arXiv:2603.04076v1 [math.PR] 4 Mar 2026

优先连接图中归一化拉普拉斯算子的极限经验谱测度。

Malika Kharouf*

摘要

我们研究出度固定的巴拉巴西–阿尔伯特机制下线性优先连接图的归一化拉普拉斯算子的经验谱分布。对于由此得到的随机多重图序列，我们证明经验谱分布依概率弱收敛到一个支撑于区间 $[0,2]$ 上的确定性概率测度。该极限由优先连接图的局部弱极限（波利亚点图）刻画：极限斯蒂尔切斯变换等于这类无限随机图上归一化拉普拉斯算子在根处的对角格林函数的期望。证明结合了预解式方法、归一化拉普拉斯算子的统一诺伊曼级数展开、基于带装饰邻域上的返回概率的随机游走表示、沿优先连接过滤进行的截断与杜布鞅–阿祖马–霍夫丁集中论证，以及基于正规族的解析延拓论证。

关键词： 优先连接；巴拉巴西–阿尔伯特模型；归一化拉普拉斯；极限谱测度；局部弱收敛。**MSC2020 学科分类：** 05C80。

1 引言

1.1 动机：稀疏异质网络中的归一化拉普拉斯谱

图算子的谱统计是描述随机网络的基础语言：它们编码了几何结构与传输过程（混合、扩散、扩张），并为动力学过程提供了易于处理的代理。在典型算子中，对称归一化拉普拉斯

$$L := I - D^{-1/2} A D^{-1/2}$$

尤其适用于稀疏且高度非均匀的图：其谱始终包含在 $[0,2]$, 中；它与简单随机游走密切相关，并决定

*特鲁瓦技术大学，法国。电子邮件： malika.kharouf@utt.fr

经典函数不等式和混合估计；例如参见 [10, 22, 11]。本文为巴拉巴西–阿尔伯特优先连接机制下L的经验谱分布（ESD）建立了一个确定性极限律。

1.2 优先连接：无标度增长与相关性

优先连接（PA）是一种产生重尾度分布的增长机制：顶点依次到来，并以与当前度成正比的概率连接到已有顶点 [1]。对度序列及其渐近幂律的严格分析可追溯至 [2]；另见专著 [3] 及其中的参考文献。许多变体（次线性连接、适应度、几何结构……）呈现出不同的普适类和相变，参见例如 [17, 6, 7]。

从谱的角度看，优先连接图带来了两个相互交织的难题。首先，度无界且差异显著（枢纽节点与典型顶点并存）。其次，增长机制会产生显著的时间相关性（度与年龄的依赖关系，以及边之间非平凡的依赖），使优先连接图不属于期望度模型等独立边框架。因此，要将有界度图中如今已成为标准的“局部弱极限 $\Rightarrow$ 极限谱”范式推广到优先连接图，颇为棘手。

1.3 局部弱极限与波利亚点图

稀疏随机图的一个核心组织原则是局部弱收敛（本雅明尼–施拉姆收敛）：抽取一个均匀顶点，考察其固定半径的邻域，并令图的规模趋于无穷 [4, 5]。对于优先连接，典型邻域保留“年龄”信息，且远非可交换。Berger–Borgs–Chayes–Saberi [9] 的一个关键结果将一大类线性优先连接图的局部弱极限识别为一个显式的带标记的无限随机图，通常称为波利亚点图。此后，这一极限已成为局部网络性质（例如鲁棒性/脆弱性现象，见 [8]）的关键近似工具。

1.4 稀疏图的谱极限

对于有界度的局部树状图，预解式/格林函数方法将邻接型算子的极限经验谱分布与局部弱极限上的根预解式联系起来；一种系统方法见于 [13]。对于随机树，在边缘/局部假设下经验谱分布的收敛已得到充分理解，而优先连接树在邻接型算子方面属于该范围 [14]。

相比之下，对于具有独立边的幂律图（Chung–Lu 型模型），Chung–Lu–Vu [12] 表明，谱行为对算子高度敏感：邻接谱呈现重尾效应，而在适当的度条件下，归一化拉普拉斯可表现出随机矩阵型行为。在具有条件独立边的无标度模型中，相关的拉普拉斯谱极限结果包括 Hazra 与 Malhotra [25]，他们研究了无标度渗流中中心化拉普拉斯矩阵的经验谱分布，并在其主要参数区域之一中确定了一个显式极限律。优先连接图具有相同的幂律度特征，但其时间相关性导致显著不同的谱现象。例如，对于邻接矩阵，极端特征值由枢纽节点驱动，主特征向量可能高度局域化；参见 [15, 16] 及其中的参考文献。为巴拉巴西–阿尔伯特优先连接机制下归一化拉普拉斯的经验谱分布提供极限定理，是本文的目标。

1.5 本文贡献

我们考虑优先连接多重图，其中每个新顶点引入 $m \geq 2$ 条边，且端点按与度成比例的方式选取（有放回抽样）。设 L_n 为 n顶点图上的归一化拉普拉斯，并设

$$\mu_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{\lambda_i(L_n)}$$

其经验谱分布。我们的主要结果证明， μ_n 弱收敛 y
以概率收敛于一个支撑在 $[0,2]$上的确定性概率测度。

通过 [9]的波利亚点局部弱极限（G_∞， o）确定该极限。记L_∞ ： $= I - D_\infty^{-1/2} A_\infty D_\infty^{-1/2}$为 G_∞上的归一化拉普拉斯算子，我们证明，对于每个 $z \in \mathbb{C}+$，其斯蒂尔切斯变换

$$m_n(z) \ := \ \int \frac{1}{x-z}\,\mu_n(dx) \ = \ \frac{1}{n}\mathrm{Tr}(L_n - zI)^{-1}$$

以概率收敛于确定性的赫尔格洛茨函数

$$m(z) \ = \ \mathbb{E}\big\langle \delta_o, (L_\infty - zI)^{-1}\delta_o \big\rangle,$$

且 μ 是斯蒂尔切斯变换为 m ([24]) 的唯一概率测度。

1.6 结构安排

第 2 节定义优先连接多重图及其算子。第 3 节推导预解式界和诺伊曼展开，并给出一致的误差控制。第 4 节将 W_n 的对角幂与随机游走的返回概率联系起来，并将其局部性形式化为带装饰根球上的泛函。第 5 节介绍向波利亚点图的局部弱收敛，以及局部平均值的集中性。第 6 节给出诺伊曼域上的收敛，第 7 节则将收敛推广到整个 $\mathbb{C}+$ ，并完成 $\mu_n \Rightarrow \mu$ 依概率成立的证明。

2 模型、算子与主要结果

2.1 巴拉巴西–阿尔伯特优先连接多重图

固定一个整数 $m \geq 2$。对于每个 $n \geq 2$，我们在顶点集上构造一个随机多重图 G_n

$$V(G_n) = \{1, 2, \ldots, n\},$$

其中顶点的标签与其出生时间一致。

初始条件。我们从由两个顶点 $\{1,2\}$ 组成的 G_2 开始，这两个顶点由 m 条平行边连接。等价地，（多重）度满足 $d_2(1) = d_2(2) = m$。

增长步骤。对于某个 $n \geq 3$，给定 G_{n-1} ，我们通过添加新顶点n 以及将 n连接到 $\{1, \ldots, n-1\}$ 中顶点的 m 条边来得到 G_n 。更精确地说，在 G_{n-1} 的条件下，我们对端点进行抽样

$$W_{n,1}, \ldots, W_{n,m} \in \{1, \ldots, n-1\}$$

独立地与

$$\mathbb{P}(W_{n,i} = v \mid G_{n-1}) = \frac{d_{n-1}(v)}{\sum_{u=1}^{n-1} d_{n-1}(u)} = \frac{d_{n-1}(v)}{2m(n-2)}, \qquad v \in \{1, \ldots, n-1\}. \tag{2.1}$$

然后，我们向 G_{n-1} 添加边$(n,\ W_{n,\ 1})$.....，$(n,\ W_{n,\ m})$。有放回抽样允许在 n 与某个给定的较早顶点之间添加多条边。由于端点是从 $\{1,\ldots,n-1\}$ 中选取的，因此我们排除自环。

度与总度。令 $d_n(v)$ 表示 G_n中 v 的（多重）度。由于每个顶点出生时都带有 m 条关联边，因此对所有 $v \le n$，都有 $d_n(v)\ \ge\ m$ 。此外，G_n 中的边数为 $m(n-1)$，因此

$$\sum_{v=1}^{n} d_n(v) = 2m(n-1).$$

2.2 邻接、随机游走核与归一化拉普拉斯算子

令 A_n 为 G_n 的带重数邻接矩阵：对于 $u \neq v$，$(A_n)_{uv}$ 表示 u 与 v之间的边数，且$(A_n)_{uu} = 0$。令 D_n $=\mathrm{diag}(d_n(1)..,d_n(n))$为对角度矩阵。

简单随机游走及其核。我们考虑多重图 G_n上的（离散时间）简单随机游走。给定当前顶点 $u \in \{1,\ldots,n\}$，游走通过从 $d_n(u)$ 条关联于u的半边中均匀随机选择一条，在一步之内移动到一个邻居 v 。特别地，这里将边重数纳入考虑。等价地，转移概率为

$$\mathbb{P}(X_{t+1} = v \mid X_t = u,\, G_n)\ =\ \frac{(A_n)_{uv}}{d_n(u)}, \qquad u, v \in \{1,\ldots,n\}. \tag{2.2}$$

用矩阵形式表示，转移核是行随机矩阵

$$P_n \coloneqq D_n^{-1} A_n.$$

该链是可逆的，其平稳分布为 $\pi_n(u)\ =\ d_n(u)/\sum_w d_n(w)$ （例如参见[11, 第 2] 章或 [10, 第 1]章）。对于 $k \ge 1$，对角元素 $(P_n^k)_{uu}$ 等于返回 u的 k 步返回概率。

归一化邻接矩阵与归一化拉普拉斯算子。定义对称归一化邻接矩阵和归一化拉普拉斯算子为

$$W_n \coloneqq D_n^{-1/2} A_n D_n^{-1/2}, \qquad L_n \coloneqq I_n - W_n. \tag{2.3}$$

算子 W_n 与 P_n 相似，通过

$$W_n = D_n^{1/2} P_n D_n^{-1/2}, \tag{2.4}$$

因此它们具有相同的谱。此外，对于任意 $k \ge 1$ 和任意顶点 v,

$$(W_n^k)_{vv} = (P_n^k)_{vv}. \tag{2.5}$$

注 2.1. $\mathcal{L}_n$ 是对称半正定矩阵。此外，$\mathcal{L}_n$ 的所有特征值都属于 $[0,2]$ [10, 22]。

2.3 经验谱分布与斯蒂尔切斯变换

设 L_n 的特征值为 $\lambda_1^{(n)}$、……、 $\lambda_n^{(n)}$（按重数计）。 L_n 的经验谱分布（ESD）是随机概率测度

$$\mu_n \coloneqq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_{\lambda_i^{(n)}}. \tag{2.6}$$

对于 $z \in \mathbb{C}+ : = \{z \in \mathbb{C} : \ \Im z > 0\}$，定义预解式和斯蒂尔切斯变换

$$G_n(z) \coloneqq (L_n - zI_n)^{-1}, \qquad m_n(z) \coloneqq \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x-z}\,\mu_n(dx) = \frac{1}{n}\mathrm{Tr}\,G_n(z). \tag{2.7}$$

注 2.2 （一致预解式界 [21, 20]）。 由于 $\text{谱}(\mathcal{L}_n) \subset [0,2]$，对于所有 $z \in \mathbb{C}^+$，我们有

$$\|G_n(z)\| \le \frac{1}{\Im z} \quad \Rightarrow \quad |(G_n(z))_{uu}| \le \frac{1}{\Im z}.$$

2.4 局部弱极限与极限算子

令 U_n 为 G_n 的均匀选取的顶点，给定 G_n 时条件独立。我们将 (G_n, U_n) 视为一个随机有根多重图（带有边重数），并考虑有根图上的局部拓扑：对于 $r \ge 0$，有根 r-球 $B_r(G_n, U_n)$ 是由图距离不超过 r 的顶点所诱导的有根子图，其中距离以 U_n 为基准。

定理 2.3 （局部弱极限 [9]）。 当 $n \to \infty$ 时，有根图 (G_n, U_n) 在局部拓扑下依分布收敛到一个随机无限有根图 (G_∞, o)。(G_∞, o) 的分布律为 [9] 中构造的波利亚点图；一般框架另见 [4, 5] 。

接下来，我们定义与 (G_∞, o) 相关的极限算子。记 A_∞ 为 G_∞ 的邻接矩阵（其中 $(A_\infty)_{xx} = 0$ 和 $(A_\infty)^{xy}$ 等于 $x \ne y$ 之间的边数），并令 $d_\infty(x) \coloneqq \sum_y (A_\infty)^{xy}$ 表示 x 的度。几乎必然地，对每个顶点 x [9]，都有 $d_\infty(x) < \infty$ 。

定义归一化邻接算子 W_∞ 为

$$(W_\infty)_{xy} \coloneqq \begin{cases} \dfrac{(A_\infty)_{xy}}{\sqrt{d_\infty(x)\,d_\infty(y)}}, & x \ne y, \\ 0, & x = y, \end{cases} \tag{2.8}$$

以及归一化拉普拉斯算子

$$L_\infty \coloneqq I - W_\infty. \tag{2.9}$$

由于 G_∞ 几乎必然局部有限，根据 (2.8) 定义的算子 W_∞ 是 $\ell^2(V(G_\infty))$ 上的有界自伴算子，且 $\|W_\infty\| \le 1$；因此 $L_\infty = I - W_\infty$ 是有界自伴算子，且 $\text{谱}(L_\infty) \subset [0,2]$ （例如参见 [10，第 1] 章和 [13]）。因此，对每个$z \in \mathbb{C}+$，预解式 $(L_\infty - zI)^{-1}$ 存在，并满足 $\|(L_\infty - zI)^{-1}\| \le (\Im z)^{-1}$。

我们将有根格林函数记为

$$g_\infty(o; z) \coloneqq \big\langle \delta_o,\, (L_\infty - zI)^{-1}\delta_o \big\rangle. \tag{2.10}$$

这里 $\delta_o \in \ell^2(V(G_\infty))$ 表示根处的标准基向量，即 $\delta_o(x) = \mathbf{1}_{\{x=o\}}$.

2.5 主要结果与路线图

令 μ_n 为式 (2.6) 中定义的 L_n 的经验谱分布，并令 $m_n(z) = \int (x-z)^{-1}\mu_n(dx) = \frac{1}{n}\mathrm{Tr}(L_n - zI)^{-1}$ 为其斯蒂尔切斯变换。将候选极限斯蒂尔切斯变换定义为

$$m(z) \coloneqq \mathbb{E}\big[g_\infty(o; z)\big], \qquad z \in \mathbb{C}_+, \tag{2.11}$$

其中 g_∞ 由式 (2.10) 给出。根据有界自伴算子的谱定理（参见例如 [21]），对于 (G_∞, o) 的每一种实现，都存在一个概率测度 $\mu_{\infty,o}$，其支撑位于 $\mathrm{Spec}(L_\infty) \subset [0,2]$ 上，使得对于所有 $z \in \mathbb{C}+$，均有 $g_\infty(o;z) = \int (\lambda - z)^{-1} \, \mu_{\infty,o}(d\lambda)$。

定理 2.4（极限经验谱测度）。固定 $m \geq 2$，并令 $(G_n)_{n \geq 2}$ 为第 2.1 节定义的巴拉巴西–阿尔伯特优先连接多重图。令 L_n 为归一化拉普拉斯（2.3），μ_n 为其经验谱分布。

1. 对每个 $z \in \mathbb{C}+$,

$$m_n(z) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} m(z) = \mathbb{E}\big[g_\infty(o;z)\big].$$

2. 存在一个确定性概率测度 μ，定义在 $[0,2]$ 上，使得

$$\mu_n \Rightarrow \mu \quad \text{weakly in probability},$$

并且 m 是 μ 的斯蒂尔切斯变换。

证明路线图。论证遵循稀疏图中通用的“局部弱极限 $\Rightarrow$ 谱极限”范式，分五步进行。

步骤 1：在非平凡域上进行诺伊曼展开。令 $L_n - zI = (1-z)\, I - W_n$，其中 $W_n = D_n^{-1/2} A_n D_n^{-1/2}$。由于 $\|W_n\| \leq 1$ 且 谱$(L_n) \subset [0,2]$，对于域$\{z \in \mathbb{C}+$ 中的 $z : |1 - z| > 1\}$ 我们通过纽曼级数展开预解式，并得到一致的截断界。这将 $m_n(z)$ 化为有限个对角项 $(W_n^k)_{uu}$的平均值。

步骤 2：对角幂作为返回概率。利用 W_n与随机游走核 $P_n = D_n^{-1} A_n$之间的相似性，我们得到 $(W_n^k)_{uu} = (P_n^k)_{uu}$。因此，$(W_n^k)_{uu}$是从 u出发的简单随机游走的 k 步返回概率。

步骤 3：局部性。对于 $k \geq 0$ 和顶点 $u \in V(G_n)$，令 $B_k(G_n, u)$ 表示 u的有根半径-k 邻域，即由图距离至多为 k的顶点所诱导的有根子图。对于每个固定的 k，返回概率 $(P_n^k)_{uu}$ 仅取决于$B_k(G_n, u)$ 以及 A_n和 D_n中出现的局部度/边重数信息。因此，$(W_n^k)_{uu}$ 可以表示为有根 k- 球的有界局部泛函。

步骤 4：局部弱极限与局部平均的鞅集中性。将局部收敛提升到带标记邻域后，我们通过截断高度邻域，沿优先连接增长过滤应用杜布鞅–Azuma–Hoeffding 集中论证，再利用局部弱极限去除截断，从而证明经验局部统计量满足自平均定律。

步骤 5：推广到所有 $z \in \mathbb{C}+$。一致界 $|m_n(z)| \leq (\Im z)^{-1}$ 意味着$(m_n)_n$ 在 $\mathbb{C}+$上构成正规族。Vitali–Montel论证将收敛性从诺伊曼域推广到整个$\mathbb{C}+$。最后，Stieltjes连续性定理推出 μ_n 弱收敛到一个确定性极限 μ。

3 预解式界与诺伊曼展开

3.1 预解式预备知识

回顾一下，$L_n = I - W_n$ 是一个实对称 $n \times n$ 矩阵，因此在 $\ell^2(\{1,\dots,n\})$上定义了一个有界自伴算子。特别地，其谱是实的，且包含于 $[0,2]$（关于归一化拉普拉斯矩阵，参见例如 [10, 第 1]章）。对于 $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$，我们将预解式记为

$$G_n(z) \coloneqq (L_n - zI)^{-1},$$

并且对于顶点 $u \in \{1,\dots,n\}$，我们写出对角格林函数

$$g_n(u;z) \;:=\; \langle \delta_u,\, G_n(z)\delta_u \rangle \;=\; (G_n(z))_{uu}.$$

经验谱分布的斯蒂尔切斯变换 μ_n 为 $m_n(z) = \frac{1}{n}\mathrm{Tr}\; G_n(z) = \frac{1}{n}\sum_{u=1}^{n} g_n(u;z)$，其中 $z \in \mathbb{C}_+$。

引理 3.1（一致预解式界）。对每个 $n \geq 2$ 以及每个 $z \in \mathbb{C}_+$,

$$\|G_n(z)\| \;\leq\; \frac{1}{\Im z}. \tag{3.1}$$

因此，对每个 $u \in \{1,\dots,n\}$,

$$|g_n(u;z)| \leq \frac{1}{\Im z}, \qquad |m_n(z)| \leq \frac{1}{\Im z}. \tag{3.2}$$

证明。由于 L_n 是实对称的，存在由特征向量构成的标准正交基，我们可以写成 $L_n = U\Lambda U^{\top}$，其中 $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1^{(n)},\dots,\lambda_n^{(n)})$。因此

$$G_n(z) = U(\Lambda - zI)^{-1}U^{\top},$$

因此 $\|G_n(z)\| = \max_{1\leq i\leq n} |(\lambda_i^{(n)} - z)^{-1}| = \mathrm{dist}\big(z, \text{谱}(L_n)\big)^{-1}$。对于 $z \in \mathbb{C}_+$ 和 $\lambda \in \mathbb{R}$，我们有 $|\lambda - z| \geq \Im z$，由此得到（3.1）。（3.2）中的界由 $|g_n(u;z)| \leq \|G_n(z)\|$以及 $|m_n(z)| \leq \frac{1}{n}\sum_u |g_n(u;z)| \leq \|G_n(z)\|$推出。 □

引理 3.2（赫格洛茨性质）。对于每个 $n \geq 2$ 和每个 $u \in \{1,\dots,n\}$，映射$z \mapsto g_n(u;\ z)$在 $\mathbb{C}_+$上解析，并满足 $\Im g_n(u;\ z) > 0$，其中 $z \in \mathbb{C}_+$。特别地，m_n在$\mathbb{C}_+$上解析，并且 $\Im m_n(z) > 0$，其中 $z \in \mathbb{C}_+$。

证明。由于 $z \mapsto (L_n - zI)^{-1}$ 在$\mathbb{C}\setminus \mathrm{Spec}(L_n)$上解析，故解析性成立。为确定虚部的符号，注意对于任意向量 $x \in \mathbb{C}^n$,

$$\Im\langle x,\,(L_n - zI)^{-1}x\rangle \;=\; (\Im z)\,\|(L_n - zI)^{-1}x\|^2 \;>\; 0,$$

这是自伴算子的标准预解式恒等式；例如参见 [21, 第 VII 章。3]。取 $x = \delta_u$，得到 $\Im g_n(u;\ z) > 0$，再对 u 取平均，得到 $\Im m_n(z) > 0$。 □

3.2 在区域 $|1 - z| > 1$ 上的诺伊曼展开

在本小节中，我们始终在开集上工作

$$\mathcal{D} \;:=\; \{z \in \mathbb{C}_+ :\ |1 - z| > 1\}. \tag{3.3}$$

注意，$\mathcal{D}$ 非空且具有一个聚点，这将在稍后允许解析延拓到整个$\mathbb{C}_+$。

关于 W_n的压缩估计。回顾 $W_n = D_n^{-1/2}A_nD_n^{-1/2}$与 $L_n = I - W_n$。对于归一化拉普拉斯矩阵，有谱$(L_n) \subset [0,2]$，因此谱$(W_n) = \{1-\lambda :\ \lambda \in$谱$(L_n)\} \subset [-1,1]$。由于 W_n 是实对称的，其算子范数等于其谱半径，因此

$$\|W_n\| \leq 1. \tag{3.4}$$

有界算子的纽曼级数 [21] 我们将反复使用以下标准事实。

引理 3.3（纽曼级数与尾项界）。 设 T是希尔伯特空间上的有界线性算子。若 $\|T\| < 1$，则 $I - T$ 可逆，且

$$(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k \tag{3.5}$$

且在算子范数意义下收敛。此外，对每个整数 $K \geq 1$,

$$\Big\|(I - T)^{-1} - \sum_{k=0}^{K-1} T^k\Big\| \leq \frac{\|T\|^K}{1 - \|T\|}. \tag{3.6}$$

证明。这是一个经典结果；例如参见 [21, 第六章第1]节。为完整起见，注意部分和 $S_K = \sum_{k=0}^{K-1} T^k$ 满足 $(I - T)S_K = I - T^K$。由于 $\|T^K\| \leq \|T\|^K \to 0$，$S_K$ 在算子范数意义下收敛到有界算子 S，且 $(I - T)S = I$。尾项界由

$$(I - T)^{-1} - S_K = \sum_{k=K}^{\infty} T^k, \qquad \Big\| \sum_{k=K}^{\infty} T^k\Big\| \leq \sum_{k=K}^{\infty} \|T\|^k = \frac{\|T\|^K}{1 - \|T\|}.$$

□

预解式的诺伊曼展开。对于 $z \in \mathcal{D}$，我们写作

$$L_n - zI \;=\; (1 - z)I - W_n \;=\; (1 - z)\Big(I - \frac{W_n}{1 - z}\Big). \tag{3.7}$$

令 $T_n(z) := W_n/(1 - z)$。利用（3.4），对于 $z \in \mathcal{D}$，有

$$\|T_n(z)\| \leq \frac{\|W_n\|}{|1 - z|} \leq \frac{1}{|1 - z|} < 1.$$

应用引理 3.3 可得如下扩张。

命题 3.4（具有一致尾项控制的诺伊曼展开）。 对于每个 $z \in \mathcal{D}$,

$$G_n(z) = (L_n - zI)^{-1} = \frac{1}{1 - z} \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{W_n}{1 - z}\Big)^k, \tag{3.8}$$

其中该级数在算子范数意义下收敛。此外，对于每个整数 $K \geq 1$,

$$\Big\|G_n(z) - \frac{1}{1 - z} \sum_{k=0}^{K-1} \Big(\frac{W_n}{1 - z}\Big)^k\Big\| \leq \frac{|1 - z|^{-K}}{|1 - z| - 1}. \tag{3.9}$$

证明。将 (3.7) 与引理 3.3 用于 $T = T_n(z)$，并注意到

$$\|(I - T_n(z))^{-1} - \sum_{k=0}^{K-1} T_n(z)^k\| \leq \frac{\|T_n(z)\|^K}{1 - \|T_n(z)\|} \leq \frac{|1 - z|^{-K}}{1 - |1 - z|^{-1}} = \frac{|1 - z|^{-K}}{|1 - z| - 1}.$$

在 (3.7) 中乘以 $|1 - z|^{-1}$，即可得到 (3.9)。 □

推论 3.5（化为幂的迹）。 对于每个$z \in \mathcal{D}$ 以及每个整数$K \geq 1$,

$$m_n(z) = \frac{1}{1 - z} \sum_{k=0}^{K-1} \frac{1}{(1 - z)^k} \frac{1}{n}\mathrm{Tr}(W_n^k) \;+\; \varepsilon_{n,K}(z), \tag{3.10}$$

其中截断误差满足一致界

$$|\varepsilon_{n,K}(z)| \leq \frac{|1 - z|^{-K}}{|1 - z| - 1}. \tag{3.11}$$

证明。对（3.8）以及（3.9）的截断版本取归一化迹。利用对任意矩阵 B 都有 $|n^{-1}\mathrm{Tr}B| \le \|B\|$，可得（3.11）。 □

4 随机游走表示与局部性

本节建立归一化邻接矩阵对角幂与局部有根邻域之间的联系。关键在于，对于固定的 k，量 $(W_n^k)_{uu}$ 可以解释为简单随机游走的 k 步返回概率，并且只取决于 u 的一个有限（带装饰的）邻域。

4.1 W_n 与随机游走核的相似性

回顾一下，$P_n = D_n^{-1}A_n$ 是 G_n 上简单随机游走的转移核（计入重数），而 $W_n = D_n^{-1/2}A_nD_n^{-1/2}$ 是对称归一化邻接矩阵。

命题 4.1（对角幂的随机游走表示）**.** 设 $P_n = D_n^{-1}A_n$ 为 G_n 上的随机游走核（计入重数），$W_n = D_n^{-1/2}A_nD_n^{-1/2}$ 为归一化邻接矩阵。那么，对于每个整数 $k \ge 1$ 和每个顶点 $u \in \{1, \dots, n\}$，

$$W_n = D_n^{1/2}P_nD_n^{-1/2} \qquad \text{and} \qquad (W_n^k)_{uu} = (P_n^k)_{uu}. \tag{4.1}$$

特别地，$(W_n^k)_{uu}$ 等于从 u 出发的简单随机游走的 k 步返回概率。

证明。利用 $P_n = D_n^{-1}A_n$，我们计算

$$D_n^{1/2}P_nD_n^{-1/2} = D_n^{1/2}(D_n^{-1}A_n)D_n^{-1/2} = D_n^{-1/2}A_nD_n^{-1/2} = W_n.$$

取 k 次幂得到 $W_n^k = D_n^{1/2}P_n^kD_n^{-1/2}$，因此

$$(W_n^k)_{uu} = (D_n^{1/2})_{uu}(P_n^k)_{uu}(D_n^{-1/2})_{uu} = (P_n^k)_{uu}.$$

最后，$(P_n^k)_{uu} = \mathbb{P}_u(X_k = u \mid G_n)$ 是 k 步转移概率的标准解释；参见例如 [11, 第 2]章。

□

4.2 有根球与装饰局部邻域

固定一个有限多重图 G 和一个根 $u \in V(G)$。对于整数 $r \ge 0$，（有根的）半径为 r 的球 $B_r(G, u)$ 是由与 u 的图距离至多为 r 的顶点所导出的有根多重图。为了考虑到随机游走的转移概率涉及 G 中的总度数（而不仅仅是导出子图内的度），我们采用其装饰版本。

定义 4.2（带装饰的根球）。设 G 为一个有限多重图，其邻接矩阵为 A（含重数），度函数为 $d(\cdot)$。对于 $r \ge 0$，带装饰的根球 $\frown$ 球 $B_r(G, u)$ 由有根诱导子图 $B_r(G, u)$ 以及以下标记组成

1. $B_r(G, u)$ 中各边的边重数（等价地，A 在 $B_r(G, u)$ 的顶点集上的限制），2. 完整度 $\{d(x) : x \in V(B_r(G, u))\}$ 作为顶点标记。

如果存在保持根的同构，且该同构保留边重数和顶点度标记，则这两个带装饰根球视为相同。

备注 4.3（装饰与标记有根图）。在局部弱收敛理论中，使用带装饰（或标记）的有根邻域是标准做法：考虑带有顶点/边标记的有根图，并在保持标记的保持根同构下比较邻域；例如，参见 Aldous–Lyons [5]。

定义 4.2 中的具体装饰方式旨在与随机游走核$P(x,\ y)\ =\ A_{xy}/d(x)$相匹配：球内的边重数决定分子 A_{xy}，而顶点标记 $d(x)$ 则提供分母，其中包括从导出子图中伸出的边所产生的贡献。采用这种选择后， k 步返回概率是装饰半径为 k 的球的可测函数。

4.3 返回概率的局部性

$\widehat{\ }$ $\smile$我们将 B_r 记作 r 的一般半径，并将半径等于 k时记作 B_k。

引理 4.4（局部性）。固定一个整数 $k \geq 1$。存在一个确定性映射

$$F_k : \{\text{decorated rooted balls of radius } k\} \longrightarrow [0,1]$$

使得对于任意 $n \geq 2$和任意 $u \in \{1,\dots,n\}$,

$$(P_n^k)_{uu}\ =\ F_k\big(\widehat{B}_k(G_n,u)\big). \tag{4.2}$$

特别地， $u \mapsto$ (W_n^k) $_{uu}$是根为u的有根邻域的有界局部泛函。

证明。固定 k 和一个顶点 u。展开矩阵乘积，可将其写为

$$(P_n^k)_{uu} = \sum_{u=v_0,v_1,\dots,v_{k-1},v_k=u} \ \prod_{t=0}^{k-1} P_n(v_t,v_{t+1}), \tag{4.3}$$

其中求和遍历所有由顶点组成的长度为 k 的序列 $(v_0,\dots,v_k)$。若 $P_n(v_t,v_{t+1})\ >0$，则 v_t 和 v_{t+1} 相邻，因此 v_t 到 u 的图距离至多为 t。特别地，这样一条路径经过的每个顶点都属于球 $B_k(G_n,u)$。此外，每个因子$P_n(v_t,v_{t+1})$ 都等于 $(A_n)_{v_tv_{t+1}}/d_n(v_t)$，因此只取决于 $B_k(G_n,u)$ 中顶点之间的边重数，以及球内顶点的完整度。因此，(4.3) 右侧是装饰球 $B_k(G_n,u)$ 的可测函数。将 F_k 定义为该表达式，即得 (4.2)。最后，由于它是一个返回概率，$(P_n^k)_{uu}\ \in[0,1]$。

□

5 局部弱收敛与局部平均的集中性

本节汇总了将局部弱极限转化为有界局部泛函经验平均的极限所需的概率论基础。我们首先回顾巴拉巴西–阿尔伯特模型在带装饰根球（定义 4.2）意义下收敛到波利亚点图的局部弱收敛。随后，我们证明有界装饰局部泛函的经验平均满足集中性（自平均）结论。

5.1 带装饰根球的单根局部弱收敛

$\smile$回顾定义 4.2 中的带装饰根球 $B_r(G_n,\ u)$。令 U_n 为从 G_n中均匀选取的顶点，且独立于该图。

引理 5.1（度数可在多一层范围内读取）。固定$r \geq 0$。设$(G,\ u)$ 为以 u为根的（多重）图，并令 $H:\ =\ B_{r+1}(G,\ u)$ 为半径 $r+1$的（有根）导出球。那么，对每个满足 $\mathrm{dist}_G(u,\ x)\ \leq r$ 的顶点 x，

$$d_G(x) = d_H(x).$$

$\smile$因此，装饰球 $B_r(G,\ u)$ 是（以根为标记的）球$B_{r+1}(G,\ u)$的确定性函数。

证明。令 $\mathrm{dist}_G(u,x) \le r$，并令 y 为 x 在 G 中的任意邻点（按重数计）。则 $\mathrm{dist}_G(u,y) \le \mathrm{dist}_G(u,x)+1 \le r+1$，因此 $y \in V(H)$。由于 H 由 $V(H)=\{v:\mathrm{dist}_G(u,v)\le r+1\}$ 导出，x 与这类 y 之间的每条边都存在于 H 中（重数相同）。因此，x 在 G 中关联的每条边都已存在于 H 中，并且 $d_G(x)=d_H(x)$。最后一个结论成立，因为 $B_r(G,u)$ 由导出球 $B_r(G,u)$ 以及度标记 $d_G(x)$ 组成，其中 $\mathrm{dist}(u,x)\le r$，这些标记由 $d_H(x)$ 给出。

□

定理 5.2（带装饰的球的单根局部弱收敛）。固定一个整数 $r \ge 0$。当 $n \to \infty$ 时，

$$\widehat{B}_r(G_n,U_n) \Rightarrow \widehat{B}_r(G_\infty,o),$$

其中 (G_∞, o) 表示波利亚点图。

证明。根据 [9]，，有根图 (G_n, U_n) 在通常的（非装饰）局部拓扑下局部弱收敛于 (G_∞, o)。特别地，对于每个固定的 $R \ge 0$，

$$B_R(G_n,U_n) \Rightarrow B_R(G_\infty,o).$$

根据引理 5.1，$B_r(\cdot)$ 是 $B_{r+1}(\cdot)$ 的确定性函数。因此，对 $B_{r+1}(G_n, U_n)$ 的收敛应用连续映射定理，即得所声称的收敛：$B_r(G_n, U_n)$。

□

5.2 带装饰的局部泛函经验平均值的集中

对于固定的 $r \ge 0$，令 $\mathcal{X}_r$ 表示装饰根的同构类空间 ed 半径-r 球。对于有界函数 $f: \mathcal{X}_r \to \mathbb{R}$，定义经验平均

$$S_n(f) := \frac{1}{n}\sum_{u=1}^{n} f\big(\widehat{B}_r(G_n,u)\big).$$

命题 5.3（有界带装饰的局部平均值的自平均）**.** 固定 $r \ge 0$，并令 $f: \mathcal{X}_r \to \mathbb{R}$ 有界。则

$$S_n(f) - \mathbb{E}\big[f(\widehat{B}_r(G_n,U_n))\big] \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

证明。我们通过截断 + 杜布鞅论证来证明集中性。

步骤 1：截断。对于 $K \in \mathbb{N}$，定义截断泛函

$$f^{(K)}(\widehat{B}_r(G,u)) := f(\widehat{B}_r(G,u))\,\mathbf{1}\Big\{\max_{x\in B_r(G,u)} d_G(x) \le K\Big\}.$$

注意，截断事件关于 $B_r(G,u)$ 可测，因为 $B_r(G,u)$ 记录了度标记 $\{d_G(x): x \in V(B_r(G,u))\}$。由引理 5.1，装饰球 $\widehat{B}_r(G,u)$ 是 $B_{r+1}(G,u)$ 的确定性函数，因此 $f^{(K)}(\widehat{B}_r(G,u))$ 确实是有界的 $(r+1)$- 局部泛函。记 $S_n^{(K)} := S_n(f^{(K)})$。

步骤 2：截断平均值的有界鞅增量。令 $(\mathcal{F}_t)_{t\ge 1}$ 为 PA 构造 $(\mathcal{F}_t = \sigma(G_t))$ 的自然滤子，并定义 Doob 鞅

$$M_t^{(K)} := \mathbb{E}\Big[S_n^{(K)} \mid \mathcal{F}_t\Big], \qquad t = 1,\dots,n,$$

使得 $M_n^{(K)} = S_n^{(K)}$。

考虑时间 t 的更新（添加顶点 t 及其 m 条边）。在时间 t，只有 m 选定端点的度以及涉及 t 的邻接关系发生变化。因此，如果对于某个根 u，值 $f^{(K)}(\widehat{B}_r(G_n, u))$ 的更新发生时发生变化，

那么 G_n 中以 u 为中心、半径为 $r+1$ 的球必须与 $\{t\}\cup\{W_{t,1},\dots,W_{t,m}\}$ 相交，而且 $B_r(G_n,u)$ 中的所有度均为 $\le K$。事实上，$f^{(K)}(\widehat{B}_r(G_n,u))\neq 0$ 意味着最大值 $\max_{x\in B_r(G_n,u)} d_{G_n}(x)\le K$，这是根据定义得到的。

在度数不超过 K 的任意图中，给定顶点距离 $(r+1)$ 以内的顶点数至多为

$$N_{r+1}(K) \;:=\; 1+K+K^2+\cdots+K^{r+1} \;\le\; \frac{K^{r+2}-1}{K-1}\,.$$

因此，在时间 t 更新可能影响的截断值至多有

$$(m+1)\,N_{r+1}(K)$$

个根 u（即修改顶点周围距离 $r+1$ 以内、且位于度数 $\le K$ 的区域中的根）。由于 f 有界，令 $\|f\|_\infty:=\sup|f|$，即可得到确定性的 Lipschitz 界

$$\bigl|S_n^{(K)}(\text{after})-S_n^{(K)}(\text{before})\bigr| \;\le\; \frac{2\|f\|_\infty}{n}\,(m+1)\,N_{r+1}(K).$$

由此可知，杜布增量满足

$$|M_t^{(K)}-M_{t-1}^{(K)}| \;\le\; \frac{2\|f\|_\infty}{n}\,(m+1)\,N_{r+1}(K) \;=:\; \frac{c_{r,m}(K)\,\|f\|_\infty}{n},$$

其中 $c_{r,m}(K)=2(m+1)N_{r+1}(K)$。

根据鞅的阿祖马–霍夫丁不等式，对任意 $\varepsilon>0$，

$$\mathbb{P}\Bigl(|S_n^{(K)}-\mathbb{E}[S_n^{(K)}]|>\varepsilon\Bigr) \;\le\; 2\exp\!\left(-\frac{\varepsilon^2\,n}{2\,c_{r,m}(K)^2\,\|f\|_\infty^2}\right). \tag{5.1}$$

特别地，对任意固定的 K，$S_n^{(K)}-\mathbb{E}[S_n^{(K)}]\to 0$，以概率收敛。

步骤 3：移除截断。注意

$$|S_n(f)-S_n^{(K)}| \;\le\; \frac{2\|f\|_\infty}{n}\sum_{u=1}^{n}\mathbf{1}\Bigl\{\max_{x\in B_r(G_n,u)} d_{G_n}(x)>K\Bigr\}.$$

取期望并利用根的一致性 U_n，

$$\mathbb{E}\bigl[|S_n(f)-S_n^{(K)}|\bigr] \;\le\; 2\|f\|_\infty\,\mathbb{P}\Bigl(\max_{x\in B_r(G_n,U_n)} d_{G_n}(x)>K\Bigr).$$

根据定理 5.2，右端收敛到 $\mathbb{P}(\max_{x\in B_r(G_\infty,o)} d_{G_\infty}(x)>K)$，其 h
当 $K\to\infty$ 时趋于 0。

现在缓慢地选择一个序列 $K=K(n)\uparrow\infty$，例如 $K(n)=\lfloor\log n\rfloor$。那么（5.1）意味着 $S_n^{(K(n))}-\mathbb{E}[S_n^{(K(n))}]\to 0$ 依概率成立，并且截断误差 $|S_n(\;f\;-S_n^{(K(n))}|)$ </style}根据马尔可夫不等式依概率收敛到 0。因此，$S_n(f)-\mathbb{E}[f(\widehat{B_r}(G_n,U_n))]\to$0得证。

□

5.3 带装饰的局部统计量的大数定律及其在迹中的应用

现在，我们将单根带装饰局部弱收敛与自平均结论结合起来，从而得到有界装饰局部泛函经验平均的大数定律。该结论将用于预解式诺伊曼展开中出现的归一化迹 $\frac{1}{n}\mathbf{Tr}(W_n^k)$。

推论5.4（有界装饰局部泛函的大数定律）。固定$r \geq 0$，并令 $\Phi\colon \mathcal{X}_r \to \mathbb{R}$ 为装饰半径r 球上的有界可测泛函（这里 $\mathcal{X}_r$ 是装饰根半径r 球的空间）。那么，当 $n \to \infty$ 时，

$$\frac{1}{n}\sum_{u=1}^{n} \Phi\big(\widehat{B}_r(G_n,u)\big) \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}\big[\Phi\big(\widehat{B}_r(G_\infty,o)\big)\big].$$

证明。应用命题 5.3，并取 $f=\Phi$，得到

$$\frac{1}{n}\sum_{u=1}^{n} \Phi\big(\widehat{B}_r(G_n,u)\big) - \mathbb{E}\big[\Phi\big(\widehat{B}_r(G_n,U_n)\big)\big] \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

由定理 5.2 以及 Φ的有界性可知，$\mathbb{E}[\Phi(B_r(G_n,U_n))] \to \mathbb{E}[\Phi(B_r(G_\infty,o))]$。合并这两个公式。 □

5.4 幂的迹的应用

推论5.5（归一化幂迹的收敛）。固定整数$k \geq 1$。该 n

$$\frac{1}{n}\mathrm{Tr}(W_n^k) \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}\big[(W_\infty^k)_{oo}\big] = \mathbb{E}\big[(P_\infty^k)_{oo}\big], \tag{5.2}$$

其中，$P_\infty = D_\infty^{-1}A_\infty$ 是G_∞上的随机游走核。

证明。由引理 4.4，存在一个有界可测的 k-局部泛函 $F_k: X_k \to [0,1]$，使得对所有 u，$(P_n^k)_{uu} = F_k(\widehat{B}_k(G_n,u))$。利用 $(W_n^k)_{uu} = (P_n^k)_{uu} = F_k(\widehat{B}_k(G_n,u))$ 和 $\mathrm{Tr}(W_n^k) = \sum_{u=1}^n (W_n^k)_{uu}$，我们得到

$$\frac{1}{n}\mathbf{Tr}(W_n^k) = \frac{1}{n}\sum_{u=1}^{n} F_k\big(\widehat{B}_k(G_n,u)\big).$$

对 $r=k$ 和 $\Phi = F_k$ 应用推论5.4。 □

6 在 Neumann域上的收敛

本节将第 3 节的诺伊曼展开与第 5 节局部迹的收敛性相结合，从而得到斯蒂尔切斯变换$m_n(z)$ 在域 $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C}+ : |1-z| > 1\}$ 上的收敛性。

回忆 (3.3) 中的 $\mathcal{D}$ 以及推论 3.5 中的截断恒等式 (3.10)–(3.11)。对于$z \in \mathcal{D}$，定义

$$m^{(K)}(z) \coloneqq \frac{1}{1-z}\sum_{k=0}^{K-1} \frac{1}{(1-z)^k}\,\mathbb{E}\big[(W_\infty^k)_{oo}\big], \qquad m_{\mathcal{D}}(z) \coloneqq \lim_{K\to\infty} m^{(K)}(z), \tag{6.1}$$

其中极限因绝对收敛而存在，因为 $|(W_\infty^k)_{oo}| \leq \|W_\infty\|^k \leq 1$ 几乎必然成立，且 $\sum_{k\geq 0}|1-z|^{-k} < \infty$ 在 $\mathcal{D}$上。

命题 6.1（$m_n(z)$ 在 $\mathcal{D}$上的收敛）。对每个$z \in \mathcal{D}$,

$$m_n(z) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} m_{\mathcal{D}}(z). \tag{6.2}$$

此外，在 $\mathcal{D}$ 上，该极限与式 (2.11) 中定义的候选变换一致：

$$m_{\mathcal{D}}(z) = \mathbb{E}\big[g_\infty(o;z)\big], \qquad z \in \mathcal{D}. \tag{6.3}$$

证明。固定 $z \in \mathcal{D}$，并令 $K \geq 1$。

步骤 1：截断 $m_n(z)$。根据推论 3.5,

$$m_n(z) = \frac{1}{1-z} \sum_{k=0}^{K-1} \frac{1}{(1-z)^k} \frac{1}{n} \mathbf{Tr}(W_n^k) + \varepsilon_{n,K}(z), \qquad |\varepsilon_{n,K}(z)| \leq \frac{|1-z|^{-K}}{|1-z|-1}.$$

误差界是确定性的，并且关于 n 一致。

步骤 2：当 $n \to \infty$ **时，截断和的极限**。对于每个固定的 k，推论5.5给出 $\frac{1}{n}$迹$(W_n^k)_{\mathbb{P}} \to \mathbb{E}[($ $W_\infty^k)_{oo}]$。由于 K 固定，有限线性组合保持依概率收敛，因此

$$\frac{1}{1-z} \sum_{k=0}^{K-1} \frac{1}{(1-z)^k} \frac{1}{n} \mathbf{Tr}(W_n^k) \xrightarrow{\mathbb{P}} m^{(K)}(z). \tag{6.4}$$

步骤 3：令 $K \to \infty$ **趋于无穷（尾部控制）**。利用 (3.11) 和三角不等式，对任意$\eta > 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big(|m_n(z) - m_{\mathcal{D}}(z)| > 3\eta\big) \leq \quad & \mathbb{P}\big(|m_n(z) - m_n^{(K)}(z)| > \eta\big) + \mathbb{P}\big(|m_n^{(K)}(z) - m^{(K)}(z)| > \eta\big) \\ & + \mathbf{1}\big\{|m^{(K)}(z) - m_{\mathcal{D}}(z)| > \eta\big\}, \end{aligned}$$

其中 $m_n^{(K)}(z)$ 表示 (6.4) 中的截断和。由于 $|m_n(z) - m_n^{(K)}(z)| \leq \frac{|1-z|^{-K}}{|1-z|-1}$，第一项在 K 足够大时趋于零。对于这样的固定 K，根据 (6.4)，第二项在$n \to \infty$ 时趋于0 。最后，由定义可知 $m^{(K)}(z) \to m_{\mathcal{D}}(z)$，因此第三项在 K 足够大时趋于零。这证明了 (6.2)。

步骤 4：与 $\mathbb{E}[g_\infty(o;\ z)]$ **在** $\mathcal{D}$**上对应**。在 G_∞ 为局部有限的事件上（这几乎必然成立），W_∞ 是一个有界自伴算子，满足 $\|W_\infty\| \leq 1$ 和 $L_\infty = I - W_\infty$。对于 $z \in \mathcal{D}$，我们进行因式分解

$$L_\infty - zI = (1-z)\Big(I - \frac{W_\infty}{1-z}\Big), \qquad \Big\|\frac{W_\infty}{1-z}\Big\| \leq \frac{1}{|1-z|} < 1.$$

因此，纽曼级数（引理 3.3）适用，并在算子范数下得到

$$(L_\infty - zI)^{-1} = \frac{1}{1-z} \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{W_\infty}{1-z}\Big)^k.$$

取 (o,o) 矩阵元可得

$$g_\infty(o;z) = \frac{1}{1-z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(W_\infty^k)_{oo}}{(1-z)^k}, \qquad z \in \mathcal{D},$$

由于 $|(W_\infty^k)_{oo}| \leq 1$ 几乎处处成立，右端绝对可和。因此，根据控制收敛定理/富比尼定理,

$$\mathbb{E}[g_\infty(o;z)] = \frac{1}{1-z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbb{E}[(W_\infty^k)_{oo}]}{(1-z)^k} = m_{\mathcal{D}}(z),$$

这就证明了（6.3）。 □

注 6.2. 局部性和局部弱收敛只能确定固定 k 时的 $\frac{1}{n}\mathbf{Tr}(W_n^k)$。利用 $\mathcal{D}$ 上的诺伊曼展开，我们可以将 $m_n(z)$ 化为有限个此类迹加上一个一致较小的尾项，然后令截断层级 $K \to \infty$ 趋于无穷。在第 7 节中，我们通过解析延拓（正规族/维塔利）论证，将收敛性从 $\mathcal{D}$ 扩展到所有 $z \in \mathbb{C}+$ 。

7 推广到整个$\mathbb{C}+$ 并证明经验谱分布的收敛

第 6 节证明了 $m_n(z)$ 在非空开集 $\mathcal{D}=\{z\in\mathbb{C}+:|1-z|>1\}$ 上收敛。本节利用正规族论证，将收敛性扩展到整个 $\mathbb{C}+$，进而推出经验谱分布的弱收敛。

7.1 正规族

引理 7.1（局部有界性）。设 $\mathcal{E}\subset\mathbb{C}+$ 为紧集，并令 $\eta_{\mathcal{E}}:=\inf\{\Im z:\ z\in\mathcal{E}\}>0$。那么对所有 $n\geq 2$,

$$\sup_{z\in\mathcal{E}}|m_n(z)|\leq\eta_{\mathcal{E}}^{-1}. \tag{7.1}$$

特别地，$(m_n)_{n\geq 2}$是$\mathbb{C}+$上的局部有界全纯函数族。

证明。每个 m_n 在$\mathbb{C}+$ 上全纯，并由引理 3.1 满足 $|m_n(z)|\leq(\Im z)^{-1}$。取 $z\in\mathcal{E}$ 得 $|m_n(z)|\leq\eta_{\mathcal{E}}^{-1}$，因此得到 (7.1)。 □

注 7.2（正规族）**.** 由 Montel 定理，区域上任一局部有界的全纯函数族关于紧集上的一致收敛拓扑是相对紧的；参见例如 [23, 第 10] 章。因此，引理 7.1 蕴含 (m_n) 是 $\mathbb{C}+$ 上的一个正规族。

7.2 从 $\mathcal{D}$ 到 $\mathbb{C}+$ 的 Vitali 延拓

设 $m(z):=\mathbb{E}[g_\infty(o;z)]$, $z\in\mathbb{C}+$，如第 2.4 节所述。由命题 6.1，我们已经知道，对每个 $z\in\mathcal{D}$，$m_n(z)\to m(z)$ 依概率成立，并且在 $\mathcal{D}$ 上 $m_{\mathcal{D}}(z)=m(z)$。

命题 7.3（延拓到所有 $z\in\mathbb{C}+$）**.** 对每个 $z\in\mathbb{C}+$,

$$m_n(z)\xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}}m(z). \tag{7.2}$$

此外，对每个紧集 $\mathcal{E}\subset\mathbb{C}+$，收敛在 $\mathcal{E}$ 上依概率一致成立:

$$\sup_{z\in\mathcal{E}}|m_n(z)-m(z)|\xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}}0. \tag{7.3}$$

证明。我们使用子列原理，并结合一个确定性的 Vitali 定理。

步骤 1：沿子子列在可数集上的几乎必然收敛。设 (n_j) 为任意子列。固定一个可数稠密集 $\{z_q\}_{q\geq 1}\subset\mathcal{D}$。由命题 6.1，对每个固定的 q，我们有 $m_{n_j}(z_q)\to m(z_q)$ 依概率成立。因此，对每个 q，存在进一步的子列 $(n_j^{(q)})$，沿该子列 $m_{n_j^{(q)}}(z_q)\to m(z_q)$ 几乎必然成立。通过对角抽取，我们可以找到一个子子列 (n_{j_ℓ})，使得

$$m_{n_{j_\ell}}(z_q)\longrightarrow m(z_q)\qquad\text{a.s. for every } q\geq 1. \tag{7.4}$$

步骤 2：逐路径应用维塔利定理。在 (7.4) 成立的概率为一的事件中固定 ω。对该 ω，函数 $z\mapsto m_{n_{j_\ell}}(z,\omega)$ 在 C+ 上全纯，并且由引理 7.1 局部有界。此外，它们在集合 $\{z_q\}$ 上逐点收敛，而该集合在 C+中有一个聚点。由维塔利定理（或蒙特尔定理 + 解析延拓唯一性），序列 $m_{n_{j_\ell}}(\cdot,\omega)$ 在 C+ 的紧集上一致收敛到一个全纯极限 $h(\cdot,\omega)$；参见例如 [23, 第 10] 章。由 (7.4) 及连续性，对所有 $z\in\mathcal{D}$ 有 $h(z,\omega)=m(z)$，从而由解析延拓，对所有 $z\in$ C+ 有 $h(z,\omega)=m(z)$。

因此，沿着子子列 (n_{j_ℓ}) 我们有

$$\sup_{z\in K}|m_{n_{j_\ell}}(z)-m(z)|\longrightarrow 0\qquad\text{a.s. for every compact } K\subset\mathbb{C}_+. \tag{7.5}$$

步骤 3：得出整个序列依概率收敛。 我们已经证明，每个子列 (n_j) 都存在一个子子列 (n_{j_ℓ})，使得 (7.5) 成立。由于极限 m 是确定性的，这意味着整个序列满足 (7.3)（这是标准的子列原理）。特别地，对于每个固定的 $z \in \mathbb{C}+$，(7.2) 都成立。

□

7.3 从斯蒂尔切斯变换到测度

令 μ_n 为 L_n 的经验谱分布，并回顾 $m_n(z) = \int (x-z)^{-1}\, \mu_n(dx)$，$z \in \mathbb{C}+$。

推论 7.4（经验谱分布的弱收敛）。 存在一个定义在$\mathbb{R}$上的确定性概率测度μ，使得当$n \to \infty$时，

$$\mu_n \overset{\mathbb{P}}{\Longrightarrow} \mu.$$

其斯蒂尔切斯变换为$m(z) = \int_{\mathbb{R}} (x-z)^{-1}\, \mu(dx)$，$z \in \mathbb{C}+$，且$m(z) = \mathbb{E}[g_\infty(o;\ z)]$。

证明。函数 m 是定义在$\mathbb{C}+$ 上的赫尔格洛茨函数（作为格林函数的期望），因此是某个唯一概率测度 μ 在$\mathbb{R}$ 上的斯蒂尔切斯变换（参见例如 [21, 第 VII 章]）。根据命题 7.3，对于每个$z \in \mathbb{C}+$，$m_n(z) \to m(z)$ 依概率成立。于是由斯蒂尔切斯连续性定理可得 $\mu_n \Rightarrow \mu$ 依概率成立；参见例如 [24,定理 2.4]

□

注 7.5（支撑）。 由于谱$(L_n) \subset [0,2]$ 对每个 n都成立，因此测度 μ_n 的支撑位于 $[0,2]$, 上， μ 也如此。

参考文献

[1] Albert-László Barabási 和 Réka Albert，随机网络中标度的涌现。《科学》**286**(5439)，509–512（1999）。doi: 10.1126/science.286.5439.509。[2] Béla Bollobás、Oliver Riordan、Joel Spencer 和 Gábor Tusnády，无标度随机图过程的度序列。《随机结构与算法》**18**(3)，279–290（2001）。doi: 10.1002/rsa.1009。[3] Remco van der Hofstad，《随机图与复杂网络》，第1卷。剑桥大学出版社，2017。[4]Itai Benjamini 和 Oded Schramm，有限平面图分布极限的递归性。《电子概率期刊》**6**，1–13（2001）。doi: 10.1214/EJP.v6-96。[5] David J. Aldous 和 Russell Lyons，单模随机网络上的过程。《电子概率期刊》**12**，1454–1508（2007）。doi: 10.1214/EJP.v12-463。[6]Steffen Dereich 和 Peter Mörters，亚线性优先连接随机网络：度的演化。《电子概率期刊》**14**，1222–1267（2009）。doi: 10.1214/EJP.v14-647。[7] Jonathan H. Jordan，非均匀度量空间中的几何优先连接。《电子概率期刊》**18**，1–15（2013）。[8]M. Eckhoff 和 Peter Mörters，稳健优先连接网络的脆弱性。《电子概率期刊》**19**(57)，1–47（2014）。doi: 10.1214/EJP.v19-2974。[9] Noam Berger、Christian Borgs、Jennifer T. Chayes 和 Amin Saberi，优先连接图的渐近行为与分布极限。《概率年刊》**42**(1)，1–40（2014）。doi: 10.1214/12-AOP755。[10] Fan R. K. Chung，《谱图论》。CBMS数学区域会议丛书，第92卷，美国数学会，1997。ISBN：9780821803158。[11] David A. Levin 和 Yuval Peres，《马尔可夫链与混合时间》。第2版，美国数学会，2017。doi: 10.1090/mbk/107。

[12]Fan Chung、Linyuan Lu 和 Van Vu，具有给定期望度的随机图的谱。《美国国家科学院院刊》**100**(11)，6313–6318（2003）。doi: 10.1073/pnas.0937490100。[13] Charles Bordenave 和 Marc Lelarge，大型随机图的预解式。《随机结构与算法》**37**(3)，332–352（2010）。doi: 10.1002/rsa.20313。[14] Shankar Bhamidi、Steven N. Evans 和 Arnab Sen，大型随机树的谱。《理论概率杂志》**25**(3)，613–654（2012）。doi: 10.1007/s10959-011-0360-9。[15] S. N. Dorogovtsev、A. V. Goltsev、J. F. F. Mendes 和 A. N. Samukhin，复杂网络的谱。《物理评论E》**68**，046109（2003）。doi: 10.1103/PhysRevE.68.046109。[16] Daniel Montealegre 和 Van Vu，复杂网络的谱。Internet Mathematics**1**(1)（2018）。doi: 10.24166/im.03.2018。[17] Steffen Dereich，带适应度的优先连接：凝聚体的形成。《电子概率期刊》**21**（2016）。doi: 10.1214/16-EJP3801。[18] Fan Chung 和 Linyuan Lu，具有给定期望度序列的随机图中的连通分量。《组合学年刊》**6**(2)，125–145（2002）。[19]Fan Chung 和 Linyuan Lu，《复杂图与网络》。CBMS数学区域会议丛书，第107卷，美国数学会，2006。doi: 10.1090/cbms/107。[20] Rajendra Bhatia，《矩阵分析》。数学研究生教材，第169卷，施普林格，1997。[21] Michael Reed 和 Barry Simon，《现代数学物理方法（第一卷）：泛函分析》。学术出版社，1980。[22] Daniel A. Spielman，《谱图论讲义》。讲义。网址：http://cs-www.cs.yale.edu/homes/spielman/sagt/sagt.pdf。[23] John B. Conway，《单复变函数（第一卷）》。第2版，数学研究生教材，第11卷，施普林格，1978。doi: 10.1007/978-1-4612-6318-2。[24] Zhidong Bai 和 Jack W. Silverstein，《大维随机矩阵的谱分析》。第2版，施普林格统计学丛书，施普林格，2010。doi: 10.1007/978-1-4419-0661-8。[25] R. S. Hazra 和 N. Malhotra，无标度渗流模型的拉普拉斯算子谱性质，预印本（2025），arXiv:2504.17552。