\phi(t)\|^2 dt + C\|\phi(t)\|^2 dt + 2\langle\phi(t), g(\phi(t))dW(t)\rangle + \|g(\phi(t))\|^2_{\mathcal{L}_2^0}dt.\end{aligned}$$

根据 BDG不等式、Hölder不等式以及 g 的线性增长（见（2.7））， 可推得对任意 $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\|\phi(t)\|^{2p}\right] + \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \|A\phi(s)\|^2 ds\right)^p\right] \le C\|\phi^0\|^{2p} + C\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \|\phi(s)\|^2 ds\right)^p\right]\\ &\quad + C\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t \langle\phi(s), g(\phi(s))dW(s)\rangle\right|^p\right] + C\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \|g(\phi(t))\|^2_{\mathcal{L}_2^0}\right)^p\right]\\ &\le C\|\phi^0\|^{2p} + C\mathbb{E}\int_0^t \|\phi(s)\|^{2p} ds + C.\end{aligned}$$

利用Gronwall不等式，我们得到

$$\mathbb{E}\left[\|\phi(t)\|^{2p}\right] + \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \|A\phi(s)\|^2 ds\right)^p\right] \le C\left(\|\phi^0\|^{2p} + 1\right). \tag{B.1}$$

步骤 *2*。由假设1 和假设2 可得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\left\langle F''(\phi(s))g(\phi(s))Q^{\frac{1}{2}}e_k, g(\phi(s))Q^{\frac{1}{2}}e_k\right\rangle &\le \|F''(\phi(s))\|_{L^1}\sum_{k=1}^{\infty}\|g(\phi(s))Q^{\frac{1}{2}}e_k\|^2_{L^\infty}\\ &\le C(1+\|\phi(s)\|^2).\end{aligned}$$

因此，利用能量演化律（2.10）和Hölder不等式可得

$$\begin{aligned}E(\phi(t)) + \int_0^t \|\nabla\mu(s)\|^2 ds &\le E(\phi^0) + \int_0^t \langle\mu(s), g(\phi(s))dW(s)\rangle\\ &\quad + C\int_0^t \|g(\phi(s))\|^2_{\mathcal{L}_2(Q^{\frac{1}{2}}H, \dot{H}^1(\mathcal{O}))}ds + C\int_0^t (\|\phi(s)\|^2 + 1)ds.\end{aligned} \tag{B.2}$$

鉴于（2.8），对于任意 $s \in [0,T]$,

$$\|g(\phi(s))\|^2_{\mathcal{L}(Q^{\frac{1}{2}}H, \dot{H}^1(\mathcal{O}))} \le C(1+\|\nabla\phi(s)\|^2) \le C(1+\|A\phi(s)\|^2 + \|\phi(s)\|^2). \tag{B.3}$$

然后，将（2.3）和（B.3）代入（B.2），可得对任意 $t \in [0,T]$,

$$\mathbb{E}\left[E(\phi(t))^p\right] + \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \|\nabla\mu(s)\|^2 ds\right)^p\right] \tag{B.4}$$

$$\leq C + C\mathbb{E}\left[\Big|\int_0^t \langle \mu(s), g(\phi(s))dW(s)\rangle\Big|^p\right] + C\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \|A\phi(s)\|^2 + \|\phi(s)\|^2 ds\right)^p\right].$$

应用BDG不等式、Hölder不等式、假设2和杨氏不等式，并回顾定义 $\mu := \frac{\delta E}{\delta \phi} = -\Delta\phi + F'(\phi)$ 于（1.1）中，可得

$$\mathbb{E}\left[\Big|\int_0^t \langle \mu(s), g(\phi(s))dW(s)\rangle\Big|^p\right] \leq C\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} \left|\langle \mu(s), g(\phi(s))Q^{\frac{1}{2}} e_k\rangle\right|^2 ds\right)^{\frac{p}{2}}\right] \tag{B.5}$$

$$\leq C\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \|\mu(s)\|_{L^1}^2 \sum_{k=1}^{\infty} \|g(\phi(s))Q^{\frac{1}{2}} e_k\|_{L^\infty}^2 ds\right)^{\frac{p}{2}}\right]$$

$$\leq C\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \|\Delta\phi(s)\|_{L^1}^2 \, ds\right)^{\frac{p}{2}}\right] + C\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \left\|F'(\phi(s))\right\|_{L^1}^2 \, ds\right)^{\frac{p}{2}}\right].$$

结合假设 1、Gagliardo–Nirenberg不等式和杨氏不等式可得

$$\begin{aligned}\|F'(\phi(s))\|_{L^1}^2 &\leq C(1 + \|\phi(s)\|_{L^3}^6) \leq C(1 + \|\phi(s)\|_{H^2}^{\frac{3}{2}} \|\phi(s)\|^{\frac{9}{2}}) \\ &\leq C(1 + \|\phi(s)\|_{H^2}^2 + \|\phi(s)\|^{18}),\end{aligned}$$

这意味着对于任意 $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \|F'(\phi(s))\|_{L^1}^2 ds\right)^{\frac{p}{2}}\right] \leq C + C\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \|\phi(s)\|_{H^2}^2 ds\right)^{\frac{p}{2}}\right] \\ + C\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \|\phi(s)\|^{18} ds\right)^{\frac{p}{2}}\right].\end{aligned} \tag{B.6}$$

将 (B.6) 代入 (B.5)，并应用 (B.1)，得到

$$\mathbb{E}\left[\Big|\int_0^t \langle \mu(s), g(\phi(s))dW(s)\rangle\Big|^p\right] \leq C.$$

将其代入 (B.4)，并考虑到 (B.1)，可得对于任意 $p \geq 1$,

$$\mathbb{E}\left[E(\phi(t))^p\right] + \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \|\nabla\mu(s)\|^2 ds\right)^p\right] \leq C. \tag{B.7}$$

步骤 3. 由能量定义 (1.2) 和 (B.7)，可得 $\mathbb{E}\left[\|\nabla\phi(t)\|^{2p}\right] \leq C(p)$ 对所有 $p \geq 1$ 均成立。由杨氏不等式和 Sobolev嵌入 $H^1(\mathcal{O}) \to L^6(\mathcal{O})$可知，对于任意 $t \in [0, T]$,

$$\mathbb{E}\left[\left\|F'(\phi(t))\right\|^p\right] \leq C\mathbb{E}\left[\|\phi(t)\|_{L^6}^{3p}\right] + C \leq C\mathbb{E}\left[\|\nabla\phi(t)\|^{3p}\right] + C \leq C. \tag{B.8}$$

此外，由假设 2，有 $\mathbb{E}[\|g(\phi(t))\|_{\mathcal{L}_2^0}^p] \leq C$ 对于任意 $t \in [0, T]$ 均成立，结合 (B.8)，可使用引理 6，取 $\tilde{F}(\phi) = F'(\phi)$ 以及 $\tilde{G}(\phi) = g(\phi)$ 从而得出 (2.9)。□

声明

资助本研究获香港研究资助局优配研究金15302823和15301025、国家自然科学基金委员会/香港研究资助局联合科研资助计划N_PolyU5141/24、国家自然科学基金委员会资助项目12522119和12301526、香港理工大学内部经费（P0041274，P0045336）以及中国科学院数学与系统科学研究院—香港理工大学应用数学联合实验室资助。

数据可用性本文不适用数据共享，因为本研究期间未生成或分析任何数据集。

利益冲突 作者声明不存在利益冲突。

参考文献

[1] 卡恩, J.W., 希利亚德, J.E.: 非均匀系统的自由能。I. 界面自由能。《化学物理学杂志》**28**(2), 258–267 (1958)[2] Scarpa, L.: 关于具有奇异双阱势的随机 Cahn–Hilliard 方程。《非线性分析》**171**, 102–133 (2018)[3]Blömker, D., Sander, E., Wanner, T.: Cahn–Hilliard–Cook 模型中的退化成核。《SIAM应用动力系统杂志》**15**(1), 459–494 (2016)[4] Blömker, D., Maier-Paape, S., Wanner,T.: Cahn–Hilliard–Cook 方程的旋节线分解。《数学物理通讯》**223**(3), 553–582 (2001)[5] Maier-Paape, S., Wanner, T.: 高维中 Cahn–Hilliard 方程的旋节线分解：非线性动力学。《理性力学与分析档案》**151**(3), 187–219 (2000)[6] Dai, S., Du, Q.: Cahn–Hilliard 方程中相依赖扩散迁移率粗化速率的计算研究。J. Comput. Phys.**310**, 85–108 (2016)[7]Khain, E., Sander, L.M.: 用于生物学应用的广义卡恩–希利亚德方程。《物理评论E辑》**77**, 051129 (2008)[8] Blömker, D., Schindler, A.: 高空间维数中的随机 Cahn–Hilliard 方程：气泡运动。《应用数学与物理杂志》**71**(2), 49–27 (2020)[9] Du, Q., Nicolaides, R.A.: 相变连续介质模型的数值分析。SIAM J. Numer. Anal. **28**(5), 1310–1322 (1991)[10] Cui, J., Hong, J.: 具有无界噪声扩散的随机 Cahn–Hilliard 方程的绝对连续性与数值近似。《微分方程杂志》**269**(11), 10143–10180 (2020)[11] Elliott, C.M., Larsson, S.: Cahn–Hilliard 方程有限元方法在光滑与非光滑数据下的误差估计。《数学计算》**58**(198), 603–6303336 (1992)[12] Cui, J., Hong, J.: 具有无界噪声扩散的随机 Cahn–Hilliard 方程的适定性与正则性估计。Stoch. Partial Differ. Equ. Anal. Comput. **11**(4), 1635–1671 (2023)

[13] Da Prato, G., Debussche, A., Tubaro, L.: 噪声扰动下的非正则半凸梯度系统及其在随机 Cahn–Hilliard 方程中的应用。《亨利·庞加莱研究所概率与统计年鉴》**40**(1), 73–88 (2004)[14] Elezovic, N., Mikelic, A.: 关于随机 Cahn–Hilliard 方程。《非线性分析》**16**(12), 1169–1200 (1991)[15] DaPrato, G., Debussche,A.: 随机 Cahn–Hilliard 方程。《非线性分析》**26**(2), 241–263 (1996)[16] Goudenège, L., Manca, L.: 具有奇异非线性和退化噪声的随机 Cahn–Hilliard 方程的渐近性质。《随机过程及其应用》**125**(10), 3785–3800 (2015)[17] Cardon-Weber, C.: Cahn–Hilliard 随机方程：解及其密度的存在性。《伯努利》**7**(5), 777–816 (2001)[18] Cardon-Weber, C.: Cahn–Hilliard 随机方程：密度的严格正性。《随机过程与随机报告》**72**(3-4), 191–227 (2002)[19]Printems, J.: 抛物型随机偏微分方程的时间离散。《数学建模与数值分析》**35**(6), 1055–1078 (2001)[20] Cui, J., Hong, J., Sun, L.: 加性噪声驱动的随机 Cahn–Hilliard 方程全离散的强收敛。SIAM J. Numer. Anal. **59**(6), 2866–2899 (2021)[21] Furihata, D., Kovács, M., Larsson, S., Lindgren, F.: 随机 Cahn–Hilliard 方程全离散有限元近似的强收敛。SIAM J. Numer. Anal. **56**(2), 708–731 (2018)[22] Qi, R., Wang, X.: Cahn–Hilliard–Cook 方程半离散和全离散有限元方法的误差估计。SIAM J. Numer. Anal. **58**(3), 1613–1653 (2020)[23] Feng, X., Li, Y., Zhang, Y.: 具有梯度型乘性噪声的随机 Cahn–Hilliard 方程全离散混合有限元方法。《科学计算杂志》**83**(1), 23–24 (2020)[24] Hong, J., Jin, D., Sheng, D.: 随机 Cahn–Hilliard 方程全离散有限差分方法的密度收敛。《数学计算》**93**(349), 2215–2264 (2024)[25] Zhou, L., Li, Y.: 一种求解由涉及二阶导数的一般乘性噪声驱动的随机 Cahn–Hilliard 型方程的局部间断伽辽金方法。Com- mun. Comput. Phys. **31**(2), 516–547 (2022)

[26]Goldys, B., Soenjaya, A.L., Tran, T.：一种求解带乘性噪声的某类四阶随机演化方程的混合有限元方法。arXiv:2505.04866 (2026)[27] Bréhier, C.-E., Cui, J., Wang, X.：随机 Cahn–Hilliard 方程全离散格式的弱误差估计。Commun. Math. Sci. (2025)，即将发表[28] Bréhier, C.-E., Cui, J., Hong, J.：随机 Allen–Cahn 方程半离散分裂逼近的强收敛率。IMA J. Numer. Anal. 39(4), 2096–2134 (2019)[29] Bréhier, C.-E., Goudenège, L.：随机 Allen–Cahn 方程若干分裂格式的分析。Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B 24(8), 4169–4190 (2019)[30] Shen, J., Xu, J.：梯度流标量辅助变量（SAV）格式的收敛性与误差分析。SIAM J. Numer. Anal. 56(5), 2895–2912 (2018)[31] Shen, J., Xu, J., Yang, J.：梯度流的标量辅助变量（SAV）方法。J. Comput. Phys. 353, 407–416 (2018)[32] Cui, J., Hong, J., Sun, L.：随机非线性 Klein–Gordon 方程的随机标量辅助变量方法。Stoch. Partial Differ. Equ. Anal. Comput. 13, 1607–1639 (2025)[33] Metzger, S.：一种收敛的随机标量辅助变量方法。IMA J. Numer. Anal. 45(4), 2404–2469 (2025)[34] Metzger, S.：带乘性噪声的随机 Allen–Cahn 方程全离散 SAV 格式的强误差估计。ESAIM Math. Model. Numer. Anal. 59, 2305–2327 (2025)[35] Metzger, S.：具有动态边界条件的 Cahn–Hilliard 方程的收敛 SAV 格式。IMA J. Numer. Anal. 43(6), 3593–3627 (2023)[36] Giles, M.B.：多层蒙特卡罗路径模拟。Oper. Res. 56(3), 607–617 (2008)[37]Kloeden, P.E., Platen, E.：随机微分方程的数值解。数学应用（纽约），第 23 卷。Springer，柏林 (1992)[38] Metzger, S.：一种用于描述接触线张力的动态边界条件下随机 Cahn–Hilliard 方程的收敛增广 SAV 格式。arXiv 预印本，2407–20424 (2024) arXiv:2407.20424 [cs.NA][39] Kruse, R.：半线性随机演化方程的强逼近与弱逼近。数学讲义，第 2093 卷，第 177 页。Springer, Cham

(2014)

[40]Yagi, A.：《抽象抛物型演化方程及其应用》。Springer，柏林（2009）[41] Elliott, C.M., Stuart, A.M.：离散半线性抛物方程的整体动力学。SIAM J. Numer. Anal. **30**(6), 1622–1663（1993）https://doi.org/10.1137/0730084[42]Adams, R.A., Fournier, J.J.F.：《索伯列夫空间》，第2版。纯粹与应用数学（阿姆斯特丹），第140卷。爱思唯尔／学术出版社，阿姆斯特丹（2003）[43]Shen, J., Tang, T., Wang, L.-L.：《谱方法》。Springer 计算数学丛书，第41卷，第470页。Springer，海德堡（2011）。https://doi.org/10.1007/978-3-540-71041-7 。算法、分析与应用。https://doi.org/10.1007/978-3-540-71041-7[44] Antonopoulou, D., Baňas, L., Nürnberg, R., Prohl, A.：尖锐界面极限附近随机 Cahn–Hilliard 方程的数值近似。Numer. Math.**147**(3), 505–551（2021）[45] Cui, J., Wang,F.-Y.：改进尖锐界面极限附近随机反应扩散方程的数值误差界。arXiv 2412.12604, 2412–12604（2024）https://doi.org/10.48550/arXiv.2412.12604arXiv:2412.12604 [math.NA][46] Da Prato, G., Zabczyk, J.：《无限维随机方程》，第2版。数学及其应用百科全书。剑桥大学出版社，剑桥（2014）