arXiv:2603.04067v1 [math.LO] 4 Mar 2026

代数簇中自由对象的构造原理与超稳定性

TAPANI HYTTINEN、GIANLUCA PAOLINI 和 DAVIDE E. QUADRELLARO

Abstract. 我们研究代数簇$\mathbf{V}$ 的 Eklof-Mekler-Shelah 构造原理与$\mathbf{V}$中自由对象的超稳定性问题之间的关系，记作 $\mathrm{F}_{\mathbf{V}}$。我们在 $\mathrm{F}_{\mathbf{V}}$ 的抽象初等类覆盖这一一般情形下考察此问题，并探讨其在一阶逻辑及其他领域中的应用。我们的主要结果是，若满足强形式的构造原理，则 $\mathrm{F}_{\mathbf{V}}$ 的几乎所有抽象初等类覆盖都不是超稳定的。我们还考察了 R-模和群簇中的具体应用。

1. Introduction

Shelah 分类理论中的一个主要分界线 [36] 是超稳定性这一概念。它是一种与一阶类型数量相关的驯性概念，并且有许多等价定义。显然，无限秩自由阿贝尔群不是超稳定的。类似地，Gibone 在其论文中证明（参见 [4, 推论 1。8]），Poizat 也证明了 [34] 非阿贝尔自由群不是超稳定的[1]。这一切促使我们思考以下问题：

问题 1.1。 设$\mathbf{V}$ 是一个代数簇（按泛代数的意义）。何时$\mathbf{V}$中无限秩自由对象的一阶理论是超稳定的?

将讨论范围限制在1.1 中的无限秩对象，只是为了确保这些结构都初等等价（在一阶逻辑中）；例如，不同有限秩的自由阿贝尔群就不是初等等价的。下面引入一些记号。设 $\mathbf{V}$ 是一个代数簇（按泛代数的意义）。我们用 $\mathscr{F}_{\mathbf{V}}$ （分别用 $\mathscr{F}_{\mathbf{V}}^{\infty}$）表示 $\mathbf{V}$ 中的自由对象（分别表示 $\mathbf{V}$中的无限秩自由对象）。对于 $A,\ B \in \mathscr{F}_{\mathbf{V}}$，我们记 $A \leqslant_*^{\mathrm{ff}} B$，若存在 $C \in \mathscr{F}_{\mathbf{V}}$ 使得 $A{*}C = B$。尽管我们的超稳定性问题是用一阶逻辑表述的，但它可以自然地推广到抽象初等类（AEC） [37]。抽象初等类是为在一阶逻辑之外发展模型论而设计的最一般框架之一。这引出了下面这个本身也值得关注的概念。

定义 1.2. 当满足以下条件时，我们称 $(\mathrm{K},\preccurlyeq)$ 是 $(\mathrm{F}_{\mathbf{V}}, \leqslant_*^{\mathrm{ff}})$ 的抽象初等类覆盖：

(1) $\mathrm{F}_{\mathbf{V}}^{\infty} \subseteq \mathrm{K}$；(2) $(\mathrm{K},\preccurlyeq)$
是一个抽象初等类；

Date：2026年3月5日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 08B20，03C48，03C05。作者们获 PRIN 2022 项目“模型、集合与分类”（项目编号 2022TECZJA）资助。第二位署名作者还获 INdAM 2024项目（青年学者资助）“群、晶体与分类”资助。第三位署名作者还获 INdAM 博士后资助。

[1]如今已有关于这一事实的更一般的证明，参见例如 [11, 16, 32]。

(3) 对于 $A, B \in \mathrm{K}_{\mathbf{V}} \cap \mathrm{K}$, $A \leqslant_*^{\mathrm{ff}} B$ 蕴含 $A \preccurlyeq B$;
(4) $(\mathrm{K}, \preccurlyeq)$ 具有联合性质和联合嵌入性质。

注意，令 T 为 $\mathscr{T}_{\mathbf{V}}^{\infty}$ 的一阶理论（这是一个完备理论），我们有 $(\mathrm{Mod}(T), \preccurlyeq_{\omega,\omega})$ 是 $(\mathscr{K}_{\mathbf{V}}, \leqslant_*^{\mathrm{ff}})$ 的一个抽象初等类覆盖，其中 $\preccurlyeq_{\omega,\omega}$表示初等子结构关系（在一阶逻辑中）。有趣的是，在这种情况下，我们可以提出问题 1.1 的以下更一般的变体。

问题 1.3。 设$\mathbf{V}$ 是一个代数簇，并设 $(\mathrm{K}, \preccurlyeq)$ 是 $(\mathrm{K}_{\mathbf{V}}, \leqslant_*^{\mathrm{ff}})$ 的 AEC 覆盖。何时 $(\mathrm{K}, \preccurlyeq)$ 是超稳定的?

这里有必要对问题1.3作一些说明。在抽象初等类的语境中，超稳定性有多种不同的定义。对于具有融合、联合嵌入性质且拥有任意大模型的抽象初等类（一种常见的研究框架），文献 [14] 证明，在驯性这一假设下，这些不同的超稳定性定义彼此等价。根据 [6] ，驯性本质上可视为一种集合论假设。我们强调，在主要结果1.7中，我们采用经典的超稳定性概念，即根据类型的数量来定义超稳定性，因此我们的研究不需要这类集合论假设。

对于所有代数簇$\mathbf{V}$而言，回答有关$\mathbf{V}$ -自由对象的问题向来极其困难。逻辑文献中的一项里程碑成果由 Eklof、Mekler 和 Shelah 提出，以下三分结论即为其一，该结论是 [28, 定理 16]，并以 [12] 为基础（另见有关此主题的参考文献 [13, 26, 27, 28, 30]）。

事实 1.4 （Eklof-Mekler-Shelah）。 对于可数语言中的任意代数簇$\mathbf{V}$ ，以下可能性恰有一种成立：

(i) 存在一个基数为 $\aleph_1$ 的$\mathfrak{L}_{\infty,\omega_1}$-自由代数，但它不是自由代数；(ii) 每个基数为 $\aleph_1$ 的$\mathfrak{L}_{\infty,\omega_1}$-自由代数都是自由代数，并且对于每个无限基数$\kappa$ ，都存在一个基数为 κ^+ 的 $\mathfrak{L}_{\infty,\kappa}$-自由代数，但它不是自由代数；(iii) 每个$\mathfrak{L}_{\infty,\omega}$-自由代数都是自由代数。

上面的定理涉及无穷语言中$\mathbf{V}$-自由对象的公理化性问题，但在1.4(i) 背后，实际上存在一种组合模式，$\mathbf{V}$-自由对象在可数秩时满足这种模式，它被称为构造原理(CP)（首次提出于 [12]）。[2] 我们解决问题1.1和1.3 的方式，是通过探讨以下更具体的问题来处理这一问题。

问题 1.5。构造原理与$\mathbf{V}$-自由对象的超稳定性问题（按问题1.1 和1.3的意义）有何关联?

我们将看到，从这一角度看待该问题，可以得到有力的非超稳定性结果；这些结果既与一阶逻辑中的经典结果相关，也与 Mazari-Armida [21, 23, 24] 的研究中关于 R-模的抽象初等类的近期结果相关。

1.1. 第一个研究领域

本文的主要结果要求满足构造原理的一个略微加强的版本，我们将其称为强化构造原理 (RCP)。为避免技术上的复杂问题，我们仅对可数语言中的簇引入 RCP，尽管其表述以及我们的结果也可以推广到任意基数语言的一般情形。

[2]本文作者最近在 [18]，中重新审视了构造原理，但由于这与本文研究的超稳定性问题并无严格关联，我们不再进一步讨论 [18] 中的框架和结果。

定义 1.6。 设$\mathbf{V}$ 是一个可数代数簇。若$\mathbf{V}$ 满足以下条件，我们就称其满足强化构造原理 (RCP)：(RCP) 存在可数的 $A, B \in \mathrm{F}_{\mathbf{V}}^{\infty}$，使得 $A \leqslant B$：

> (a) A 由 $\{a_i$ 自由生成：$i < \omega\}$，并且对于每个 $i < \omega$，令$A_i = \langle a_j : j \leqslant i\rangle_B$，我们有 $A_i \leqslant_*^{\mathrm{ff}} B_i$；(b) 对于每个 $C \in \mathrm{F}_{\mathbf{V}}$，$A \not\leqslant_*^{\mathrm{ff}} B * C$；(c) B 由 $\{b_i$ 自由生成：$i < \omega\}$，且 $\mathrm{dcl}_B^{\mathrm{qf}}(Ab_0) = B$（其中算子 $\mathrm{dcl}^{\mathrm{qf}}$ 表示无量词可定义闭包）。

经典构造原理 CP 只需从 RCP 中去掉第三个条件“$\mathrm{dcl}_B^{\mathrm{qf}}(Ab_0) = B$”即可得到。关键的是，在具体情形中，CP 成立时，RCP 往往也成立；我们将看到，许多群簇和模簇都属于这种情况。我们的主要结果如下。

定理 1.7. 设 $\mathbf{V}$ 是满足 RCP （参见*1.6*）的可数代数簇，并设 $(\mathcal{K}, \preccurlyeq)$ 是足够强的（参见*3.2*）AEC 覆盖，其覆盖对象为 $(\mathcal{F}_{\mathbf{V}}, \leqslant_*^{\mathrm{ff}})$。则$(\mathcal{K}, \preccurlyeq)$ 不是超稳定的（即 $(\mathcal{K}, \preccurlyeq)$ 在基数的一个尾部上不是 λ-稳定的）。

在定理 1.7 中，我们还有一个需要论证的进一步假设，即“$(\mathcal{K}, \preccurlyeq)$ 是 $(\mathcal{F}_{\mathbf{V}}, \leqslant_*^{\mathrm{ff}})$ 的足够强 AEC 覆盖”。该条件略为技术性，细节请参见 3.2 ，但我们在此作如下说明。首先，当覆盖为 $(\mathrm{Mod}(T), \prec_{\omega,\omega})$ 时，该条件平凡成立，此处T 是其中代数的一阶理论，这些代数属于 $\mathcal{F}_{\mathbf{V}}^{\infty}$。其次，也是最重要的，我们强调关于子模型关系 $\preccurlyeq$ 的某些假设是必要的，因为例如，带有子结构关系的阿贝尔群抽象初等类是 ω-稳定的，尽管阿贝尔群簇满足 RCP（更多讨论见第 1.1.1 节）。关键在于，定理 1.7 在实践中易于验证，从而使我们能够得到关于 R-模与群的簇中自由对象的若干结果（见第 1.1.1-1.1.2 节）。我们预期这些结果也将适用于其他代数语境。我们强调，RCP 是关于该簇的一个完全代数性的陈述，理解其内容无需任何模型论知识。

1.1.1. R-模

显然，给定一个环 R，R-模的类构成一个簇，因此我们的研究框架自然与 R-模的模型论相关，尤其与 R-模的抽象初等类的研究相关。Mazari-Armida 等人近期在这方面取得了显著成果，参见例如 [2, 5, 21, 22, 23, 24, 25, 38, 40]。与本文语境最相关的结果是 Mazari-Armida 在 [23] 中给出的以下定理。

事实 1.8 (Mazari-Armida)。 设 R 是一个环，Flat_R 是平坦 R-模的类，$\leqslant_{\mathrm{pp}}$ 是纯子模关系。那么，$(\mathrm{Flat}_R, \leqslant_{\mathrm{pp}})$ 是一个超稳定抽象初等类，当且仅当 R 是左完美的。

注意，令$\mathbf{V}_R$ 为 R-模的代数簇，显然 $(\mathrm{Flat}_R, \leqslant_{\mathrm{pp}})$ 是 $(\mathrm{Fv}_R, \leqslant_*^{\mathrm{ff}})$ 的一个 AEC 覆盖。正如 Mazari-Armida 在 [21,例 3.24], 中已指出的，如果环不是右凝聚的，那么这个 AEC 覆盖就不是一阶的。此外，众所周知（例如参见 [13]），$\mathbf{V}_R$ 满足构造原理，当且仅当 R 不是左完美的。因此，Mazari-Armida 的结果与我们的框架完全契合，也是构造原理与非超稳定性之间关系的一个鲜明例子。我们注意到，Mazari-Armida 的证明运用了非常具体的模论工具，其中最值得注意的是 R-模的余挠包络这一概念。正因如此，他的证明并

不能推广到任意代数簇的抽象框架中。不过，接下来我们将看到，我们的定理 1.7 涵盖并加强了 Mazari-Armida 结果中的很大一部分。为了介绍我们的结果，需要以下定义。

定义 1.9。如果对任意序列 $(r_n\colon n<\omega)\in R^\omega$，只要对每个 $m<\omega$，$r_0\cdots r_m$ 都不是零因子，就有主理想序列 $\{r_0\cdots r_mR\colon m<\omega\}$ 最终稳定，则称环 R 为弱左完美。

回顾一下，环 R 是左完美的，如果 1.9 中的条件在不要求 $r_0\cdots r_m$ 不是零因子的额外假设下仍成立。我们将在第 3.1 节看到，如果 R 不是弱左完美的，那么 $\mathbf{V}_R$ 满足 RCP，从而得到以下结论。

推论 1.10。设 R 是一个环。如果 R 不是弱左完美的，那么 $(\mathrm{Fv}_R,\leqslant^{\mathrm{ff}}_*)$ 的任何足够强的抽象初等类覆盖都不是超稳定的。

换言之，只要假设比“非左完美”稍强一点，我们便得到比 Mazari-Armida 的 1.8 强得多的结果，即不仅 $(\mathrm{Flat}_R,\leqslant_{\mathrm{pp}})$ 不是超稳定的，而且 $(\mathrm{Fv}_R,\leqslant^{\mathrm{ff}}_*)$ 的每一个（足够强的）AEC 覆盖都不是超稳定的。我们强调，这里的意思是：在 $(\mathrm{Fv}_R,\leqslant^{\mathrm{ff}}_*)$ 的覆盖 $(\mathrm{K},\preccurlyeq)$ 中，我们不仅可以改变模型类（即从 Flat_R 变为 K），还可以改变强子模型关系（即从 $\leqslant_{\mathrm{pp}}$ 变为 $\preccurlyeq$），只要 $\preccurlyeq$ 在 3.2 的意义下“足够强”。例如，容易看出，只要要求 $\preccurlyeq$ 蕴含 $\leqslant_{\mathrm{pp}}$，并且它细化（即弱于）直和项，就足以满足 3.2 中的条件。

我们注意到，1.10 中的“足够强”这一假设是必要的，因为根据 [25,推论 5，13] 对于任意诺特环 R，都有 (R-模 $\leqslant$) 是超稳定的。最后，关于弱左完美环这一概念（与左完美环的概念相比），我们回顾一下，Cohn 在 [10] 中的构造表明，任意交换环都可以嵌入到一个环中，使得扩张环的每个元素要么是零因子，要么是较小环中的可逆元。

1.1.2. 群

在 [27] 中，Mekler 在很大程度上解决了哪些群簇 $\mathbf{V}$满足构造原理的问题（另请参见 [9]对此的讨论）。特别是，[27] 证明了所有无挠群簇都满足构造原理。基于这一点，我们从定理1.7 推出以下推论。显然，下面的推论涵盖了群簇和阿贝尔群簇这两个关键示例。在下述推论中，我们用 $F_{\mathbf{V}}(X)$ 表示簇 $\mathbf{V}$ 中由集合 X自由生成的自由代数。

推论 1.11. 设 $\mathbf{V}$ 是一个无挠群簇，且若 $F_{\mathbf{V}}(X)\in\mathbf{F}_{\mathbf{V}}$, $x\in X$, $y\in F_{\mathbf{V}}(X)$, $0<n<\omega$，则 $(x^n=y^n\Rightarrow x=y)$。那么 $\mathbf{V}$ 满足 RCP，因此 $(\mathrm{Fv}_R,\leqslant^{\mathrm{ff}}_*)$ 的任何足够强的 AEC 覆盖都不是超稳定的。

1.2. 第二种途径

迄今为止，我们的方法基于识别一种更强版本的 CP，我们称之为强化构造原理 (RCP)。在本文的第二部分中，我们将证明，假设簇 $\mathbf{V}$ 及其覆盖 AEC 满足某些条件，就可以仅凭 CP 得出非超稳定性结果。具体而言，在第4 节中，我们不考察类型的数量（定理 1.7 中的超稳定性概念），而是考察

在 *AEC* 覆盖上可能存在的独立性演算（$\mathcal{K}$ $\preccurlyeq$）。关于本文所用独立性演算概念的详情，请参阅第2节。这里我们指出，这些性质只是对稳定的一阶完备理论的模型中非分岔所满足性质的直接推广。

定理 *1.12.* 设 *V* 是满足构造原理的可数簇，并设 *(K* $\preccurlyeq$*)* 是 *(*$F_{\mathbf{V}}, \leqslant_*^{\mathrm{ff}}$*)* 的一个 *AEC* 覆盖，且允许弱独立性演算 *(K* $\preccurlyeq, \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}$*)*（参见 *2.6*）。若 *(K* $\preccurlyeq, \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}$*)* 关于自由因子是良好的（参见 *4.2*），则演算 *(K* $\preccurlyeq, \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}$*)* 不是超稳定的（参见 *2.7*）。

即使在这种情况下，仍需要一些假设，因为我们必须排除诸如带有子结构关系的阿贝尔群抽象初等类这样的情形；如前所述，这种情形是超稳定的。具体而言，我们要求独立性演算 $(\mathcal{K} \preccurlyeq, \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|})$ 与 $\leqslant_*^{\mathrm{ff}}$ 具有自由补因子的自由因子这一关系之间具有某种相干性（参见引言开头）。关键的是，定理 1.12 展示了一个有趣的情形：构造原理本身就足以推出覆盖 AEC 的非超稳定性。具体而言，群簇这一关键例子满足 4.2中的条件；由此引出以下定理。

定义 1.13. 设 $\mathbf{V}$ 是一个簇，设 T 是 $\mathrm{F}_{\mathbf{V}}^{\infty}$ 的一阶理论。我们称 T 表现得像自由群理论，如果：
(1) 存在 $n_* < \omega$，使得对每个 $n_* \leqslant m < \omega$，都有 $F_{\mathbf{V}}(m) \in \mathrm{Mod}(T)$；(2) 对所有 $A, B \in \mathrm{F}_{\mathbf{V}}^{<\infty} \cap \mathrm{Mod}(T)$，若 $A \leqslant_*^{\mathrm{ff}} B$ 且 $b \in B$，则包含 Ab 的 B 的最小自由因子 $D \in \mathrm{Mod}(T)$ 属于代数闭包(Ab)；(3) $A, B \in \mathrm{F}_{\mathbf{V}}^{<\infty}$, $C \in \mathrm{F}_{\mathbf{V}}$ 且 $A \leqslant B \leqslant C$, $A \leqslant_*^{\mathrm{ff}} C$, $B \leqslant_*^{\mathrm{ff}} C$，则 $A \leqslant_*^{\mathrm{ff}} B$；(4) 对所有 $A, B \in \mathrm{F}_{\mathbf{V}} \cap \mathrm{Mod}(T)$，$A \leqslant_*^{\mathrm{ff}} B$ 蕴含 $A \preccurlyeq_{\omega,\omega} B$；并且，若另外 $A, B \in \mathrm{F}_{\mathbf{V}}^{<\infty}$，则 $A \preccurlyeq B$ 蕴含 $A \leqslant_*^{\mathrm{ff}} B$。

正如1.13(1)所示，这第二种方法的核心思想是，可以用无限秩自由对象的有限秩子模型来“逼近”它们。值得注意的是，得益于 Kharlampovich-Myasnikov 的开创性工作 [20] 以及 Sela [35]的研究，这一方法在自由群的情形下是可行的。基于此，并运用文献中的一些关键结果，我们将在第 4 节证明，自由群实际上满足1.13中的所有假设。这为证明无限秩自由群具有非超稳定性提供了又一种方法；更一般地，我们有：

推论 1.14。设$\mathbf{V}$ 是一个具有构造原理的簇，且 T 是$\mathcal{F}_{\mathbf{V}}^{\infty}$的 T 一阶理论，其表现类似于自由群理论（参见 1.13），则 T 不是超稳定的。

2. Preliminaries

本节回顾抽象初等类（AECs）的一些背景概念（另见 [37]）。我们假定读者熟悉泛代数和模型论中的基本定义与构造，相关内容可参见 [8,39]。

定义 2.1。设 K 是一类 L-结构，且令 $\preccurlyeq$ 为 K 上的二元关系。若满足以下条件，则称 (K $\preccurlyeq$) 为一个抽象初等类 （AEC）：

(1) K 和 $\preccurlyeq$ 对同构封闭，即若 $A \in \mathrm{K}$ 且 $f : A \to B$ 是同构，则 $B \in \mathrm{K}$；若 $C \in \mathrm{K}$ 满足 $C \preccurlyeq A$，则 $f(C) \preccurlyeq B$。(2) 若 $A \preccurlyeq B$，则 A 是 B 的 L-子模型（记作 $A \leqslant B$）。(3) 关系 $\preccurlyeq$ 是 K 上的偏序。

(4) 若 $(A_i)_{i<\delta}$ 是 K 中结构的递增连续 $\preccurlyeq$-链，则：(4.1) $\bigcup_{i<\delta} A_i \in \mathrm{K}$；(4.2) 对每个 $j<\delta$，$A_j \preccurlyeq \bigcup_{i<\delta} A_i$；(4.3) 若对所有 $i<\delta$ 都有 $A_i \preccurlyeq B$，则 $\bigcup_{i<\delta} A_i \preccurlyeq B$。(5) 若 A，B，$C \in \mathrm{K}$，$A \preccurlyeq C$，$B \preccurlyeq C$ 且 $A \leqslant B$，则 $A \preccurlyeq B$；(6) 存在一个 Löwenheim–Skolem 数 LS(K $\preccurlyeq$) $\geqslant |L| + \aleph_0$，使得若 $A \in \mathrm{K}$ 且 $B \subseteq A$，则存在 $C \in \mathrm{K}$，使得 $B \subseteq C \preccurlyeq A$ 且 $|C| \leqslant |B| + \mathrm{LS}(\mathrm{K} \preccurlyeq)$。

当 (K $\preccurlyeq$) 是一个抽象初等类时，我们称 $\preccurlyeq$ 为类 K 的 强子模型关系 。我们将条件 (4) 称为塔斯基-沃特公理，将条件 (4.3) 特别称为抽象初等类的光滑性公理，将条件 (5) 称为凝聚公理，并将条件 (6) 称为 *Löwenheim-Skolem-Tarski* 公理。

记号 2.2. 给定两个 L-结构 A 和 B，我们记作 $A \leqslant B$，如果 A是 B的一个 L-子结构。此外，给定一个抽象初等类 K 以及 $A, B \in \mathrm{K}$，若嵌入$f\colon A \to B$ 满足 $f(A) \preccurlyeq B$，则称其为一个强嵌入 。

接下来，我们引入（弱）独立性演算的概念及其基础定义。我们注意到，以下方法与 AEC 文献中常采用的所谓优良框架方法类似（参见 [1,7,15,19]）。然而，鉴于我们预期的应用，我们不需要优良框架那样更广泛的普遍性，因此在定义2.6 中引入更简单的弱独立性演算概念。

定义 2.3。 设 (K $\preccurlyeq$) 是一个抽象初等类。若对于每个 $C \in \mathrm{K}$ 且满足 $|C| \leqslant \kappa$，都存在一个强嵌入 $f\colon C \to B$，则称模型 $B \in \mathrm{K}$ 是 $(\kappa,\preccurlyeq)$-泛的。若任意两个大小为 $<\kappa$ 的强子结构 $A_0 \preccurlyeq B$ 和 $A_1 \preccurlyeq B$，以及每个同构 $f\colon A_0 \to A_1$，都存在一个自同构 $\pi\colon B \to B$ 使得 $\pi{\restriction}A_0 = f$，则称 $B \in \mathrm{K}$ 是 $(\kappa,\preccurlyeq)$-齐次的。

关于以下事实的证明以及 AP 和联合嵌入性质的（标准）定义，请参阅 [37]。

事实 2.4。 设 (K $\preccurlyeq$) 是一个具有联合性质（AP）和联合嵌入性质（JEP）的抽象初等类，则对所有 $\kappa \geqslant \mathrm{LS}(\mathrm{K} \preccurlyeq)$，存在一个模型 $M \in \mathrm{K}$，同时具有 $(\kappa,\preccurlyeq)$-齐次性和 $(\kappa,\preccurlyeq)$-泛性。

记号 2.5. 在 2.4 的语境中，令 $\mathfrak{K} = (\mathrm{K} \preccurlyeq)$，我们用 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{K}}$ 表示 K 的怪物模型，即 K 中的一个模型，它对某个足够大的基数 κ 是 $(\kappa,\preccurlyeq)$-齐次且 $(\kappa,\preccurlyeq)$-万有的。按照抽象初等类中的标准做法，我们将类型定义为怪物模型中的 Galois 类型，亦即其自同构群的轨道。给定一个元素 $a \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{K}}$ 以及一个强子模型 $B \preccurlyeq \mathfrak{M}_{\mathfrak{K}}$（其大小为 $<\kappa$，其中 κ 是使 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{K}}$ 同时为 $(\kappa,\preccurlyeq)$-齐次与 $(\kappa,\preccurlyeq)$-万有的那个大小），我们用类型(a/A)表示 a在 $\mathfrak{M}$ 中于 A 上的 Galois 类型，即 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{K}}$ 中逐点固定 B 的那些自同构的稳定子子群。给定 $B \preccurlyeq \mathfrak{M}_{\mathfrak{K}}$，我们用 $S(B)$ 表示 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{K}}$中所有在 B 上的 Galois 类型所成的集合。当类 $\mathfrak{K}$ 由语境清楚时，我们便只写 $\mathfrak{M}$，而不写 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{K}}$。

如上所述，下面对弱独立性演算的定义旨在将稳定的一阶理论中的非分岔性质推广到抽象初等类的抽象情形。实质上，定义 2.6 中的下列性质属于优良框架的性质，但不包括局部特征；我们将在2.7 中单独讨论局部特征，并将其作为刻画超稳定独立演算的性质。

定义 2.6。 设 (K $\preccurlyeq$) 是一个具有怪物模型 $\mathfrak{M}$ 的抽象初等类。若 (K $\preccurlyeq, \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}$) 是一种弱独立性演算，则 $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}$ 是 $\mathfrak{M}$ 的元组$\bar{a} \in \mathfrak{M}^{<\omega}$ 与强子模型之间的三元关系，并满足以下性质：

(i) 不变性：若 $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{A_0} A_1$ 和 $f \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{M})$，则 $f(\bar{a}) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{f(A_0)} f(A_1)$。(ii) 不相交性：若 $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{A_0} A_1$，则 $\bar{a} \in A_1$ 当且仅当 $\bar{a} \in A_0$。(iii) 对称性：若 $A_0 \preccurlyeq A_1 \preccurlyeq \mathfrak{M}$、$\bar{b} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{A_0} A_1$ 和 $\bar{a} \in A_1^{<\omega}$，则存在$A_0 \preccurlyeq A_2$ 使得 $\bar{b} \in A_2^{<\omega}$且 $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{A_0} A_2$。(iv) 单调性：若 $A \preccurlyeq A' \preccurlyeq B' \preccurlyeq B \preccurlyeq \mathfrak{M}$且 $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{A} B$，则 $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{A'} B'$。(v) 存在性：若 $A \preccurlyeq B \preccurlyeq \mathfrak{M}$ 且 $\bar{a} \in \mathfrak{M}^{<\omega}$，则存在一个 $q \in S(B)$，使得 $q \restriction A = \mathrm{tp}(\bar{a}/A)$，并且对于某个 $\bar{b} \models q$，有 $b \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{A} B$。(vi) 唯一性：若 $A \preccurlyeq B \preccurlyeq \mathfrak{M}$、$\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{A} B$、$\bar{b} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{A} B$ 且 $\mathrm{tp}(\bar{a}/A) = \mathrm{tp}(\bar{b}/A)$，则 $\mathrm{tp}(\bar{a}/B) = \mathrm{tp}(b/B)$。(vii) 连续性：若 δ 是极限，$(A_i)_{i \leqslant \delta}$ 是一个连续的 $\preccurlyeq$-链，$A_\delta \preccurlyeq \mathfrak{M}$ 且 $\bar{a}$，$(\bar{a}_i)_{i<\delta}$ 满足 $\bar{a}_i \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{A_0} A_i$ 且 $\mathrm{tp}(\bar{a}_i/A_i) = \mathrm{tp}(\bar{a}/A_i)$，则 $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{A_0} A_\delta$。

定义 2.7. 在 2.6 的背景下，我们称 $(\mathcal{K} \preccurlyeq, \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|})$ 为超稳定独立演算，如果还满足以下条件：

(viii) 超稳定局部特征：如果 δ 是极限，$(A_i)_{i \leqslant \delta}$ 是递增连续的$\preccurlyeq$-链，并且 $A_\delta \preccurlyeq \mathfrak{M}$，那么存在 $\alpha < \delta$ 使得 $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{A_\alpha} A_\delta$。

3. The first venue

本节讨论 1.1中阐述的第一个研究方向。为了证明定理1.7，我们引入了强化构造原理 (RCP)（参见 1.6），这是对 Eklof 和 Mekler 提出的原始构造原理的强化，在大多数具体情形下都成立。

记号 3.1. 设 B 是一个模型且 $C \subseteq B$。我们用 $\mathrm{dcl}^{\mathrm{qf}}_B(C)$ 表示 B中 C 的无量词可定义闭包。

定义 1.6。 设 $\mathbf{V}$ 是一个代数簇。若满足以下条件，我们称 $\mathbf{V}$ 满足强化构造原理 (RCP)：(RCP) 存在可数 A，$B \in \mathcal{F}^{\infty}_{\mathbf{V}}$满足 $A \leqslant B$：

(a) A 由 $\{a_i$ 自由生成：$i < \omega\}$，并且对于每个 $i < \omega$，令$A_i = \langle a_j : j \leqslant i \rangle_B$，则有 $A_i \leqslant^{\mathrm{ff}}_* B_i$；(b) 对于每个 $C \in \mathrm{F}_{\mathbf{V}}$，$A \not\leqslant^{\mathrm{ff}}_* B * C$；(c) B 由 $\{b_i$ 自由生成：$i < \omega\}$，且 $\mathrm{dcl}^{\mathrm{qf}}_B(Ab_0) = B$。

定义 3.2。 设 $\mathbf{V}$ 是一个满足构造原理的代数簇。当满足以下条件时，我们称 $(\mathrm{F}_{\mathbf{V}}, \leqslant^{\mathrm{ff}}_*)$ 的覆盖 (K $\preccurlyeq$) 足够强：

(i) $A, B, C \in \mathrm{F}^{\infty}_{\mathbf{V}}$且 $A \preccurlyeq B$蕴含 $A * C \preccurlyeq B * C$；(ii) 若 A与 B如 RCP 中所述且 $B \preccurlyeq M \in \mathrm{K}$，则 $\mathrm{dcl}^{\mathrm{qf}}_B(Ab_0) = \mathrm{dcl}^{\mathrm{qf}}_M(Ab_0)$；(iii) 若 A 与 B 如 RCP 中所述且 f 是（K $\preccurlyeq$）的怪物模型 $\mathfrak{M}$的一个自同构，并逐点固定 A，则我们有 $\mathrm{dcl}^{\mathrm{qf}}_{\mathfrak{M}}(Ab_0) = \mathrm{dcl}^{\mathrm{qf}}_{\mathfrak{M}}(Af(b_0))$。

背景 3.3. 在本节中我们假设$\mathbf{V}$ 满足来自 1.6 的假设，因此特别地，A, A_i, B等均如该处所述。我们还假设（$\mathcal{K}$ $\preccurlyeq$）是一个 足够强的 AEC 覆盖，对应于（$\mathcal{F}_{\mathbf{V}}, \leqslant^{\mathrm{ff}}_*$），其中后者如 3.2 中所述。

构造 3.4. 设 $\lambda \geqslant \mathrm{LS}(\mathrm{K} \preccurlyeq)$ 是一个无限基数，并设 $A \preccurlyeq \mathfrak{M}$ 为由 $\{a_i : i < \lambda\} \cup \{c_i : i < \omega\}$ 自由生成的 $\mathbf{V}$- 自由代数。对于每个 $X \in \lambda^{[\aleph_0]}$，令 $B_X, A_X, A'_X, B'_X, B^X$ 满足以下条件：

(1) $B_X \in \mathrm{F}^{\infty}_{\mathbf{V}}$，且 B_X 由 $\{b^X_i\colon i<\omega\}$ 自由生成；(2) 有 $A_X := \langle a_i : i \in X\rangle_A \leqslant B_X$；(3) 对 A_X, B_X 如 1.6 中所述，特别是 $\mathrm{dcl}^{\mathrm{qf}}_{B_X}(A_X b^X_0) = B_X$；(4) $B'_X \in \mathrm{F}^{\infty}_{\mathbf{V}}$ 由 $\{b^X_i\colon i<\omega\}\cup\{c_i\colon i<\omega\}$ 自由生成；(5) $A'_X \in \mathrm{F}^{\infty}_{\mathbf{V}}$ 由 $\{a_i : i \in X\}\cup\{c_i\colon i<\omega\}$ 自由生成；(6) $B^X \in \mathrm{F}^{\infty}_{\mathbf{V}}$ 由 $\{a_i\colon i<\lambda, i\notin X\}\cup\{b^X_i\colon i<\omega\}\cup\{c_i\colon i<\omega\}$ 自由生成；(7) 若 $Y \in \lambda^{[\aleph_0]}$，则 $\langle B'_X B^Y\rangle_{\mathfrak{M}} = B'_X *_{A'_{X\cap Y}} B^Y$，其中 $A'_{X\cap Y}$ 由 $\{a_i\colon i \in X\cap Y\}$ 自由生成，且 $\{c_i\colon i<\omega\}$；(8) $B^X \preccurlyeq \mathfrak{M}$。

断言 3.5。对于每个 $X \in \lambda^{[\aleph_0]}$、$A \preccurlyeq B^X \in \mathrm{K}$。

证明。事实是 $B^X \in \mathcal{K}$ 显然，因为 $B^X \in \mathcal{F}^{\infty}_{\mathbf{V}} \subseteq \mathcal{K}$。关于这一事实 $A \preccurlyeq B^X$，只需证明 $A'_X \preccurlyeq B'_X$，因为由 3.2（i）可得$A \preccurlyeq B^X$。令 $X = \{\alpha_i : i<\omega\}$ 是 X 的一个枚举，则 $A'_X \preccurlyeq B'_X$ 显然，因为对于每个 $i<\omega$，我们都有：

$$A'_{X,i} := \langle\{a_{\alpha_j} : j \leqslant i\}\cup\{c_k : k<\omega\}\rangle_A \in \mathcal{F}^{\infty}_{\mathbf{V}},$$

$$A'_{X,i} \leqslant^{\mathrm{ff}}_{*} B'_X \in \mathcal{F}^{\infty}_{\mathbf{V}},$$

由于 3.4（3），因此 $\bigcup_{i<\omega} A'_{X,\,i} = A'_X \preccurlyeq B'_X$，因为 $(\mathrm{K}, \preccurlyeq)$ 是 $(\mathrm{F}_{\mathbf{V}}, \leqslant^{\mathrm{ff}}_{*})$ 的 AEC 覆盖。 ■

断言 3.6。若 $X, Y \in \lambda^{[\aleph_0]}$, $X \neq Y$和 $|X\cap Y| < \aleph_0$，则在 $(\mathrm{K}, \preccurlyeq)$ 中，b^X_0 在 A 上的 Galois 类型不同于 b^Y_0 在 A 上的 Galois 类型。

证明。由 3.4(8) 可知 $B^X, B^Y \preccurlyeq \mathfrak{M}$。回想一下，根据 3.5，我们有 $A \preccurlyeq B^X, B^Y$。假设存在怪物模型$\mathfrak{M}$（即 $(\mathrm{K}, \preccurlyeq)$ 的怪物模型）的自同构 f，它逐点固定 A，并将 b^Y_0 映到 b^X_0。那么显然，回想 $\mathrm{dcl}^{\mathrm{qf}}_{B_Y}(A_X b^Y_0) = B_Y$，我们也有 $\mathrm{dcl}^{\mathrm{qf}}_{B^Y}(A b^Y_0) = B^Y$。由于我们假设 $(\mathrm{K}, \preccurlyeq)$ 对 $(\mathrm{F}_{\mathbf{V}}, \leqslant^{\mathrm{ff}}_{*})$ 的覆盖如 3.2 所述，f 将 $\mathrm{dcl}_{\mathfrak{M}}(A b^Y_0) = \mathrm{dcl}_{B^Y}(A b^Y_0) = B^Y$ 映到 $\mathrm{dcl}_{\mathfrak{M}}(A b^X_0) = \mathrm{dcl}_{B^X}(A b^X_0) = B^X$。

注意到，由于 $|X\cap Y| < \aleph_0$，根据 3.4(7) 可得 $\langle B'_X B^Y\rangle_{\mathfrak{M}} = B'_X *_{A'_{X\cap Y}} B^Y$。显然可得 $D := \langle A'_X B^Y\rangle_{\mathfrak{M}} = A'_X *_{A'_{X\cap Y}} B^Y$ and thus$A'_X \leqslant^{\mathrm{ff}}_{*} A'_X *_{A'_{X\cap Y}} B^Y$。于是，我们有 $A'_X, B^Y \leqslant^{\mathrm{ff}}_{*} \langle A'_X B^Y\rangle_{\mathfrak{M}}$，因此应用自同构 f 后，可得 $f(A'_X)\ f(B^Y) \leqslant^{\mathrm{ff}}_{*} f(D) \in \mathrm{F}_{\mathbf{V}}$。但根据 3.2 中的假设，这意味着 $f(A'_X) = A'_X$and $f(B^Y) = B^X$，因此 $A'_X, B^X \leqslant^{\mathrm{ff}}_{*} f(D)$。但这尤其意味着，对于某个$C \in \mathrm{F}_{\mathbf{V}}$，有 $A_X \leqslant^{\mathrm{ff}}_{*} B_X * C$，从而与 3.4(3) 矛盾。 ■

定理 1.7。设 $\mathbf{V}$ 是一个满足 (RCP)*(参见 1.6)* 的可数代数簇，并且设 $(\mathcal{K}, \preccurlyeq)$ 是一个足够强的 抽象初等类覆盖 $(\mathcal{F}_{\mathbf{V}}, \leqslant^{\mathrm{ff}}_{*})$ *(参见 3.2)*。那么 $(\mathcal{K}, \preccurlyeq)$ 不是超稳定的。

证明。这由构造3.4 和断言3.6得出；此外注意到，对于无限基数 λ 满足 $\lambda^{\aleph_0} > \lambda$ 的情形，我们可以找到一个子集族$\mathcal{X}$，其元素是 $\lambda^{[\aleph_0]}$的子集，并且能证明 $\lambda^{\aleph_0} > \lambda$，且对每个 X, $Y \in \mathcal{X}$ 都有 $|X\cap Y| < \aleph_0$。 ■

3.1. 对 R-模的应用

正如我们在引言中所解释的，接下来我们将利用定理 1.7，给出一个充分判据，以判断一个 R-模的抽象初等类不是超稳定的。在不满足弱左完美条件 1.9的情况下，这将把 [23] 中的事实 1.8 推广到 [23]-模的抽象初等类，不再局限于带有纯嵌入关系的情形。

观察 3.7. 设 $F = F(X)$是由 X自由生成的自由 R-模。设$0 \neq a \in F$，并假设 $ra = 0$。不失一般性，我们有$a = \sum_{i<n} s_i x_i$，其中 $0 \neq s_i \in R$，对所有满足 $0 < n < \omega$的 $i < n$ 均成立。于是我们有：

$$ra = \sum_{i<n} rs_i x_i = 0,$$

但由于 F 是自由的，这意味着对所有 $i < n$，都有 $rs_i = 0$，因此r 必定是对所有 $i < n$而言 s_i 的左湮灭子。因此，如果 r 不是 R的左零因子（即 $\nexists s \in R$、 $rs = 0$），那么 $rx = 0$ 只有平凡解，即 $x = 0$。

现在假设 r 不是 R的左零因子。那么 $F(X) \models \exists! y(ry = rx_i)$。为此，设 $b \in F$是一个解，则 $rb - rx_i = 0$，因此上述结论适用，即我们有 $rb - rx_i = r(b - x_i)$且 $b - x_i = 0$，也就是说， $b = x_i$。

定义 1.9。若对于任意序列（ R ，环称为弱左完美的，如果该环满足：对于任意序列（$r_n : n < \omega$） $\in R^\omega$，若对每个 $m < \omega$， $r_0 \cdots r_m$ 都不是零因子，则主理想序列 $\{r_0 \cdots r_m R : m < \omega\}$ 最终稳定。

命题 3.8。 设 R 是一个非弱左完美环。那么 R 满足 th e 强化构造原理。

证明。设（$r_n : n < \omega$） $\in R^\omega$ 是非弱左完美性的一个见证，即对于所有 $m < \omega$，我们有 $r_0 \cdots r_m$不是 R的零因子，且 $r_0 \cdots r_m R \supsetneq r_0 \cdots r_{m+1} R$。设 B由 $\{b_i$自由生成： $i < \omega\}$，并且对于 $i < \omega$，令$a_i = b_i - r_i b_{i+1}$。令 $A = \langle a_i : i < \omega \rangle_B$。于是 $A \leqslant B$ 正如所需。要验证 1.6 的条件 (a) 和 (b) 得以满足，只需回顾 [13, 1 的证明。1，p. 193]。要验证 1.6 的条件 (c) 得以满足，只需使用观察 3.7。

■

推论 1.10。设 R 是一个环，且 $\mathbf{V}_R$ 是所有 R-模构成的簇。若R不是弱左完美的，则 $(\mathcal{F}\mathbf{V}_R, \leqslant_*^{\text{ff}})$ 的任何足够强的 AEC 覆盖都不是超稳定的。

证明。 由命题 3.8和定理1.10。 ■

3.2. 群的应用

定理 1.7 的第二个推论适用于群这一情形。我们证明以下推论，并特别指出，它涵盖了群簇和阿贝尔群簇这两个关键情形。

推论 1.11。 设$\mathbf{V}$ 是一个无挠群簇，且若 $F_{\mathbf{V}}(X) \in \mathcal{F}_{\mathbf{V}}$, $x \in X$, $y \in F_{\mathbf{V}}(X)$， $0 < n < \omega$，则 ($x^n = y^n \Rightarrow x = y$)。那么 $\mathbf{V}$ 满足 RCP，因此 $(\mathcal{F}\mathbf{V}_R, \leqslant_*^{\text{ff}})$ 的任何足够强的 AEC 覆盖都不是超稳定的。

证明。令 B 为由$\mathbf{V}$-自由群自由生成的 $\{b_i : i < \omega\}$。对于 $i < \omega$，令$a_i = b_i b_{i+1}^{-2}$ 并令 $A = \langle a_i : i < \omega \rangle_B$，那么由 [27, 第 131] 页（另见 [9, 练习4。5]）可知，对（A， B）是构造原理 CP 的一个见证。此外，若满足推论陈述中的条件，则显然条件1.6（c）也成立

，因此 RCP 成立。于是，由定理1.10 可知，不存在足够强的（$\mathcal{F}\mathbf{v}_R$，$\leqslant^{\mathrm{ff}}_*$）的 AEC 覆盖是超稳定的。 ■

注 3.9. 设 V 是任意一个（可数）代数簇，且 T 是 V-自由代数的一阶理论，那么 (Mod(T) $\preccurlyeq_{\omega,\omega}$) 显然是 ($\mathrm{F}_{\mathbf{V}}, \leqslant^{\mathrm{ff}}_*$) 的一个足够强的覆盖，按 3.2 的含义。因此，推论 1.10 和推论 1.11 表明，只要 V 是某个 R模的簇，且该模的环 R 是非弱左完美环；或者 V 是一个无挠群簇，并且若 $F_{\mathbf{V}}(X) \in \mathrm{F}_{\mathbf{V}}, x \in X, y \in F_{\mathbf{V}}(X)$ 和 $0 < n < \omega$，那么方程 $x^n = y^n$ 就意味着 $x = y$，V 就不是超稳定的。

4. The second venue

现在，我们在假设簇 **V**满足构造原理 CP 的条件下，考察另一种证明非超稳定性的方法。1.2中解释过，我们在此不展示结构上数量为 $\lambda^{\aleph_0}$的类型，而是从独立性演算存在性的角度（见2.6）探讨这个问题。诚然，下面4.2 中的条件相当强，但它们表明，在某些情况下，Eklof 和 Mekler 的原始 CP（而非 RCP）本身就蕴含非超稳定性。

定义 4.1。假设 ($\mathcal{F}_{\mathbf{V}}, \leqslant^{\mathrm{ff}}_*$) 具有一个 AEC 覆盖 $\mathfrak{K} = (\mathcal{K} \preccurlyeq)$，且该覆盖允许弱独立性演算 ($\mathcal{K} \preccurlyeq, \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}$)（参见 2.6），并设 $A, B, C \in \mathcal{F}_{\mathbf{V}}$ 满足$A, B, C \preccurlyeq \mathfrak{M}_{\mathfrak{K}}$, $A \leqslant^{\mathrm{ff}}_* B, C$，则令

$$B \overset{*}{\underset{A}{\smile}} C \iff B *_A C = \langle BC \rangle_{\mathfrak{M}_{\mathfrak{K}}} \preccurlyeq \mathfrak{M}_{\mathfrak{K}}.$$

定义 4.2。假设 ($\mathcal{K} \preccurlyeq$) 是 ($\mathcal{F}^{\infty}_{\mathbf{V}}, \leqslant^{\mathrm{ff}}_*$) 的 AEC 覆盖，且承认弱独立性演算（参见 2.6），并记 $\mathfrak{M}$ 为其怪物模型。若满足以下条件，我们称 ($\mathcal{K} \preccurlyeq, \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}$) 关于自由因子是良好的：

($\star_1$) 存在 $n_* < \omega$，使得对于每个 $n_* \leqslant m < \omega$，都有 $F_{\mathbf{V}}(m) \in \mathrm{K}$；($\star_2$) 存在 $m_* < \omega$，使得若 $A, B, C \in \mathrm{F}_{\mathbf{V}}$ 满足 $A, B, C \preccurlyeq \mathfrak{M}_{\mathfrak{K}}$, $A \leqslant^{\mathrm{ff}}_* B$,$A \leqslant^{\mathrm{ff}}_* C$，且 A 的秩至少为 m_*，那么 $B \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A C$ 当且仅当 $B \overset{*}{\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}}_A C$；($\star_3$) 若 $A \in \mathrm{F}^{<\infty}_{\mathbf{V}} \cap \mathrm{K}$，$B, C \in \mathrm{F}_{\mathbf{V}} \cap \mathrm{K}$ 满足 $A, B, C \preccurlyeq \mathfrak{M}_{\mathfrak{K}}$ 和 $A \leqslant^{\mathrm{ff}}_* C$，那么对于每个满足 $c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A B$ 的 $c \in C$，都存在 $D \in \mathrm{F}^{<\infty}_{\mathbf{V}}$，使得 $c \in D$,$A \leqslant^{\mathrm{ff}}_* D \leqslant^{\mathrm{ff}}_* C$ 和 $D \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A B$。($\star_4$) 若 $A, B, C \in \mathrm{F}^{<\infty}_{\mathbf{V}} \cap \mathrm{K}$，$D \in \mathrm{F}_{\mathbf{V}} \cap \mathrm{K}$ 满足 $A, B, C, D \preccurlyeq \mathfrak{M}_{\mathfrak{K}}$, $A \leqslant^{\mathrm{ff}}_* B \leqslant^{\mathrm{ff}}_* D$,$A \leqslant^{\mathrm{ff}}_* C \leqslant^{\mathrm{ff}}_* D$ 和 $B \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A C$，则可推出 $B *_A C \leqslant^{\mathrm{ff}}_* D$。

背景 4.3. 本节假设 **V** 是满足构造原理的可数代数簇，并且 ($\mathcal{K} \preccurlyeq$) 是 ($\mathcal{F}_{\mathbf{V}}, \leqslant^{\mathrm{ff}}_*$) 的一个 AEC 覆盖，它具有弱独立性演算 ($\mathcal{K} \preccurlyeq, \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}$)（参见 2.6），且相对于自由因子而言是良好的（参见 4.2）。此外，我们用 $\mathfrak{M}$ 表示 ($\mathcal{K} \preccurlyeq$) 的怪物模型（参见 2.5）。

引理 4.4. 若 $(A_i : i < \omega)$ 和 $(B_i : i < \omega)$ 是取自 $\leqslant^{\mathrm{ff}}_*$的对象的 $\mathcal{F}_{\mathbf{V}} \cap \mathcal{K}$-链，并且对每个 $i < \omega$，都有 A是秩为 **V**-自由代数（回顾 $\geqslant m_*$（参见 4.2($\star_2$)），使得 $A_i \leqslant^{\mathrm{ff}}_* B_i$ 且 $B_i \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{A_i} \bigcup_{j<\omega} A_j$，则 $\bigcup_{i<\omega} A_i \leqslant^{\mathrm{ff}}_* \bigcup_{i<\omega} B_i$。

证明。由 4.2($\star_2$)，$B_i \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{A_i} \bigcup_{j<\omega} A_j$ 可推出 $B_i \overset{*}{\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}}_{A_i} \bigcup_{j<\omega} A_j$，这意味着 $\langle B_i \cup \bigcup_{j<\omega} A_j \rangle = B_i *_{A_i} \bigcup_{j<\omega} A_j \preccurlyeq \mathfrak{M}$。令 $A = \bigcup_{j<\omega} A_j$，$B = \bigcup_{j<\omega} B_j$ 且

对于每个 $i<\omega$，令 $C_i,\ D_i\in \mathbf{K}$ 满足 $B_{i+1}=B_i*C_i$ 且 $A_{i+1}=A_i*D_i$。此外，令 $E_i\in\mathbf{K}$ 满足 $B_i=A_i*E_i$。那么，对所有 $i<\omega$，以下结论成立：

$$B_i *_{A_i} \bigcup_{j<\omega} A_j = E_i * A_i * \mathop{\ast}_{i<j<\omega} D_i,$$

从而

$$B=(E_i*A_i*\mathop{\ast}_{i<j<\omega} D_i)*\mathop{\ast}_{i<j<\omega} C_i.$$

由于 $A_i*\ast_{i<j<\omega}D_i=\bigcup_{j<\omega}A_j$，这立即推出 $\bigcup_{j<\omega}A_j\leqslant^{\mathrm{ff}}_* B$。 ■

定理 1.12. 设 $\mathbf{V}$ 与 $(\mathscr{K}\ \preccurlyeq,\downarrow)$ 如背景 *4.3*，则 $(\mathscr{K}\ \preccurlyeq,\downarrow)$ 不是超稳定的（参见*2.7*）。

证明。按照背景 4.3，我们令 $(\mathbf{K}\ \preccurlyeq,\downarrow)$ 为 $(\mathbf{F}_{\mathbf{V}},\leqslant^{\mathrm{ff}}_*)$ 的一个容许弱独立性演算的 AEC 覆盖。为得出矛盾，我们假设 $(\mathbf{K}\ \preccurlyeq,\downarrow)$ 在 2.7 的意义下是超稳定的。由于 $\mathbf{V}$ 满足构造原理，我们可以找到两个可数的 $A,B\in\mathbf{F}^{\infty}_{\mathbf{V}}$，其中 $A\leqslant B$, A 由 $\{a_i$ 自由生成：$i<\omega\}$ 使得$\langle a_j:\ j\leqslant i\rangle_B\leqslant^{\mathrm{ff}}_* B$，并且对所有 $C\in\mathbf{F}^{\infty}_{\mathbf{V}}$ 有 $A\not\leqslant^{\mathrm{ff}}_* B*C$。令 $X_C=\{c_i:\ i<\omega\}$ 为取自 C 的任意元素集，使得 $\langle AX_C\rangle_X=C$，并且对每个 $i<\omega$，我们令 $A_i=\langle a_j:\ j\leqslant i\rangle_B$。注意，由 4.2($\star_1$)，链 $(A_i)_{i<\omega}$ 最终属于 $\mathbf{K}$。

断言。存在一个无限递增序列 $I:=\{i_n:\ n<\omega\}\subseteq\omega$，使得对于所有 $i\in I$，都存在一个 $C_i\in\mathbf{F}^{<\infty}_{\mathbf{V}}$ 满足以下条件：
(1) $c_i\in C_i\leqslant^{\mathrm{ff}}_* C$；(2) $C_i\downarrow_{A_i}A$；(3) $A_{i_0}\leqslant^{\mathrm{ff}}_* C_0$，且对于所有 $n<\omega$，$A_{i_{n+1}}*_{A_{i_n}}C_n\leqslant^{\mathrm{ff}}_* C_{n+1}$。

断言的证明。我们对 $n<\omega$ 使用归纳法来证明该断言。
情形 $n=0$。
我们先考虑元素 c_0。由于 $(\mathbf{K}\ \preccurlyeq,\downarrow)$ 是 2.7 意义下的超稳定分叉演算，因此存在某个 $i_0<\omega$，使得 $A_{i_0}\in\mathbf{K}$ 且 $c_0\downarrow_{A_{i_0}}A$。注意，利用 $(\mathbf{K}\ \preccurlyeq,\downarrow)$ 的单调性（参见 2.6），不失一般性地，我们可以假设 A_{i_0} 的秩为 $\geqslant n_*,m_*$，其中这两个值如 4.2 中所述。由于 A_{i_0} 是有限生成的，根据 4.2($\star_3$)，存在某个 $C_0\in\mathbf{F}^{<\infty}_{\mathbf{V}}\cap\mathbf{K}$，使得 $c_0\in C_0$, $A_{i_0}\leqslant^{\mathrm{ff}}_* C_0\leqslant^{\mathrm{ff}}_* C$ 且 $C_0\downarrow_{A_{i_0}}A$，从而验证了我们的断言。

情形 $n=m+1$。
根据归纳假设，存在 $C_m\in\mathbf{F}^{<\infty}_{\mathbf{V}}\cap\mathbf{K}$，使得 $c_m\in C_m$、$A_{i_m}\leqslant^{\mathrm{ff}}_* C_m\leqslant^{\mathrm{ff}}_* C$ 以及 $C_m\downarrow_{A_{i_m}}A$。由以下事实：当 $i_k<\ell$ 时，$A_{i_m}\leqslant^{\mathrm{ff}}_* A$、$C_m$ 以及 $A_{i_k}\leqslant^{\mathrm{ff}}_* A_\ell$，再结合 $C_m\downarrow_{A_{i_m}}A$ 和 4.2($\star_2$)，可知，对于所有 $i_m\leqslant k<\omega$，自由融合 $A_k*_{A_{i_m}}C_m$ 和 $A*_{A_{i_m}}C_m$ 都是怪物模型的良定义强子结构。由于结构族 $(A_k*_{A_{i_m}}C_m)_{k<\omega}$ 在 $(\mathbf{K}\preccurlyeq)$ 中构成一个强 $\preccurlyeq$-链，再次由 2.7 可知，存在某个 $i_m<i_n<\omega$ 使得

$$c_n \mathop{\downarrow}_{A_{i_n}*_{A_{i_m}}C_m} A*_{A_{i_m}}C_m.$$

由于 $A_{i_n}\leqslant^{\mathrm{ff}}_* C$，$C_m\leqslant^{\mathrm{ff}}_* C$，并且（根据单调性）$C_m\downarrow_{A_{i_m}}A_{i_n}$，由4.2($\star_4$) 可知 $A_{i_n}*_{A_{i_m}}C_m\leqslant^{\mathrm{ff}}_* C$。由于 $A_{i_n}*_{A_{i_m}}C_m$ 显然是有限生成的，

我们可以再次应用 4.2($\star_3$)，得到某个 $C_n \in \mathcal{F}_{\mathbf{V}}^{<\infty}$，满足 $c_n \in C_n$ 使得 $A_{i_n} *_{A_{i_m}} C_m \leqslant_*^{\mathrm{ff}} C_n \leqslant_*^{\mathrm{ff}} C$ 并且，此外：

$$C_n \underset{A_{i_n} *_{A_{i_m}} C_m}{\downarrow} A *_{A_{i_m}} C_m.$$

根据 C_n的定义，显然断言中的条件 (1) 和 (3) 均满足，因此只需验证 (2)。于是，由上面的最后一个展示式以及 4.2($\star_2$)，可立即推出

$$C_n \overset{*}{\underset{A_{i_n} *_{A_{i_m}} C_m}{\downarrow}} A *_{A_{i_m}} C_m$$

这意味着

$$C_n *_{(A_{i_n} *_{A_{i_m}} C_m)} (A *_{A_{i_m}} C_m) = \langle C_n \cup (A *_{A_{i_m}} C_m) \rangle_{\mathfrak{M}_{\mathfrak{K}}} \preccurlyeq \mathfrak{M}_{\mathfrak{K}}.$$

特别地，我们有 $C_n \cap (A *_{A_{i_m}} C_m) = A_{i_n} *_{A_{i_m}} C_m$。由于 $C_m \downarrow_{A_{i_m}} A$，再次由 4.2($\star_2$) 可得 $C_n \cap A = A_{i_n}$。然后，由于还有 $A_{i_n} \leqslant_*^{\mathrm{ff}} C_n$，可知结构 $C_n *_{A_{i_n}} A$ 定义良好，且显然：

$$C_n *_{A_{i_n}} A = \langle C_n A \rangle_{\mathfrak{M}_{\mathfrak{K}}} \preccurlyeq \mathfrak{M}_{\mathfrak{K}}.$$

因此，再次应用 4.2($\star_2$)，我们得出 $C_n \downarrow_{A_{i_n}} A$，从而完成归纳步骤的证明，也完成了断言的证明。⊣

最后，考虑断言中定义的结构族 $(C_i)_{i<\omega}$。由于对于所有 $C_i \in \mathcal{F}_{\mathbf{V}}^{\infty}$，$i < \omega$，由第 (3) 项可知 $(C_i)_{i<\omega}$ 是 $\leqslant_*^{\mathrm{ff}}$ 中的强 $\mathcal{F}_{\mathbf{V}}^{\infty}$ 链。因此，应用引理 4.4，可得 $A = \bigcup_{n<\omega} A_{i_n} \leqslant_*^{\mathrm{ff}} \bigcup_{n<\omega} C_n$。然而，由断言中的第 (1) 项可知 $\bigcup_{i<\omega} C_i = C$，从而得到$A \leqslant_*^{\mathrm{ff}} C$，这与 A 的事实相矛盾，C 它见证了构造原理。证明至此完成。■

4.1. **应用**

本文最后将说明，借助文献中的一些结果，定理 1.12 不仅给出了非阿贝尔自由群的一阶理论非超稳定性的另一种证明，而且更一般地，也给出了具有类似模型论性质的无限秩自由对象的一阶理论非超稳定性的另一种证明。我们回顾一下，若 T 是一个稳定一阶理论，则存在一个典范独立关系 $\downarrow$，满足第 2 节中的性质；它恰好就是非分岔独立关系（参见 [39, 定理 8.5。5]）。我们首先给出 (Mod(T) $\preccurlyeq_{\omega,\omega}$) 中自由代数 $A \leqslant_*^{\mathrm{ff}} B$ 在 *Mod*(T) 中的非分岔关系的刻画，并分别假设 T 稳定和超稳定。这尤其将使我们能够验证条件 4.2($\star_2$)

注记 4.5. 若 T 是语言 L中的稳定理论，则总存在基数 $\kappa(T) \leqslant |L|^+$，使得对所有 $a \in \mathfrak{M}$ 与 $B \subseteq \mathfrak{M}$，存在大小为 $< \kappa(T)$的子集 $A \subseteq B$，使得 $a \downarrow_A B$。该性质称为分叉独立性的局部性性质 。特别地，若 L 可数，则我们总有$\kappa(T) \leqslant \aleph_1$，而 $\kappa(T) = \aleph_0$等价于 T是超稳定的这一陈述。

命题 4.6. 设$\mathbf{V}$ 为可数代数簇，设 T 为无限秩$\mathbf{V}$-自由代数的一阶理论，并设 $\mathfrak{K} =$ (Mod(T) $\preccurlyeq_{\omega,\omega}$)。设 $A, B, C \in \mathrm{F}_{\mathbf{V}}$ 满足 $A, B, C \preccurlyeq_{\omega,\omega} \mathfrak{M}_{\mathfrak{K}}$、$A \leqslant_*^{\mathrm{ff}} B$ 与$A \leqslant_*^{\mathrm{ff}} C$，则

(1) 若 T 稳定且 $A \in \mathrm{F}_{\mathbf{V}}^{\infty}$，则 $B \downarrow_A C$ 当且仅当 $B \overset{*}{\downarrow}_A C$。

(2) 若 T 超稳定，且存在某个 $n_* < \omega$，使得秩为 $\geqslant n_*$ 的 $\mathbf{V}$-自由代数是 T 的模型，则存在 $n_* \leqslant m_* < \omega$，使得 $B \mathop{\downarrow}_A C$ 当且仅当 $B \mathop{\downarrow^*}_A C$。

证明。我们首先证明 (1)。设 $X_A = \{a_i : i < \kappa\}$ 是 A的一组基，其中 $\aleph_0 \leqslant \kappa$；再设 $X_C = \{a_i : i < \lambda\}$ 是 C的一组基，并假设 $\kappa \leqslant \lambda$。不失一般性，我们可以假设对于 $X_B = \{b_i, B = A * \langle X_B\rangle : \text{对于某个有限的} n < \omega,\ i \leqslant n\}$。我们证明，$B \mathop{\downarrow}_A C$ 当且仅当 $B \mathop{\downarrow^*}_A C$。

首先假设 $B \mathop{\downarrow^*}_A C$，那么 $B *_A C = \langle X_B X_C\rangle \preccurlyeq_{\omega,\ \omega} \mathfrak{M}$。注意，根据分叉独立性的局部特征（以及 $\mathbf{V}$ 是可数的这一事实），利用 4.5，我们可以找到一个可数子集 $I \subseteq \kappa$ 使得

$$X_B \mathop{\downarrow}_{\langle a_i : i\in I\rangle} X_C.$$

由于 $B *_A C = \langle X_B X_C\rangle \preccurlyeq_{\omega,\ \omega} \mathfrak{M}$，$\lambda$ 的每个置换 π 都诱导一个自同构 f_π，使得对所有 $i \in I$，$f_\pi(a_i) = a_{\pi(i)}$；此外，$f \restriction X_B$ 是恒等映射。因此，对于 λ 的所有置换 π，都有 $X_B \mathop{\downarrow}_{\langle f_\pi(a_i):i\in I\rangle} X_C$，这显然推出对所有可数 $Z \subseteq A$，都有 $X_B \mathop{\downarrow}_Z X_C$。由分叉独立性的有限特征可知，$B \mathop{\downarrow}_A C$。

反方向由平稳性很容易推出。假设我们有 $B \mathop{\downarrow}_A C$，并考虑结构 $B *_A C$。注意，由于 $A,\ B,\ C \in \mathrm{F}_{\mathbf{V}}$，显然有 $B *_A C \in \mathrm{F}_{\mathbf{V}}$。由于 $A \preccurlyeq_{\omega,\ \omega} C \preccurlyeq_{\omega,\ \omega} B *_A C$，且 $A,\ C \preccurlyeq_{\omega,\ \omega} \mathfrak{M}$，由怪物模型 $\mathfrak{M}$ 的万有性和齐性可知，我们可以找到一个子集 $B' \subseteq \mathfrak{M}$，使得 $B' *_A C \preccurlyeq_{\omega,\ \omega} \mathfrak{M}$，并且 $\mathrm{tp}(B'/A) = \mathrm{tp}(B/A)$。由已证明的方向可得 $B' \mathop{\downarrow}_A C$。由于分叉独立性在模型上是平稳的，因此 $\mathrm{tp}(B'/C) = \mathrm{tp}(B/C)$。由于 $B' \mathop{\downarrow^*}_A C$，由此可得 $B \mathop{\downarrow^*}_A C$。

我们考虑（2）。从左到右的方向仍由平稳性推出。从右到左的方向，我们作如下推理。设 X_A 是 A的基，$X_C \supseteq X_A$ 是 C的基，并设 X_B 满足 $X_A X_B$ 是 B的基。我们按 X_B的大小归纳证明该断言。

若 $X_B = \{b_0\}$ 是单元素集，则由于 T 超稳定，我们可以完全仿照（1）的证明进行推理，并利用 $\kappa(T) = \aleph_0$ 这一事实（回忆4.5）。于是，前一个证明中的指标集 I 可以取为有限集，因此令 $m_* \geqslant |I|$，该断言便成立。现在，设 $X_B = \{b_0, \ldots, b_n, b_{n+1}\}$，并假设$B \mathop{\downarrow^*}_A C$，即$B *_A C = \langle AC X_B\rangle \preccurlyeq_{\omega,\ \omega} \mathfrak{M}$。由此还可推出 $A * \langle b_0, \ldots, b_n\rangle \mathop{\downarrow^*}_A C$以及$A * \langle X_B\rangle \mathop{\downarrow^*}_{A*\langle b_0,\ \ldots,\ b_n\rangle} C * \langle b_0, \ldots, b_n\rangle$。由归纳假设可得$b_0, \ldots, b_n \mathop{\downarrow}_A C$。类似地，将归纳假设应用于扩张 $A * \langle b_0, \ldots, b_n\rangle \leqslant^{\mathrm{ff}}_* A * \langle X_B\rangle$，我们还可得到$A * \langle X_B\rangle \mathop{\downarrow}_{A*\langle b_0,\ \ldots,\ b_n\rangle} C * \langle b_0, \ldots, b_n\rangle$。因此，由单调性可得 $b_0, \ldots, b_n \mathop{\downarrow}_A C$以及$A * \langle X_B\rangle \mathop{\downarrow}_{A*\langle b_0,\ \ldots,\ b_n\rangle} C$，故由传递性可得 $A * \langle X_B\rangle \mathop{\downarrow}_A C$，证明完毕。■

受自由群的启发，我们引入以下表现得像自由群理论的定义，并证明它蕴含了4.2中的条件。

定义1.13。设$\mathbf{V}$ 是一个簇，且令 T 为$\mathcal{F}^{\infty}_{\mathbf{V}}$的一阶理论。我们称 T 表现得像自由群理论，如果满足以下条件：

(1) 存在 $n_* < \omega$，使得对于每个 $n_* \leqslant m < \omega$，都有 $F_{\mathbf{V}}(m) \in \mathrm{Mod}(T)$；(2) 对所有满足 $A \leqslant^{\mathrm{ff}}_* B$ 和 $b \in B$ 的 $A,\ B \in \mathrm{F}^{<\infty}_{\mathbf{V}} \cap \mathrm{Mod}(T)$，包含 Ab 的最小自由因子 $D \in \mathrm{Mod}(T)$ 属于 Ab 的代数闭包；

(3) $A,\ B\in \mathrm{F}_{\mathbf{V}}^{<\infty}$、$C\in \mathrm{F}_{\mathbf{V}}$ 以及 $A\leqslant B\leqslant C$、$A\leqslant_*^{\mathrm{ff}} C$、$B\leqslant_*^{\mathrm{ff}} C$，则 $A\leqslant_*^{\mathrm{ff}} B$；(4) 对所有 $A,\ B\in \mathrm{F}_{\mathbf{V}}\cap \mathrm{Mod}(T)$，$A\leqslant_*^{\mathrm{ff}} B$ 蕴含 $A\preccurlyeq_{\omega,\,\omega} B$；此外，若 $A,\ B\in \mathrm{F}_{\mathbf{V}}^{<\infty}$，则 $A\preccurlyeq_{\omega,\,\omega} B$ 蕴含 $A\leqslant_*^{\mathrm{ff}} B$。

引理 4.7。设 $\mathbf{V}$ 是一个可数代数簇，并设 T 是 $\mathcal{F}_{\mathbf{V}}^{\infty}$的完备理论。若 T 表现得如同自由群理论（参见 1.13），则 $(\mathrm{Mod}(T)\preccurlyeq_{\omega,\omega})$ 满足条件 4.2($\star_1$)、4.2($\star_3$) 和 4.2($\star_4$)。

证明。条件4.2($\star_1$) 正是 1.13(1)，因此我们考虑条件 4.2($\star_3$) 和条件 4.2($\star_4$)。

我们先验证条件 4.2($\star_3$)。设 $A,\ B$ 和 C 如条件陈述所述，并设 $c\in C$。由于 $A\leqslant_*^{\mathrm{ff}} C$，由 1.13(2) 可知，包含 Ac的最小自由因子 $D\leqslant_*^{\mathrm{ff}} C$ 包含于代数闭包 $\mathrm{acl}(Ac)$ 中，因此由非分岔的性质可得 $D\mathop{\downarrow}_A B$。最后，由于$A\leqslant D$ 且 $D\leqslant_*^{\mathrm{ff}} C$，由 1.13(3) 可知，$A\leqslant_*^{\mathrm{ff}} D$ 也成立。

我们验证条件 4.2($\star_4$)。设 A、B、C 和 D 如条件陈述所述。由于 $B\mathop{\downarrow}_A C$，由条件 4.2($\star_2$) 可得 $B\mathop{\downarrow}^*_A C$，因此 $B*_A C\preccurlyeq_{\omega,\,\omega}\mathfrak{M}$；进而由相干性也可得 $B*_A C\preccurlyeq_{\omega,\,\omega} D$。令 $D=\langle X_D\rangle$，其中 $X_D=\{d_i$ 是某个无限基：$i<\omega\}$，并定义 $D_n=\langle d_i:i\leqslant n\rangle_D$。显然，由于 $B*_A C$ 是有限生成的，我们有 $B*_A C\leqslant D_n$，其中某个 $n<\omega$。注意，按构造有 $D_n\leqslant_*^{\mathrm{ff}} D$；由此根据 1.13(4) 可得 $D_n\preccurlyeq_{\omega,\,\omega} D$。由 $\preccurlyeq_\omega$ 的相干性可得 ω，因此 $B*_A C\preccurlyeq_{\omega,\,\omega} D_n$。最后，由于 $B*_A C$ 和 D_n 都是有限生成的，根据 1.13(4) 可得 $B*_A C\leqslant_*^{\mathrm{ff}} D_n$。 ■

如引言中所述，以下事实广为人知（也可由 1.7 推出），但它是 1.12 一个有趣且非平凡的应用。

推论 4.8。理论 T_{fg}（非阿贝尔自由群的理论）不是超稳定的。

证明。为导出矛盾，假设 T_{fg} 是超稳定的。由命题 4.6 可知，T_{fg} 满足条件 4.2($\star_2$)。根据引理 4.7 和定理 1.12，只需验证 T_{fg} 满足定义 1.13 中的条件。为此，我们只需援引文献中的关键结果。首先，条件 1.13(1) 可由关于自由群的基本结果推出：秩为 $\geqslant 2$ 的自由群属于 $\mathrm{Mod}(T)$。条件 1.13(2) 可由 [31, 定理 3.16] 以及 [17, 第 2526] 页的观察推出：[31] 中的代数扩张实质上对应于将代数闭包这一概念限制在无量词公式上的情形。最后，条件 1.13(3) 可由 [31, 引理 2.4] 推出，而条件 1.13(4) 则可由 [35, 定理 4] 和 [33, 定理 1.3] 推出。

■

备注 4.9。最后，我们提及定理 1.12 的另一个应用。设 R 是一个非左完美的主理想整环（PID），并回顾这一事实：自由 R-模满足构造原理（另见 3.8 和 [13, 1.1，第 193] 页）。我们考虑任意一个包含自由 R-模且以纯子模关系 $\leqslant_{\mathrm{pp}}$ 为关系的抽象初等类（K $\leqslant_{\mathrm{pp}}$）。条件 4.2($\star_1$) 显然成立，而条件 4.2($\star_2$) 可用与我们在命题 4.6 中类似的推理证明。接着，注意到 (K $\leqslant_{\mathrm{pp}}$) 展现出 1.13 中归纳出的相同性质，只不过这里的关系是纯子模关系 $\leqslant_{\mathrm{pp}}$，即可验证条件 4.2($\star_3$) 和条件 4.2($\star_4$)。

特别是，1.13(2) 通过考察纯子闭包成立，而1.13(3) 的结论源于 R 是一个主理想整环，因此投射 R-模都是自由模。最后，

关于 1.13(4) 的一个版本成立，因为只要 A，B 是自由 R-模，就有 $A \leqslant_*^{\mathrm{ff}} B$蕴含 $A \leqslant_{\mathrm{pp}} B$ ；而且，如果 A 和 B 还是有限生成的，那么 $A \leqslant_{\mathrm{pp}} B$蕴含 $A \leqslant_*^{\mathrm{ff}} B$。这表明，定理 1.12 为 Mazari-Armida 在 [23], 中针对非左完美主理想整环上的模这一受限情形所得的非超稳定性结果，提供了另一种证明。

References

[1] J. T. Baldwin *Categoricity*. 第50卷。美国数学会，普罗维登斯，2009年。[2] J. T. Baldwin、P. C. Eklof 和 J. Trlifaj。 *$N^{\perp}$ as an abstract elementary class*。《纯粹与应用逻辑年刊》149.1-3（2007），25-39。[3] J. T. Baldwin 和 S. Shelah。 *Examples of non-locality*。《符号逻辑杂志》73（2008），第3期，765-782。[4] A. Baudisch *On superstable groups*。《伦敦数学会杂志》s2-42（1990），第3期，452-464。[5] W. Boney。 *A Module-theoretic Introduction to Abstract Elementary Classes*。arXiv 预印本 arXiv:2503.105281。[6] W. Boney 和 S. Unger。 *Large cardinal axioms from tameness in* 抽象初等类。《美国数学会会刊》145（2017），第10期，4517–4532。[7] W. Boney 和 S. Vasey。 *Tameness and frames revisited* **82** 2017 3, 。《符号逻辑杂志》（），第-期。[8] S. Burris 和 P. H. Sankappanavar。 *A course in universal algebra*。Springer，纽约，1981年。[9] D. Carolillo 和 G. Paolini *The construction principle and non homogeneity of uncountable relatively free groups* **64**, 2025 7, 1181 1195 。《数学逻辑档案》（），第–期。[10] P. M. Cohn。 *Rings of zero-divisors*。美国数学会会刊9（2017），第6期，909-914。[11] F. Dahmani、V. Guirardel 和 D. Osin *Hyperbolically embedded subgroups and rotating families in groups acting on hyperbolic spaces* **245** 2017 1156 。《美国数学会回忆录》（），第期。[12] P. C. Eklof 和 A. H. Mekler。*Categoricity results for $L_{\infty,\kappa}$*。《纯粹与应用逻辑年刊》37.1（1988），81-99。[13] P. C. Eklof 和 A. H. Mekler。 *Almost free modules: Set-theoretic methods*。爱思唯尔，阿姆斯特丹：北荷兰，2002年。[14] R. Grossberg 和 S. Vasey, *Equivalent definitions of superstability in tame abstract elementary classes* **82** 2017 4, 1387 1408 。《符号逻辑杂志》（），第–期。[15] R. Grossberg 和 M. VanDieren, *Galois-stability for tame abstract elementary classes*。《数学逻辑杂志》6（2016），第1期，25–48。[16] A. Ould Houcine。 *On superstable groups with residual properties*。《数学逻辑季刊》53（2007），第01期，19-26。[17] A. Ould Houcine、D. Vallino。 *Algebraic and definable closure in free groups*。《傅里叶研究所年刊》66（2016），第6期，2525-2563。[18] T. Hyttinen、G. Paolini 和 D. E. Quadrellaro。 *A New Construction Principle*。arXiv 预印本 arXiv:2505.10155。[19] A. Jarden 和 S. Shelah。 *Non-Forking Frames in Abstract Elementary Classes*。《纯粹与应用逻辑年刊》，164:135-191，2013年。[20] O. Kharlampovich 和 A. Myasnikov。 *Elementary theory of free non-abelian groups*。《代数杂志》302（2006），第2期，451–552。[21] M. Mazari-Armida。 *Some stable non-elementary classes of modules*。《符号逻辑杂志》88（2023），第1期，93-117。[22] M. Mazari-Armida。 *Characterizing categoricity in several classes of modules*。《代数杂志》617（2023），第1期，382-401。[23] M. Mazari-Armida。 *On superstability in the class of flat modules and perfect rings*。美国数学会会刊149（2021），第6期，2639–2654。[24] M. Mazari-Armida。 *Superstability, Noetherian rings and pure-semisimple rings*。《纯粹与应用逻辑年刊》，172（2021），第3期。[25] M. Mazari-Armida 和 J. Rosick´ *Relative injective modules superstability and noetherian categories to appear* y。，。《数学逻辑杂志》。[26] A. H. Mekler。 *How to construct almost free groups*。《加拿大数学杂志》32（1980），第5期，1206-1228。[27] A. H. Mekler。 *Almost-free groups in varieties*。《代数杂志》145（1992），第1期，128-142。[28] A. H. Mekler 和 S. Shelah。*$L_{\infty,\omega}$-free algebras*。普遍代数26（1989），351-366。

[29] A. H. Mekler 和 S. Shelah。 *The consistency strength of "every stationary set reflects"*。《以色列数学杂志》**67**（1989），第3期，353-366。[30] A. H. Mekler 和 S. Shelah。 *Almost free algebras*。《以色列数学杂志》**89**（1995），237-259。[31] A. Miasnikov、E. Ventura 和 P. Weyl。 *Algebraic extensions in free groups*。《几何群论：日内瓦与巴塞罗那会议》，第225-253页，Birkh¨auser，巴塞尔。[32] B. M¨uhlherr、G. Paolini 和 S. Shelah。 *First-order aspects of Coxeter groups*。《代数杂志》**595**（2022），297–346。[33] C. Perin。 *Elementary embeddings in torsion-free hyperbolic groups*。《高等师范学校科学年刊》 ´Ec. Norm. Sup´e **44** 2011 4, 631 681 （），第-期。B. Poizat。《稳定群：具有正则泛型类型》。《符号逻辑杂志》[34] **48** 2，339 1983 355（），第-期。[35] Z. Sela。 *Diophantine geometry over groups VI: The elementary theory of a free group*。《几何与泛函分析》**16**（2006），第3期，707-730。[36] S. Shelah。 *Classification theory: and the number of non-isomorphic models*。逻辑与数学基础研究，第92卷，北荷兰出版公司，阿姆斯特丹，1978年。[37] S. Shelah。 *Classification theory for abstract elementary classes. Volume 1*。逻辑研究：数理逻辑与基础，College Publications，伦敦，2009年。[38] I. ˇSaroch 和 J. Trlifaj。 *Deconstructible abstract elementary classes of modules and categoricity* 56 12 2024 3854 3866 。伦敦数学会通报。.（）：-。[39] K. Tent 和 M. Ziegler。 *A course in model theory*。剑桥大学出版社，剑桥，2012年。[40] J. Trlifaj。 *Abstract elementary classes induced by tilting and cotilting modules have finite character* **137** 2009 3, 1127 1133 。美国数学会会刊（），第-期。

Department of Mathematics and Statistics, University of Helsinki, P.O. Box 68(Pietari Kalmin katu 5), 00014 Helsinki, Finland*Email address*: tapani.hyttinen@helsinki.fiDepartment of Mathematics "Giuseppe Peano", University of Torino, Via Carlo Al-berto 10, 10123 Torino, Italy.*Email address*: gianluca.paolini@unito.it*Email address*: davideemilio.quadrellaro@unito.it Istituto Nazionale di Alta Matematica "Francesco Severi", Piazzale Aldo Moro 5 00185 Roma, Italy.*Email address*: quadrellaro@altamatematica.it