arXiv:2603.04077v1 [astro-ph.IM] 4 Mar 2026

无网格磁流体动力学中的精确无散修正梯度方法

Xiongbiao Tu[a], Qiao Wang b,e,* Liang Gao[c], [f], [e], Yifa Tang[d], [g]

[a]湖北师范大学数学与统计学院，黄石*435002*，中国[b]中国科学院国家天文台，北京*100101*，中国[c]北京师范大学天文与天体物理前沿研究所，北京*100875*，中国[d]中国科学院数学与系统科学研究院数学科学国家重点实验室，北京*100190*，中国[e]中国科学院大学天文与空间科学学院，北京*100048*，中国[f]郑州大学物理学院与中原光学实验室，郑州*450001*，中国[g]中国科学院大学数学科学学院，北京*100049*，中国

摘要

我们提出了一种新颖的梯度正则化方法，可在无网格磁流体动力学（MHD）中完全消除磁场散度误差。由于其拉格朗日特性，该方法具有高空间分辨率和守恒优势。与约束梯度（CG）技术的对应方法相比，我们通过隐式投影方法对 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 进行重新构造，从而修正磁场梯度。

通过激波管、二维和三维涡旋、磁旋转不稳定性，尤其是平流实验等测试，并与 CG 方法和 GIZMO 代码进行比较，验证了改进梯度（MG）方法的准确性。该方法能够以舍入精度实现精确无散结果，并显著改善磁场散度误差的分布形态、幅值和数值耗散。

关键词：无网格 - 无散 - 磁流体动力学

1. 引言

理想磁流体力学（MHD）将无黏、无电阻气体的欧拉方程与麦克斯韦方程组耦合，能够很好地描述跨学科领域中的高温等离子体和天体物理流[29, 46]。其方程可写成双曲守恒律的形式。数值模拟实际采用其双曲守恒形式。Godunov [14]发现，通过添加约束 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$，可将守恒方程对称化，从而实现伽利略不变。出于数值研究的目的，人们自然希望寻找尽可能保留原系统特征属性和内在对称性的离散系统。

数值磁流体力学模拟中的一项核心挑战是保持磁场的无散性。早期综述论文 [47] 对七种保持 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 的格式进行了详细比较，包括八波形式、投影格式以及五种不同版本的约束输运（CT）类格式。流行的磁流体力学软件包ATHENA以及基于自适应网格加密算法的ATHENA++，在规则网格上提供了出色的CT实现 [45, 46]。此外，针对磁流体力学问题的求解器以及维持无散约束的CT格式已取得丰硕成果 [16, 17, 21, 26, 40]。一些基于有限元方法的近期工作[9, 24, 25] 为MHD问题开辟了新的分支。

遗憾的是，在非结构网格、无网格方法或移动网格方法中开发 CT 格式非常困难， [31, 32], 因此需要采用其他散度清理格式。Powell等人提出的“8-wave”清洗格式 [37]在散度清洗格式的稳定性方面发挥着重要作用。额外的清洗

*通讯作者电子邮箱：
hbnutu@yeah.net(XiongbiaoTu),qwang@nao.cas.cn(QiaoWang)

格式由 Dedner 等人提出， [8] 用于有效控制散度误差。针对磁流体动力学的移动网格清洗格式已经得到发展并广泛应用 [10, 11, 35, 36]。这些格式可以在一定程度上控制散度误差，但会改变磁流体力学方程，并可能使数值方法不再守恒。

另一方面，拉格朗日无网格算法因具有良好的守恒性和自动自适应分辨率而得到发展并广泛应用。Lucy [27] 和 Gingold & Monaghan [13] 提出了首个无网格方法——光滑粒子流体动力学（SPH），随后 Børve 等人[4, 41]对其进行了发展。Stasyszyn 等人 [43], 、Tricco & Price [48] 研究了 SPH 磁流体动力学格式中的散度清理格式。如今，清理项已成为模拟天体物理问题的强大数值方法。此外，研究者已针对磁流体动力学问题开发出稳健且设计完善的无网格方法 [12, 19, 20, 49], ，但这些方法仍需要清理项。迄今为止，在无网格数值磁流体力学中，实现无散（$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$）模拟仍是一项挑战。

如果散度误差未能得到有效消除，那么在求解磁流体力学问题时，洛伦兹力的方向将不再与磁场方向垂直，从而导致数值耗散和非物理数值解 [5, 17]。其对模拟的影响不仅限于精度损失，还会损害数值稳定性。从理论上讲，磁场可以由电磁势导出，并始终保持无散。在这一研究方向中，人们已探讨了利用势方法演化磁场的可行性，例如欧拉势（Brandenburg [6]）、矢量势（Price [38], Stasyszyn & Elstner [44]）、用于麦克斯韦方程的势方法（Xiao 等人 [51], 、Qin 等人 [39]），以及近期的研究（Tu 等人 [50]），该研究基于稳健的无网格方法（Hopkins & Raives [20]）提出了一种用于数值磁流体力学问题的矢量势方法。

本文介绍了一种用于磁流体动力学的拉格朗日 Godunov 型无网格改进梯度（MG）方法，以消除散度误差。该方法是对 Hopkins[19] 的稳健无网格约束梯度（CG）代码的改进。本文结构如下：第 2 节简要介绍磁流体力学方程和拉格朗日 Godunov 型无网格方法；第 3 节介绍 MG 方法的数值实现；第 4 节介绍 MG 方法的一些技术细节；第 5 节展示若干数值实验；最后，第 6 节总结研究结果。

2. 数值方法

2.1. 磁流体动力学方程

不考虑粘性和电阻率的理想磁流体力学方程描述了理想磁化等离子体流体与磁场耦合的物理过程。该方程组包含连续性方程、动量方程、能量方程和感应方程，适用于各种物理条件；其双曲守恒形式适合数值模拟。通常，这些方程可写为

$$L_v(\mathbf{U}) + \nabla \cdot \mathbf{F} = 0, \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{2}$$

其中 $L_v(\mathbf{U}) = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}_\mathrm{f} \otimes \mathbf{U})$。守恒变量向量 $\mathbf{U}$ 和通量 $\mathbf{F} = F - \mathbf{v}_\mathrm{f} \otimes \mathbf{U}$ 为

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho\mathbf{v} \\ \rho e \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}, \text{ and } F = \begin{bmatrix} \rho\mathbf{v} \\ \rho\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + P_T \mathcal{I} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} \\ (\rho e + P_T)\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})\mathbf{B} \\ \mathbf{v} \otimes \mathbf{B} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{v} \end{bmatrix}, \tag{3}$$

分别地，其中 ρ 是质量密度， $e = u + |\mathbf{B}|^2/(2\rho) + |\mathbf{v}|^2/2$ 是总比能， u 是内能， $P_T = P_\mathrm{gas} + |\mathbf{B}|^2/2$ 是包含热压和磁压的总压强。理想磁化等离子体流体遵循状态方程 $P_\mathrm{gas} = (\gamma - 1)\rho u$，其中 γ 是常数多方系数。记号 $\otimes$ 表示外积。理想磁流体力学方程 (1) 的精确解满足无散条件 (2)。这是因为不存在磁单极子，而且该条件在数学上保持了方程的对称性和伽利略不变性。

2.2. 守恒无网格方法

遵循 Lanson 和 Vila [22] 以及 Gaburov 和 Nitadori [12], 的工作，我们将磁流体力学方程 (1) 离散为加权无网格格式，其中采用连续的对称核函数 $W(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i, h(\mathbf{x}))$，该函数在紧支撑范围内归一化 $\int_{\mathbb{R}^d} W(\mathbf{x}-\mathbf{x}', h(\mathbf{x}'))d\mathbf{x} = 1$。粒子 i 周围的分数函数 $\psi_i(\mathbf{x})$ 定义为

$$\psi_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{\omega(\mathbf{x})} W(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i, h(\mathbf{x})), \tag{4}$$

其中，$\mathbf{x}_i$ 表示粒子 i 的位置，$\omega(\mathbf{x}) = \sum_{j\in P} W(\mathbf{x}-\mathbf{x}_j, h(\mathbf{x}))$ 是函数 W 在核尺寸为 $h(\mathbf{x})$ 时的归一化，$\sum_{i\in P}\psi_i(\mathbf{x}) \equiv 1$。$P$ 表示所考虑区域内的粒子集。标量函数相对于 $x^\alpha, \alpha \in \{1,2,3\}$ 的无网格导数可估计如下

$$\begin{aligned}(\nabla f)_i^\alpha &= \sum_j (f_j - f_i)\mathbf{T}_i^{\alpha\beta}(\mathbf{x}_j^\beta - \mathbf{x}_i^\beta)\psi_j(\mathbf{x}_i) \\ &= \sum_j (f_j - f_i)\tilde{\psi}_j^\alpha(\mathbf{x}_i),\end{aligned} \tag{5}$$

其中，j 指粒子 i 的所有邻居，我们对指标 $\beta, \tilde{\psi}_j^\alpha(\mathbf{x}_i) = \mathrm{T}_i^{\alpha\beta}(\mathrm{x}_j^\beta - \mathrm{x}_i^\beta)\psi_j(\mathrm{x}_i)$ 使用爱因斯坦求和约定。矩阵 $\mathrm{E}_i^{\alpha\beta} = \sum_{j\in P}(\mathrm{x}_j - \mathrm{x}_i)^\alpha(\mathrm{x}_j - \mathrm{x}_i)^\beta\psi_j(\mathrm{x}_i)$ 的分量为 3×3，$\alpha,\beta = 1,2,3$ 和 $\mathrm{T}_i = \mathrm{E}_i^{-1}$。这一估计器已在多项研究中广泛使用 [12, 18, 22, 23, 28, 33]。

我们在移动参考系中求解方程 $\mathbf{v}_\mathrm{f}$，使得输运算子为 $L_v(\mathbf{U}) = \partial\mathbf{U}/\partial t + \nabla\cdot(\mathbf{v}_\mathrm{f}\otimes\mathbf{U})$。因此，可以推导出守恒方程 (1) 的弱解。将守恒方程乘以连续可微的检验函数 $\varphi, \varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^+)$，并在紧支撑上积分

$$\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^+} (L_v(\mathbf{U})\varphi + \nabla\cdot\mathbf{F}(\mathbf{U})\varphi)dxdt = 0. \tag{6}$$

通过分部积分和高斯定理，可得到如下积分形式

$$\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^+} (\mathbf{U}L_v^*(\varphi) + \mathbf{F}(\mathbf{U})\cdot\nabla\varphi)dxdt = 0, \tag{7}$$

其中 $L_v^*(\varphi) = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mathbf{v}_\mathrm{f}\cdot\nabla\varphi$。我们将 φ 的空间积分和无网格导数转移到积分函数中并得到

$$\int_{\mathbb{R}^+}\sum_{i\in P}\left[V_i\mathbf{U}_i\frac{d\varphi_i}{dt} + \sum_j V_i\mathbf{F}^\alpha(\mathbf{U}_i)(\varphi_j - \varphi_i)\tilde{\psi}_j^\alpha(\mathbf{x}_i)\right]dt = 0, \tag{8}$$

其中，j 指的是 i 的所有相互作用邻居 j，V_i 是粒子 i的“有效体积”，通过 $1/\omega(x_i)$ 进行估计，与 Hopkins [18] 和 Tu 等人 [50]之前的工作保持一致。

再次通过分部积分、直接计算并重新整理，我们推导出以下积分形式：

$$\int_{\mathbb{R}^+}\sum_{i\in P}\left[\frac{d}{dt}(V_i\mathbf{U}_i) + \sum_j\left(V_i\mathbf{F}^\alpha(\mathbf{U}_i)\tilde{\psi}_j^\alpha(\mathbf{x}_i) - V_j\mathbf{F}^\alpha(\mathbf{U}_j)\tilde{\psi}_i^\alpha(\mathbf{x}_j)\right)\right]\varphi_i dt = 0. \tag{9}$$

对于任意检验函数 φ，上述方程均成立。因此，括号内的表达式必定为零，即：

$$\frac{d}{dt}(V_i\mathbf{U}_i) + \sum_j\left(V_i\mathbf{F}^\alpha(\mathbf{U}_i)\tilde{\psi}_j^\alpha(\mathbf{x}_i) - V_j\mathbf{F}^\alpha(\mathbf{U}_j)\tilde{\psi}_i^\alpha(\mathbf{x}_j)\right) = 0. \tag{10}$$

对于交互粒子对 i和 j，我们强制要求通过适当的通量求解器在虚拟界面 $\mathbf{F}^{ij}$上计算通量 $\mathbf{x}_{ij} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_j)$，并用 $\tilde{\mathbf{F}}^{ij}$替代 $\mathbf{F}(\mathbf{U}_i)$ 和 $\mathbf{F}(\mathbf{U}_j)$。我们定义法向量

为 $\hat{\mathbf{A}}_{ij}^{\alpha} = V_i\tilde{\psi}_j^{\alpha}(\mathbf{x}_i) - V_j\tilde{\psi}_i^{\alpha}(\mathbf{x}_j)$，$\alpha = 1, 2, 3$，虚拟界面及其面积为 $|\hat{\mathbf{A}}_{ij}|$。离散方程（10）可表示如下

$$\frac{d}{dt}(V_i\mathbf{U}_i) + \sum_j \tilde{\mathbf{F}}_{ij}\cdot\hat{\mathbf{A}}_{ij} = 0, \tag{11}$$

其中，j 表示粒子 i周围的交互邻居粒子。

对于每个粒子，我们设定以下量（“守恒变量”）：质量 m_i、动量$\mathbf{P}_i$、总能量 E_i以及加权磁场 B_i，其定义如下：

$$Q_i = \begin{pmatrix} m_i \\ \mathbf{P}_i \\ E_i \\ \mathcal{B}_i \end{pmatrix} = V_i\mathbf{U}_i. \tag{12}$$

将方程（11）离散化如下：

$$Q_i^{(n+1)} = Q_i^{(n)} + \Delta t\sum_j \hat{\mathbf{F}}_{ij}^{(n+1)}, \tag{13}$$

其中，$\hat{\mathbf{F}}_{ij} = -\tilde{\mathbf{F}}_{ij}\cdot\hat{\mathbf{A}}_{ij}$，而$\hat{\mathbf{F}}_{ij}^{(n+1)}$是对时间步长末端数值通量的适当估计。由于其具有反对称性，即$\hat{\mathbf{F}}_{ij}^{(n+1)} = -\hat{\mathbf{F}}_{ji}^{(n+1)}$，我们的无网格方法仍保持守恒性质。

3. 数值实现

3.1. 核尺寸和粒子体积

在无网格方案中，自适应支撑区域内固定数量的相邻粒子决定了核尺寸。具体而言，我们遵循 Gaburov 和 Nitadori [12], Hopkins [18] 的公式

$$N_{\mathrm{NGB}} = C_\nu h^\nu(\mathbf{x}_i)\sum_{j\in P} W(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i, h(\mathbf{x}_i)), \tag{14}$$

其中，对于二维情况，$C_\nu = \pi$ 和 $N_{\mathrm{NGB}} = 20$；对于三维情况，$\nu = 2$ 和 $C_\nu = 4\pi/3$ 和 $N_{\mathrm{NGB}} = 32$。实际计算中，需要通过公式 (14) 迭代求得核尺寸$h(\mathbf{x}_i)$。随后，粒子的“有效体积”可定义为

$$V_i = \omega^{-1}(\mathbf{x}_i) = \left\{\sum_{j\in P} W\left(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h(\mathbf{x}_i)\right)\right\}^{-1}. \tag{15}$$

此外，密度估算为 $\rho_i = m_i/V_i$。

3.2. 时间步长

我们采用统一时间步长。时间步长根据标准的局部 Courant-Friedrichs-Levy (CFL) 时间步长准则设定，如下所示

$$\Delta t < \min_{i,j}\left\{C_{\mathrm{CFL}}\frac{2R_i}{2c_{f,i} + |\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j|}\right\}, \tag{16}$$

其中，R_i 是粒子 i的有效半径，j 表示 i的所有相互作用邻居 j。为确保磁流体力学模拟稳定运行，我们设定 $C_{\mathrm{CFL}} = 0.4$。分母中的快磁声速 $c_{f,i}$ 按下式计算

$$c_f = \left\{\frac{a^2}{2} + \frac{|\mathbf{B}|^2}{2\rho} + \sqrt{\left(\frac{a^2}{2} + \frac{|\mathbf{B}|^2}{2\rho}\right)^2 - \frac{a^2B_m^2}{\rho}}\right\}^{1/2}, \tag{17}$$

其中，$a = \sqrt{\gamma P_{\mathrm{gas}}/\rho}$ 是声速，B_m 是$\mathbf{B}$沿成对方向的投影。

3.3. 离散梯度与斜率限制器

我们通过公式（5）估算每个粒子的原始变量（ρ,$\mathbf{v}$, P_{gas},$\mathbf{B}$）的梯度值。具体而言，粒子 i 中原始变量 f 的梯度由下式确定:

$$(\nabla f)_i = \sum_j (f_j - f_i)\mathbf{T}_i(x_j - x_i)\psi_j(x_i), \tag{18}$$

其中 j 的下标指关于粒子 i的相互作用的邻近粒子。 3×3 矩阵$\mathbf{T}_i = \mathbf{E}_i^{-1}$以及矩阵$\mathbf{E}_i^{\alpha\beta} = \sum_{j\in P}(x_j - x_i)^{\alpha}(x_j - x_i)^{\beta}\psi_j(x_i), \{\alpha, \beta = 1,2,3\}$的分量。

间断（如激波）会在数值解中引起严重振荡，甚至影响演化的稳定性。我们还引入了原始变量的斜率限制器。其数学形式如下

$$(\nabla f)_{\text{lim},i} = \min(1, t_i)(\nabla f)_i, \tag{19}$$

其中 t_i 取决于最大值 $f_i^{\max}$和最小值 $f_{\min i}$，即 f在支撑区域内所有粒子上的值 . 具体形式 m 的 t_i 如下

$$t_i = \min\left(\frac{f_i^{\max} - f_i}{TV_i^{\max}}, \frac{f_i^{\min} - f_i}{TV_i^{\min}}\right), \tag{20}$$

其中 $TV_i^{\max}$ =最大 $_j\{(\nabla f)_i(\mathbf{x}_{ij} - \mathbf{x}_i)\}$， $TV_i^{\min}$ =最小 $_j\{(\nabla f)_i(\mathbf{x}_{ij} - \mathbf{x}_i)\}$，以及虚拟界面处的 $\mathbf{x}_{ij} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_j)$。

3.4. 数值通量

质量 m_i、动量 $\mathbf{P}_i$、总能量 E_i 和加权磁场 B_i 的数值通量是在每个虚拟界面的静止系中计算的。我们首先根据粒子的速度，在时间间隔 Δt 内移动粒子，然后预测 m, $\mathbf{v}$, u, B 在 $t_n + \Delta t$ 处的流体量。可使用以下公式计算

$$\hat{f}_i = f_i + \Delta t \frac{df_i^{(n)}}{dt}, \tag{21}$$

我们将在本小节末尾解释 $df_{(n)i}/dt$，而 f_i 表示流体量 m_i, $\mathbf{v}_i$, u_i, B_i。

我们将预测的流体量转换为原始变量 $\mathbf{W}^{\top} = (\rho, \mathbf{v}, P_{\text{gas}}, \mathbf{B})$。接下来，我们按公式（18）计算原始变量的离散梯度，然后在时间步长结束时将原始变量外推到虚拟界面，以便进行通量计算。我们在虚拟界面两侧对原始变量进行线性重构 $\mathbf{x}_{ij} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_j)$,

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_i' &= \mathbf{W}_i + (\nabla \mathbf{W})_{\text{lim},i}(\mathbf{x}_{ij} - \mathbf{x}_i), \\ \mathbf{W}_j' &= \mathbf{W}_j + (\nabla \mathbf{W})_{\text{lim},j}(\mathbf{x}_{ij} - \mathbf{x}_j). \end{aligned} \tag{22}$$

对于相邻粒子 i和 j，我们估计虚拟界面速度 $\mathbf{v}_{ij} = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j)$。然后，我们将重构后的原始变量值从实验室系变换到虚拟界面的静止系

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_i'' &= (\rho_i', \mathbf{v}_i' - \mathbf{v}_{ij}, (P_{\text{gas}})_i', \mathbf{B}_i'), \\ \mathbf{W}_j'' &= (\rho_j', \mathbf{v}_j' - \mathbf{v}_{ij}, (P_{\text{gas}})_j', \mathbf{B}_j'). \end{aligned} \tag{23}$$

遵循 Springel [42] 和 Mocz 等人 [32], ，我们在新的笛卡尔坐标系 $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ 中计算通量，其$\hat{e}_1$ 平行于虚拟界面的法向量 $\mathbf{A}_{ij}$ 。然后将状态旋转到新的坐标系

$$\mathbf{W}_k''' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda \end{pmatrix} \mathbf{W}_k'', \tag{24}$$

其中 $\Lambda = (\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)^\top$ 是一个 3×3 矩阵， $k = i, j$。一般而言，在新的坐标系中，磁场在 $\hat{e}_1$ 方向上的分量 $B'''_{x,i}$ 和 $B'''_{x,j}$ 是不连续的，我们在虚拟面上强制该量取平均值

$$\bar{B}'''_{x,ij} = \frac{1}{2}(B'''_{x,i} + B'''_{x,j}). \tag{25}$$

我们将原始变量 $\mathbf{W}'''_i$、$\mathbf{W}'''_j$ 转换为守恒变量 $\mathbf{U}'''_i$、$\mathbf{U}'''_j$。在新的坐标系中，我们使用一维 Harten-Lax-van Leer间断（HLLD）黎曼求解器（Miyoshi & Kusano [30]）近似求解黎曼问题，以计算通量

$$\mathbf{F}'''_{ij} = F_{\mathrm{HLLD}}(\mathbf{U}'''_i, \mathbf{U}'''_j). \tag{26}$$

然后，我们将通量 $\mathbf{F}'''_{ij}$ 从新的坐标系旋转到静止系

$$\mathbf{F}''_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda^\top & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda^\top \end{pmatrix} \mathbf{F}'''_{ij}. \tag{27}$$

我们将 $\mathbf{F}''_{ij}$ 改写为通量向量（F_1， F_2， F_3， F_4， F_5， F_6， F_7， F_8）$^\top$，以便通过添加由虚拟界面移动引起的额外修正项，将静止系中的通量 $\mathbf{F}''_{ij}$ 转换到实验室系。该修正项由 Pakmor等人 [35]给出

$$\hat{\mathbf{F}}^{(n+1)}_{ij} = \mathbf{F}''_{ij} + \begin{pmatrix} 0 \\ v_{x,ij} F_1 \\ v_{y,ij} F_1 \\ v_{z,ij} F_1 \\ v_{x,ij} F_2 + v_{y,ij} F_3 + v_{z,ij} F_4 + \frac{1}{2} F_1 \mathbf{v}^2_{ij} \\ -v_{x,ij} \bar{B}'''_{x,ij} \\ -v_{y,ij} \bar{B}'''_{x,ij} \\ -v_{z,ij} \bar{B}'''_{x,ij} \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Now，我们已获得数值通量 $\hat{\mathbf{F}}^{(n+1)}_{ij}$，用于在离散方程（13）中更新 $Q^{(n)}_i$。

最后，我们回到前文提到的预测流体量的讨论，并为式 (21) 中的 $df_{(n)\,i}/dt$ 提供估计。我们将 $\hat{\mathrm{F}}^{(n+1)}_i = \sum_j \hat{\mathrm{F}}^{(n+1)}_{ij}$ 和 $\hat{\mathrm{F}}^{(n+1)}_i$ 改写为 $(\hat{F}_1, \hat{F}_2, \hat{F}_3, \hat{F}_4, \hat{F}_5, \hat{F}_6, \hat{F}_7, \hat{F}_8)^\top$。根据式 (11)，我们可以得到 $dm^{(n+1)}_i/dt = \hat{F}_1$, $d\mathrm{P}^{(n+1)}_i/dt = (\hat{F}_2, \hat{F}_3, \hat{F}_4)^\top$, $dE_{(n+1)\,i}/dt = \hat{F}_5$, $d\mathrm{B}^{(n+1)}_i/dt = (\hat{F}_6, \hat{F}_7, \hat{F}_8)^\top$。式 (21) 中 $d\mathrm{v}^{(n+1)}_i/dt$, $du^{(n+1)}_i/dt$ 的估计由以下方程给出

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} &= \frac{1}{m_i}\left(\frac{d\mathbf{P}_i}{dt} - \mathbf{v}_i \frac{dm_i}{dt}\right), \\ \frac{du_i}{dt} &= \frac{1}{m_i}\left(\frac{dE_i}{dt} - \mathbf{v}_i \frac{d\mathbf{P}_i}{dt} - \mathbf{B}_i \frac{d\mathcal{B}_i}{dt} + \frac{1}{2}\mathbf{v}_i^2 \frac{dm_i}{dt} + \frac{1}{2}\mathbf{B}_i^2 \frac{dV_i}{dt} - u_i \frac{dm_i}{dt}\right). \end{aligned} \tag{29}$$

4. 磁场修正梯度

上一节中的处理方法无法完全消除磁场散度。我们发现，需要修正磁场的重构值，才能使闭合曲面上的磁通量为零。根据高斯定律，磁场散度可估算如下

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_i = \frac{1}{V_i} \sum_j \Phi_{ij}, \tag{30}$$

其中， j 表示粒子 i 周围的相互作用邻居 j， Φ_{ij} 表示粒子 i穿过粒子 i 与粒子 j之间虚拟表面的法向磁通。具体而言， Φ_{ij} 估算如下:

$$\Phi_{ij} = \bar{B}'''_{x,ij}|\hat{\mathbf{A}}_{ij}| = \frac{1}{2}(B'''_{x,i} + B'''_{x,j})|\hat{\mathbf{A}}_{ij}| = \frac{1}{2}(\mathbf{B}'_i + \mathbf{B}'_j)\hat{\mathbf{A}}_{ij}, \tag{31}$$

其中，$\mathbf{B}'_i$、$\mathbf{B}'_j$ 是根据公式 22 重构的虚拟界面两侧的磁场值。此外，散度 $\nabla\cdot\mathbf{B}_i$ 表示为

$$\nabla\cdot\mathbf{B}_i = \frac{1}{V_i}\sum_j \frac{1}{2}(\mathbf{B}'_i + \mathbf{B}'_j)\hat{\mathbf{A}}_{ij}. \tag{32}$$

这是大多数有限体积法中采用的传统定义形式。

请注意，为与磁场散度、公式的对称性以及数值稳定性相容，必须将 Powell格式 [37] 作为清洗格式 [37] 使用。对于某个粒子 i，源向量$\mathbf{S}_{\text{Powell}}$ 为

$$\mathbf{S}_{\text{Powell}} = -(V\nabla\cdot\mathbf{B})_i \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{B}_i \\ \mathbf{v}_i\cdot\mathbf{B}_i \\ \mathbf{v}_i \end{bmatrix}. \tag{33}$$

一般而言，Powell格式本身并不能保证数值收敛，通常还需要额外的源项来抑制磁场散度误差，例如 Dedner项 [8]。然而，额外的清洗项会导致非守恒数值方法。

在我们的方法中，我们将式 32 改写为

$$\nabla\cdot\mathbf{B}_i = \frac{1}{2V_i}\sum_j \Big[\mathbf{B}_i + (\nabla\otimes\mathbf{B})_i\cdot(\mathbf{x}_{ij}-\mathbf{x}_i) + \mathbf{B}_j + (\nabla\otimes\mathbf{B})_j\cdot(\mathbf{x}_{ij}-\mathbf{x}_j)\Big]\hat{\mathbf{A}}_{ij}, \tag{34}$$

其中$\mathbf{x}_{ij} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_j)$和$\mathbf{B}$场的离散梯度 $\nabla\otimes\mathbf{B}$。此外，我们用$(\nabla\otimes\mathbf{B})_i + c_i Q_{ij}$和$(\nabla\otimes\mathbf{B})_j + c_j Q_{ji}$分别替换式 34 中的$(\nabla\otimes\mathbf{B})_i$ 和$(\nabla\otimes\mathbf{B})_j$ 。这将为每个粒子 i引入一个新的自由度。定义$Q_{ij} = -(\mathbf{x}_{ij} - \mathbf{x}_i)\otimes\hat{}\mathbf{A}_{ij}$。显然，由于$\hat{}\mathbf{A}_{ij} = -\hat{}\mathbf{A}_{ji}$，它是对称的。在我们的方法中，我们令式 34 为零，从而得到以下方程

$$\sum_j \Big[c_i Q_{ij} : Q_{ij} - c_j Q_{ji} : Q_{ji}\Big] = \sum_j \Big[\mathbf{B}_i + (\nabla\otimes\mathbf{B})_i\cdot(\mathbf{x}_{ij}-\mathbf{x}_i) + \mathbf{B}_j + (\nabla\otimes\mathbf{B})_j\cdot(\mathbf{x}_{ij}-\mathbf{x}_j)\Big]\hat{\mathbf{A}}_{ij}, \tag{35}$$

其中，“:”表示将两个 3×3 张量矩阵的对应分量进行逐元素相乘，然后将九个乘积相加，得到一个标量。向量 S_i 取代了方程 35 右端部分，即:

$$\sum_j \Big[c_i Q_{ij} : Q_{ij} - c_j Q_{ji} : Q_{ji}\Big] = S_i. \ \{i\in P\} \tag{36}$$

因此，我们现在得到一个由 N 个方程组成的对称稀疏线性方程组（N 是集合 P中的粒子总数）：

$$\mathcal{R}X = \mathbf{b}, \tag{37}$$

wh i阶分量$\mathbf{b}$为 S_i，系数矩阵 R（i,i）的分量为 $= \sum_j Q_{ij}$： Q_{ij}，其中 d

$$\mathcal{R}(i,j) = \mathcal{R}(j,i) = \begin{cases} -Q_{ij} : Q_{ij}, & \text{interactive pair of particle (i,j)}, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{38}$$

请注意，方程（37）中系数矩阵的对称性对于准确求解并实现 $\nabla\cdot\mathbf{B}_i = 0$至关重要。在实际计算中，我们使用英特尔数学核心函数库（MKL）PARDISO 的并行稀疏求解器来处理对称稀疏线性方程组（方程 37）。

给定一对相互作用的粒子 i和 j，我们可以按如下方式计算修正梯度 $(\nabla\otimes\mathbf{B})_{i,\text{MG}}$和 $(\nabla\otimes\mathbf{B})_{j,\text{改进梯度}}$

$$\begin{aligned} (\nabla\otimes\mathbf{B})_{i,\text{MG}} &= (\nabla\otimes\mathbf{B})_i + c_i Q_{ij}, \\ (\nabla\otimes\mathbf{B})_{j,\text{MG}} &= (\nabla\otimes\mathbf{B})_j + c_j Q_{ji}. \end{aligned} \tag{39}$$

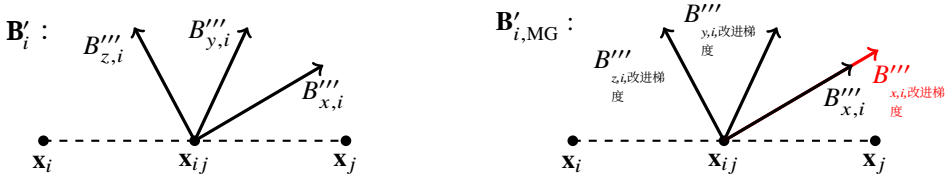
我们在上述公式 22 中使用 $(\nabla\otimes\mathbf{B})_{i,\mathrm{MG}}$ 和 $(\nabla\otimes\mathbf{B})_{j,\mathrm{MG}}$ 来更新 $(\nabla\otimes\mathbf{B})_i$ 和 $(\nabla\otimes\mathbf{B})_j$。虚拟界面中的磁场更新值 $\mathbf{B}'_{i,\mathrm{MG}}$ 和 $\mathbf{B}'_{j,\mathrm{MG}}$ 通过以下形式进行线性重构

$$\begin{aligned}\mathbf{B}'_{i,\mathrm{MG}} &= \mathbf{B}_i + (\nabla\otimes\mathbf{B})_{i,\mathrm{MG}}\cdot(\mathbf{x}_{ij}-\mathbf{x}_i),\\ \mathbf{B}'_{j,\mathrm{MG}} &= \mathbf{B}_j + (\nabla\otimes\mathbf{B})_{j,\mathrm{MG}}\cdot(\mathbf{x}_{ij}-\mathbf{x}_j).\end{aligned} \tag{40}$$

随后，磁场散度表示为

$$\nabla\cdot\mathbf{B}_{i,\mathrm{MG}} = \frac{1}{V_i}\sum_j \frac{1}{2}(\mathbf{B}'_{i,\mathrm{MG}}+\mathbf{B}'_{j,\mathrm{MG}})\hat{\mathbf{A}}_{ij}. \tag{41}$$

现在，我们给出修正梯度法中任意粒子 i 的 $\nabla\cdot\mathbf{B}_{i,\mathrm{MG}}=0$



上图显示，在新的笛卡尔坐标系 $(\hat{e}_1,\hat{e}_2,\hat{e}_3)$ 中，B'_i 和 $\mathrm{B}'_{i,\mathrm{MG}}$ 的分解，其中 $\hat{e}_1$ 平行于粒子对 i 和 j 之间虚拟界面的法向量 A_{ij}。与 B'_i 和 B'_j 相比，修正后的 $\mathrm{B}'_{i,\mathrm{MG}}$ 和 $\mathrm{B}'_{j,\mathrm{MG}}$ 仅改变了沿虚拟表面法向方向的幅值。这是因为重构值增量 $c_i Q_{ij}\cdot(\mathrm{x}_{ij}-\mathrm{x}_i) = -c_i|\mathrm{x}_{ij}-\mathrm{x}_i|^2\hat{}\mathrm{A}_{ij}$ 始终平行于虚拟界面的法向量。此外，由于该增量为 $o(|\mathrm{x}_{ij}-\mathrm{x}_i|)$，在精心设计的数值格式中，这种修正也不会改变磁场的重构精度。

请注意，在我们的方法中，斜率限制器仅应用于“初始”磁场梯度；因此，随后对梯度的修正可能会“略微再次违反”原有的斜率限制器条件。与Hopkins[19], 不同，我们不尝试进行迭代斜率修正，因为我们观察到，精确无散保持本身也能在长期演化过程中维持稳定性。数值实验证实，尽管可能违反斜率限制器条件，我们的MG方法在实践中仍表现良好。未来有必要针对各种数值条件开展进一步研究。

本节介绍一种修改磁场梯度的方法。需要注意的是，该修改仅会对磁场的重构值进行适当调整，不会改变守恒性。因此，我们的方法可以扩展到其他 MHD数值格式。

5. 数值测试

下面，我们运行一系列经典的 MHD问题来测试 MG方法，并分别与 GIZMO 和 CG方法的数值结果进行比较。

*5.1. Brio-Wu*激波管

我们首先进行 Brio-Wu 激波管测试。在二维周期边界条件（箱体大小为 $x\in(0,4)$ 和 $y\in(0,0.25)$）下，我们采用 896×56 个粒子，并将左态向量初始化为 $(\rho,v^1,v^2,v^3,B^1,B^2,B^3,P_{\mathrm{gas}})=\{1,0,0,0,0.75,1,0,1\}$，将右态初始化为 $\{0.125,0,0,0,0.75,-1,0,0.1\}$，其中 $\gamma=2$，遵循 Brio 和 Wu [7]中的初始条件。该区域在 x 方向上足够长，以确保模拟过程中激波的演化不受边界影响。

该数值实验旨在测量捕捉磁流体力学激波、稀疏波和接触间断的能力。对于无网格方法而言，这项测试颇具挑战性，尤其是在演化磁场第一分量时。我们展示了改进梯度方法的结果，并将其与约束梯度方法和 GIZMO 格式进行比较。

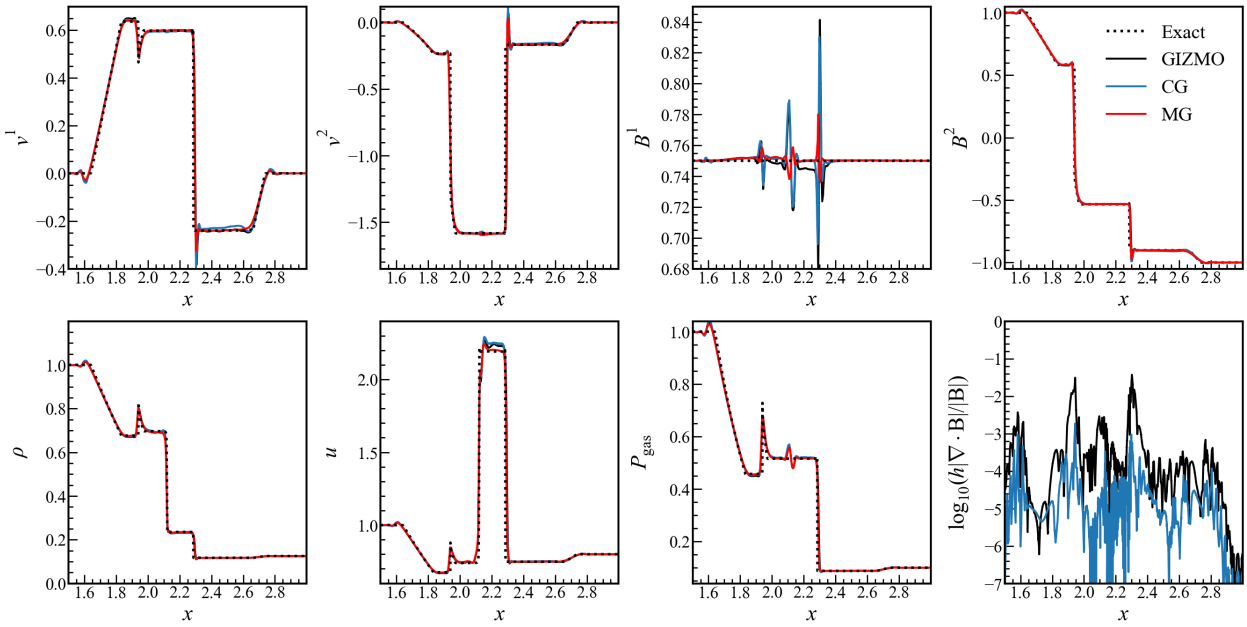


图 1：Brio-Wu 激波管。图中分别展示了在 $t = 0.2$ 时，采用 GIZMO 方法（深色线）、CG 方法（蓝色线）、MG 方法（红色线）和精确解（虚线）得到的密度、速度、磁场、内能、压力，以及散度误差对数图 $\log_{10}(h_i|\nabla\cdot\mathbf{B}_i|/|\mathbf{B}_i|)$ 的演化。

请注意，约束梯度方法和 GIZMO 方法采用 POWELL 和 Dedner 清洗格式，而改进梯度方法则完全不采用任何清洗格式。图 1 分别展示了改进梯度、约束梯度和 GIZMO 方法在时刻 $t = 0$。2的密度、速度、磁场、内能、压力和散度误差数值结果。

我们的 MG 方法将无散约束 $\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$ 维持在机器精度，因此右下图中未观察到振幅曲线。相比之下，GIZMO 和 CG 在整个演化区域内均出现散度误差，尤其是在激波间断处达到峰值。就磁场第一分量的演化而言，GIZMO 和 CG 方法均出现剧烈振荡，但我们的 MG 方法有效降低了这种振荡的振幅。

5.2. 磁场环的平流

接下来，我们进行场环平流测试。这是验证磁流体力学模拟中磁场散度为零的重要测试。同时，该测试也对数值方法的耗散程度十分敏感。场环平流在周期性正方形区域中初始化；我们设置初始参数：在以几何中~~心为~~圆心、半径为$R = \sqrt{x^2 + y^2} < 0.3$的圆内，设置 $(\rho, B^1, B^2) = (2, B_0 y/R, B_0 x/R)$，其中 $B_0 = 10^{-3}$。在外部区域，设置 $(\rho, B^1, B^2) = (1, 0, 0)$。在整个正方形区域中，设置 $(P_{\rm gas}, v^1, v^2) = (1, 2, 0.5)$，$\gamma = 5/3$。

我们展示了 MG 方法的结果，并将其与 CG 方法、GIZMO 格式和 POWELL 方案进行比较。图 2 展示了 MG、CG、GIZMO 和 Powell 方法在时刻 $t = 20$ 的磁压图 $|\mathbf{B}_i|^2/2 \times 10^6$ 及散度误差 $\log_{10}(h_i|\nabla\cdot\mathbf{B}|_i/|\mathbf{B}|_i)$ 的数值结果。我们的 MG 方法表现极其出色。在演化过程中，磁压几乎没有衰减，而是保持恒定。这是因为 MG 方法将磁场散度误差控制在机器精度以内。相比之下，CG 方法和 GIZMO 均表现出较大的耗散，磁压随时间衰减或增强。这主要是由一定程度的磁场散度误差造成的。Powell 方案的磁压则急剧增加并发生振荡，这主要是因为缺少能够抑制磁场散度误差的 Dedner 清理项，导致磁场散度显著增大。

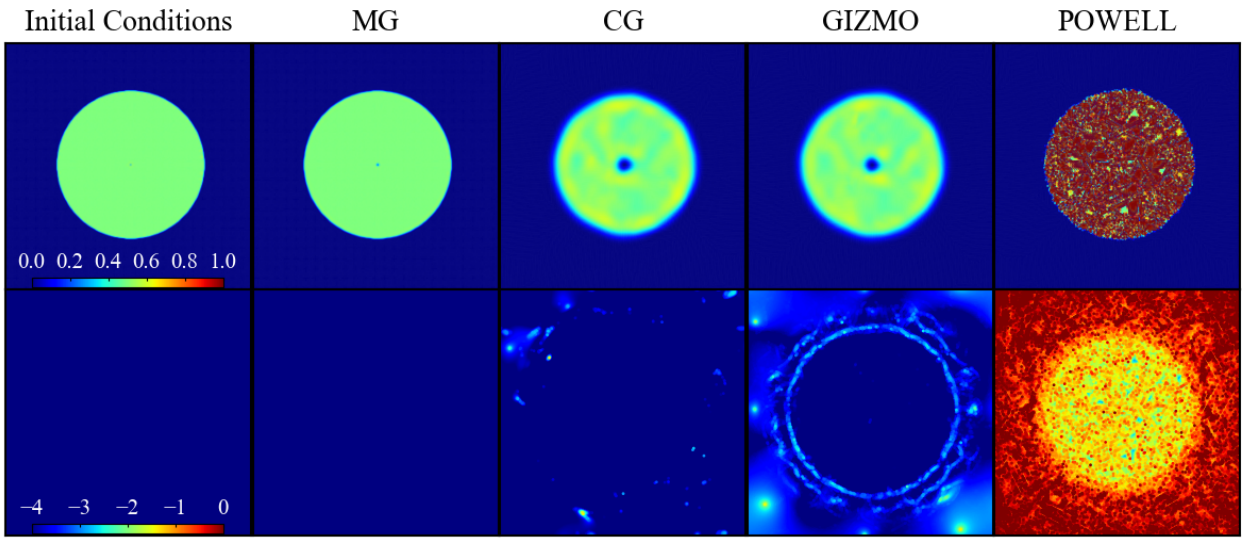


图 2：场环的平流。第一列为初始状态，其余四列显示 $t = 20$ 时的结果；如图中从左到右所示，我们比较了四种方法：MG、CG、GIZMO 和 POWELL。理想的数值结果应保持完美的圆形，其尺度和振幅也应与初始状态一致。每列分别显示磁压 $\mathbf{B}_i^2/2 * 10^6$ 分布图（上）和散度误差 $\log_{10}(h_i|\nabla\cdot\mathbf{B}_i|/|\mathbf{B}_i|)$ 分布图（下），数值对应色条。所有测试均使用 256^2 个粒子。

5.3. 二维 Orszag-Tang 涡旋

接下来，我们研究二维 Orszag-Tang 涡旋问题。二维可压缩奥萨格-唐涡旋 [34] 同样初始化于周期性正方形区域内。我们将初始参数设为 $\gamma = 5/3$, $\rho = 25/(36\pi)$, $P_{\rm gas} = 5/(12\pi)$, $(v^1, v^2) = \{-\sin(2\pi y), \sin(2\pi x)\}$, 和 $(B^1, B^2) = \{-\sin(2\pi y)/\sqrt{4\pi}, \sin(4\pi x)/\sqrt{4\pi}\}$。

我们展示了 MG、CT、CG 和 GIZMO 格式的结果。CT 方法的数值结果由 ATHENA 使用三阶精度格式[46]计算。图 3 展示了密度和磁压的分布。所有方法在$t = 0.5$ 时（左侧三列）都产生了定性上相似的结果（散度误差除外）。然而，在 $t = 4.0$ 时（右侧三列），密度和磁压均出现了显著差异。GIZMO 方法的结果耗散性很强。尽管 CG 方法将磁场散度误差降低了几个数量级，但它只适用于短期演化，在长期演化中则会失效。

我们的方法在密度和磁压方面表现更好，这归因于其无散约束达到机器精度且耗散更低。在 $t = 0.5$ 和 $t = 4.0$ 时，CG 和 GIZMO 方法均出现了一定程度的散度误差，导致了数值耗散。与此同时，在 $t = 4.0$ 时，MG 的结果与高阶CT方法的中心涡旋模式相吻合。

图 4 展示了 MG 方法中守恒量的误差水平。在此图中，标签“error(m)”表示演化过程中总质量相对于初始值的偏差绝对值。总动量（两个分量 $P1, P2$）和总能量 E 也采用类似的定义。我们还展示了所有粒子中的磁通量 $V\nabla\cdot\mathbf{B}$ 最大绝对值随时间的演化。这些误差均达到机器精度，表明我们的 MG 方法能够准确实现磁场的无散约束。

为验证MG方法的稳健性及其对分辨率的依赖性，尤其是在长期演化中的表现，我们针对相同的初始条件，使用不同分辨率的 $128^2, 256^2$ 和 512^2 粒子进行了模拟（分别标记为MG128、MG256和MG512）。图5比较了三种分辨率下的数值结果，结果高度一致。例如，所有模拟的中心都存在双团块模式$t = 4。0$。

然而，由于需要数值求解稀疏线性方程，MG方法的计算成本较高。为加快计算，我们尝试仅在粗步同步时使用MG校正，并在自适应步长方案中采用CG子步。我们考察这种方法是否会引发不稳定性或显著改变结果。我们进行

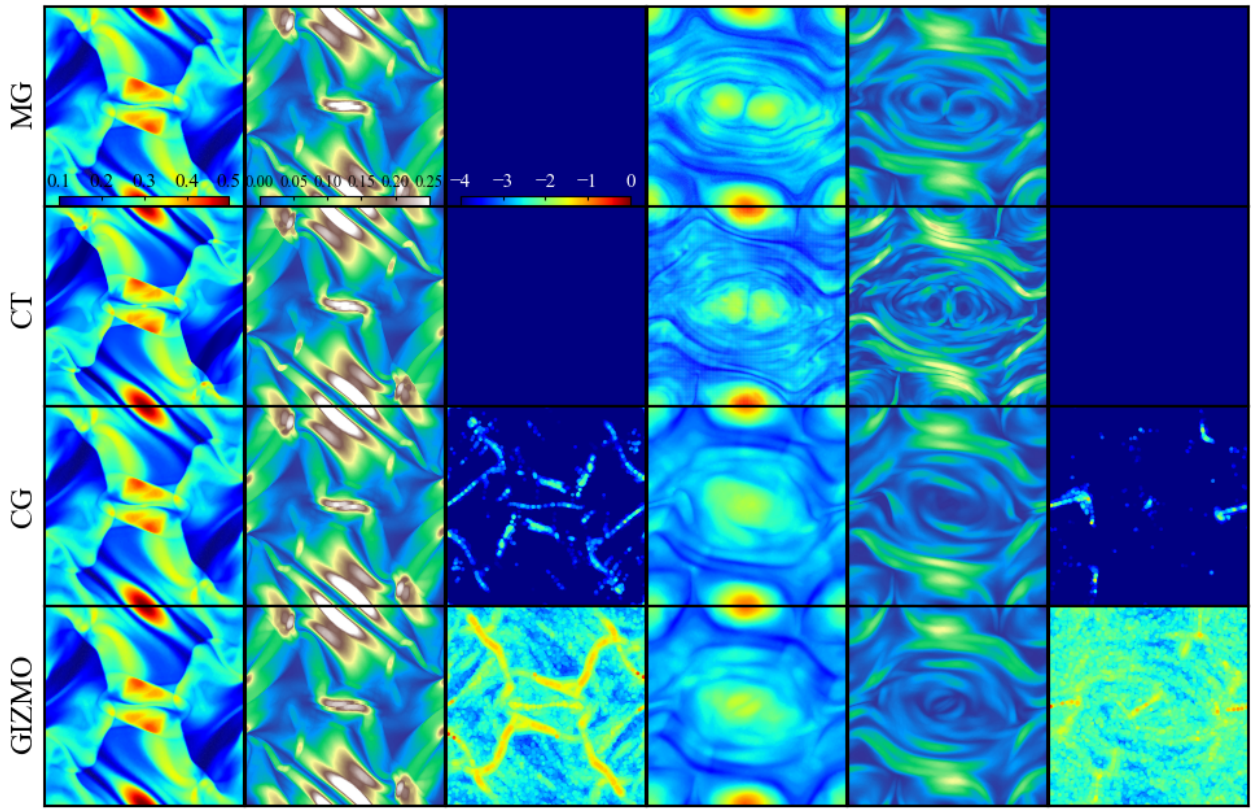


图 3：二维 Orszag-Tang 涡旋。每列按图中标注（从上到下）比较四种方法：MG、CT、CG、GIZMO。每三列分别展示密度（左）、磁压（中）以及散度误差 $\log_{10}(h_i|\nabla\cdot\mathbf{B}_i|/|\mathbf{B}_i|)$ 的分布图（右），数值对应色标。所有无网格模拟均包含 256^2 个粒子，CT 使用 256^2 网格。左侧三列的结果对应 $t = 0.5$，右侧三列对应 $t = 4.0$。

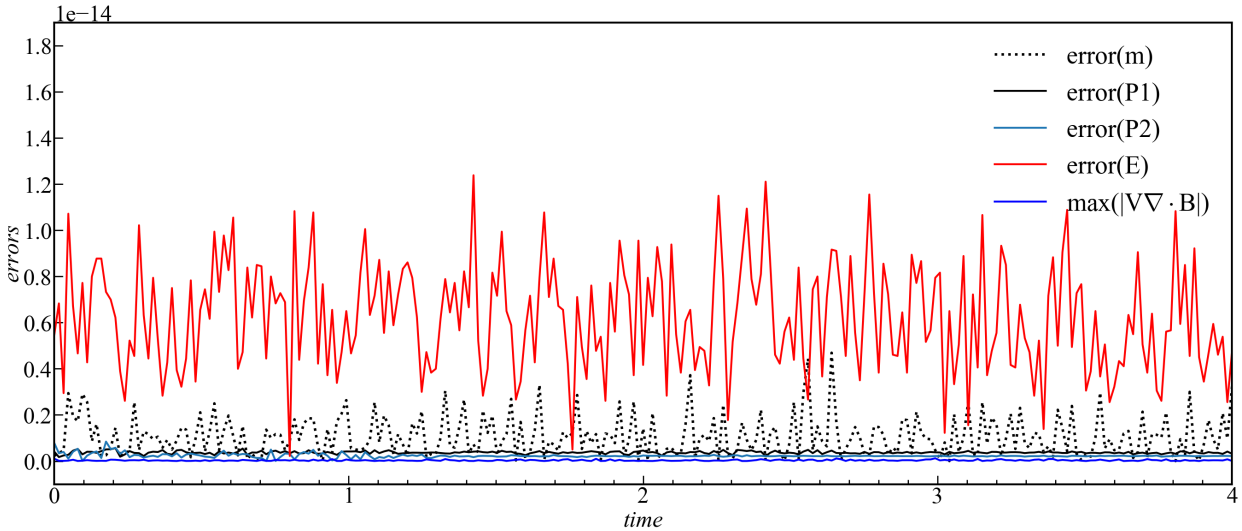


图 4：二维 Orszag-T　ang 涡旋. 我们展示 MG 方法的守恒结果：总质量 m 误差、总动量（两个分量 s$P1$，$P2$）误差、总能　量 E 误差，以及二维 Orszag-Tang 涡旋演化过程中随时间 [0,4] 变化的最大磁通量 $\max_i\{(V_i\nabla\cdot\mathbf{B}_i)\}$。

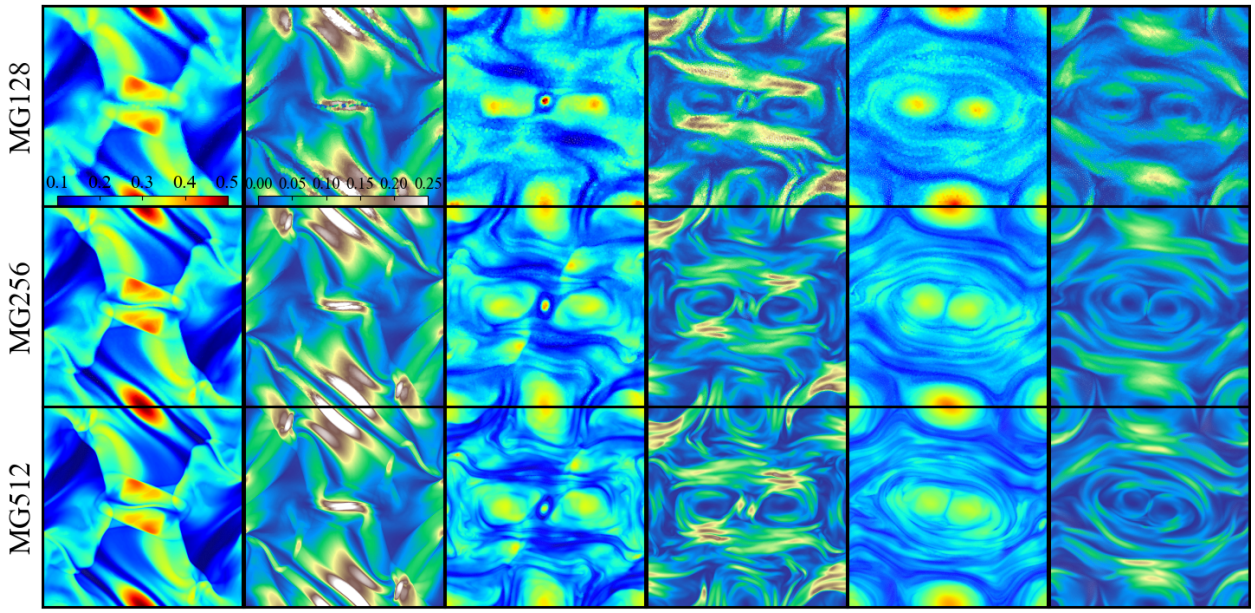


图5：二维 Orszag-Tang 涡旋。我们比较了三种分辨率下的 MG方法：MG128（ 128^2 粒子）、MG256（ 256^2 粒子）和 MG512（ 512^2 粒子），依次从上到下排列。每两列分别展示密度（左）和磁压（右）。结果分别展示于 $t = 0.5$（左）、 $t = 2.0$（中）和 $t = 4.0$（右）。

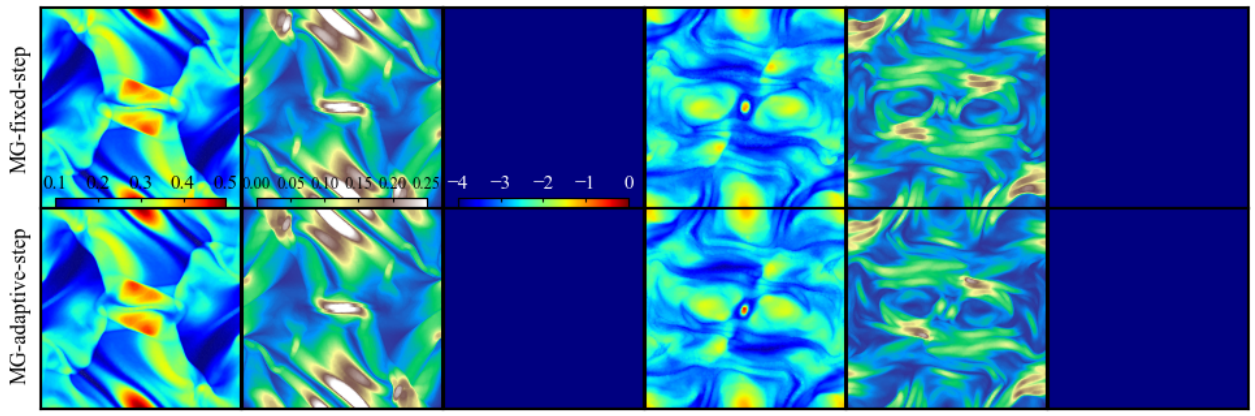


图6：二维 Orszag-Tang 涡旋。每列比较两种方法：固定时间步长的 MG 和自适应时间步长的 MG，排列顺序如图中所示（从上到下）。每组三列分别展示密度（左）、磁压（中）以及散度误差的对数图 $\log_{10}(h_i|\nabla\cdot\mathbf{B}_i|/|\mathbf{B}_i|)$（右），数值对应色标。散度误差在粗步同步点处测量。所有计算均包含 256^2 粒子。左侧三列的结果对应 $t = 0.5$，右侧三列对应 $t = 2.0$。

对固定步长和自适应步长的Orszag-Tang涡旋进行模拟，直至 $t = 2.0$，并保持所有其他条件相同。图6表明，MG自适应步长与MG固定步长方法产生了相似的数值结果。

5.4. 磁化爆炸波与磁转子

现在，我们在一个二维周期性单位尺寸域中考虑强磁化爆炸波和磁转子测试。对于强磁化爆炸波，我们采用 Hopkins & Raives [20]的初始条件： $\gamma = 5/3$，密度 $\rho = 1$，速度 $(v^1, v^2) = \{0, 0\}$ 以及 $(B^1, B^2) = \{1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\}$。以计算域中心为原点，压力 $P_{\rm gas} = 10$ 对于 $r < 0.1$，$r = \sqrt{x^2 + y^2}$，否则 $P_{\rm gas} = 0.1$。对于磁转子测试，我们初始化一个二维计算域，取 $\gamma = 7/5$，压力 $P_{\rm gas} = 1$，$(B^1, B^2) = \{5/\sqrt{4\pi}, 0\}$。原点设在计算域中心，并且对于 $r < r_0 = 0.1$，密度为 $\rho = 10$，速度为 $(v^1, v^2) = \{-2y/r_0, 2x/r_0\}$；对于 $r_0 < r < r_1 = 0.115$，为 $\rho = 1 + 9f(r)$ 以及 $(v^1, v^2) = \{-2yf(r)/r, 2xf(r)/r\}$，其中 $f(r) = (r_1 - r)/(r_1 - r_0)$，否则在 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 区域内为 $\rho = 1$ 以及 $(v^1, v^2) = \{0, 0\}$。MHD转子由 Balsara & Spicer [3],首次提出，并已成为二维MHD问题的标准测试。

对于这两项测试，我们还给出了MG方法与CG 方法和GIZMO 格式的比较。图7展示了MG、CG和GIZMO方法在密度、气体压强、磁压以及磁场散度误差方面的数值结果。我们的MG方法将 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 约束达到了机器精度，但CG和GIZMO方法仍保留散度误差。除散度误差外，所有方法对流体变量都给出了定性相似的结果。这两项数值实验针对极端MHD问题。

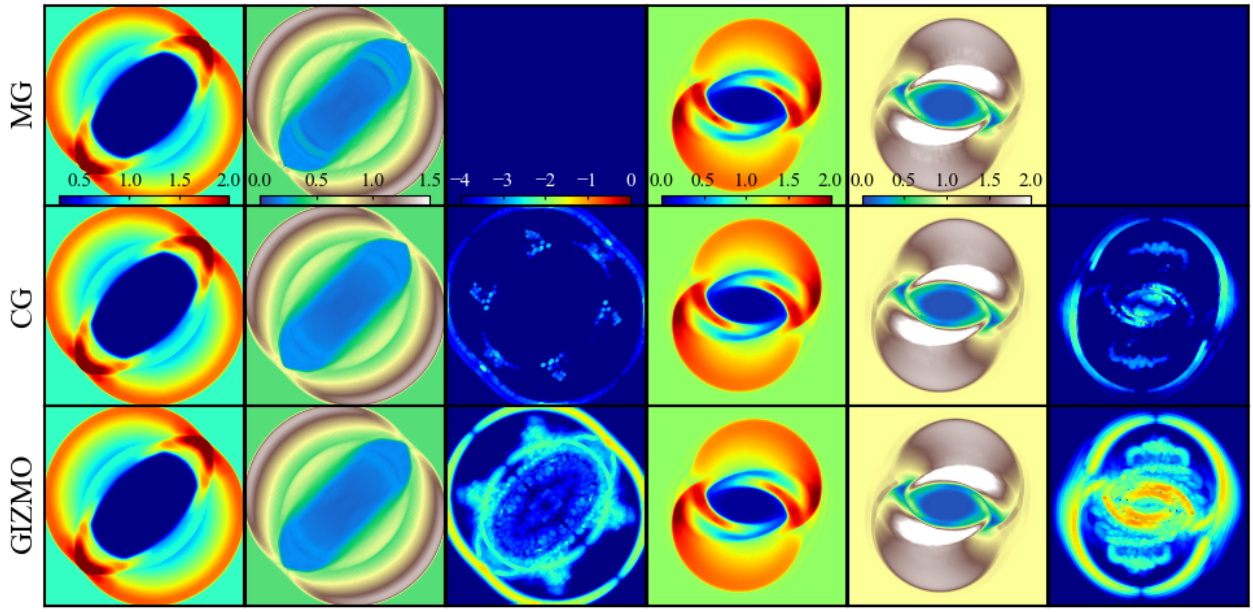


图7：时刻 $t = 0.2$的MHD爆炸波（左三列）以及时刻 $t = 0.15$的MHD转子（右三列）。对于每一列，我们比较三种方法：MG、CG、GIZMO，如图标注（自上而下）。每三列分别展示流体量分布图（左）、磁压（中）以及散度误差$\log_{10}(h_i|\nabla \cdot \mathbf{B}_i|/|\mathbf{B}_i|)$的分布图（右），数值遵循色条。此处所有计算均使用 256^2 粒子。左：MHD爆炸波，显示密度（第一列）。右：MHD转子，显示气体压强（第四列）。

5.5. 磁旋不稳定性

在本小节中，我们测试磁旋不稳定性。磁旋不稳定性（MRI）是天体物理学中一项重要的数值实验 [1, 2, 15]。磁旋不稳定性在轴对称二维剪切盒中进行，$-0.5 < x < 0.5$ 和 $-0.5 < z < 0.5$。遵循 Hopkins & Raives [20],，我们设置密度场 $\rho = 1$、压力 $P_{\rm gas} = 1$、速度 $(v^1, v^2, v^3) = \{\delta v, -qx, \delta v\}$ 以及磁场 $(B^1, B^2, B^3) = \{0, 0, B_0 \sin(2\pi x)\}$，其中 $q = 3/2$ 和 $B_0 = \sqrt{15/(8\pi m)}$，模态数为 $m = 4$。速度 $\delta v \in [-0.005、0.005]$ 是随机生成的。在本测试中，有必要为动量方程加入附加源项，$D(\rho \mathbf{v})/Dt = -2(\Omega\hat{z}) \times (\rho \mathbf{v}) + 2\rho q \Omega^2 x \hat{x}$,

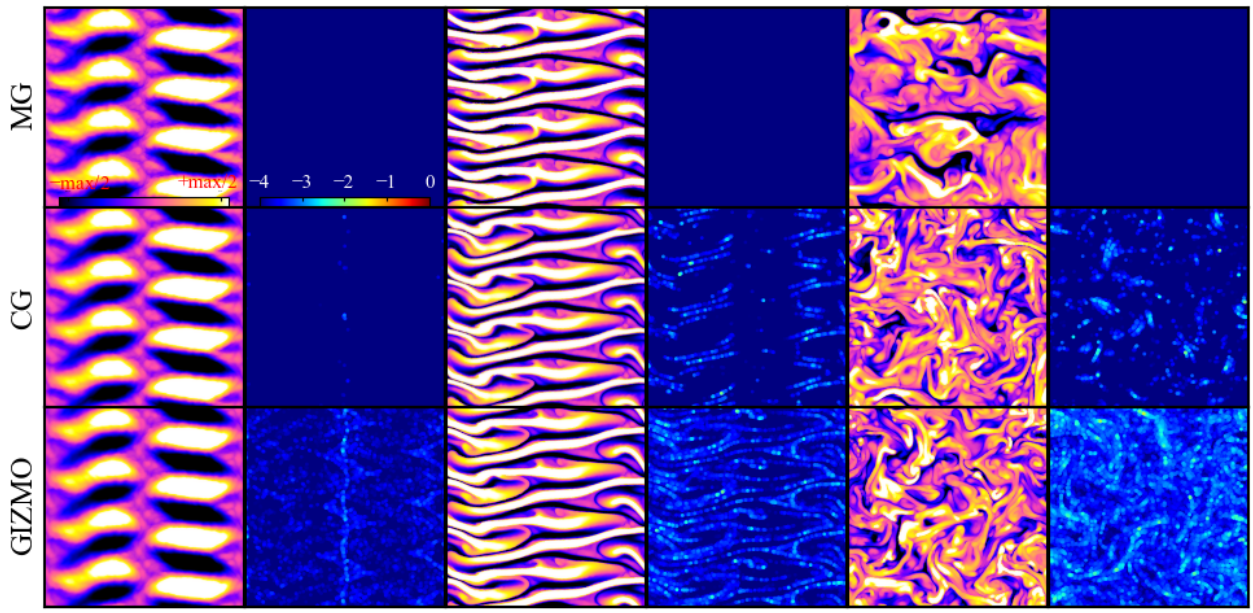


图 8：磁旋不稳定性（MRI）。每列比较三种方法：MG、CG、GIZMO（从上到下依次排列）。每组两列分别显示磁场的方位角／环向分量 B_y（左）以及散度误差的对数图 $\log_{10}(h_i|\nabla\cdot\mathbf{B}_i|/|\mathbf{B}_i|)$（右）；数值对应色标，其中“max”表示其最大绝对值。此处所有模拟均使用 256^2 个粒子。左：显示 $t = 12$ 时的结果。中：显示 $t = 16$ 时的结果。右：显示 $t = 19$ 时的结果。

它们分别对应于科里奥利力和离心力。除 v^2 在 x 轴上外，所有变量均采用周期性边界条件。具体而言，$v^2(x, z) = v^2(x + n_x L_x, z + n_z L_z) + n_x q\Omega L_x$，角速度 $\Omega = 1$。

MRI 是一种特殊的数值实验，整个演化过程在二维单位平面上进行，但速度和磁场是三维变量。我们展示 MG 方法的结果，并将其与 $t = 12$、$t = 16$ 和 $t = 19$ 时的 CG 方法及 GIZMO 格式进行比较。磁场的方位角／环向分量 B_y 逐渐增大，随后通过平流成对地穿过轴线（$x = 0$）和边界，形成正值与负值。湍流逐渐出现。图 8 清楚地表明，我们的 MG 方法保持了磁场无散约束，而其他方法则未能做到。随着演化的进行，GIZMO 和 CG 方法的散度误差不断增大。CG 和 GIZMO 方法的结果似乎难以使磁场分量 B_y 成对地穿到另一侧。与 GIZMO 和 CG 方法相比，我们的 MG 方法能够更好地捕捉平流现象。

5.6. 三维 *Orszag-Tang* 涡旋

最后，我们尝试使用改进梯度方法进行三维模拟，以验证其在三维磁流体力学问题——三维 Orszag-Tang 涡旋中，是否仍能有效保持无散约束 $\nabla\cdot\mathbf{B}_i = 0$。我们参照 Helzel等人 [17] 的工作设置初始条件。在周期性三维单位立方体中，初始变量设为$\rho = 25/(36\pi)$、$P_{\rm gas} = 5/(12\pi)$，

$$(v^1, v^2, v^3) = \{-[1 + \epsilon_p \sin(2\pi z)] \sin(2\pi y), [1 + \epsilon_p \sin(2\pi z)] \sin(2\pi x), \epsilon_p \sin(2\pi z)\}$$

and

$$(B^1, B^2, B^3) = \left\{-\frac{\sin(2\pi y)}{\sqrt{4\pi}}, \frac{\sin(4\pi x)}{\sqrt{4\pi}}, 0\right\}.$$

我们取 $\epsilon_p = 0.2$。气体的绝热指数为 $\gamma = 5/3$。在这个三维问题中，我们使用 64^3个粒子进行模拟，演化至时刻 $t = 2.5$。我们发现，对于 $\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$，我们的方法仍能将误差控制在机器精度范围内。

由于采用周期性条件，我们在图9–11中展示了 $x = 0$、$y = 0$和 $z = 0$三个表面上的流体变量。我们确认，即使在三维问题中，改进梯度方法也能有效地将 $\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$ 约束保持在机器精度。

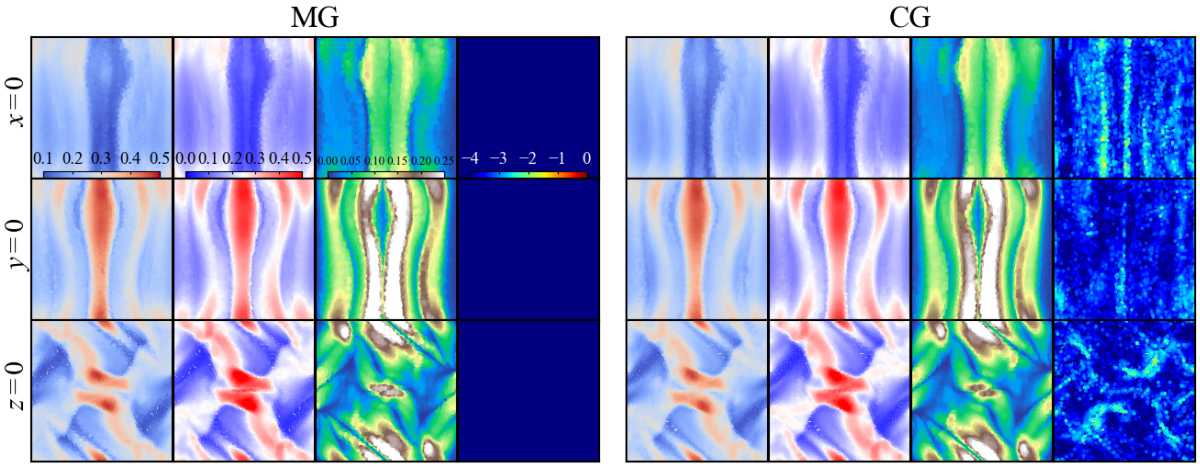


图 9： $t = 0.5$ 时的三维 Orszag-Tang 涡旋。我们比较两种方法：MG、CG，如图中所标（从左到右）。每一行展示三个表面 $x = 0$、$y = 0$ 和 $z = 0$ 上的流体量，如图中所标（从上到下）。每四列分别展示 MG 方法（左四列）和 CG 方法（右四列）的密度（左）、气体压强（中左）、磁压（中右）以及散度误差 $\log_{10}(h_i|\nabla\cdot\mathbf{B}_i|/|\mathbf{B}_i|)$ 分布图（右），数值对应色标。

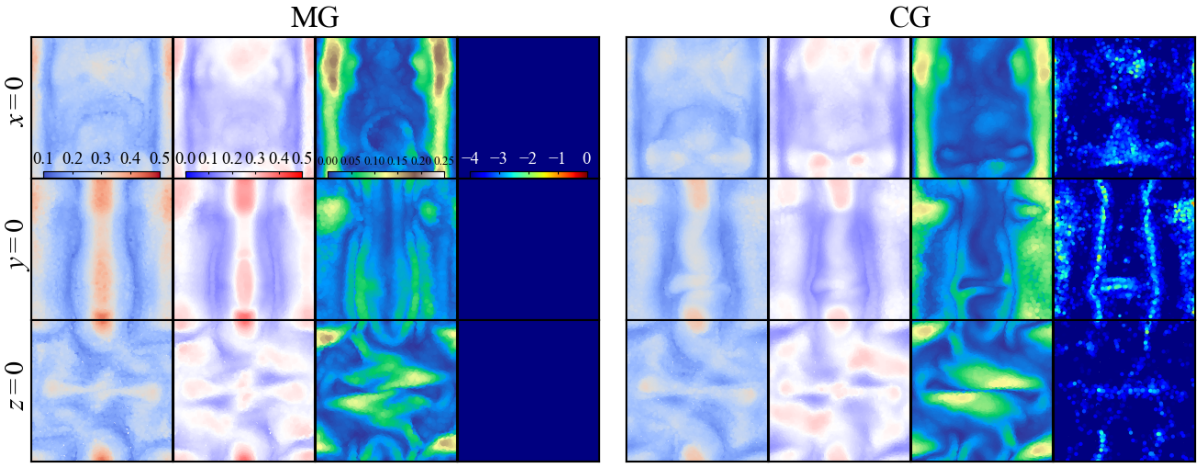


图 10：时间 $t = 2.0$ 时的三维 Orszag-Tang 涡旋。我们比较两种方法：MG、CG，如图中所标（从左到右）。各图案所表示的位置和流体量均与图 9 相同。

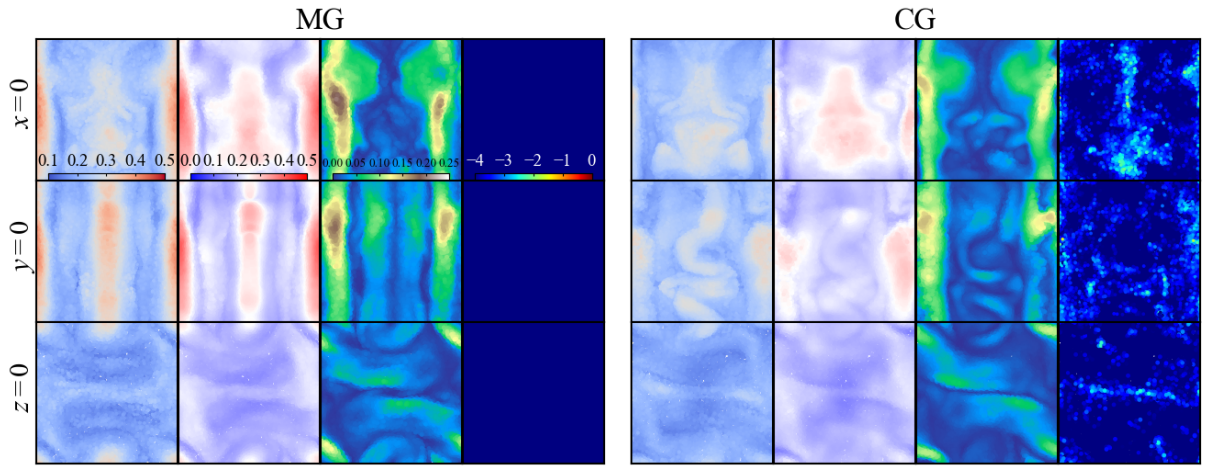


图 11：三维 Orsza g-Tang 涡旋在时间 $t = 2.5$ 时的状态。我们比较了两种方法：MG 和 CG，图中从左到右依次标出。位置和流体量由各个 图案表示，与图 9 相同。

此外，我们展示了 MG、CG 方法的结果。图 9–11 展示了密度、气体压强、磁压和散度误差的图案。在 $t = 0.5$ 时，两种方法产生的定性结果相似（见图 9），但散度误差除外。图 10 和图 11 表明，与 CG 方法相比，MG 方法产生的动力演化剖面更加稳健，尤其是在表面 $y = 0$ 处。这种稳健性源于 MG 方法维持了无散约束。相反，CG 方法从 $t = 2.0$ 开始出现显著的对流误差，这一点已在场环平流测试中得到验证。在 $t = 2.5$ 时，CG 方法给出的剖面在表面 $y = 0$ 处出现明显变形和严重耗散，同时在表面 $z = 0$ 处呈现不对称分布。

6. 结论

本文提出了一种结合 Godunov 型磁流体动力学求解器的拉格朗日无网格改进梯度方法。MG方法可视为对约束梯度（CG）方法的扩展与改进 [19]。该方法通过对虚拟界面处磁场重构进行正则化，确保模拟运行期间满足无散条件，从而使我们的方法保持守恒格式。

根据数值实验结果，我们证实 MG方法能够将全局无散约束 $\nabla \cdot \mathbf{B}_i = 0$ 维持在机器精度范围内。在 Brio-Wu 激波管测试中，MG方法显著减弱了磁场第一分量的振荡，而这一点在许多无网格方法中难以实现。在场环平流测试示例中，MG方法几乎消除了平流误差，充分证明了我们的方法在无散约束方面的优势。在二维 Orszag-Tang 涡旋测试中，就散度误差而言，我们的方法同样优于 CG 代码。由于具有精确无散约束，洛伦兹力产生的有效功在我们的方法中完全消失。因此，流体量（如密度和磁场）的耗散也随之降低。相比之下，在采用 CG 方法的长期演化中并未观察到这种效果。在磁化爆炸波、磁转子和磁旋不稳定性等情况下，MG方法对于这些特殊的极端问题同样表现良好。

总之，这种新颖的MG方法在无网格数值磁流体力学模拟中约束磁场散度方面具有稳健性和竞争力。我们并未声称新方法已经解决了散度问题。由于MG方法需要求解大型对称稀疏线性方程组，这将给数值方法的效率带来新的挑战。大规模模拟有望推动更多并行技术的发展。

7. 致谢

我们感谢匿名审稿人细致的评审和建议。我们感谢国家重点研发计划（项目编号：2023YFB3002501）、国家自然科学基金委员会（项目编号：12301504）、湖北省自然科学基金（项目编号：2024AFB722）、湖北省高校优秀中青年科技创新团队项目（项目编号：T2023020）以及湖北师范大学2023年人才引进项目（项目编号：HS2023RC051）的资助。YT感谢国家自然科学基金项目（项目编号：12171466、92470119）的资助。

参考文献

[1] S. A. Balbus，J. F. Hawley，《弱磁化盘中的强局部剪切不稳定性。I. 线性分析》，《天体物理学杂志》376（1991）214-222。doi:10.1086/170270。[2] S. A. Balbus，J. F. Hawley，《吸积盘中的不稳定性、湍流与增强输运》，《现代物理评论》70（1998）1-53。doi:10.1103/RevModPhys.70.1。[3] D. S. Balsara，D. Spicer，《使用高阶Godunov通量的交错网格算法，以确保磁流体动力学模拟中的无散磁场》，《计算物理学杂志》149（1999）270-292。doi:10.1006/jcph.1998.6153。[4] S. Børve，M. Omang，J. Trulsen，《正则化光滑粒子流体动力学：模拟磁流体力学激波的新方法》，《天体物理学杂志》561（2001）82–93。doi:10.1086/323228。[5] J. U. Brackbill，D.C. Barnes，《非零 $\nabla\cdot\mathbf{B}$ 对磁流体力学方程数值解的影响》，《计算物理学杂志》35（1980）426–430。doi:10.1016/0021-9991(80)90079-0。[6] A. Brandenburg，《使用欧拉势进行模拟中的磁场演化》，《皇家天文学会月报》401（2010）347–354。doi:10.1111/j.1365-2966.2009.15640.x。arXiv:0907.1906。[7] M. Brio，C. C. Wu，《理想磁流体力学方程的迎风差分格式》，《计算物理学杂志》75（1988）400–422。doi:10.1016/0021-9991(88)90120-9。[8] A. Dedner，F. Kemm，D. Kröner，C.-D. Munz，T. Schnitzer，M. Wesenberg，《磁流体力学方程的双曲散度清理》，《计算物理学杂志》175（2002）645–673。doi:https://doi.org/10.1006/ jcph.2001.6961。[9] Q. Ding，X. Long，S. Mao，R. Xi，《不可压缩矢量势磁流体力学系统的二阶无条件收敛全离散格式》，《科学计算杂志》100（2024）1。doi:10.1007/ s10915-024-02553-x。[10] P. C. Duffell，A. I. MacFadyen，《TESS：基于移动Voronoi网格的相对论流体动力学代码》，《天体物理学杂志增刊》197（2011）15。doi:10.1088/0067-0049/197/2/15。[11] E. Gaburov，A. Johansen，Y. Levin，《超大质量黑洞周围的磁悬浮吸积盘》，《天体物理学杂志》758（2012）103。doi:10.1088/0004-637X/758/2/103。arXiv:1201.4873。[12] E. Gaburov，K. Nitadori，《天体物理加权粒子磁流体力学》，《皇家天文学会月报》414（2011）129–154。doi:10.1111/j.1365-2966.2011.18313.x。arXiv:1006.4159。[13] R. A. Gingold，J. J. Monaghan，《光滑粒子流体动力学：理论及其在非球形恒星中的应用》，《皇家天文学会月报》181（1977）375–389。doi:10.1093/mnras/181.3.375。[14] S. K. Godunov，《磁流体力学方程的对称形式》，《连续介质力学数值方法》3（1）（1972）26–34。

[15] X. Guan，C. F. Gammie，《磁化盘的轴对称剪切盒模型》，《天体物理学杂志增刊》174（2008）145-157。doi:10.1086/521147。[16] J. F. Hawley，J. M. Stone，《MOCCT：一种用于天体物理磁流体动力学的数值技术》，《计算机与流体》89（1995）127–148。doi:10.1016/0010-4655(95)00190-Q。[17] C. Helzel，J. A. Rossmanith，B. Taetz，《三维理想磁流体力学方程的非交错约束输运方法》，《计算物理学杂志》230（2011）3803–3829。doi:10.1016/j.jcp.2011. 02.009。arXiv:1007.2606。[18] P. F. Hopkins，《一类精确的新型无网格流体力学模拟方法》，《皇家天文学会月报》450（2015）53–110。doi:10.1093/mnras/stv195。arXiv:1409.7395。[19] P. F. Hopkins，《一种控制数值磁流体力学中散度误差的约束梯度方法》，《皇家天文学会月报》462（2016）576–587。doi:10.1093/mnras/stw1578。arXiv:1509.07877。[20] P. F. Hopkins，M. J. Raives，《精确的无网格磁流体力学方法》，《皇家天文学会月报》455（2016）51–88。doi:10.1093/mnras/stv2180。arXiv:1505.02783。[21] S. Kawai，《磁流体力学的保散度无源高阶格式：一种人工磁阻方法》，《计算物理学杂志》251（2013）292–318。doi:10.1016/j.jcp.2013.05.033。[22] N. Lanson，J.-P. Vila，《重归一化无网格格式I：守恒律的相容性、稳定性与混合方法》，《SIAM数值分析杂志》46（2008）1912–1934。doi:10.1137/S0036142903427718。[23] N. Lanson，J.-P. Vila，《重归一化无网格格式II：标量守恒律的收敛性》，《SIAM数值分析杂志》46（2008）1935–1964。doi:10.1137/S003614290444739X。[24] L. Li，M. Ni，W. Zheng，《无感应磁流体力学方程的电荷守恒有限元方法。第二部分：稳健求解器》，《SIAM科学计算杂志》41（2019）B816-B842。doi:10.1137/19M1260372。[25] L. Li，D. Zhang，W. Zheng，《不可压缩磁流体力学方程的约束输运无散有限元方法》，《计算物理学杂志》428（2021）109980。doi:10.1016/j.jcp.2020.109980。arXiv:2008.09244。[26] M. M. Lopes，R. Deiterding，A. K. F. Gomes，O. Mendes，M. O. Domingues，《一种具有并行块结构自适应网格加密功能的理想可压缩磁流体力学求解器》，《计算机与流体》173（2018）293–298。URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045793018300410。doi:https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2018.01.032。[27] L. B. Lucy，《一种用于检验裂变假说的数值方法》，《天文学杂志》82（1977）1013–1024。doi:10.1086/112164。[28] H. Luo，J. Baum，R. Löhner，《基于泰勒基的间断伽辽金方法：任意网格上的可压缩流》，《计算物理学杂志》227（2008）8875-8893。doi:10.1016/j.jcp.2008. 06.035。[29] F. Marinacci，M. Vogelsberger，R. Pakmor，P. Torrey，V. Springel，L. Hernquist，D. Nelson，R. Weinberger，A. Pillepich，J. Naiman，S. Genel，《IllustrisTNG模拟的首批结果：射电晕与磁场》，《皇家天文学会月报》480（2018）5113–5139。doi:10.1093/mnras/sty2206。arXiv:1707.03396。[30] T. Miyoshi，K. Kusano，《理想磁流体力学的多状态HLL近似黎曼求解器》，《计算物理学杂志》208（2005）315–344。doi:10.1016/j.jcp.2005.02.017。[31] P. Mocz，R. Pakmor，V. Springel，M. Vogelsberger，F. Marinacci，L. Hernquist，《一种用于磁流体动力学的移动网格非交错约束输运格式》，《皇家天文学会月报》463（2016）477–488。doi:10.1093/mnras/stw2004。

[32] P. Mocz, M. Vogelsberger, L. Hernquist, 《非结构静态与移动网格上的磁流体动力学约束传输格式》, 《皇家天文学会月报》442 (2014) 43–55。doi:10.1093/mnras/ stu865。arXiv:1402.5963。[33] E. Oñate, S. Idelsohn, O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, 《计算力学中的有限点法：在对流输运和流体流动中的应用》, 《工程数值方法国际期刊》39 (1996) 3839-3866。[34] S. A. Orszag, C. M. Tang, 《二维磁流体动力学湍流的小尺度结构》, 《流体力学杂志》90 (1979) 129–143。doi:10.1017/S002211207900210X。[35] R. Pakmor, A. Bauer, V. Springel, 《非结构移动网格上的磁流体动力学》, 《皇家天文学会月报》418 (2011) 1392-1401。doi:10.1111/j.1365-2966.2011.19591.x。[36] R. Pakmor, V. Springel, 《孤立盘星系中磁场的模拟》, 《皇家天文学会月报》432 (2013) 176-193。doi:10.1093/mnras/stt428。[37] K. G. Powell, P. L. Roe, T. J. Linde, T. I. Gombosi, D. L. De Zeeuw, 《理想磁流体动力学的解自适应迎风格式》, 《计算物理学杂志》154 (1999) 284–309。doi:10.1006/jcph. 1999.6299。[38] D. J. Price, 《光滑粒子磁流体动力学 - IV. 使用矢量势》, 《皇家天文学会月报》401 (2010) 1475–1499。doi:10.1111/j.1365-2966.2009.15763.x。arXiv:0909.2469。[39] H. Qin, J. Liu, J. Xiao, R. Zhang, Y. He, Y. Wang, Y. Sun, J. W. Burby, L. Ellison, Y. Zhou, 《用于Vlasov-Maxwell方程长期大规模模拟的正则辛粒子模拟方法》, 《核聚变》56 (2016) 014001。doi:10.1088/0029-5515/56/1/014001。arXiv:1503.08334。[40]J. A. Rossmanith, 《一种用于磁流体动力学流动的非交错高分辨率约束输运方法》, 《SIAM科学计算杂志》28 (2006) 1766–1797。doi:10.1137/050627022。arXiv:https://doi.org/10.1137/050627022。[41] V. Springel, 《宇宙学模拟代码GADGET-2》, 《皇家天文学会月报》364 (2005年) 1105–1134。doi:10.1111/j.1365-2966.2005.09655.x。arXiv:astro-ph/0505010。[42] V. Springel, 《然而它仍在运动：移动网格上的伽利略不变宇宙学流体动力学模拟》, 《皇家天文学会月报》401 (2010) 791-851。doi:10.1111/j.1365-2966.2009. 15715.x。arXiv:0901.4107。[43] F. A. Stasyszyn, K. Dolag, A. M. Beck, 《一种用于宇宙学SPMHD模拟的散度清理格式》, 《皇家天文学会月报》428 (2013) 13–27。doi:10.1093/mnras/sts018。arXiv:1205.4169。[44]F. A. Stasyszyn, D. Elstner, 《光滑粒子磁流体动力学的矢势实现》, 《计算物理学杂志》282 (2015) 148–156。doi:10.1016/j.jcp.2014.11.011。arXiv:1411.3290。[45] J. Stone, T. Gardiner, P. Teuben, J. Hawley, J. Simon, 《Athena：一种用于天体物理磁流体动力学的新代码》, 《天体物理学杂志增刊》178 (2008) 137–177。doi:10.1086/588755。arXiv:0804.0402。[46] J. Stone, K. Tomida, C. White, K. Felker, 《athena++ 自适应网格细化框架：设计与磁流体动力学求解器》, 《天体物理学杂志增刊》249 (2020) 4。doi:10.3847/ 1538-4365/ab929b。[47] G. Tóth, 《激波捕捉磁流体动力学代码中的 ∇· B=0 约束》, 《计算物理学杂志》161 (2000) 605–652。doi:10.1006/jcph.2000.6519。

[48] T. S. Tricco, D. J. Price, 《光滑粒子磁流体动力学的约束双曲散度清理》, 《计算物理学杂志》231 (2012) 7214–7236。doi:10.1016/j.jcp.2012.06.039。arXiv:1206.6159。[49]T. S. Tricco, D. J. Price, 《在光滑粒子磁流体动力学中降低电阻率的一种开关》, 《皇家天文学会月报》436 (2013) 2810-2817。doi:10.1093/mnras/stt1776。arXiv:1309.5437。[50] X. Tu, Q. Wang, H. Zheng, L. Gao, 《采用矢量势的磁流体动力学无网格方法》, 《计算物理学杂志》470 (2022) 111596。doi:10.1016/j.jcp.2022.111596。[51] J. Xiao, J. Liu, H. Qin, Z. Yu, 《一种用于弗拉索夫-麦克斯韦系统并结合光滑函数的变分多辛粒子网格算法》, 《等离子体物理学》20 (2013) 102517。doi:10.1063/1.4826218。