恰有两个主特征值的符号图：单圈情形

Zenan Du[1, *], **Fenjin Liu**[2], **Hechao Liu**[3], **Jifu Lin**[4], **Wenxu Yang**[5]

[1] 山西大学数学与统计学院，山西，030006，中国，[2] 长安大学理学院，西安，710064，中国，[3] 湖北师范大学数学与统计学院，黄石，435002，中国，[4] 华南师范大学数学科学学院，广州，510631，中国，[5] 神农科技集团有限公司太原分公司，山西，030006，中国 电子邮箱： duzn@sxu.edu.cn, fenjinliu@163.com, hechaoliu@yeah.net,2023021893@m.scnu.edu.cn, amber130120@icloud.com

[*] 通讯作者

arXiv:2603.04063v1 [math.CO] 4 Mar 2026

摘要 符号图 S 的一个特征值 λ 称为主特征值，如果其特征子空间不与全一向量 j正交。刻画恰有 k （$1 \le k \le n$）个不同主特征值的符号图，是代数与图论中的一个问题，自 2020 年以来一直受到研究。Du 等人（2024年、2026年）通过分析一类基图为树的多重图，刻画了恰有两个主特征值的一类符号图。本文将这项研究扩展到关联多重图的基图为单圈图的情形，并在最后提出若干未解决问题。

关键词： 符号图；多重图；主特征值；单圈；游走矩阵

AMS 学科分类： 05C22,05C50

1 引言

设 G 是一个阶为 n 的简单图（不含重边和自环），其顶点集为 $V(G)$，边集为 $E(G)$。若顶点 v_i 与 v_j 相邻，则记作$v_i \sim v_j$ （否则记作 $v_i \nsim v_j$），那么 $e = v_i v_j$ 是属于 $E(G)$ 的一条边。对于 $\sigma: E(G) \to \{-1, +1\}$， $S = (G, \sigma)$ 称为由底层图 G 导出的符号图，其中每条边都带有正号或负号。

若图 H 中的 $E(H)$ 不一定由互不相同的顶点对组成，则称其为 多重图；此时允许存在重边，因此 $E(H)$ 是一个多重集。对于多重图H，令 $w_H(u, v)$（简记为 $w(u, v)$）表示顶点 u和 v之间的边数。于是，简单图 G 或符号图 S 都可以视为特殊的多重图

其中 $w(u,v)=1$对所有边 uv均成立。对于任意顶点 $v\in V(H)$，令 $N_H(v)$（简记为 $N(v)$）表示 v 在 H 中的邻域集（由互不相同的顶点组成），令 $d_H(v)$（简记为 $d(v)$）表示与 v关联的边在 H中的数量。显然，$|N(v)|\le d(v)=\sum w(u,v)$，$u\sim v$且等号成立当且仅当对任意 $u\sim v$，$w(u,v)=1$成立。若对任意 u，$w(u,v)\in\{0,1,2\}$成立，则称 H为一个 (0, 1, 2)-多重图。令 H°为多重图 H的基本图（简称 B-图），其中 H°由 H 将平行边替换为单条边得到。于是 H°是一个满足 $V(H)=V(H^\circ)$ 的简单图，因此 H、H° 具有相同的连通性。

设 S 为符号图，其底层图 G 的阶为 n。S的邻接矩阵$A(S)=(s_{ij})$是一个对称的 (0，1，-1) 矩阵，其中，当 $v_i\sim v_j$且 v_iv_j为正边时，$s_{ij}=1$；当 $v_i\sim v_j$ 且 v_iv_j 为负边时，$s_{ij}=-1$；当 $v_i\nsim v_j$时，$s_{ij}=0$。S 的特征值 是其邻接矩阵 $A(S)$ 的特征值。

设 M 为实对称矩阵。若 M 的特征值 λ对应的特征子空间 $\varepsilon_M(\lambda)$与全一向量 $j=[1,1,\ldots,1]^T$不正交，则称该特征值为主特征值，且此定义与 λ的重数无关。简单图 G、符号图 S和多重图 H 的主特征值，分别是其邻接矩阵 $A(G)$、$A(S)$ 和 $A(H)$ 的主特征值。

1978年，Cvetkovi´c 注意到，G 恰有一个主特征值，当且仅当G 是正则图。此外，他提出了以下长期悬而未决的问题：刻画恰有 k $(2\le k\le n)$个不同主特征值的图 [3]。迄今为止，这个问题吸引了许多学者的关注。对于阶为 n 且恰有两个不同主特征值的图，可参见 [12, 14–18, 20]；对于阶为 n 且恰有 $n-1$个不同主特征值的图，可参见 [7–9, 19, 21, 26]；对于阶为 n且有 n个不同主特征值的图，可参见 [4, 5, 13, 24], 等。

图 G 的自同构是顶点集 $V(G)$上的一个置换 π，使得顶点对 $v_i\sim v_j$ 当且仅当 $\pi(v_i)\sim\pi(v_j)$。图G 的所有自同构在复合运算下构成一个群，称为图 G的自同构群，记作 Aut(G)。若存在自同构 $\pi\in$Aut(G)，使得 $\pi(v_i)=v_j$，则两个顶点 v_i，$v_j\in V(G)$属于同一个轨道。1999年，Cvetkovi´c 和 Fowler [6]证明，图 G的不同主特征值个数不超过 Aut(G) 将 $V(G)$ 划分所得的轨道数。

对于一个阶为 n的简单图 G，从顶点 u 到顶点 v 的一条长度为 k 的游走，是一个顶点序列 $v_1v_2\ldots,v_kv_{k+1}$（顶点不一定互异），满足 $u=v_1,v=v_{k+1}$，且对每个 $1\le i\le k$都有 $v_i\sim v_{i+1}$。图 G 的游走矩阵是 $n\times n$ 矩阵 $W(G)=\left[j,Aj,A^2j,\cdots,A^{n-1}j\right]$，其中 $A=A(G)$。值得一提的是，2002年，Hagos [17]证明，图 G 的不同主特征值的个数等于其游走矩阵 $W(G)$的秩。

基于对简单图主特征值的研究，一个自然的问题是刻画恰有 k （$\leq n$）个不同主特征值的符号图。设 $d^+_{v_i}$（$d^-_{v_i}$）为符号图 S中与 v_i 关联的正（负）边数。差值 $d^+_{v_i} - d^-_{v_i}$ 称为 v_i 的净度；若 S 的所有顶点净度相同，则称 S 为净正则。2020年，Stani´c [23] 注意到，符号图恰有一个主特征值，当且仅当它是净正则图。近年来，论文 [1,2,10,25] 研究了符号图的主特征值。

~设 S 是一个符号图， S 是 S 的关联多重图，其邻接矩阵为 ~ ~ ~A（S）$= J - I - A$（S），即对于任意顶点 u、$v \in V$（S），若 $w_{\tilde{S}}$（u，v）$= i$，则当且仅当 A（S）$_{uv} = i$ 对 ~$i \in \{0, 1, 2\}$ 成立。由于 A（S）是一个对称的 (0, 1，-1)-矩阵， A（S）是一个对称的 (0, 1, 2)-~矩阵，因此我们称相应的关联多重图 S 为一个 (0, 1, 2)-多重图。根据 S 和 S 的定义，Du 等人 [10] 得到了以下结果。

~**命题1.1** ([10]) 设 S 是一个阶为 n 的符号图， S 是其关联(0，1，2)-多重图 S。那么

(1) 存在一个从阶为 n 的符号图集合到阶为 n的(0，1，2)-多重图集合的双射；~(2) S 和 S 具有相同数量的不同主特征值。

根据命题1.1，研究恰有 k （$\leq n$）个不同主特征值的阶为 n的符号图，可以转而研究恰有 k（$\leq n$）个不同主特征值的阶为 n 的（0，1，2）-多重图。在 [10], 中，作者基于 [23]中的定理2.1，研究了 $k = 2$ 的充分必要条件。

定理1.2 ([10]) 设 H 是一个阶为 n (≥ 2) 的多重图， A ($= A(H)$) 是其邻接矩阵， s (v) 是 H 中从 $v \in V(H)$出发的长度为2 的游走数。则以下三个条件等价。

(1) H 恰有两个不同主特征值。(2) j 不是 A 的特征向量，且$(A^2 - aA - bI)j = 0$ 对某些整数 a、b成立。(3) 存在整数 a、b 使得

$$ad(v) + b = s(v) = \sum_{u \sim v} w(u, v)d(u) \tag{1.1}$$

对任意顶点 $v \in V(H)$ 均成立，且 j 不是 A的特征向量。

特别地，若 H 是一个阶为 $n \geq 3$ 的(0,1, 2)-多重图，且 H 的 B-图是一棵树，那么当且仅当存在整数 a、b，使得式(1.1) 对任意顶点 $v \in VH$ 都成立时， H 恰有两个不同主特征值。

命题 1.3 ([10]) 设 H 是一个阶为 $n\ (\geq 3)$ 且恰有两个不同主特征值的 $(0,\ 1,\ 2)$-多重图，其中 B-图的邻集 H 是一棵树， $P = v_0v_1\cdots v_l$ 是 H 的最长路径，且 a、b 是满足 (1.1) 的整数，对任意 $v \in V(H)$ 均成立。则：(1) $a \geq 0$；(2) 若 $a = 0$，则 $b > 0$；若 $b = 0$，则 $a > 0$。

根据命题 1.3，只需研究 a， b上的以下四种情形：**(1)** $a = 0$与 $b > 0$；**(2)** $a = 1$ 与 $b \neq 0$；**(3)** $a \geq 2$ 与 $b \neq 0$；**(4)** $a > 0$ 与 $b = 0$。情形 **(1)-(2)** 与 **(3)** 已分别在 [10] 与 [11] 中得到解决，而情形 **(4)** 仍未解决。

本文研究前述 **(0，1，2)**-多重图具有单圈 B-图的情形，并提出若干问题。

2 预备知识

v-路径 是一条以 v为初始顶点的路径。设 T是阶为 n的树， $P_{l+1} = v_0v_1\cdots v_l$($2 \leq l \leq n-1$)是 T中长度为 l的路径。现令$1 \leq k \leq \lfloor \frac{l}{2} \rfloor$、 $v \in N_T(v_k)\backslash\{v_{k+1}\}$与 P_t 为 $T - v_k$中最长的 v-路径。则称 v是 T中的一个$(v_k,\ t)$-顶点 。

例如， v_0是树 T^* 中的一个（v_1，**1**）-顶点， v_3是一个（v_4，**4**）-顶点（见图 **1**）。

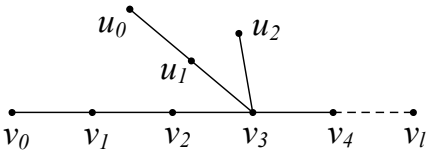


图 **1**：树 T^*。

以下结果既有用又有趣。

引理 2.1 （ [10]）设 T是阶为 n的树， $P_{l+1} = v_0v_1\ldots v_l$（$2 \leq l \leq n-1$）是 T中长度为 l的路径，且对任意 $v \in \begin{cases} N_T(v_k)\backslash\{v_{k+1}\}, & \text{若 } 1 \leq k \leq \lfloor \frac{l}{2} \rfloor, \\ N_T(v_k)\backslash\{v_{k-1}\}, & \text{若 } \lfloor \frac{l}{2} \rfloor + 1 \leq k \leq l-1, \end{cases}$ P_t 是 $T - v_k$的最长 v-路径。则 P_{l+1} 是 T 的最长路径当且仅当 $t \leq \begin{cases} k, & \text{若 } 1 \leq k \leq \lfloor \frac{l}{2} \rfloor, \\ l-k, & \text{若 } \lfloor \frac{l}{2} \rfloor + 1 \leq k \leq l-1. \end{cases}$

在简单图中，悬挂顶点是度为 **1** 的顶点。若 v 是 H 的 B-图中的悬挂顶点，则称 v 是 H 中的悬挂顶点。若 $v_0v_1\ldots v_{l-1}v_l$ 是 H 的最长路径，那么对于任意顶点 $u \in N(v_1)\backslash\{v_2\}$， u 是悬挂顶点，记作（v_1，**1**）-顶点。若 $v \in V(H)$ 是 B-图中的（v_k， t）-顶点，则称 $v \in V(H)$ 是 H 中的（v_k， t）-顶点。

引理 2.2 （[10]）设 H、a、b 如命题 1.3 中所述，u、$v \in N$（v_1）是 H 的悬挂顶点。若 w（u、v_1）$=1$ 且 w（v、v_1）$=2$，则 $b=0$。

引理 2.3 ([10]) 设 H、a、b 如命题 1.3、v_1、$v_2 \in V(H)$ 所述，其中 $v_1 \sim v_2$；对于任意顶点 $v \in N(v_1)\backslash\{v_2\}$，$v$ 是一个悬挂顶点。则 v_1 和 v_2 满足以下六个条件之一：

(1) $w(v_1,v_2)=1$, $w(v,v_1)=1$ 对于任意顶点 $v \in N(v_1)\backslash\{v_2\}$, $d(v_1)=a+b(\geq 2)$ 以及 $d(v_2)=a(a+b-1)+1$;
(2) $w(v_1,v_2)=1$, $w(v,v_1)=2$ 对于任意顶点 $v \in N(v_1)\backslash\{v_2\}$, $d(v_1)=a+\frac{b}{2}(\geq 3)$ 为奇数，且 $d(v_2)=a(a+\frac{b}{2}-2)+2$;
(3) $w(v_1,v_2)=2$, $w(v,v_1)=1$ 对任意顶点 $v \in N(v_1)\backslash\{v_2\}$, $d(v_1)=a+b(\geq 3)$ 且$d(v_2)=\frac{1}{2}a(a+b-1)+1$;
(4) $w(v_1,v_2)=2$, $w(v,v_1)=2$ 对任意顶点 $v \in N(v_1)\backslash\{v_2\}$, $d(v_1)=a+\frac{b}{2}(\geq 4)$ 均为偶数，且 $d(v_2)=\frac{1}{2}a(a+\frac{b}{2}-2)+2$;
(5) $w(v_1,v_2)=1$，存在至少一个顶点 $v \in N(v_1)\backslash\{v_2\}$ 满足 $w(v,v_1)=1$，且 $k_1(\geq 1)$ 个顶点 $v' \in N(v_1)\backslash\{v_2\}$ 满足 $w(v',v_1)=2$, $d(v_1)=a(\geq 2k_1+2)$ 且 $d(v_2)=a^2-a+1-2k_1$;
(6) $w(v_1,v_2)=2$，至少存在一个顶点 $v \in N(v_1)\backslash\{v_2\}$ 满足 $w(v,v_1)=1$以及 $k_2(\geq 1)$ 个顶点 $v' \in N(v_1)\backslash\{v_2\}$ 满足 $w(v',v_1)=2$, $d(v_1)=a(\geq 2k_2+3)$ 和 $d(v_2)=\frac{1}{2}(a^2-a+2-2k_2)$。

在下文中，我们分别将引理 2.3 中 (i) 的 $d(v_1)$ $d(v_2)$ 记为 $d_{v_1}^{(i)}$，$d_{v_2}^{(i)}$和 $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$。

引理 2.4 ([10]) 设 H、a、b 如命题 1.3 中所述，v_2 为一个 $(v_3$、$3)$-顶点，v_1、$v_1' \in N(v_2)\backslash\{v_3\}$ 为 H、v_1 中的$(v_2$、$2)$-顶点，且 v_2、v_1'和 v_2 分别满足引理 2.3 中的(i)、(j) 条件。则 $i=j$。

注记 2.5 由 [10], 中引理 2.4 的证明可知，对于任意的i、$j \in \{1,2,3,4,5,6\}$ 和 $i \neq j$, $d_{v_2}^{(i)} \neq d_{v_2}^{(j)}$ 成立。

引理 2.6 ([10]) 设 H、a、$b(\neq 0)$ 如命题 1.3中所述，$Q=u_0u_1u_2\ldots u_l$ 是 H 的一条路径，且满足 $l \geq 3$。那么：
(1) 若 u_0 是一个$(u_1$，$1)$-顶点，则 $d(u_1) \in \{a+b, a+\frac{b}{2}\}$；(2) 若 u_1 是一个$(u_2$，$2)$-顶点，则对于某个 $i \in \{1,2,3,4\}$，$d(u_2)=d_{v_2}^{(i)}$。

3 主要结果

本节研究上述具有单圈 B-图且恰有两个主特征值的(0,1,2)-多重图 H 的情形。由于 H°（H的 B-图）

是单圈图，我们将其顶点集分解为

$$V(H) = V(H^\circ) = V(C) \cup V(F),$$

其中， C 是 H° 的唯一环， F 是森林。值得注意的是， $|V(F)| = 0$ 也是一种可行的情况。

与命题 1.3 类似，我们有以下结果。

命题 3.1 设 H 是一个阶为 $n\ (\geq 3)$ 且恰有两个不同主特征值的(0,1,2)-多重图，并假设其 B-图是单圈的。设 a、 b 是满足(1.1) 的整数，其中任意 $v \in V(H)$均成立。于是，对 H 的结构分析可归结为以下四种情形：(1) $a = 0$ 和 $b > 0$；(2) $a = 1$ 和 $b \neq 0$；(3) $a \geq 2$ 和 $b \neq 0$；(4) $a > 0$ 和$b = 0$。

在第 3.1 和 3.2 小节中，我们分别研究情形 $|V(F)| = 0$ 和 $|V(F)| \neq 0$。

3.1 $|V(F)| = 0$

设 C_n 为阶为 $n\ (\geq 3)$ 的环。由于 C_n 是 2-正则的，且恰有一个主特征值 2，以下注记显然成立。

注 3.2 设 H、 a、 b 如命题 3.1 中所述。若 H 的 B-图是 C_n，则存在顶点 u、 $v \in V$（H），使得 w（u、 v） $= 2$。

在本小节中，若 n为偶数，则令 $V(H) = V(C) = \{u_1, u_2, \ldots, u_{\frac{n}{2}}, v_1, v_2, \ldots, v_{\frac{n}{2}}\}$和 $u_1u_2\cdots u_{\frac{n}{2}}v_{\frac{n}{2}}\cdots v_2\, v_1u_1$为 H的游走；若 n为奇数，则令 $V(H) = V(C) = \{u_1, u_2, \ldots, u_{\frac{n-1}{2}}, v_1, v_2, \ldots, v_{\frac{n-1}{2}}, x\}$和 $u_1u_2\cdots u_{\frac{n-1}{2}}\, xv_{\frac{n-1}{2}}\cdots v_2v_1u_1$为 H的游走。

由注 3.2 可知，不妨设 $w(u_1, v_1) = 2$。那么以下四种情形之一成立：

(i) $w(u_1, u_2) = 1$ 且 $w(v_1, v_2) = 1$；
(ii) $w(u_1, u_2) = 1$ 且 $w(v_1, v_2) = 2$；
(iii) $w(u_1, u_2) = 2$ 且 $w(v_1, v_2) = 1$；
(iv) $w(u_1, u_2) = 2$ 且 $w(v_1, v_2) = 2$。

引理 *3.3* 设 H、 a、 b 如命题 *3.1* 中所述，其中 $V(H) = V(C)$。若 $w(u_1, u_2) = w(v_1, v_2)$，则对 $2 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$，有 $w(u_i, u_{i+1}) = w(v_i, v_{i+1})$。此外，若 n 为奇数，则 $w(u_{\frac{n-1}{2}}, x) = w(v_{\frac{n-1}{2}}, x)$。

证明。 显然 $d(u_1) = d(v_1)$。我们通过对 $i\ (2 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1)$ 的归纳假设来证明这一点。

由 (1.1)，我们有

$$\begin{cases} a \cdot d(u_1) + b = s(u_1) = 2d(v_1) + w(u_1, u_2)d(u_2) \\ a \cdot d(v_1) + b = s(v_1) = 2d(u_1) + w(v_1, v_2)d(v_2). \end{cases}$$

那么，根据 $d(u_1) = d(v_1)$ 和 $w(u_1, u_2) = w(v_1, v_2)$，$d(u_2) = d(v_2)$。显然，根据 $d(u_2) = d(v_2)$ 和 $w(u_1, u_2) = w(v_1, v_2)$，$w(u_2, u_3) = w(v_2, v_3)$。于是结论对 $i = 2$ 成立。

假设结论对 $i \leq k (2 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2)$ 成立。根据归纳假设，我们有 $w(u_{k-2}, u_{k-1}) = w(v_{k-2}, v_{k-1})$、$w(u_{k-1}, u_k) = w(v_{k-1}, v_k)$ 以及 $w(u_k, u_{k+1}) = w(v_k, v_{k+1})$，因此 $d(u_{k-1}) = d(v_{k-1})$ 且 $d(u_k) = d(v_k)$。然后由 (1.1)，我们有

$$\begin{cases} a \cdot d(u_k) + b = s(u_k) = w(u_{k-1}, u_k)d(u_{k-1}) + w(u_k, u_{k+1})d(u_{k+1}), \\ a \cdot d(v_k) + b = s(v_k) = w(v_{k-1}, v_k)d(v_{k-1}) + w(v_k, v_{k+1})d(v_{k+1}), \end{cases}$$

这意味着 $d(u_{k+1}) = d(v_{k+1})$。结合 $w(u_k, u_{k+1}) = w(v_k, v_{k+1})$，可得$w(u_{k+1}, u_{k+2}) = w(v_{k+1}, v_{k+2})$。于是结论对 $i = k + 1$ 成立。

根据上述讨论，不难看出，如果 n 为奇数，则 $w(u_{\frac{n-1}{2}}, x) = w(v_{\frac{n-1}{2}}, x)$，于是证明完成。■

在第 3.1.1、3.1.2、3.1.3 和 3.1.4 小节中，我们分别刻画了对应情形 (i)、(ii)、(iii) 和 (iv) 的 H 与 B-图为 C_n的情况。

现在，我们定义七种 (0, 1, 2)-多重图，分别记为 U_{4t}^1、U_{3t}^2、U_{3t}^3、U_{5t}^4、U_{4t}^5、U_{2t}^6、U_t^7（见图 2），其中 $t \geq 1$。我们用 $U = [n_1, n_2]$ 表示由子图 U' 循环连接构成的多重图 U。这里，$n_1 \geq 1$ 和 $n_2 \geq 0$ 是整数，子图 U' 由依次连接 n_1 条连续的平行边和 n_2 条连续的单边构成。这里的“循环连接”是指按一定顺序重复连接子图 U'，从而构成完整的多重图U。这七种多重图都遵循上述由平行边和单边循环连接而成的生成方法。事实上，$U_{4t}^1 = [1, 3]$、$U_{3t}^2 = [1, 2]$、$U_{3t}^3 = [2, 1]$、$U_{5t}^4 = [3, 2]$、$U_{4t}^5 = [3, 1]$、$U_{2t}^6 = [1, 1]$ 和 $U_t^7 = [1, 0]$。显然，t 是 U 中 U' 的数量，因此 $|V(U)| = (n_1 + n_2)t$。

命题3.4 设 U_{4t}^1、U_{3t}^2、U_{3t}^3、U_{5t}^4、U_{4t}^5、U_{2t}^6和 $U_t^7 (t \geq 1)$ 如上所定义。则U_{4t}^1、U_{3t}^2、U_{3t}^3、U_{5t}^4、U_{4t}^5恰有两个主特征值，U_{2t}^6、U_t^7恰有一个主特征值。

证明。 我们注意到 U_{2t}^6和 U_t^7是正则的，因此它们恰有一个主特征值。对于 U_{4t}^1，U_{3t}^2，U_{3t}^3，U_{5t}^4和 U_{4t}^5，容易验证，对于任意顶点 $v \in U^i (1 \leq i \leq 5)$，均有 $a \cdot d(v) + b = s(v)$，其中 a，b的取值见表1。因此，根据定理1.2，U_{4t}^1，U_{3t}^2，U_{3t}^3，U_{5t}^4和 U_{4t}^5恰有两个主特征值。■

表 1： a， b的取值。

$Graph$	U_{4t}^1	U_{3t}^2	U_{3t}^3	U_{5t}^4	U_{4t}^5
a	3	2	1	4	3
b	-1	2	8	-2	2

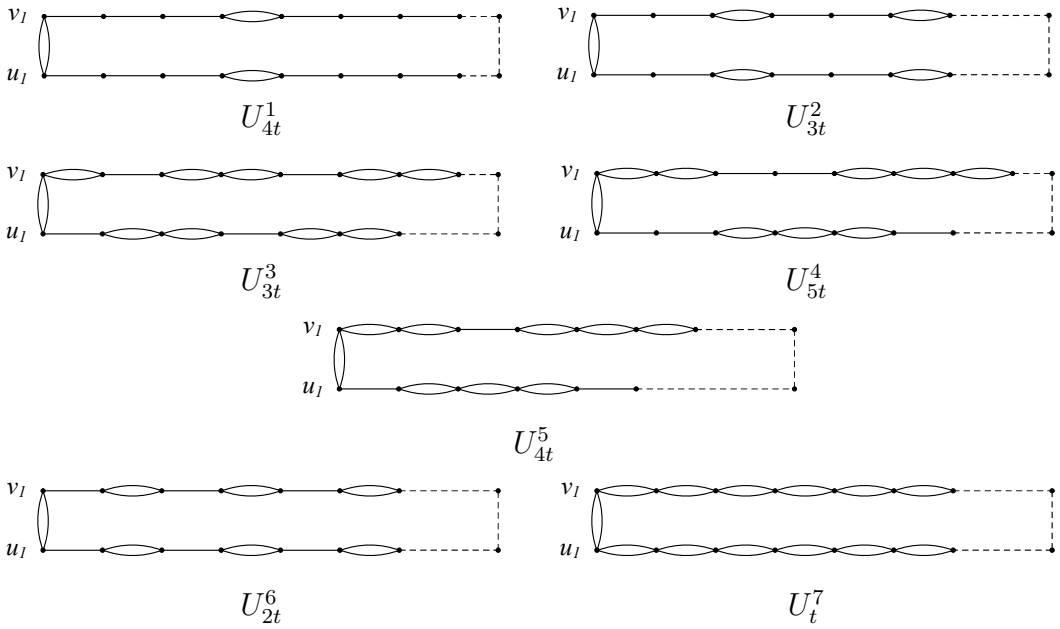


图 2：具有 $t \geq 1$ 的图 U_{4t}^1， U_{3t}^2， U_{3t}^3， U_{5t}^4， U_{4t}^5， U_{2t}^6， U_t^7。

3.1.1 $w(u_1, u_2) = 1$ **和** $w(v_1, v_2) = 1$

定理3.5 设 H, a, b 如命题 3.1中所述，其中 $V(H) = V(C)$。若 $w(u_1, u_2) = 1$且 $w(v_1, v_2) = 1$，则 $H \in \{U_{4t}^1, U_{3t}^2\}(t \geq 1)$。

证明。 显然， $d(v_1) = d(u_1) = 3$。由 (1.1)，可得

$$\begin{cases} ad(v_1) + b = s(v_1) = w(u_1, v_1)d(u_1) + w(v_1, v_2)d(v_2), \\ ad(v_2) + b = s(v_2) = w(v_1, v_2)d(v_1) + w(v_2, v_3)d(v_3). \end{cases} \tag{3.1}$$

接下来分以下两种情形完成证明。

情形 1. $w(v_2, v_3) = 1$。

现在 $d(v_2) = 2$。由 (3.1) 可得 $3a + b = s(v_1) = 2d(u_1) + d(v_2) = 8$ 和 $2a + b = s(v_2) = 3 + d(v_3)$，这意味着 $a = 5 - d(v_3)$。显然， $d(v_3) = 2$ 当且仅当$w(v_3, v_4) = 1$，而 $d(v_3) = 3$ 当且仅当 $w(v_3, v_4) = 2$。

子情形 1.1. $w(v_3, v_4) = 1$。

现在 $a = 3$，然后 $b = -1$ 由 $3a + b = 8$。根据(1.1)，我们有 $a \cdot d(v_3) + b = s(v_3) =$

$d(v_2)+d(\ v_4)$，这意味着 $d(v_4)\ =3$。于是 $w(v_4,\ \ v_5)\ =2$ 由 $d(v_4)\ =3$ 且 $w(v_3,\ \ v_4)\ =\ 1.$

依次将（1.1）应用于 $s(v_4)$、 $s(v_5)$、 $s(v_6)$、 $s(v_7)$和 $s(v_8)$，我们可以得到 $H[v_1,v_2,v_3,v_4,v_5]\cong H[v_5,v_6,v_7,v_8,v_9]$。依此类推，显然有 $H[v_5,v_6,v_7,v_8,v_9]\cong H[v_9,v_{10},v_{11},v_{12},v_{13}]\cong\cdots$。结合引理 3.3，我们得出 H 是通过反复扩展 $H[v_1,v_2,v_3,v_4,v_5]$生成的。因此， $n\ =\ |V(H)|\ =\ |E(H)|\ =|E(H[v_1,v_2,v_3,v_4,v_5])|t=4t\,(t\geq 1)$是偶数。

根据上述讨论以及 H的结构，容易验证 $H\cong U_{4t}^1\,(t\geq 1)$。

子情形 1.2. $w(v_3,v_4)\ =2$。

现在 $a=2$，然后 $b=2$ 由 $3a+b=8$。由(1.1)，我们有 $a\cdot d(v_3)\ +b=s(v_3)\ =d(v_2)+2d(v_4)$，从而推出 $d(v_4)\ =3$。然后 $w(v_4,v_5)\ =1$ 由 $d(v_4)\ =3$ 以及 $w(v_3,v_4)\ =2$。

依次将(1.1)应用于 $s(v_4)$、 $s(v_5)$、 $s(v_6)$和 $s(v_7)$，我们可以发现 $H[v_1,v_2,v_3,v_4]\cong H[v_4,v_5,v_6,v_7]$。如此继续，显然 $H[v_4,v_5,v_6,v_7]\cong H[v_7,v_8,v_9,v_{10}]\cong\cdots$。结合引理 3.3，我们得出 H 是通过反复扩张 $H[v_1,v_2,v_3,v_4]$ 生成的。因此， $n=|E(H[v_1,v_2,v_3,v_4])|t=3t$ 为奇数，且 $H\cong U_{3t}^2\,(t\geq 1)$。

情形 2。 $w(v_2,v_3)\ =2.$

现在 $d(v_2)\ =\ 3$。然后由 (3.1)，我们有 $3a+b\ =\ s(v_1)\ =\ 2d(u_1)\ +d(v_2)\ =\ 9$ 以及 $3a+b\ =\ s(v_2)\ =\ 3+2d(v_3)$，这意味着 $d(v_3)\ =\ 3$。然后 $w(v_3,v_4)\ =\ 1$ 由$d(v_3)\ =3$ 以及 $w(v_2,v_3)\ =2$。依次将 (1.1) 应用于 $s(v_3)$ 和 $s(v_4)$，我们可以发现 $H[v_1,v_2,v_3]\cong H[v_3,v_4,v_5]$。如此继续，显然 $H[v_3,v_4,v_5]\cong H[v_5,v_6,v_7]\cong\cdots$。结合引理 3.3，我们得出 H 是通过反复扩展$H[v_1,v_2,v_3]$生成的。因此， $n=|E(H[v_1,v_2,v_3])|t=2t$ 为偶数且 $H\cong U_{2t}^6\,(t\geq 1)$。然而，$U_{2t}^6$ 是 3-正则的，并且恰好有一个主特征值，矛盾。 ■

3.1.2 $w(u_1,\ \ u_2)\ =1$ 和 $w(v_1,\ \ v_2)\ =2$

定理 3.6 设 H,a,b 如命题 3.1中所述，其中 $V(H)\ =V(C)$。若 $w(u_1,u_2)\ =1$且 $w(v_1,v_2)=2$，则 $H\in\{U_{3t}^3,U_{5t}^4,U_{4t}^5\}\,(t\geq 1)$。

证明。显然， $d(u_1)=3$ 且 $d(v_1)\ =4$。由 (1.1)，可得

$$\begin{cases} ad(u_1)+b=s(u_1)=w(u_1,v_1)d(v_1)+w(u_1,u_2)d(u_2), \\ ad(v_1)+b=s(v_1)=w(v_1,u_1)d(u_1)+w(v_1,v_2)d(v_2). \end{cases} \tag{3.2}$$

下面分两种情形完成证明。

情形 1. $w(v_2,\ \ v_3)\ =1.$

现在 $d(v_2)\ =3$。由 (3.2)，可得 $3a+b=8+d(u_2)$ 和 $4a+b=12$，这意味着 $a=4-d(u_2)$。由于 $w(u_1,\ \ u_2)\ =1$，可得 $d(u_2)\ \in\{2,3\}$，因此 $a\in\{1,2\}$。

由 (1.1)，我们有 $a\cdot d(v_2)+b=s(v_2)\ =2d(v_1)+d(v_3)$，这意味着 $3a+b=8+d(v_3)$。因此， $d(u_2)\ =d(v_3)$。

若 $d(u_2) = d(v_3) = 2$，则 $a = 2$，进而由 $3a + b = 8 + d(v_3)$ 得到 $b = 4$。已知 $w(v_3, v_4) = 1$ 由 $w(v_2, v_3) = 1$ 以及 $d(v_3) = 2$。于是由 (1.1)，我们有$ad(v_3) + b = s(v_3) = w(v_2, v_3)d(v_2) + w(v_3, v_4)d(v_4)$，这意味着 $d(v_4) = 5$。然而，显然对于任意 $v \in V(H)$，都有 $d(v) \leq 4$，因为 H 的 B-图是 C_n，矛盾。

如果 $d(u_2) = d(v_3) = 3$，则容易验证 $a = 1$、 $b = 8$ 和 $w(v_3, v_4) = 2$。依次将 (1.1) 应用于 $s(v_3)$、 $s(v_4)$ 和 $s(v_5)$，可得 $H[u_1, v_1, v_2, v_3] \cong H[v_3, v_4, v_5, v_6]$。依此类推，显然 $H[v_3, v_4, v_5, v_6] \cong H[v_6, v_7, v_8, v_9] \cong \cdots$。另一方面，由 $H[u_1, u_2, u_3] \cong H[v_2, v_3, v_4]$ 并经过类似讨论，可推得 $H[v_3, v_4, v_5, v_6] \cong H[u_2, u_3, u_4, u_5] \cong H[u_5, u_6, u_7, u_8] \cong \cdots$。因此， H 是通过不断扩展 $H[u_1, v_1, v_2, v_3]$ 生成的，并且 $n = |E(H[u_1, v_1, v_2, v_3])|t = 3t\ (t \geq 1)$ 为奇数。因此，$H \cong U^3_{3t}$。

情形 2. $w(v_2, v_3) = 2$。

现在 $d(v_2) = 4$。由 (3.2)，可得 $3a + b = 8 + d(u_2)$ 和 $4a + b = 14$，这意味着 $a = 6 - d(u_2)$。由于 $w(u_1, u_2) = 1$，可得 $d(u_2) \in \{2, 3\}$，因此 $a \in \{3, 4\}$。

由 (1.1)，可得 $4a + b = s(v_2) = w(v_1, v_2)d(v_1) + w(v_2, v_3)d(v_3)$，这意味着$d(v_3) = 3$ 由 $4a + b = 14$。因此， $w(v_3, v_4) = 1$。

子情形 2.1. $w(u_2, u_3) = 1$。

现在 $d(u_2) = 2$， $a = 4$ 由 $a = 6 - d(u_2)$，进一步由 $4a + b = 14$ 可得 $b = -2$。由 (1.1)，可得 $3a + b = s(v_3) = w(v_2, v_3)d(v_2) + w(v_3, v_4)d(v_4)$，这意味着 $d(v_4) = 2$。于是$w(v_3, v_4) = w(v_4, v_5) = 1$。类似地，可由 $2a + b = s(v_4) =$ 推得 $d(v_5) = 3\, w(v_3, v_4)d(v_3)+w(v_4, v_5)d(v_5)$。于是 $w(v_5, v_6) = 2$。依次将 (1.1) 应用于 $s(v_5)$、 $s(v_6)$、 $s(v_7)$、$s(v_8)$ 和 $s(v_9)$，可知 $H[u_1, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5] \cong H[v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}]$。以此类推，显然 $H[v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}] \cong H[v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}] \cong \cdots$。另一方面，由于 $H[v_1, u_1, u_2, u_3] \cong H[v_2, v_3, v_4, v_5]$ 并经过类似讨论，可推得 $H[v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8] \cong H[u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6] \cong H[u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{11}] \cong \cdots$。因此， H 是通过反复扩展 $H[u_1, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5]$ 生成的，并且 $n = |E(H[u_1, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5])|t = 5t\ (t \geq 1)$ 为奇数。因此， $H \cong U^4_{5t}$。

子情形 2.2。 $w(u_2, u_3) = 2$。

现在， $d(u_2) = 3$， $a = 3$ 通过 $a = 6 - d(u_2)$，并进一步通过 $4a + b = 14$ 实现 $b = 2$。由（1.1）可得， $3a + b = s(v_3) = w(v_2, v_3)d(v_2) + w(v_3, v_4)d(v_4)$，这意味着 $d(v_4) = 3$，从而 $w(v_4, v_5) = 2$。

依次将 (1.1) 应用于 $s(v_4)$、 $s(v_5)$、 $s(v_6)$ 和 $s(v_7)$，可得 $H[u_1, v_1, v_2, v_3, v_4] \cong H[v_4, v_5, v_6, v_7, v_8]$。依此类推，显然 $H[v_4, v_5, v_6, v_7, v_8] \cong H[v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}] \cong \cdots$。另一方面，根据 $H[v_1, u_1, u_2, u_3] \cong H[v_2, v_3, v_4, v_5]$ 并作类似讨论，可推出 $H[v_3, v_4, v_5, v_6, v_7] \cong H[u_1, u_2, u_3, u_4, u_5] \cong H[u_5, u_6, u_7, u_8, u_9] \cong \cdots$。因此， H 是通过反复扩展 $H[u_1, v_1, v_2, v_3, v_4]$ 生成的，并且 $n = |E(H[u_1, v_1, v_2, v_3, v_4])|t = 4t\ (t \geq 1)$ 为偶数。因此， $H \cong U^5_{4t}$。 ■

3.1.3 $w(u_1, u_2) = 2$ 和 $w(v_1, v_2) = 1$

与第 3.1.2 小节类似，此处略去。

3.1.4 $w(u_1, u_2) = w(v_1, v_2) = 2$

定理 3.7 设 H, a, b 如命题 3.1 中所述，其中 $V(H) = V(C)$。若 $w(u_1, u_2) = w(v_1, v_2) = 2$，则 $H \in \{U_{5t}^4, U_{4t}^5\}(t \geq 1)$。

证明。显然，$d(u_1) = d(v_1) = 4$。由 (1.1)，可得

$$\begin{cases} ad(v_1) + b = s(v_1) = w(u_1, v_1)d(u_1) + w(v_1, v_2)d(v_2), \\ ad(v_2) + b = s(v_2) = w(v_1, v_2)d(v_1) + w(v_2, v_3)d(v_3). \end{cases} \tag{3.3}$$

接下来分以下两种情形完成证明。

情形 1. $w(v_2, v_3) = 1$.

现在 $d(v_2) = 3$。由 (3.3)，我们有 $4a + b = 14$ 和 $3a + b = 8 + d(v_3)$，进而有 $a = 6 - d(v_3)$。由 $w(v_2, v_3) = 1$，我们有 $d(v_3) \in \{2, 3\}$。

子情形 1.1. $d(v_3) = 2$.

现在 $w(v_3, v_4) = w(v_2, v_3) = 1$，$a = 4$ 由 $a = 6 - d(v_3)$，进而 $b = -2$ 由 $4a + b = 14$。通过与定理 3.6 的子情形 2.1 类似的讨论，我们有$H \cong U_{5t}^4$ $(t \geq 1)$。

子情形 1.2. $d(v_3) = 3$.

现在 $w(v_3, v_4) = 2$，$a = 3$ 由 $a = 6 - d(v_3)$，进而 $b = 2$ 由 $4a + b = 14$。通过与定理 3.6 的子情形 2.2 类似的讨论，我们有 $H \cong U_{4t}^5$ $(t \geq 1)$。

情形 2. $w(v_2, v_3) = 2$。

现在 $d(v_2) = 4$。由 (3.3)，我们有 $4a + b = 16$ 和 $4a + b = 8 + 2d(v_3)$，这意味着$d(v_3) = 4$。因此，$w(v_3, v_4) = 2$。接下来，我们通过对$k(3 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1)$使用归纳假设，证明 $d(v_k) = 4$。假设该结论对 $v_k(k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1)$成立，则我们有$d(v_k) = 4$ 且 $w(v_{k-1}, v_k) = w(v_k, v_{k+1}) = 2$。由 (1.1)，我们有 $16 = 4a + b = s(v_k) = 2d(v_{k-1}) + 2d(v_{k+1})$，这意味着 $d(v_{k+1}) = 4$。另一方面，由引理 3.3可推出$d(u_i) = 4$对于 $1 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 成立，且 $w(u_1, u_2) = w(v_1, v_2)$。容易验证，若 n为偶数，则$w(u_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, v_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}) = 2$；若 n为奇数，则 $w(u_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, x) = w(x, v_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}) = 2$。因此，$H \cong U_t^7(t \geq 1)$。然而，$U_t^7$ 是 4-正则图，且恰有一个主特征值，矛盾。

■

3.2 $|V(F)| \neq 0$

设 $G_{uv}G'$ 是由 $G \cup G'$ 添加一条连接 G 的顶点 u 与 G' 的顶点 v 的边得到的图。若 G' 是一棵树，则称 G' 为 $G_{uv}G'$ 的 悬挂树。

在本小节中，我们令 $H^\circ \cong H'_{uv}T$、 $v = v_l$、 $u = v_{l+1}$ 和 $Q = v_0v_1\cdots v_{l-1}v_l$ （$l \geq 0$）为 T 中最长的 v-路径。显然， H' 恰有一个诱导子图是一个环，我们将其记为 C。

注 3.8 在 *[10, 11],* 中，作者考虑了 H 的 B-图为树的情形，并在其命题、引理和定理中始终假设 $P = v_0v_1\cdots v_{l'}$ 表示 H 的最长路径（例如此处的命题 *1.3*）。由引理 *2.1* 可知，此假设意味着以下两个结论：

（I）任意顶点 $v \in N(v_i)\setminus\{v_{i+1}\}$ $(1 \leq i \leq \lfloor \frac{l'}{2} \rfloor)$ 都是某个 $t \in \{1, 2, \ldots, i\}$ 的 (v_i, t)-顶点；

（II）任意顶点 $v \in N(v_i)\setminus\{v_{i+1}\}$ $(\lfloor \frac{l'}{2} \rfloor + 1 \leq i \leq l' - 1)$ 都是某个 $t \in \{1, 2, \ldots, l' - i\}$的 (v_i, t)-顶点。

然而，由于图的对称性，在 *[10, 11]* 中证明主要结果时，实际上只需证明结论 (I)。

另一方面，我们将 $Q = v_0v_1\cdots v_{l-1}v_l\,(l \geq 0)$ 定义为 T 中最长的 v-路径，其中 $H^\circ \cong H'_{uv}T$、 $v = v_l$ 和 $u = v_{l+1}$。那么显然，任意顶点 $v' \in N(v_k)\setminus\{v_{k+1}\}(1 \leq k \leq l)$ 都是某个 $t \in \{1, 2, \ldots, k\}$ 的 (v_k, t)-顶点。

因此， Q 与 P 的前半部分具有相同的前提条件(即结论 (I))。由此可知，关于 $[10, 11]$ 中 P 的所有结果也适用于此处的 Q。

3.2.1 $a = 0$ 与 $b \neq 0$

引理 *3.9*（[10]）设 H、a、b 如命题 *1.3* 中所述， $P = v_0v_1\ldots v_l$ 为 H 中满足 $l \geq 3$ 的最长路径。若 $a = 0$，则对所有 k $(0 \leq k \leq \lfloor \frac{l}{2} \rfloor)$，我们有 $d(v_k) = \begin{cases} 2, & k \text{ 为偶数时} \\ b, & k \text{ 为奇数时} \end{cases}$，$w(v_0, v_1) = 2$， $w(v_k, v_{k+1}) = 1$ 对任意 $k \geq 1$ 成立，且对任意满足 $t \leq k$ 的顶点 $v \in N(v_k)\setminus\{v_{k+1}\}$， v 是一个 (v_k, t)-顶点，其中 k (≥ 1) 与 t 为奇数。此外，对任意满足 k 为奇数的顶点 $v \in N(v_k)\setminus\{v_{k-1}, v_{k+1}\}$ 以及任意满足 $u_{t-1} = v$、$u_t = v_k$ 的路径 $P' = u_0u_1\ldots u_{t-2}u_{t-1}u_t$，我们有 $d(u_r) = \begin{cases} 2, & r \text{ 为偶数时} \\ b, & r \text{ 为奇数时} \end{cases}$ 对 $0 \leq r \leq t-1$ 有 $w(u_0, u_1) = 2$， $w(u_r, u_{r+1}) = 1$ 对 $1 \leq r \leq t-1$ 成立，并且对任意顶点 $u \in N(u_r)\setminus\{u_{r+1}\}$， u 是一个满足 $s \leq r$ 的 (u_r, s)-顶点，其中 r $(1 \leq r \leq t-1)$ 与 s 为奇数。

引理 *3.10* 设 H, a, b 如命题 *3.1* 中所述， $H^\circ \cong H'_{uv}T$, $v = v_l$, $u = v_{l+1}$, $Q = v_0v_1\cdots v_{l-1}v_l (l \geq 0)$ 是 T 中最长的 v-路径。若 $a = 0$，则 l 为偶数， $d(v_i) = \begin{cases} 2, & i \text{ 为偶数} \\ b, & i \text{ 为奇数} \end{cases}$，$w(v_0, v_1) = 2$， $w(v_i, v_{i+1}) = 1$ 对于 $1 \leq i \leq l$ 成立，并且对于任意满足 $t \leq k$ 的顶点 $v' \in N(v_k)\setminus\{v_{k+1}\}$， v' 是一个 (v_k, t)-顶点，其中 $k(1 \leq k \leq l+1)$ 和 t 为奇数；此外，对于任意满足 k 为奇数的顶点 $v' \in N(v_k)\setminus\{v_{k-1}, v_{k+1}\}$ 以及任意路径 $Q' = u_0u_1\ldots u_{t-2}u_{t-1}u_t$

当 $u_{t-1}=v'$, $u_t=v_k$ 时，我们有 $d(u_r)=\begin{cases}2, & r \text{ 为偶数} \\ \frac{b}{2}; & \end{cases}$ 对于 $0\le r\le t-1$, $w(u_0,u_1)=2$,$w(u_r,u_{r+1})=1$，r 为奇数； $1\le \bar{r}\le t-1$ 时亦如此；对于任意顶点 $u\in N(u_r)\backslash\{u_{r+1}\}$， u 是一个 (u_r,s)-顶点，且 $s\le r$，其中 $r\,(1\le r\le t-1)$ 和 s 为奇数。

证明。我们通过以下两种情形完成证明。

情形 1. $l=0$。

若 $l=0$，则 $V(T)=\{v\}$。接下来我们证明 $w(u,v)=2$。假设 $w(u,v)=1$，则$d(v)=1$。由 (1.1)，可得 $b=s(v)=w(u,v)d(u)$，这意味着 $d(u)=b$。由 (1.1)，可得 $b=s(u)=w(u,v)d(v)+\sum_{u'\sim u,u'\neq v} w(u,u')d(u')$，其中 $w(u,v)+\sum_{u'\sim u,u'\neq v} w(u,u')=d(u)$。结合 $d(u)=b$，容易验证，对于任意 $u'\in N(u)\backslash\{v\}$， $w(u,u')=d(u')=1$ 。然而，至少存在一个顶点 $u'\in V(C)$，使得 $d(u')\ge 2$，矛盾。

若 $w(u,v)=2$，则由 (1.1) 可得 $b=s(v)=w(u,v)d(u)$，这意味着 $d(u)=\frac{b}{2}$。

情形 2. $l\ge 1$.

设 $V(H^\circ)=V(C)\cup V(F)$。由于 $v\in N(u)$，且存在两个顶点 $u_1,u_2\in N(u)\cap V(C)$，因此有 $d(u)\ge 3$。另一方面，由注 3.8 和引理 3.9 可知 $d(u)=d(v_{l+1})\in\{2,\frac{b}{2}\}$。因此，根据 $\frac{b}{2}\ge 3$， l 为偶数。结果的其余部分显而易见。■

现在我们定义 $\mathcal{H}^1(b,t)$（$b=4k+2\ge 6$ 和 $t\ge 4$ 均为偶数）为一组 (0,1,2)-多重图，使得对于任意 $H\in\mathcal{H}(b)$， H 满足以下三个条件：

(1) H° 是一个单圈图；

(2) 若令 $V(H^\circ)=V(C)\cup V(F)$，则对于任意一对邻接顶点 u,v， $w(u,v)=1$成立。C的顶点度为 2 或 $\frac{b}{2}(\ge 3)$，且交替出现；

(3) 令 $u,u_1,u_2\in V(C)$， $d(u)=\frac{b}{2}$, $N(u)=\{u_1,u_2,p_1,p_2,\dots,p_t\}(t\ge 1)$，并且对 $1\le i\le t$有 $H^\circ\cong H^i_{up_i}T_i$。若 $Q=v_0v_1\cdots v_{l-1}v_l(v_l=p_i)$ 是 T_i 中最长的 p_i-路径，则 l为偶数， $w(v_0,v_1)=2$, $w(v_l,u)=w(v_i,v_{i+1})$ 对 $1\le i\le l-1$成立；若 i 为偶数，则 $d(v_i)=2$，否则 $d(v_i)=\frac{b}{2}$。此外，若存在另一条 v_i-路径 $u_0u_1\cdots u_{m-2}u_{m-1}v_i(u_m=v_i)$，其悬挂顶点为 u_0 ，则 m $(\le i)$为奇数；若 j 为偶数，则 $d(u_j)=2$ ；若 j 为奇数，则 $d(u_j)=\frac{b}{2}$；对 $1\le j\le m-2$， $w(u_0,u_1)=2$, $w(u_{m-1},v_i)=w(u_j,u_{j+1})=1$ 成立；并且对于任意顶点 $u\in N(u_r)\backslash\{u_{r+1}\}$， u 是一个 (u_r,s)-顶点，其中 $r\,(1\le r\le m-1)$ 和s $(\le r)$均为奇数。

例如， H_1， H_2， H_3， $H_4\in\mathcal{H}^1(6,4)$ 和 $H_5\in\mathcal{H}^1(10,6)$（见图3）。

容易验证，对于任意顶点 $v\in H$， $0\cdot d(v)+b=s(v)$，其中 $H\in\mathcal{H}^1(b,t)$。由此，根据定理1.2可得以下结果。

命题3.11 设 $H\in\mathcal{H}^1(b,t)$。则 H 恰好有两个主特征值 s.

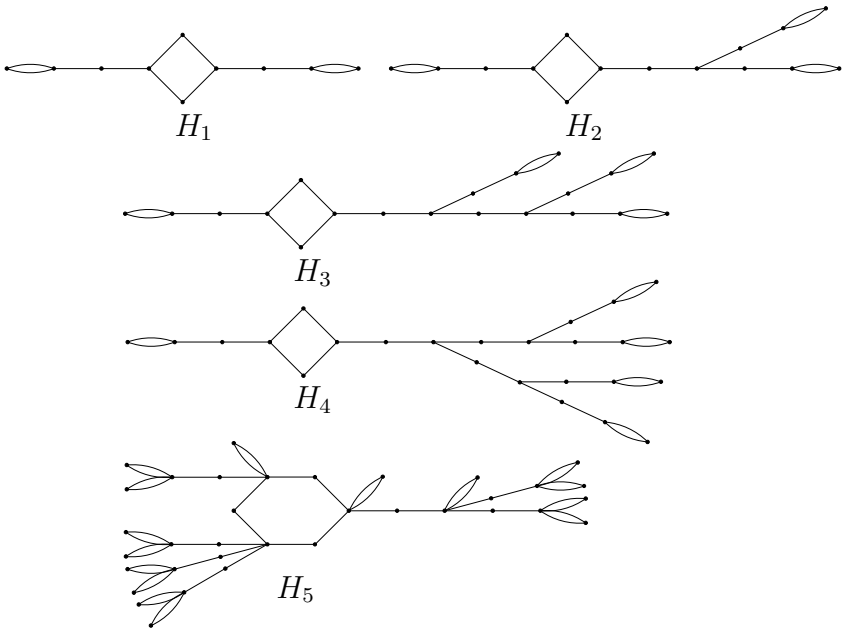


图3：图 H_1、H_2、H_3、H_4 和 H_5。

定理3.12 设 H、a、b 如命题 *3.1* 所述，$H^\circ \cong H'_{uv}T$、$v = v_l$、$u = v_{l+1}$、$Q = v_0v_1\cdots v_{l-1}v_l\,(l \geq 0)$ 为 T 中最长的 v-路径。若 $a = 0$，则 $H \in \mathcal{H}^1(b,t)$。

证明。根据 H° 的结构，不失一般性，我们可以假设 $V(H^\circ) = V(C) \cup V(T_1) \cup V(T_2) \cup \cdots \cup V(T_s)\,(s \geq 1)$。不失一般性，我们可以设 $N(u) = \{u_1, u_2, p_1, p_2, \ldots, p_t\}\,(t \leq s)$，且对于 $1 \leq i \leq t$ 有 $H^\circ \cong H^i{}_{up_i}T_i$，其中 u、u_1、$u_2 \in V(C)$ 以及 $p_i \in V(T_i)$。

设 $i \in \{1, 2, \ldots, t\}$。若 $Q = v_0v_1\cdots v_{l-1}v_l\,(l \geq 0)$ 是 T_i 中最长的 p_i-路径，其中 $p_i = v_l$、$u = v_{l+1}$，那么根据引理 3.10，我们知道 l 为偶数，$d(u) = \frac{b}{2}$，$d(p_i) = 2$，并且若 $l = 0$，则 $w(p_i,u) = \begin{cases} 2; & \text{若 } 1 \\ \end{cases}$ $l \geq 2$，则为。设 c_1、c_2 分别为 $N(u)\backslash\{u_1, u_2\}$ 中 $w(u,p_i) = 1$、$w(u,p_i) = 2$ 的顶点数。则根据 (1.1)，有 $b = s(u) = w(u,u_1)d(u_1)+w(u,u_2)d(u_2) + 2c_1 + 4c_2$，且 $\frac{b}{2} = d(u)_- = w(u,u_1) + w(u,u_2) + c_1 + 2c_2$，这意味着 $d(u_1) = d(u_2) = 2$。因此，根据 $d(u_1) \geq 2$ 和 $d(u_2) \geq 2$，有 $w(u,u_1) = w(u,u_2) = 1$。

设 $N(u_2) = \{u, u_3\}$。则 $w(u,u_2) = w(u_2,u_3) = 1$ 由 $d(u_2) = 2$ 和 $w(u,u_2) = 1$。由 (1.1)，我们有 $b = s(u_2) = w(u,u_2)d(u) + w(u_2,u_3)d(u_3)$，这意味着 $d(u_3) = \frac{b}{2}$。-设 $N(u_3) = \{u_2, u_4, q_1, q_2, \ldots, q_{t'}\}\,(t' \geq 1)$，其中 $u_4 \in V(C)$。然后通过与 u 类似的讨论，我们有 $d(u_4) = 2$ 和 $w(u_3,u_4) = w(u_4,u_5) = 1$。依此类推，容易验证 C 的顶点度要么为 2，要么为 $\frac{b}{2}$，并且它们交替出现。不仅如此，C 中度为 $\frac{b}{2}$ 的顶点与顶点 u 具有相同的结构特征。

另一方面，根据引理 3.10 可以推导出 H 的悬挂树的结构。因此，$H \in \mathcal{H}^1(b)$。

■

3.2.2 $a = 1$ 和 $b \neq 0$

引理 3.13 设 H、a、b 如命题 *3.1* 中所述，$H^\circ \cong H'_{uv}T$。若 $a = 1$ 且 $b \neq 0$，则 $l \leq 1$；此外，若 $l = 1$，则 v 和 u 满足引理 2.3 的条件 (2)。

证明。我们通过以下四种情形完成证明。

情形 1。v_1, v_2 属于类型 (1)。

反设 $l \geq 2$。根据 [10], 中定理 4.12 的情形 1 的证明，我们知道 $d(v_1) = d(v_2) = 1 + b$，且任意顶点 $v' \in N(v_2)\backslash\{v_1\}$ 都是一个悬挂顶点，其 $w(v', v_2) = 1$。然而，根据 H的结构，显然至少存在一个顶点 $v' \in N(v_2)$，满足 $d(v') \geq 2$，这就产生了矛盾。

此外，若 $l = 1$，则 $d(u) = d(v_1) = 1 + b$，且任意顶点 $v' \in N(u)\backslash\{v_1\}$ 都是一个悬挂顶点，其 $w(v', v_2) = 1$。然而，这与存在一个属于该环的v'，且其 $d(v') \geq 2$ 这一事实相矛盾。

情形 2. v_1, v_2 属于类型 (3)。

反设 $l \geq 2$。根据 [10], 中定理 4.12 的情形 2 的证明，我们知道 $d(v_1) = 1 + b$, $d(v_2) = 1 + \frac{b}{2}$，并且 $1 + \frac{3}{2}b = s(v_2) < 2d(v_1) = 2 + 2b$，矛盾。若 $l = 1$，则由类似的理由可得 $d(u) = 1 + \frac{b}{2}$ 且 $s(u) < 2d(v_1) = 2 + 2b$，这也导致矛盾。

情形 3. v_1, v_2 属于类型 (2) 或 (4)。

子情形 3.1. v_1, v_2 属于类型 (2)，且 $l \geq 2$。

根据 [10], 中定理 4.12 的情形 3 的证明，我们知道 $l \leq 3$ 且 $w(v_2, v_3) = d(v_3) = 2$。现在 $v_3 = u$，这与 $d(u) \geq 3$ 矛盾。

子情形 3.2. v_1, v_2 是类型（4），且 $l \geq 2$。

根据 [10], 中定理 4.12 的情形 4 的证明，我们知道 $d(v_3) = 1$。显然，H 不可能存在。

子情形 3.3. v_1, v_2 是类型（4），且 $l = 1$。

现在 $v_1 = v, v_2 = u$。根据上文对情形 1、情形 2、子情形 3.1 和子情形 3.2 的讨论，我们知道不存在满足 $m \geq 2$的路径 $v'_0v'_1 \cdots v'_mv'_{m+1}$，其中$v'_{m+1} = u$，且$v'_0$ 是悬挂顶点。此外，若 $m = 1$，则根据引理 2.4，v'_1，且 u 是类型（4）。

令 $V(C) \cap N(u) = \{u_1, u_2\}$，其中 $u = v_2$。根据 [10], 中定理 4.12 的情形 4 的证明，我们知道 $d(v_1) = 1 + \frac{b}{2}$，$d(v_2) = \frac{3}{2} + \frac{b}{4}$，且任意顶点 $v' \in N(v_2)\backslash\{u_1, u_2\}$都不能是悬挂顶点。因此，结合上述讨论，我们知道任意顶点 $v' \in N(v_2)\backslash\{u_1, u_2\}$ 都是一个 (v_2, 2)- 顶点，且满足 $d(v') = d(v_1)$ 和 $w(v', v_2) = 2$。由 (1.1)，可得 $\frac{3}{2} + \frac{5b}{4} = d(u) + b = s(u) = w(u_1, u)d(u_1) + w(u_2, u)d(u_2) + 2(1 + \frac{b}{2})(d(u) - w(u_1, u) - w(u_2, u) \geq 2)$。由 $\frac{3}{2} + \frac{5b}{4} = s(u) \geq 2(1 + \frac{b}{2})(d(u) - w(u_1, u) - w(u_2, u) \geq 2)$，显然$d(u) - w(u_1, u) - w(u_2, u) = 1$。因此，我们有 $\frac{3}{2} + \frac{b}{4} = d(u) = w(u_1, u) + w(u_2, u) + 2$，且 $\frac{3}{2} + \frac{5b}{4} = s(u) = w(u_1, u)d(u_1) + w(u_2, u)d(u_2) + 2(1 + \frac{b}{2})$，这意味着 $w(u_1, u)(d(u_1) -$

1) + $w(u_2,\ u)(d(u_2)-1)=0$。然而，这意味着 $d(u_1)=d(u_2)=1$，这与$d(u_1)\geq 2$ 和 $d(u_2)\geq 2$ 矛盾。

子情形 3.4. $v_1,\ v_2$ 是类型 (2)，且 $l=1$。

现在 $v_1=v, v_2=u$。根据上述情形 1–2 和子情形 3.1–3.3 的讨论，我们知道不存在满足 $m\geq 2$ 的路径 $v'_0v'_1\cdots v'_mv'_{m+1}$，其中 $v'_{m+1}=u$，且 v'_0 是悬挂顶点。此外，如果 $m=1$，那么根据引理 2.4，v'_1，且 v'_2 是类型 (2)。

根据 [10], 中定理 4.12 的情形 3 的证明，我们知道 $d(v_1)=d(v_2)=1+\frac{b}{2}$，且顶 - 点 $v'\in N(v_2)\backslash\{v_1,u_1,u_2\}$ 可以是一个满足 $w(v',\ v_2)=d(v')=2$ 的悬挂顶点，其中 $v_2=u$，且 $u_1,\ u_2\in N(u)\cap V(C)$。■

设 D_1 和 D_2 为图 4 所示的 (0, 1, 2)-多重图。对于 D_1，有 $d(v_1)=d(v_3)=1$, $b=4k\ (k\geq 1)$，$d(v_2)=d(v_4)=1+\frac{b}{2}$ 为奇数，$w(v_1,v_2)=w(v_2,v_3)=w(v_2,v_4)=1$；任意顶点 $v\in N(v_4)\backslash\{v_2\}$ 都是悬挂顶点，且 $d(v)=w(v,v_4)=2$；任意顶点 $v'\in N(v_2)\backslash\{v_1,v_3,v_4\}$ 都是悬挂顶点，且 $d(v)=w(v,v_4)=2$。对于 D_2，有 $d(v_1)=d(v_4)=1$，$b=4k+2\ (k\geq 1)$，$d(v_2)=d(v_3)=1+\frac{b}{2}$ 为偶数，$w(v_1,v_2)=w(v_2,v_3)=w(v_3,v_4)=1$；任意顶点 $v\in N(v_2)\backslash\{v_1,v_3\}$ 都是悬挂顶点，且 $d(v)=w(v,v_2)=2$；任意顶点 $v\in N(v_3)\backslash\{v_2,v_4\}$ 都是悬挂顶点，且 $d(v)=w(v,v_3)=2$。

现在，我们定义两种类型的 (0，1，2)-多重图，记作 $\mathcal{H}^2(b,\ t)$ 和 $\mathcal{H}^3(b,\ t)$（$t\geq 3$）。其中，$\mathcal{H}^2(b,\ t)$（$\mathcal{H}^3(b,\ t)$ 同理）是通过将 t 个 D_1 (D_2) 横向循环连接而构造的。具体而言，将一个 D_1 (D_2)的右侧与另一个 D_1 (D_2)的左侧相连，重复此过程直至所有 t 均连接起来，同时保留每个D_1 (D_2)的内部连接。

容易验证，对于任意顶点 $v\in H$，$1\cdot d(v)+b=s(v)$，其中 $H\in\{\mathcal{H}^2(b,\ t)\}$（或 $H\in\mathcal{H}^3(b,\ t)\}$）。由定理1.2可得以下结果。

命题 3.14 设 $H\in\{\mathcal{H}^2(b,t)\ \mathcal{H}^3(b,t)\}$。则 H 恰有两个主特征值。

定理 3.15 设 H, a, b 如命题 *3.1* 中所述。若 $a=1$，则 $H\in\{\mathcal{H}^2(b,t)\ \mathcal{H}^3(b,t)\}(t\geq 3)$。

证明。 我们通过以下两种情形完成证明。

情形 1。 在 C 上存在一棵悬挂树 T'，满足 $V(T')>1$。

令 $H^\circ\cong H'_{uv}T'$, $Q=v_0v_1\cdots v_l(v_l=v)$ 为 T' 的最长 v-路径。由引理 3.13，可得 $l=1$, $d(u)=d(v)=1+\frac{b}{2}$, $w(u,v)=1$，且 v,u 满足命题 2.3 的条件 (2)，其中 $1+\frac{b}{2}\ (\geq 3)$ 为奇数。此外，若存在悬挂顶点$v'\in N(u)$，则 $d(v')=w(v',u)=2$。令 u_1, $u_2\in N(u)\cap V(C)$，c_1 和 $c_2(\geq 1)$ 分别表示 $N(u)\backslash\{u_1,u_2\}$ 的悬挂顶点数和非悬挂顶点数。

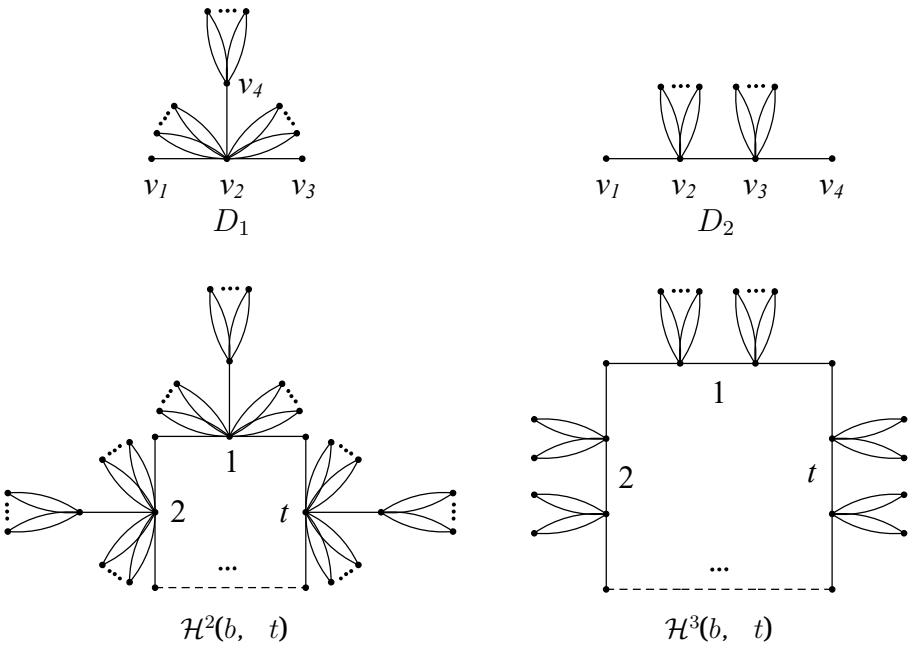


图 4：图 D_1, D_2, $\mathcal{H}^2(b,\ t)$ 和 $\mathcal{H}^3(b,\ t)$，其中 $b \geq 2$ 和 $t \geq 3$。

由 (1.1)，可得 $1 + \frac{3}{2}b = d(u) + b = s(u) = 4c_1 + (1 + \frac{b}{2})c_2 + w(u,\ u_1)d(u_1) + w(u,\ u_2)d(u_2)$。显然，由 $1 + \frac{3}{2}b > (1 + \frac{b}{2})c_2$ 可知 $c_2 \leq 2$。

子情形 1.1。 $c_2 = 2$。

现在 $1 + \frac{b}{2} = d(u) = 2c_1 + 2 + w(u, u_1) + w(u, u_2)$。根据 (1.1)，我们有 $1 + \frac{3}{2}b = s(u) = 4c_1 + 2(1 + \frac{b}{2}) + w(u, u_1)d(u_1) + w(u, u_2)d(u_2)$，这意味着 $\frac{b}{2} - 1 = 4c_1 + w(u, u_1)d(u_1) + w(u, u_2)d(u_2)$。由于 $\frac{b}{2} - 1$ 是奇数，$w(u, u_1) = w(u, u_2) = 2$ 是不可能的。

若 $w(u,\ u_1) = w(u,\ u_2) = 1$，则 $d(u_1) \geq 2$ 且 $d(u_2) \geq 2$。现在 $1 + \frac{b}{2} = d(u) = 2c_1 + 2 + 1 + 1$，这意味着 $2c_1 = \frac{b}{2} - 3$。然而，$4c_1 + w(u,\ u_1)d(u_1) + w(u,\ u_2)d(u_2) \geq (b - 6) + 2 + 2 = b - 2 > \frac{b}{2} - 1$，矛盾。

若 $w(u,\ u_1) = 1$ 且 $w(u,\ u_2) = 2$，则 $d(u_1) \geq 2$ 且 $d(u_2) \geq 3$。现在 $1 + \frac{b}{2} = d(u) = 2c_1 + 2 + 1 + 2$，这意味着 $2c_1 = \frac{b}{2} - 4$。然而，$4c_1 + w(u,\ u_1)d(u_1) + w(u,\ u_2)d(u_2) \geq (b - 8) + 2 + 2 \times 3 = b > \frac{b}{2} - 1$，矛盾。

如果 $w(u,\ u_1) = 2$ 且 $w(u,\ u_2) = 1$，那么通过类似的讨论可得矛盾。

因此，不存在这样的 H。

子情形 1.2. $c_2 = 1$。

由 (1.1)，我们有 $1 + \frac{3}{2}b = s(u) = 4c_1 + (1 + \frac{b}{2}) + w(u, u_1)d(u_1) + w(u, u_2)d(u_2)$，这意味着 $b = 4c_1 + w(u, u_1)d(u_1) + w(u, u_2)d(u_2)$。结合 $1 + \frac{b}{2} = d(u) = 2c_1 + 1 + w(u, u_1) + w(u, u_2)$，我们有 $w(u, u_1)(d(u_1) - 2) + w(u, u_2)(d(u_2) - 2) = 0$，这意味着 $d(u_1) = d(u_2) = 2$。于是显然有 $w(u, u_1) = w(u, u_2) = 1$。考虑到 u_1 与 u_2的相似性，下面我们只研究 u_2。

由于 $d(u_2)=2$ 且 $u_2\in V(C)$，我们可以设 $N(u_2)\backslash\{u\}=\{u_3\}$。可以验证 $w(u_2,u_3)=1$。然后由 (1.1)，我们有 $2+b=s(u_2)=w(u,u_2)d(u)+w(u_2,u_3)d(u_3)$，这意味着 $d(u_3)=1+\frac{b}{2}$。

假设 $N(u_3)\cap V(C)\backslash\{u_2\}=\{u_4\}$。由引理 3.13 可知，任意顶点 $v'\in N(u_3)\backslash\{u_2,u_4\}$ 要么是悬挂顶点，要么是一个满足 $d(v')=1+\frac{b}{2}$ and $w(v',u_3)=1$ 的 $(u_3,2)$-顶点。事实上，若 v' 是悬挂顶点，则由引理 2.6 的 (1) 和 $b\neq 0$ 可得 $d(v')=w(v',u_3)=2$。

设 c_1',c_2' 分别为 $N(u_3)\backslash\{u_2,u_4\}$ 中悬挂顶点和非悬挂顶点的数量。于是由 (1.1) 可得 $1+\frac{3}{2}b=s(u_3)=4c_1'+c_2'(1+\frac{b}{2})+w(u_2,u_3)d(u_2)+w(u_3,u_4)d(u_4)$。结合 $1+\frac{b}{2}=d(u_3)=2c_1'+c_2'+w(u_2,u_3)+w(u_3,u_4)$，可得 $\frac{b}{2}-1=c_2'(\frac{b}{2}-1)+w(u_3,u_4)(d(u_4)-2)$。由 $\frac{b}{2}-1\geq 1$ 可知，显然 $c_2'\leq 1$。

若 $c_2'=1$，则 $w(u_3,u_4)(d(u_4)-2)=0$，这意味着 $d(u_4)=2$，因而 $w(u_3,u_4)=1$。不难发现，u_4 与 u_2相似，因此我们可以用研究 u_2的类似方法来研究 u_4。

若 $c_2'=0$，则 $\frac{b}{2}-1=w(u_3,u_4)(d(u_4)-2)$。由于 $\frac{b}{2}-1$ 为奇数，我们知道 $w(u_3,u_4)=1$。然而，根据 $w(u_2,u_3)=w(u_3,u_4)=1$，且任意顶点 $v'\in N(u_3)\backslash\{u_2,u_4\}$都是一个悬挂顶点，并满足 $w(v,u_3)=2$，可知 $d(u_3)$为偶数，这与 $d(u_3)=1+\frac{b}{2}$ 为奇数矛盾。

结合以上讨论，我们知道 H 可以由 D_1的重复连接构成，因此 $H\in\mathcal{H}^2(b,t)$，其中 $b=4k\,(\geq 4)$ 且 $t\geq 3$。

情形 2. C 上的任意悬挂树 T 都满足 $|V(T')|=1$。

设 $H^\circ\cong H'_{uv}T'$。则 $V(T')=\{v\}$。假设 $N(u)\cap V(C)=\{u_1,u_2\}$，$N(u_1)\cap V(C)=\{u,u_0\}$ 且 $N(u_2)\cap V(C)=\{u_2,u_3\}$。由于 C 上的任意悬挂树 T 都满足$|V(T)|=1$，因此若 $N(u_2)\backslash\{u,u_3\}\neq\emptyset$，则 $d(u_2)\in\{1+b,1+\frac{b}{2}\}$；若$N(u_2)\backslash\{u,u_3\}=\emptyset$，则 $d(u_2)\in\{2,3,4\}$。

子情形 2.1. $w(u,v)=2$.

根据 $w(u,v)=2, b\neq 0$ 和引理 2.2，我们知道，任意顶点 $v'\in N(u)\backslash\{u_1,u_2\}$ 都是一个悬挂顶点，且 $d(v')=w(v',u)=2$。由引理 2.6 的 (1)，可得 $d(u)=1+\frac{b}{2}\,(\geq 4)$。由 (1.1)，可得 $1\cdot d(u)+b=s(u)=w(u,u_1)d(u_1)+w(u,u_2)d(u_2)+2\big(d(u)-w(u,u_1)-w(u,u_2)\big)$，这意味着

$$\frac{b}{2}-1=w(u,u_1)\big(d(u_1)-2\big)+w(u,u_2)\big(d(u_2)-2\big). \tag{3.4}$$

子情形 2.1.1. $N(u_2)\backslash\{u,u_3\}\neq\emptyset$.

若任意顶点 $p\in N(u_2)\backslash\{u,u_3\}$ 是一个悬挂顶点，且 $d(p)=w(p,u_2)=1$，则根据引理 2.6 的 (1)，$d(u_2)=1+b$。然而，由 $1+\frac{b}{2}\geq 4$ 可得 $w(u,u_1)\big(d(u_1)-2\big)+w(u,u_2)\big(d(u_2)-2\big)>w(u,u_2)(b-1)\geq b-1>\frac{b}{2}-1$，这与 (3.4) 矛盾。

若任意顶点 $p \in N(u_2)\backslash\{u, u_3\}$ 是一个悬挂顶点，且 $d(p) = w(p, u_2) = 2$，则根据引理 2.6 的 (1)，$d(u_2) = 1 + \frac{b}{2}$。由 (3.4)，我们有 $\frac{b}{2} - 1 = w(u, u_1)\big(d(u_1) - 2\big) + w(u, u_2)(\frac{b}{2} - 1)$，且该等式成立当且仅当 $d(u_1) = 2$ 且 $w(u, u_2) = 1$。于是显然，$w(u, u_1) = 1$。

由于 $d(u_2) = 1 + \frac{b}{2} \geq 4$, $w(u, u_2) = 1$ 且 $w(u_2, u_3) \leq 2$，我们有 $N(u_2)\backslash\{u, u_3\} \neq \emptyset$。此外，根据 $d(u_2) = 1 + \frac{b}{2}$、H 的结构以及引理 2.6 的 (1)，任意顶点 $p \in N(u_2)\backslash\{u, u_3\}$ 都是一个悬挂顶点，且 $d(p) = w(p, u_2) = 2$。于是，由 (1.1) 可得$1 \cdot d(u_2) + b = s(u_2) = w(u_2, u)d(u) + w(u_2, u_3)d(u_3) + 2\big(d(u_2) - w(u_2, u) - w(u_2, u_3)\big)$，这意味着 $w(u_2, u_3)(d(u_3) - 2) = 0$。因此，$d(u_3) = 2$，进而 $w(u_2, u_3) = w(u_3, u_4) = 1$，其中 $\{u_4\} = N(u_3)\backslash\{u_2\}$。

由 (1.1)，我们有 $1 \cdot d(u_3) + b = s(u_3) = w(u_2, u_3)d(u_2) + w(u_3, u_4)d(u_4)$，这意味着$d(u_4) = 1 + \frac{b}{2}$。可以验证，$u_4$ 与 u相似，且 u_1 与 u_3相似，因此我们可以用类似的方法研究 u_4, u_1。类似地，不难发现 H 可以由 D_2构成。因此，$H \in \mathcal{H}^3(b, t)$，其中 $b = 4k + 2\,(\geq 6)$ 且 $t \geq 3$。

子情形 2.1.2. $N(u_1)\backslash\{u, u_0\} \neq \emptyset$。

通过与子情形 2.1.1 类似的讨论，我们有 $H \in \mathcal{H}^3(b, t)$。

子情形 2.1.3. $N(u_1)\backslash\{u, u_0\} = \emptyset$ 且 $N(u_2)\backslash\{u, u_3\} = \emptyset$。

若 $w(u, u_1) = 2$，则由 $N(u_1)\backslash\{u, u_0\} = \emptyset$ 可得 $d(u_1) \in \{3, 4\}$。然而，由 $1 \cdot d(u_1) + b = s(u_1) = w(u_1, u)d(u) + w(u_0, u_1)d(u_0)$，容易验证 $d(u_0) = 1$对于 $d(u_1) \in \{3, 4\}$成立，这就产生了矛盾。

若 $w(u, u_2) = 2$，则通过类似的讨论可得矛盾。

若 $w(u, u_1) = w(u, u_2) = 1$，则 $d(u) = 1 + \frac{b}{2}(\geq 4)$ 为偶数。由 (3.4)，有 $\frac{b}{2} - 1 = d(u_1) - 2 + d(u_2) - 2$。由于 $\frac{b}{2} - 1$ 为偶数且 $N(u_1)\backslash\{u, u_0\} = N(u_2)\backslash\{u, u_3\} = \emptyset$, 因此有 $d(u_1) = d(u_2) = 2$ 或 $d(u_1) = d(u_2) = 3$。若 $d(u_1) = d(u_2) = 2$，则 $\frac{b}{2} - 1 = 0$，这与 $1 + \frac{b}{2} \geq 4$ 矛盾。若 $d(u_1) = d(u_2) = 3$，则 $\frac{b}{2} - 1 = 2$ 且 $w(u_2, u_3) = 2$。然而，由 (1.1) 可得 $1 \cdot d(u_2) + b = s(u_2) = w(u, u_2)d(u_2) + w(u_2, u_3)d(u_3)$，这意味着 $d(u_3) = 1 + \frac{b}{4}$不是整数，矛盾。

子情形 2.2. $w(u, v) = 1$。

由 $w(u, v) = 1, b \neq 0$ 和引理 2.2 可知，任意顶点 $v' \in N(u)\backslash\{u_1, u_2\}$ 都是悬挂顶点，且 $d(v') = w(v', u) = 1$。由引理 2.6 的 (1)，可得 $d(u) = 1 + b(\geq 3)$。由 (1.1)，可得 $1 \cdot d(u) + b = s(u) = w(u, u_1)d(u_1) + w(u, u_2)d(u_2) + \big(d(u) - w(u, u_1) - w(u, u_2)\big)$, 这意味着

$$b = w(u, u_1)\big(d(u_1) - 1\big) + w(u, u_2)\big(d(u_2) - 1\big). \tag{3.5}$$

子情形 2.2.1. $N(u_2)\backslash\{u, u_3\} \neq \emptyset$。

若任一顶点 $p \in N(u_2)\backslash\{u, u_3\}$ 是悬挂顶点，且 $d(p) = w(p, u_2) = 1$，则

$d(u_2)$ 根据引理 2.6 的 (1)。然而，显然 $w(u,u_1)\big(d(u_1)-1\big)+w(u,u_2)\big(d(u_2)-1\big)>w(u,u_2)b\geq b$，这与 (3.5) 矛盾。

如果任意顶点 $p\in N(u_2)\backslash\{u,u_3\}$ 是悬挂顶点，且满足 $d(p)=w(p,u_2)=2$，那么由引理 2.6 的 (1) 可得 $d(u_2)=1+\frac{b}{2}$。然而，可以验证 $1\cdot d(u_2)+b=s(u_2)<w(u,u_2)(d(u)-2)+2d(u_2)<w(u,u_2)d(u)+w(u_2,u_3)d(u_3)+2\big(d(u_2)-w(u,u_2)-w(u_2,u_3)\big)$，这与将 (1.1) 应用于 u_2 所得到的结果矛盾。

子情形 2.2.2. $N(u_1)\backslash\{u,u_0\}\neq\emptyset$.

通过与子情形 2.2.1 类似的讨论，我们知道不存在这样的 H。

子情形 2.2.3. $N(u_1)\backslash\{u,u_0\}=\emptyset$ 且 $N(u_2)\backslash\{u,u_3\}=\emptyset$。

若 $w(u_1,u)=2$，则 $d(u_1)=w(u_1,u)+w(u_0,u_1)=2+w(u_0,u_1)\leq 4$ 由 $N(u_1)=\{u,u_0\}$。容易验证 $1\cdot d(u_1)+b=s(u_1)<w(u_1,u)d(u)+w(u_0,u_1)d(u_0)$，而将 (1.1) 应用于 u_1 时，这将导致矛盾。

若 $w(u,u_2)=2$，则通过类似的讨论可得矛盾。

若 $w(u,u_1)=w(u,u_2)=1$，则 $d(u_2)=w(u,u_2)+w(u_2,u_3)=1+w(u_2,u_3)$ 由$N(u_2)=\{u,u_3\}$。可以验证 $1+w(u_2,u_3)+b=1\cdot d(u_2)+b=s(u_2)\leq w(u_2,u)d(u_2)+w(u_2,u_3)d(u_3)=1+b+w(u_2,u_3)d(u_3)$。重要的是，该等式仅当 $d(u_3)=1$ 时成立。但既然我们知道 $d(u_3)\geq 2$，并且如果我们将 (1.1) 应用于 u_2，就会发现这将导致矛盾。■

4 结论

本文通过研究其 B-图为单圈的 (0，1，2)-多重图，刻画了恰有两个主特征值的符号图。若整数 a，b 对任意 $v\in V(H)$ 满足 (1.1)，则 H 可分为以下四种情形进行分析：(1)$a=0$ 和 $b\neq 0$；(2) $a=1$ 和 $b\neq 0$；(3) $a\geq 2$ 和 $b\neq 0$；(4) $a\neq 0$ 和 $b=0$。

我们已完全解决情形 (1) 和 (2)，并部分解决了情形 (3)。这些结果汇总于表 2。情形 (3)（问题 4.1）和 (4)（问题 4.2）仍有待进一步研究。

问题 4.1 设 H、a、b 如命题 3.1 所述。刻画满足 $a\geq 2$ 和 $b\neq 0$ 的 H。

问题 4.2 设 H、a、b 如命题 3.1 中所述。刻画满足 $a>0$ 和 $b=0$ 的 H。

利益冲突声明

作者声明，他们不存在已知的竞争性经济利益或可能影响本文所报告研究工作的个人关系。

表 2：已知结果。

(a,b)	H
(1) $a=0, b>0$	$H \in \mathcal{H}^1(b,t)$，其中 $b=4k+2\geq 6$ 和 $t\geq 4$ 为偶数。
(2) $a=1, b\neq 0$	$H \in \mathcal{H}^2(b,t)$，其中 $b=4k\geq 4$ 和 $t\geq 3$，或 $H \in \mathcal{H}^3(b,t)$，其中 $b=4k+2\geq 6$ 和 $t\geq 3$，或 $H\cong U_{3t}^3$ 与 $t\geq 1$。
(3) $a\geq 2, b\neq 0$	如果 H 的 B-图是一个环，则 $H\in\{U_{4t}^1, U_{3t}^2, U_{5t}^4, U_{4t}^5\}(t\geq 1)$，否则该问题尚未解决。
(4) $a>0, b=0$	如果 H 的 B-图是一个环，则不存在这样的 H，而该问题否则尚未解决。

数据可用性

本文所述研究未使用任何数据。

致谢

本研究得到国家自然科学基金（项目编号：12501491）、山西省基础研究计划（项目编号：202503021212100）、山西省高等学校科学技术创新计划、湖北省自然科学基金（项目编号：2025AFD006）、湖北省教育厅科学研究计划项目（项目编号：Q20232505）以及福建省高校运筹学与控制论重点实验室开放课题、福州大学（项目编号：G20240905）的资助。

参考文献

[1] S. Akbari、F.A.M. Fran¸ca、E. Ghasemian、M. Javarsineh、L.S. de Lima，《带符号图的主特征值》，Linear Algebra Appl.，614（2021）270–280。

[2] M. Anđeli´c, T. Koledin 和 Z. Stani´c，《所有拉普拉斯特征值均为主特征值的符号图》，《线性与多重线性代数》，(2023) 2409–2425。[3] D. Cvetkovi´c，《谱的主部、除子与图的切换》，Publ. Inst. Math. (Beograd)，23 (1978年) 31–38。[4] D. Cvetkovi´c，P. Rowlinson，Z. Stani´c，M.G. Yoon，《可控图》，Bull. Acad. Serbe Sci. Arts. Classe Sci. Math. Natur. Sci. Math.，140 (2011) 81–88。[5] D. Cvetkovi´c，P. Rowlinson，Z. Stani´c，M.G. Yoon，《最小特征值不小于 -2 的可控图》，应用分析与离散数学，5 (2011) 165–175。

[6] D. Cvetkovi´c，P.W. Fowler，《图的主特征值数目的一个群论界》，J. Chem. Inf. Comput. Sci.，39 (1999年) 638–641。[7] Z. Du，F. Liu，S. Liu，Z. Qin，《具有 $n-1$ 个主特征值的图》，Discrete Math.，344 (2021) 112397。[8] Z. Du，L. You，H. Liu，F. Liu，《关于几乎可控图的进一步结果》，Linear Algebra Appl.，677 (2023年) 31–50。[9] Z. Du，L. You，H. Liu，《几乎可控图及其他》，Discrete Math.，347 (2024年) 113743。[10] Z. Du，L. You，H. Liu，X. Yuan，《恰有两个主特征值的符号图》，Linear Algebra Appl.，695 (2024年) 1–27。[11] Z. Du，L. You，H. Liu，《关于恰有两个不同主特征值的符号图的进一步结果》，Discrete Math.，349 (2026年) 114712。[12] L. Feng，L. Lu，D. Stevanovi´c，《关于具有两个主特征值的图的一则简短评述》，Appl. Math. Comput.，369 (2020) 124858。[13] A. Farrugia，《关于强非对称可控本原图》，Discrete Appl. Math.，211 (2016) 58–67。[14] Y. Hou，Z. Tang，W.C. Shiu，《关于恰有两个主特征值的图的一些结果》，Appl. Math. Lett.，25 (2012) 1274–1278。[15] Y. Hou，F. Tian，《恰有两个主特征值的单圈图》，Appl. Math. Lett.，19 (2006) 1143–1147。[16] Y. Hou，H. Zhou，《恰有两个主特征值的树》，J. Nat. Sci. Hunan Norm. Univ.，26 (2005) 1–3（中文）。[17] E.M. Hagos，《关于图谱的一些结果》，Linear Algebra Appl.，356 (2002) 103–111。[18] S. Hayat，J.H. Koolen，F. Liu，Z. Qiao，《关于恰有两个主特征值的图的一则注记》，Linear Algebra Appl.，511 (2016) 318–327。[19]S. Li，J. Wang，《关于几乎 α可控图的广义 A_α-谱刻画》，Discrete Math.，345 (2022) 112913。[20] M. Lepovi´c，《关于图的特征值和主特征值》，Math. Moravica，4 (2000) 51–58。

[21] L. Qiu、W. Wang、W. Wang、H. Zhang，几乎可控图由其广义谱确定的新判据，Discrete Math.，345（2022）113060。[22] P. Rowlinson，图的主特征值：综述，应用分析与离散数学 1（2007）455–471。[23] Z. Stani´c，实对称矩阵的主特征值及其在符号图中的应用，捷克斯洛伐克数学杂志，70（2020）1091–1102。[24] Z. Stani´c，关于可控图的进一步结果，Discrete Appl. Math.，166（2014）215–221。[25] Z. Shao、X. Yuan，若干特征值为主特征值的符号图，Appl. Math. Comput.，423（2022）127014。[26]W. Wang、F. Liu，几乎可控图的广义谱刻画，欧洲组合数学杂志，96（2021）103348。