arXiv:2603.04085v1 [physics.plasm-ph] 4 Mar 2026

仿星器线圈绕组面模型中的电流动力学

Wadim Gerner†,1,Anouk Nicolopoulos-Salle⋆,2, Diego Pereira Botelho⋆,3

MaLGa 中心，数学系，2023—2027 卓越系，热那亚大学，多德卡内索街35号，16146 热那亚，意大利†

Renaissance Fusion，38600 枫丹，法国⋆

摘要： 在仿星器设计中，线圈绕制曲面 $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ 承载着塑造磁场的电流分布 j。本研究提供了一个理论框架，用以解释中心区域与鞍点区域的出现，这是线圈优化中的一个关键特征。对于具有环面形状的线圈绕制曲面，我们证明了一个二分原理：电流分布要么同时具有中心区域与鞍点区域，要么处处不为零。对于由分段圆柱构成的线圈绕制曲面，我们表明，若 j 在两个边界圆上定向相反，则会出现中心与鞍点，并且 j 的场线除有限多条外均为周期的。当 j 具有调和势时，所有场线均为闭合极向轨道。这些结果有助于深入理解绕制曲面上的电流模式，并对线圈设计策略及其简化具有启示意义。

Keywords：线圈绕组面、等离子体物理、仿星器、电流动力学、保面积流*2020 MSC*：31A35、37E35、37N20、37C25、37C27、37C10、37C20、78A30、78A55

1 引言

1.1 动机

基于等离子体磁约束的《核聚变》主要依赖两种主要途径。第一种是托卡马克，它利用部分由等离子体自身产生的环向电流所驱动的螺旋磁场来约束等离子体。第二种是仿星器，它完全通过外部非平面线圈产生约束磁场，从而不需要等离子体电流。托卡马克的主要优势在于其相对简单的线圈几何形状，而其主要缺点是依赖于必须主动驱动并维持的等离子体电流，这可能引发电流驱动不稳定性和破裂。相比之下，仿星器天然以稳态运行并可避免此类不稳定性，但其复杂的三维线圈几何形状带来了重大的工程和制造挑战。关于总体概述，读者可参阅 [56],[27],[28]。尽管仿星器概念早于托卡马克，但由于其设计复杂性，以及早期托卡马克实验中所观察到的良好结果，该概念在20世纪60年代末被搁置。国际聚变研究计划ITER推动并持续推动了众多研究进展，并采用了托卡马克方案。然而，如今托卡马克面临的挑战以及近期仿星器实验取得的成功，重新引发了人们对后者的兴趣。值得注意的是，仿星器已成为私人聚变公司中最受青睐的方案，其中一项主要工程挑战是在保持所需约束特性的同时，优化线圈几何形状，以实现尽可能简单的设计。

获得合适的等离子体构型及其相应的支撑磁场绝非易事，是当前持续研究的课题 [2, 46, 54, 22]。传统上，仿星器的设计与优化包括两个阶段：

i) 平衡优化：在考虑约束与稳定性特性以及其他物理和工程约束的前提下，对等离子体区域及相应的磁场构型进行优化。在此背景下可使用 DESC 或 VMEC 等软件包 [30, 12, 44, 9, 13, 11]。ii) 线圈优化：以上一阶段的结果为起点，旨在设计一组线圈，使其在等离子体区域 $\mathcal{P}$ 内以可接受的精度 [35, 45, 49, 52]复现所需的目标磁场构型。

近年来，人们投入大量精力开发单阶段优化流程 [29],[55],[32],[33], [6]。一般而言，线圈优化意味着尽可能减小相对于目标磁场的误差，但并非将其消除。尽管这一残差可能很小，却可能显著影响

[1] *E-mail address:* wadim.gerner@edu.unige.it，通讯作者[2] *E-mail address:* anouk.nicolopoulos@renfusion.eu[3] *E-mail address:* diego.pereira@renfusion.eu

等离子体约束性质。因此，同时优化线圈几何形状和等离子体构型，可能比针对固定等离子体构型优化线圈获得更好的结果。

一种可行的方法是从线圈绕组面 [41, 31] 入手，该绕组面 $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$上复现了电流分布。为了建立所关注的问题，我们考虑一个区域 $\mathcal{P}$，并希望将等离子体约束在其中；下文称之为等离子体区域。我们还考虑一个目标磁场 $B_T \in L^2(\mathcal{P}, \mathbb{R}^3)$，并希望通过线圈电流产生该磁场。根据麦克斯韦方程组，由线圈电流产生的磁场在 $\mathcal{P}$内既无散度也无旋度，因此我们只考虑无散度且无旋度的目标磁场。

我们定义总场误差

$$\chi_B := \|B(j) - B_T\|_{L^2(\mathcal{P},\mathbb{R}^3)}, \tag{1.1}$$

其中，$B(j)$表示电流 j产生的磁场。最小化这一量会导致一个病态问题，因此引入蒂霍诺夫正则化项，以确定最优电流分布。正则化项的一种常见选择是

$$\chi_j := \|j\|_{L^2(\Sigma)}, \tag{1.2}$$

对于固定数量的等值线，该项会促使它们分布于整个区域内。这种方法有利于线圈间距的设置，并便于进行加热和诊断。随后，电流优化可表述为

$$\min_j \{\chi_B^2 + \lambda \chi_j^2\}. \tag{1.3}$$

最小化是在所有平方可积向量场 j上进行的，这些向量场与 Σ相切，并且作为定义在 Σ上的向量场散度为零。这类向量场 j称为电流或电流分布。对于给定的 $\lambda > 0$，式（1.3）中的第二项倾向于选择 χ_j^2值较低的解。这种正则化技术广泛应用于仿星器线圈优化领域，以降低线圈复杂度。也可以考虑其他准则，例如最小化线圈曲率、长度或与等离子体的接近程度。在仿星器线圈优化领域，场误差项的标准选取方式为 $\chi_B := \|(B(j) - B_T) \cdot \mathcal{N}\|_{L^2(\partial\mathcal{P})}$，其中 $\mathcal{N}$是 $\partial\mathcal{P}$的外单位法向量。之所以采用这一选取方式，是因为在环向环流固定的情况下，等离子体边界上的磁场法向分量唯一确定了整个等离子体区域内的磁场 $\mathcal{P}$，详见 [49, 第 4]节。关于这些方面的详细讨论见 [31, 第 13.4]节。虽然线圈绕组面 Σ 的选取仍有自由度，也可以在优化过程中加以考虑 [49], ，但我们在此假设已经确定了合适的线圈绕组面 Σ 。

我们关注由 (1.1-1.2-1.3) 定义的极小化问题。标准的变分论证和泛函的严格凸性保证，对于任意 $\lambda > 0$，该问题总存在唯一的极小化解 j_λ。最近已有证明表明，当 $\lambda \searrow 0$ 时，$\|B(j_\lambda) - B_T\|_{L^2(\mathcal{P},\ \mathbb{R}^3)} \to 0$，这意味着至少在理论上，可以达到任意精度，见第 4] 节。在实践中，会固定一个较小的参数 $\lambda > 0$，并通过数值计算求得相应的极小化解 j_λ。

确定线圈绕组面上的最优电流分布后，必须使用线圈对其进行近似。线圈形状由选定的电流流线确定，实际制作时则将导电材料绕制在框架上。传统上，仿星器线圈由缠绕在非平面框架上的超导电缆制成，从而形成丝状（一维）电流流。近年来的技术进步则表明，可以采用宽幅高温超导（HTS）表面 [51, 高温超导专利]。这些表面可以沉积或缠绕在圆柱上，从而形成二维面电流。在这两种情况下，理解表面电流的动态特性都至关重要。

这套于 20 世纪 80 年代末开发并应用于多台装置的线圈优化过程，揭示了中心区和鞍点区的存在，如图 1 所示。这些中心区域的示例见 [35, 15]。针对这些问题，传统方法要么忽略它们，并手动选取极向闭合等高线，直到线圈产生足够精确的场；要么增大蒂霍诺夫正则化权重以平滑等高线，但这会牺牲场精度。另一个观察结果是，线圈绕组面与目标等离子体平衡之间的距离越大，行为就越复杂 [36, 34]。这一距离是仿星器优化中的关键因素：紧致的设计虽能提高成本效益 [50], ，但严格的空间限制会带来重大的工程挑战。历史上，这些挑战使 Wendelstein 7-X [7] 和 NCSX [10] 等装置的制造变得复杂。

在考虑圆柱线圈方案时，线圈绕组面由一组彼此不相交的圆柱面组成，如图 2 所示。假设电流与边界相切。这就引出了一个问题：在什么条件下仍会出现中心区和鞍点区?

我们将 实体线圈建模为线圈绕组面 Σ上的圆柱子曲面，如图 3 所示 .
这一理想 当使用激光雕刻导电圆柱体来塑造所需的

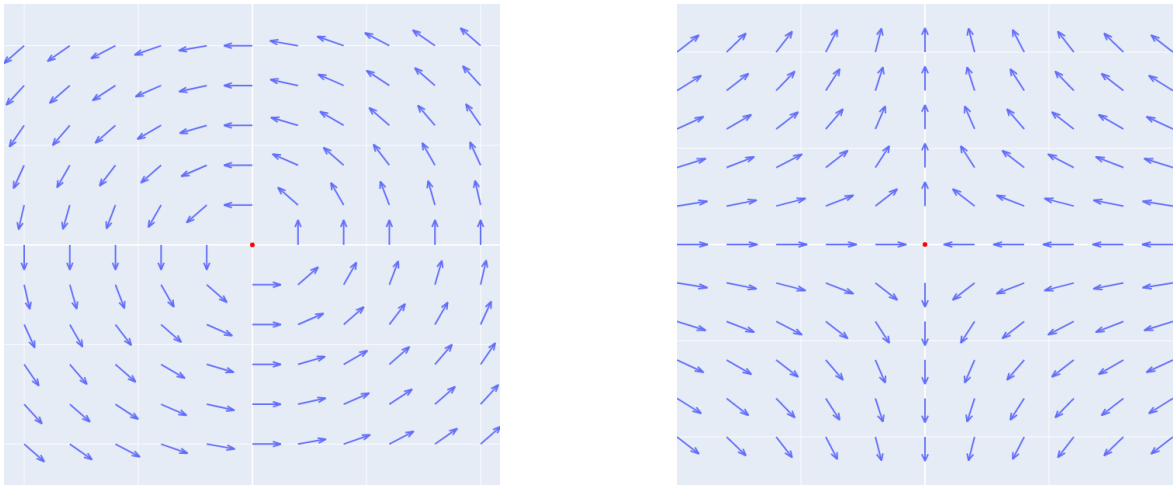

图 1：左侧：一个中心区域，场线围绕场的奇点（红点）呈圆形环绕。右侧：红点周围的一个鞍点区域。



(a) (b)

图 2：左侧：一个环形线圈绕组面。右侧：一个由圆柱结构构成的线圈绕组面。

等离子体约束区内产生所需磁场的电流分布时，该线圈模型尤为准确。这一方法由 Renaissance Fusion 首创，见其专利 [51, 磁室与模块化线圈专利]。初步基准测试已成功验证了这一概念，详情见 [47]。

1.2 结果

我们将会看到，当假设线圈绕组面为环形时，通常会观察到某些结构。更准确地说，我们得到以下结果。

定理 1 1 *Let $T^2 \cong \Sigma \subset \mathbb{R}^3$ be a smooth toroidal surface and let j be a "generic" smooth divergence-free current on Σ. Then we have the following dichotomy:*

i) Either $j(p) \neq 0$ for all $p \in \Sigma$. If this is the case, then one of the following two situations may occur:

(a) All orbits of j are dense within Σ.

(b) All orbits of j are periodic and any two such orbits wind the same number of times in poloidal and toroidal directions before they close again.

ii) Or $j(p) = 0$ for some $p \in \Sigma$. Then the flow of j admits at least one centre- as well as saddle-point region, c.f. Figure 1. In addition in this case all but finitely many orbits of j are proper periodic orbits. The , remaining orbits consist of the singular points of j and non-periodic orbits which connect saddle points.

（环形电流的一般行为，非正式表述）。，

备注 1.2。 i) 这里，“一般”是指：在任意给定的 C^1-邻域中，对于任意给定的光滑电流j，我们都能找到一个具有上述二分性性质的电流；并且在某个一般电流周围的C^1-邻域内，所有电流仍然都是一般的。更多详情请参见第 3 节。

ii) 关于一般场线行为的更精确描述，请参见定理 5.7。



(a) (b)

图 3：左：环形线圈绕组面，红色条带表示线圈。右：分段圆柱形线圈绕制表面，红色条带表示线圈。

iii) 定理 1.1 中的陈述 (i) 对非一般电流仍然成立；也就是说，如果 $\Sigma \cong T^2$ 和 j 是定义在 Σ 上处处不为零的任意无散光滑电流，那么 j 满足定理 1.1 的陈述 (a) 或 (b)。另请参阅 [17], ，其中在附加假设下证明了定理 1.1 的陈述 (i)；还请参阅 [48, 定理 9]，其中在更一般的所谓绕行条件下证明了 (i)。

iv) 关于任意亏格闭曲面上的保面积流行为，也请读者参阅 [18]。

对于圆柱面，我们有如下结果

定理 1 3 *Let $S^1 \times [0,1] \cong \Sigma \subset \mathbb{R}^3$ be a* 。（柱状流的一般行为，非正式版本）。 *,,the flow of j has at least one centre and one saddle-point region. In addition smooth cylindrical surface and let j be a current on Σ such that j is tangent to and non-vanishing on $\partial\Sigma$. If the field lines of j on the two boundary circles of $\partial\Sigma$ point in opposite directions c.f. Figure 4 then generically , all but finitely many orbits of j are proper periodic orbits. The remaining orbits consist of the singular points of j and non-periodic orbits which connect saddle points of j.*

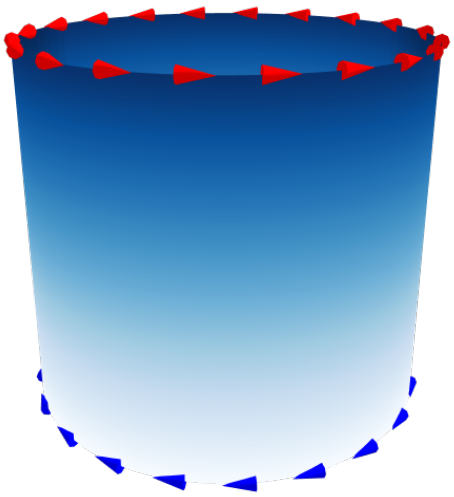

图 4：两个相反定向的边界圆。方向由标准柱面上的箭头标示。

接下来，我们基于物理考量对电流作出进一步假设。更确切地说，我们再考虑麦克斯韦方程组中的一个方程：$\mathrm{curl}(E) = -\partial_t B$ 其中 E 是感应电场，而 B 是线圈中的电流产生的磁场。由于仿星器旨在稳态下运行，我们假设 $\partial_t B = 0$。此外，我们假设所处介质为线性各向同性介质，满足定律 $j = \sigma E$，其中 j 是产生磁场的电流，$\sigma \in \mathbb{R}$ 是材料常数（假定其沿整个线圈绕组面取值相同）。综合这些

考量，我们得到 $\operatorname{curl}(j) = \sigma \operatorname{curl}(E) = -\sigma \partial_t B = 0$ 这反过来意味着，物理电流不仅在曲面上散度为零，实际上也无旋。

我们注意到，物理电流自然可假定为与相应的圆柱面相切，因为电流被限制在线圈内。因此，在任意给定的柱状子曲面 $\sim\Sigma \subset \Sigma$ 上，物理电流属于以下空间

$$\mathcal{H}_N(\widetilde{\Sigma}) := \left\{ \gamma \in L^2(\widetilde{\Sigma}, \mathbb{R}^3) \mid \mathcal{N} \cdot \gamma = 0 = n \cdot \gamma,\ \operatorname{curl}_{\widetilde{\Sigma}}(\gamma) = 0 = \operatorname{div}_{\widetilde{\Sigma}}(\gamma) \right\}, \tag{1.4}$$

其中，$\mathcal{N}$ 表示 $\widetilde{\Sigma}$ 的单位法向量，n 表示 $\widetilde{\Sigma}$ 内 $\partial\widetilde{\Sigma}$ 的单位法向量。也就是说，$\mathcal{H}_N(\widetilde{\Sigma})$ 由 $\widetilde{\Sigma}$ 的切向场构成，这些场无散、无旋，并且始终与 $\partial\widetilde{\Sigma}$ 相切。这个空间称为调和诺伊曼场空间；众所周知，它是有限维的，且其维数与 $\widetilde{\Sigma}$ 的第一德拉姆上同调群的维数相同，参见 [53, 定理 2.6。1]。我们还注意到，当 $\widetilde{\Sigma}$ 光滑时，$\mathcal{H}_N(\widetilde{\Sigma})$ 中的元素也是光滑的，参见 [53, 定理 2.2。7]。由于 $\widetilde{\Sigma}$ 是圆柱面，我们得出 $\dim\left(\mathcal{H}_N(\widetilde{\Sigma})\right) = 1$。众所周知，若令 c_1，c_2 表示 $\partial\widetilde{\Sigma}$ 的两个边界圆，则

$$\Delta\psi = 0 \text{ in } \widetilde{\Sigma},\ \psi|_{c_1} = 0,\ \psi|_{c_2} = 1 \tag{1.5}$$

存在唯一的光滑解，[24, 定理2.4.2。5], 因此很容易验证 at

$$\gamma_0 := \mathcal{N} \times \nabla_{\widetilde{\Sigma}}\psi \in \mathcal{H}_N(\widetilde{\Sigma}) \setminus \{0\} \tag{1.6}$$

是 $\mathcal{H}_N(\widetilde{\Sigma})$的一个基，其中 $\mathcal{N}$ 是 $\widetilde{\Sigma}$的单位法向量。

此外，设 ℓ 是从 c_1 出发并终止于 c_2的一条光滑曲线，则对于给定的电流j，我们定义 $I := \int_\ell n \cdot j$，它表示流经 ℓ的电流。这里，n 表示 ℓ 在 $\widetilde{\Sigma}$内的适当单位法向量，选取时须使 $\{\mathcal{N}, \dot{\ell}, n\}$ 构成一个右手坐标系，其中 $\dot{\ell}$ 表示 ℓ的时间导数，见图5。

根据此定义，我们得到公式

$$j = I\gamma_0 \text{ for every } j \in \mathcal{H}_N(\widetilde{\Sigma}), \tag{1.7}$$

也就是说，每个物理电流都由感应总电流唯一确定。注意，I 的值与所选曲线 ℓ无关。

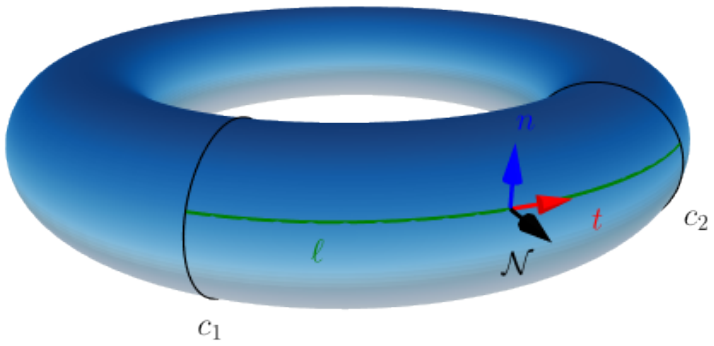

图5：蓝色曲面表示（环向）线圈绕组面。与 $\partial\Sigma$ 对应的两条线圈边界~以黑色圆表示。连接曲线 ℓ（圆弧）以绿色表示，其切向量以红色表示。相应的法向量 n 切向于 Σ 且垂直于 ℓ，对应蓝色向上的箭头。剩余的黑色箭头表示法向量 $\mathcal{N}$，它对应于线圈绕组面的（向外）单位法向量 Σ。

关于物理电流行为的主要结果如下

定理 1.4（物理电流的行为，非正式版本）。 *Let $S^1 \times [0,1] \cong \widetilde{\Sigma} \subset \mathbb{R}^3$ be a smooth cylindrical surface and let $j \in \mathcal{H}_N(\widetilde{\Sigma})$. Then either j is identically zero, or otherwise is no-where vanishing. Further if j is not identically zero then every field line of j is a periodic poloidal orbit and in particular the ,,, flow of j does not admit any centre or saddle regions.*

这里的极向是指轨道绕圆柱完整地环绕一周，换言之，这些轨道不是可缩的，即它们表示 $\widetilde{\Sigma}$ 的第一基本群中的非平凡元素。

我们通过补充一些关于保面积流和低维动力系统的结果，来结束对表面电流动力学的讨论。以下结论是 Poincar´e 著名的回归定理的直接推论，参见例如 [23, 定理 4], ，其中，若存在序列 $(t_k^{\pm})_k$ ，满足 $t_k^{\pm} \to \pm\infty$ 和 $\psi_{t_k^{\pm}}(p) \to p$，则称点 $p \in \Sigma$ 关于流 ψ_t 是回归的。

定理 1.5 ´ [23, 4] *Let $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ be a smooth compact surface with possibly non-empty boundary. Let further $j \parallel \Sigma$ be a smooth tangent field with $\operatorname{div}_\Sigma j = 0$ and such that $j \parallel \partial\Sigma$ in case $\partial\Sigma \neq \emptyset$. Then there exists a subset $S \subset \Sigma$ of zero area such that every $p \in \Sigma \setminus S$ is recurrent with respect to the flow of j.*

在圆柱的情形下，定理1.5可以显著加强。这一结果将是庞加莱´–本迪克松定理与对一个相关结果的证明所作修改相结合的推论，参见 [26, 定理14.1。1], 该定理断言，若定义在 S^2 的一个开子集上的向量场（不必散度为零）的某条给定轨道的所有点都是正向回归的，则相应轨道必定是周期的。

定理 1.6 *Let $S^1 \times [0,1] \cong \Sigma \subset \mathbb{R}^3$ be a smooth cylindrical surface and $j \parallel \Sigma$ be a smooth tangent field such that $\operatorname{div}_\Sigma j = 0$ and $j \parallel \partial\Sigma$. Then there exists some $S \subset \Sigma$ of zero area such that every orbit of j starting at some $p \in \Sigma \setminus S$ is periodic. In addition $j\,p \neq 0$ for all $p \in \Sigma$ then all orbits of j are poloidal periodic orbits.*（几乎所有轨道都是周期的，非正式版本）. div ( ) ( ) ,

在定理 1.6 的表述中，定点也视为周期轨道。

注 1.7. i) 我们指出，在假设 $\partial\Sigma = \emptyset$ 成立且对向量场 j作出一些额外假设的情况下，可以对定理1.5作出加强，参见 [8, 定理 1]。

ii) 定理 1.6 的结论是最优的，因为可以构造与圆柱边界相切的无散场 j ，使其仅支持可缩轨道、仅支持极向轨道，或同时支持这两类轨道，也可能存在非周期轨道。因此，对于一般的无散场，定理 1.6 所含信息之外，没有其他先验可知的信息。

iii) 我们强调，定理 1.1 和定理 1.3 的结论并不适用于所有满足相应边界条件的散度自由切向场，而只在一般情形下成立，因此从这个意义上说，这些结论也是最优的。为说明这一点，我们先考虑一个标准的旋转对称环面，并令 ϕ 和 θ 分别表示环向角和极向角。接着，我们可以（稍微滥用一下记号）考虑任意函数 $f(\phi, \theta) = f(\theta)$，并注意到 $j := (\partial_\theta f) e_\phi$（其中 e_ϕ 是环向的归一化基向量）无论选择何种 f，都是无散的。显然，这样的向量场不可能支持中心区域，因为其极向分量恒为零。此外， $\partial_\theta f$ 必在某处为零，因为 f 必有全局极值，因此这类向量场 j 既不属于定理 1.1 所述的类型 (i)，也不属于类型 (ii)。对于圆柱面，我们可以考虑一个标准的旋转对称圆柱面，它以 z-轴为中心，高为 2 ($-1 \le z \le 1$)，半径为 1。我们可以考虑向量场 $j := z e_\theta$，其中 e_θ 仍表示极向的（归一化）坐标场。由于边界圆分别对应 $z = -1$ 和 $z = 1$ ， j 在边界上处处非零，且在两个边界圆上的定向相反。然而， j 的流不可能存在任何中心区域，因为 j 仅指向极向。

1.3 与文献中已有结果的比较

保面积流长期以来一直是数学研究的主题，我们不打算列出完整的参考文献。不过，作为一篇具有代表性的文献，我们想特别指出参考文献 [39]„ 因为它对一般紧致二维流形（无论有无边界）上具有非退化零点的无散向量场之流给出了相当完整且一般性的分类定理，参见 [39, 定理 3.1、定理 4.1、定理 5.1]。我们的结果补充了 [39] 中的分类，为等离子体物理相关的具体情形提供了更多细节。例如，我们关于环面的详细结构定理（参见定理 5.7）指出，若 j 没有零点，则其流是半可展直的（这将由 [48]中的一个结果推得）；此外，位于特定区域内的任意两条轨道必定彼此环境同痕。后一结论或有助于通过场线绕环面曲面的环向和极向绕数，进一步刻画环向流；这些绕数是电流重建过程中的一个自由度。此外，我们采用的方法不同于 [39] ，它利用了底层向量场所满足的 Lojasiewicz 型不等式，因此更为灵活，不局限于无散场（当然，我们也利用散度为零这一性质来推导有关流的更多信息）。子集 S^2 上非退化无散场的保面积流结构

已在 [40, 定理 2.5]中得到研究。同样，我们使用的论证不同于 [40]；与此同时，由于我们只关注环域，因此能够给出更为详细的刻画。关于定理 1.4，我们充分利用了 j 是调和的、与边界相切这一点，以及 $\widetilde{\Sigma}$ 是环域这一事实，从而能够对这类流作出完整（且简单）的刻画。或许正因为定理 1.4 关注的是如此特殊的情形，文献中很难找到如此精确的刻画。我们最后的定理 1.6 类似于动力系统教材中的一道经典习题，但我们没有在 [26]等标准参考文献中找到它。因此，我们决定将其收录，以供参考并便于日后查阅。

在全文中，只要篇幅合理，我们都尽可能给出详细证明；这些证明在文献中往往会被省略。这样做是为了使本文内容更加完备，也让那些可能不太熟悉动力系统理论、但对本文结果感兴趣的读者更容易理解。

1.4 论文结构

第 2 节介绍本文中将始终使用的一些数学符号。第 3 节精确定义表述主要结果所需的概念，并阐明我们在讨论数值观察时会用到的某些概念的含义。第 4 节描述促成本研究理论结果的中心与鞍点结构的数值观察，并讨论这些理论结果对等离子体物理实际应用的相关性。第 5 节给出主要结果定理 1.1、定理 1.3、定理 1.4 和定理 1.6 的证明。附录 A 讨论了定理 1.3 的一个更一般版本，其结论也涉及类似于定理 1.1 的二分性，详情见定理 A.2。

2 记号

我们将用 $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ 表示具有（可能为空或不连通）边界的光滑连通紧曲面。通常，在我们的应用中，$T^2 \cong \Sigma$ 或 $S^1 \times [0,1] \cong \Sigma$，其中 S^1 表示单位圆，T^2 表示二维环面，并且 Σ 将嵌入 $\mathbb{R}^3$ 中。给定一个光滑曲面 Σ，我们用 $\mathcal{V}(\Sigma) := \{X \in C^\infty(\Sigma, \mathbb{R}^3) \mid X \parallel \Sigma\}$ 表示 Σ 上的光滑切向量场。我们用 $\mathcal{N}$ 表示在 Σ 上光滑变化的单位法向量（当 Σ 是闭曲面时，通常选为外单位法向量）。函数 $\phi \in C^\infty(\Sigma)$ 的曲面梯度定义如下：$\nabla_\Sigma \phi$：$= \nabla\Phi - (\mathcal{N} \cdot \nabla\Phi)\Phi$，其中 Φ 是将 ϕ 延拓到 Σ 的一个开邻域中的任意延拓，而 ∇ 表示标准欧几里得梯度。$\nabla_\Sigma \phi$ 的值与所选延拓无关。我们用 $\mathcal{V}_0(\Sigma) := \{X \in \mathcal{V}(\Sigma) \mid \mathrm{div}_\Sigma(X) = 0\}$ 表示 Σ 上的无散切向量场，其中，如果对于每个 $\phi \in C_c^\infty(\mathrm{int}(\Sigma))$，都有 $\int_\Sigma X \cdot \nabla_\Sigma \phi d\sigma = 0$，则称 $X \in \mathcal{V}(\Sigma)$ 是无散的，其中 $\mathrm{int}(\Sigma)$ 表示流形内部。对于给定的 $X \in \mathcal{V}(\Sigma)$，如果对所有 $\phi \in C_c^\infty(\mathrm{int}(\Sigma))$ 都有 $\int_\Sigma X \cdot (\mathcal{N} \times \nabla_\Sigma \phi) d\sigma = 0$，我们称 X 在 Σ 上无旋，记作 $\mathrm{curl}_\Sigma(X) = 0$。

给定一个光滑切向量场 $X \in \mathcal{V}(\Sigma)$，其中 $X \parallel \partial\Sigma$，我们用 ψ_t 表示其流；也就是说，对于固定的 $t \in \mathbb{R}$，任意 $p \in \Sigma$，$\psi_t(p)$ 表示从 p 出发、在时刻 t 的 X 场线。有时，对于固定的 $p \in \Sigma$，我们用 γ_p 表示从 p 出发的 X 场线，使得 $\gamma_p(t) = \psi_t(p)$。采用不同的记号是为了强调，我们考虑的要么是特定曲线 $\gamma_p : \mathbb{R} \to \Sigma$，要么是由此诱导的微分同胚 $\psi_t : \Sigma \to \Sigma$。

对于给定的向量场 $X \in \mathcal{V}(\Sigma)$，$X \parallel \partial\Sigma$，对于给定的 $p \in \Sigma$，我们用 $\omega(p)$ 表示相应的 ω-极限集：$= \{q \in \Sigma \mid \exists (t_k)_k \subset \mathbb{R}$，其中 $t_k \to \infty$ 且 $\gamma_p(t_k) \to q\}$；这里 γ_p 表示从 p 出发的相应 X 场线。α-极限集的定义与此类似，唯一的区别是我们考虑趋于 $-\infty$ 的发散序列 $(t_k)_k$，并将其记为 $\alpha(p)$。

若 $X \in \mathcal{V}(\Sigma)$ 在 $\mathrm{int}(\Sigma)$ 内仅有孤立奇点，即仅有孤立零点，则对任意给定的 $p \in \{q \in \mathrm{int}(\Sigma) \mid X(q) = 0\}$，我们将其指标记为 $\mathrm{ind}_p(X)$。

3 数学预备知识

我们首先给出若干定义。

定义 3.1（中心区域）。设 Σ 为一个连通的紧致光滑曲面，其边界可能为空或不连通，并设 $X \in \mathcal{V}(\Sigma)$ 为一个光滑切向量场，且满足 $X \parallel \partial\Sigma$（在 $\partial\Sigma \neq \emptyset$ 的情形下）。我们称 X 或 X 的流具有一个 *centre region*，如果存在某个 $p \in \mathrm{int}(\Sigma)$，满足 $X(p) = 0$，并且使得 p 的每一个开邻域 U 都包含 p 的一个（可能更小的）邻域 $W \subseteq U$，使得 $W \setminus \{p\}$ 是 X 的可收缩真周期轨道之并，即可收缩为一点的非常值周期轨道之并。给定这样的 p，我们称 $U \subset \Sigma$ *the centre region containing* p，如果 $p \in U$、U 是一个连通开集，使得 $U \setminus \{p\}$ 完全由 X 的可收缩真周期轨道组成，并且 U 在所有此类开邻域中（关于包含关系）是极大的。

下　一个定义涉及鞍点区域。这里回顾一下，向量场的零点 $p \in \Sigma$
$X \in \mathcal{V}(\Sigma)$ 如果在某个（因而也在每个）固定坐标系中，

X 在 p 处的局部表示的雅可比矩阵可逆，则称其为非退化。注意，根据反函数定理，所有非退化零点都是孤立的。如果一个（实） 2×2 矩阵有两个异号的非零实特征值，则称其在 0 处具有双曲鞍点奇异性。

定义 3.2 （鞍点区域）. 设 Σ 是一个连通、紧致的光滑曲面，其边界（可能为空或不连通），并设 $X\in\mathcal{V}(\Sigma)$ 是一个满足 $X\parallel\partial\Sigma$ 的光滑切向量场。给定某个 $p\in\operatorname{int}(\Sigma)$，且$X(p)=0$，我们称 p 周围的某个开邻域 $p\in U\subset\operatorname{int}(\Sigma)$ 为 *saddle region*，如果 U 包含在 p 周围某个坐标图 μ 的定义域中，并且存在一个 C^1-微分同胚 $\eta\colon U\to W$ 映到 $\mathbb{R}^2$ 的某个开子集，使得 $\eta(p)=0$ 且 $\eta_*X=A$，其中 A 是一个在 0 处具有双曲鞍点奇异性的 2×2-矩阵。

注记 3.3. i) η_*X 表示相应的推前向量场。

ii) 条件 $\eta_*X=A$ 等价于如下条件：对给定的 $q\in U$，若令 $x:=\eta(q)$，并用 γ_q^X表示 X 的始于 q 的场线，用 γ_x^A表示由线性算子 A 诱导的向量场的场线，则 $\gamma_q^X=\eta^{-1}\circ\gamma_x^A$。此外，必要时缩小定义域，并将 η 与映射 $\widetilde{\eta}\colon\ \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ (x,y)\mapsto(x,-y)$ 复合后，我们可以假定 η 是保向的。特别地，此时 γ_q^X与 γ_x^A 具有相同的定性行为。这样一条场线 γ_x^A 以及进而 γ_q^X 的定性行为如图 1 所示。

iii) 根据Hartman-Grobman定理，只要 X 的雅可比矩阵（在某个选定的坐标系中）在点 p 处的特征值具有非零实部，就存在一个同胚，将 X 的场线变换为其在局部坐标中的线性化的场线。此外，在二维系统这一特殊情形下，该同胚可取为 C^1类，参见 [25, 第三部分]。

在引入所关注的动力学结构的精确数学含义之后，我们现在转向莫尔斯函数的概念，这将使我们能够讨论“一般的”电流分布。

定义 3.4 （莫尔斯函数）. 设 Σ 为一个连通的（不必紧致的）、具有空边界的光滑曲面。则函数 $f\colon\ \Sigma\to\mathbb{R}$ 是一个 *Morse function*，如果 f 的所有临界点都是非退化的，即如果对所有在某个局部坐标系 μ 中满足 $\partial_1 f(p)=0=\partial_2 f(p)$的 $p\in\Sigma$， p 处相应的海森矩阵必然可逆。

莫尔斯函数将是在无散场空间中构造具有良好性质的“泛型”子集的关键要素。为更准确地说明“泛性”的概念，我们给出以下定义。

定义 3.5 （泛性）。设 Σ 是一个带有（可能为空或不连通）边界的光滑连通紧曲面。假设给定某个子集 $B\subseteq\mathcal{V}(\Sigma)$。那么，如果子集 $S\subseteq B$ 在 B 中关于 C^1 拓扑是相对开且稠密的，我们就称 $S\subseteq B$ 是 *(C^1-)generic*。

此外，如果存在一个泛型子集 $A\subseteq B$，使得某个性质对 A 中的所有元素都成立，那么就称该性质在 B 的元素中 *(C^1-)generically* 成立。

注意，对于任意给定的子集 $B\subset\mathcal{V}(\Sigma)$， B 都是其自身的泛型子集；因此，如果某个性质对 B 中的所有元素都成立，那么该性质也泛型地成立。
另一个背景下的一个重要例子是光滑函数成为莫尔斯函数这一性质，即一般而言，紧光滑流形上的每个光滑函数都是莫尔斯函数 [4, 命题 1.2.4 & 定理 1.2.5]。我们将利用莫尔斯函数的概念，在曲面上的散度自由切向量场中找到具有良好性质的适当泛型集合。

接下来的两个概念将用于详细刻画环面上的泛型散度自由流。

定义 3.6 （环境同痕（相对于一个集合））。设 M 是一个无边界的光滑连通 n-流形。设 $\gamma_i\colon S^1\to M, i=1,2$ 是两个拓扑嵌入，即到其像上的同胚，则称 γ_1和 γ_2是 *ambient isotopic*，如果存在某个连续函数 $H\colon [0,1]\times M\to M$，使得对于所有 $x\in M$， $H(0,x)=x$，且对于所有 $p\in S^1$， $H(1,\gamma_1(p))=\gamma_2(p)$，并且对于每个固定的 $t\in[0,1]$， $H(t,\cdot)\colon M\to M$是一个同胚。

给定某些 $A\subset M$，我们称 γ_1 和 γ_2 为 *ambient isotopic relative to* A，如果 γ_i 是环境同痕的，并且可以选择环境同痕 $H\colon\ [0,1]\times M\to M$，使得对于每个固定的 $t\in[0,1]$，都有$H(t,\ x)=x$对所有 $x\in M\setminus A$成立。

如果某个环境同痕是相对于某个紧致子集 $K\subset M$ 的环境同痕，我们就称它为 *compactly supported*；如果 γ_1 和 γ_2 通过紧支撑环境同痕彼此环境同痕，我们就称它们为 *compactly ambient isotopic*。

注 3.7。 环境同痕的概念在从 S^1 到 M 的拓扑嵌入集合上定义了一个等价关系。详细证明参见 [19, 命题 A.1.4 和推论 A.1.6] 。

在下一个定义中，我们将 $T^2 \cong \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ 视为 θ, ϕ，并将其称为环面这一表示上的标准诱导坐标。

定义 3.8 （（半）可整直性）。 设 $\Sigma \cong T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ 是一个环面曲面，且 $X \in \mathcal{V}(\Sigma)$。若存在一个微分同胚 $\Psi\colon \Sigma \to T^2$，使得对于适当的常数 $a, b \in \mathbb{R}$，有 $\Psi_* X = a\partial_\theta + b\partial_\phi$，则称 X 为 *rectifiable*。其中， $\Psi_* X$ 表示相应的推前向量场；换言之，它是 X 在 T^2 上的“全局坐标系”（θ, ϕ）中的表示。

若存在某个严格正函数（，(,)），使得 可整直，则称向量场
$X \in \mathcal{V}\,\Sigma$ *semi-rectifiable* $f \in$ ( ) 为 。
$C^\infty\ \Sigma\ \ 0\ \infty$ $f \cdot X$

4 讨论与研究结果的相关性

尽管仿星器相较于托卡马克具有诸多优势，但其线圈设计的复杂性历来限制了仿星器的应用与发展。在此背景下，表征线圈绕组面上的电流分布，对于评估线圈制造和装配的可行性至关重要。

传统设计采用与等离子体边界保持固定距离的线圈绕组面，这类曲面称为共形曲面。此类曲面上的简单电流分布可通过非平面细丝线圈近似实现；这些线圈本质上是一维电流流路，分布于曲面周围。例如，Wendelstein 7-X 仿星器采用了非平面线圈，因其几何形状复杂、精度要求严格且规模庞大，在制造和装配方面面临重大挑战 [7]。

超导技术的突破性进展如今使得采用大面积超导曲面成为可能，有望简化仿星器线圈的设计、制造和装配 [51]。尽管这些宽阔的曲面可简化线圈绕制几何形状，例如采用分段圆柱曲面，但需要管理更复杂的二维电流分布。在这些曲面上，可以利用激光刻蚀沟槽引导电流沿通道流动，从而形成特定的电流模式；通道形状经过设计，可尽量减少等离子体区域内的磁场误差。这种方法已在其他应用中得到探索，证明了通过图案化导电曲面来实现精确磁场构型的可行性 [47]。

虽然图案化表面方法简化了制造，但由此产生的电流模式仍然复杂，这是一个关键考量。尤其是中心区和鞍点区的存在会带来工程难题，特别是在电流馈入以及可能需要专用接入点方面，而这些往往会进一步降低磁场精度。有效管理这些区域需要投入大量设计工作，以尽可能减小它们对系统整体性能的影响。

4.1 数值观察

本节将介绍分段圆柱形线圈绕制面上观察到的电流模式数值示例。所示结果基于采用五个相同模块（每个场周期一个）的缩比 Wendelstein 7-X 平衡态。

这些数值示例展示了 1.3 节中仿星器线圈设计的核心权衡：正则化程度越高，电流分布越简单，制造也越容易，但磁场精度会降低。当 λ较小时，磁场误差项 χ_B^2 占主导地位，导致电流模式复杂，包含许多中心区和鞍点区。随着 λ 增加，正则化项 χ_j^2 变得更加重要。磁场的环向环流由平衡态决定，并根据安培定律产生固定的净极向电流。此时，最小化电流范数会得到均匀的极向电流，这是确保净极向电流最简单的方法。关于极向部分 j 如何确定，详见 [21] 第 7 页底部开始的讨论。平衡这些因素对于仿星器线圈的实际应用至关重要，尤其是采用图案化导电表面时。

图6显示了在圆柱形线圈绕制面（单个模块）上以最小正则化（(1.3)中的$\lambda = 10^{-20}$）获得的最优电流分布。该分布在几乎整个区域内具有大量中心和鞍点区域，凸显了可能抵消图案化表面优势的潜在工程挑战，例如每个区域需要多个独立的电流馈入端。传统共形方法中也会出现类似挑战，大量中心和鞍点区域使细丝线圈的设计与组装变得复杂。

图7显示了将正则化因子增大至 $\lambda = 10^{-15}$的效果。大多数流线在极向上闭合，仅存在少数中心和鞍点区域。这种更高的正则化产生了更简单的电流图案，但代价是对目标磁场的近似精度降低。

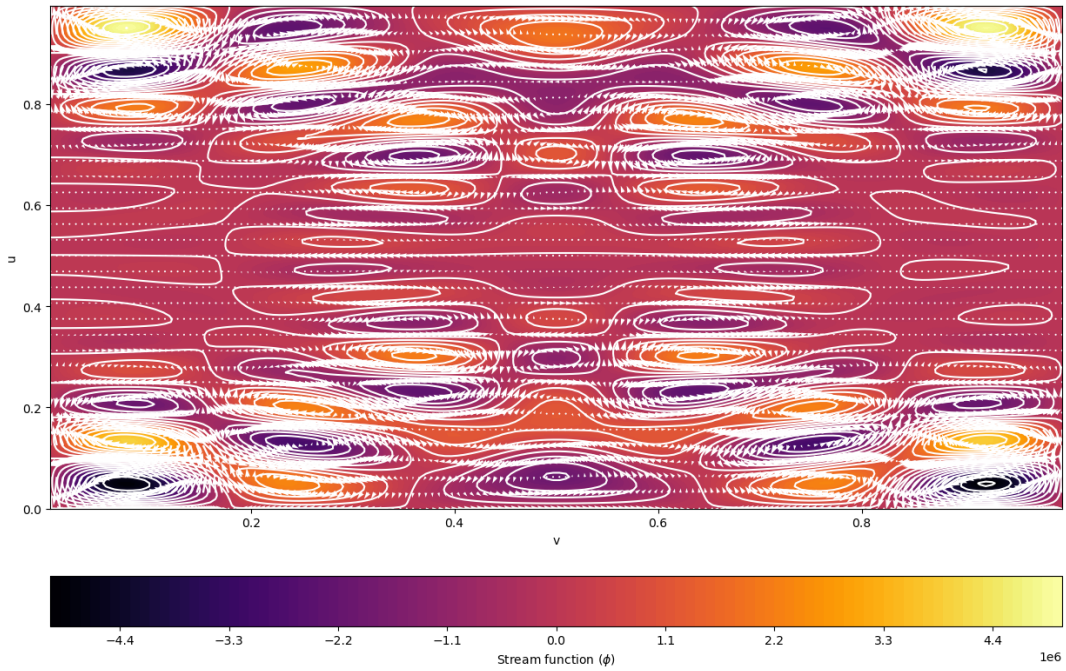

图6：在代表分段圆柱形线圈绕制表面一个模块的二维参数域上，正则化程度最低时的最优电流分布。绕等离子体的极向方向为 u，沿等离子体的环向方向为 v。颜色映射显示局部电流势；白色线条表示电流流线，白色箭头表示电流场方向。可以看到许多中心区域和鞍点区域。

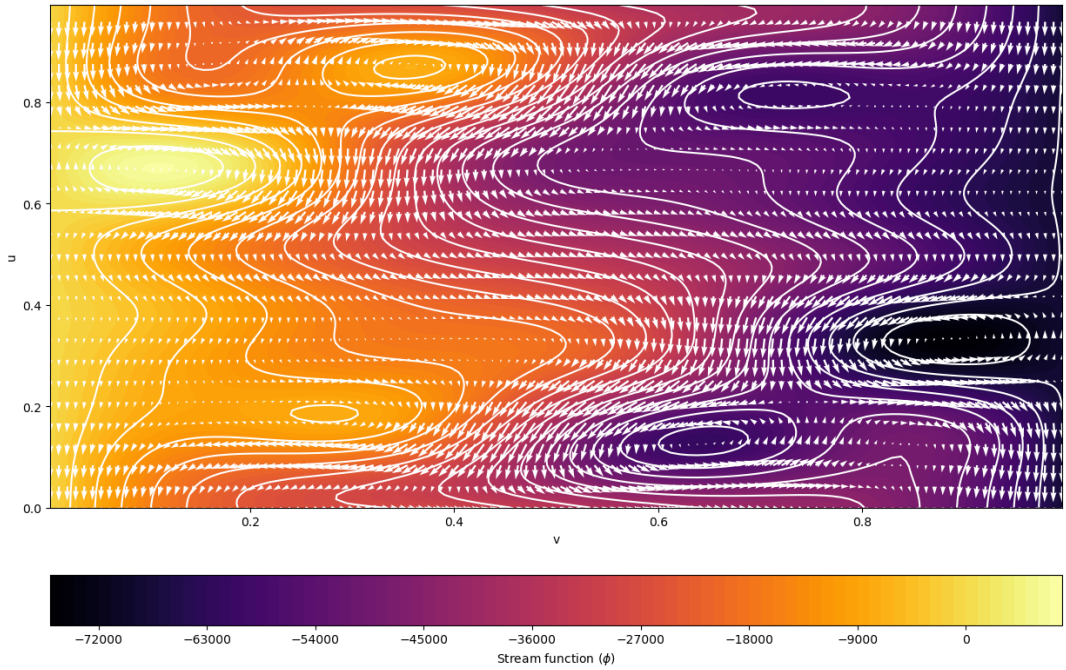

图7：在代表分段圆柱形线圈绕制表面一个模块的二维参数域上，正则化程度较低时的最优电流分布。绕等离子体的极向方向为 u，沿等离子体的环向方向为 v。颜色映射显示局部电流势；白色线条表示电流流线，白色箭头表示电流场方向。可以观察到数量适中的鞍点区域和可缩轨道区域。

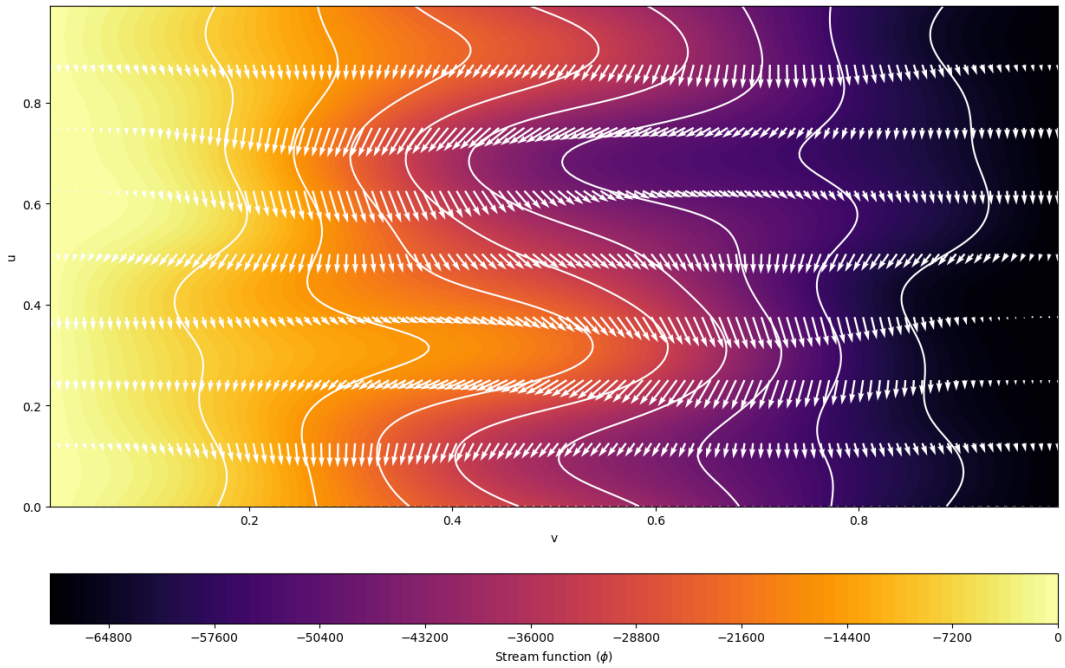

图 8：在表示分段圆柱形线圈绕制表面一个模块的二维参数域上，采用高正则化时的最优电流分布。等离子体周围的极向为 u，沿等离子体的环向为 v。颜色映射显示局部电流势；白线表示电流流线，白色箭头表示电流场方向。所有流线均沿极向闭合。

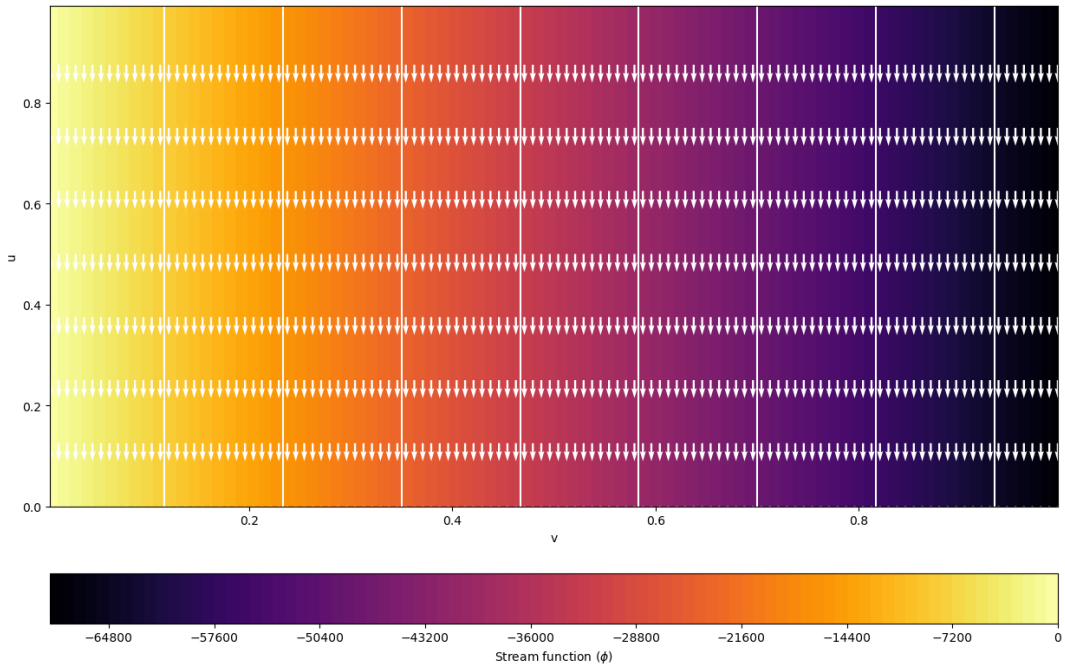

图 9：在表示分段圆柱形线圈绕制表面一个模块的二维参数域上，采用足够高的正则化时的最优电流分布。等离子体周围的极向为 u，沿等离子体的环向为 v。颜色映射显示局部电流势；白线表示电流流线，白色箭头表示电流场方向。均匀极向电流分布。

图 8 表明，超过阈值（此处为 $\lambda = 10^{-14}$）后，所有电流流线都会沿极向闭合。Thi s

这种解可直接用于宽幅图案化导电表面的线圈设计，但无法提供足够的磁场精度。

图 9 显示，当正则化足够高时（此处为 $\lambda = 10^{-5}$），电流约束 (1.2) 占主导地位，而磁场约束 (1.1) 的影响较弱，因此圆柱上的极向电流分布均匀。

4.2 仿星器优化结果的应用

在 coil winding surface approach 中，一旦找到能够产生足够接近目标磁场的连续电流分布，下一步就是确定物理上可实现的线圈结构。

传统做法是提取在极向上闭合的电流流线，从而得到一组非平面线圈。另一种方法是提取流线并使其不导电，让电流在流线之间流动。无论采用哪种方法，理解流线动力学都至关重要。

尽管理论表明，环面曲面上可能不会出现中心区和鞍点区，如定理 1.1 所述，但在实践中，特别是在 ii）的情况下，这类区域确实会出现。类似地，对于分段圆柱曲面，通常也预期会出现这些中心区和鞍点区，如定理 1.3 所示。该结果最初假设圆柱边界处的电流非零且方向相反，但后来已推广到更弱的条件，即这些边界处的电流仅需非零，详见附录 A。

在两个极向沟槽之间，正如预期，定理 1.4 确认不存在中心区域或鞍点区域，所有流线都沿着极向轨道运行。为了复现中心区域的动力学特性，必须探索极向沟槽的替代方案。在这些区域内，一种可能的解决方案是采用不同的评价指标。我们注意到，正如 [20, 引理 C.1] 所示，毕奥-萨伐尔算子关于 $W^{-\frac{1}{2},2}(\Sigma)$-范数是连续的（因此关于 $L^2(\Sigma)$-范数也是连续的）。随后，可以重点研究在可缩轨道区域内，使物理电流与连续电流之间的$W^{-\frac{1}{2},2}$-范数（或 L^2-范数）最小化。对于由极向曲线组成的区域，可以使线圈与连续电流分布的极向磁力线对齐。然而，在 $L^2(\Sigma)$ 中的接近并不能保证动力学特性相似。因此，中心区域的存在本身并不会妨碍通过极向物理电流实现良好的近似。

本文所呈现的结果与仿星器线圈技术的发展尤为相关，因为该技术正逐渐超越传统的细丝式设计。随着图案化超导表面逐步发展，这类表面能够直接承载表面电流，连续电流与线圈之间的区别也日益模糊。

在这些构想中，线圈由激光刻蚀沟槽之间的区域构成，这些区域可以串联、并联或单独供电。沟槽图案应与计算得到的最优电流分布的流线对齐。如果最优电流势主要产生宽广的极向电流，最终图案可能包含若干沿极向闭合的沟槽，实现起来相对简单。然而，如果电流势包含许多局域可缩轨道，曲面就必须布置由彼此独立的蚀刻回路组成的网络，从而显著增加工程复杂性。

关键的是，正则化能够控制沟槽网络的密度和精细程度：越平滑的电流分布产生的导电通路越少、越宽，从而简化工程实施。

然而，更强的正则化会降低磁场近似的精度，这是经典仿星器线圈设计中一个根本性的权衡。因此，表面电流的拓扑学对仿星器线圈优化至关重要。透彻理解中心区和鞍点区如何形成，有助于开发新方法，在将最优电流分布转化为离散线圈时有效地融入这些特征。

这些进展的实际影响显而易见：通过有效管理复杂的连续电流分布，我们能够设计出更易于制造的线圈，同时不会显著牺牲磁场构型的质量。这种方法在实现等离子体性能目标的同时，也降低了仿星器项目的成本和风险。

5 证明

5.1 辅助结果

回顾一下，若切向量场 $j \parallel \Sigma$ 的零点 $p \in \Sigma$ 在某个（因而也在每个）局部坐标系中的雅可比矩阵在 p 处非奇异，则称该零点为非退化零点。

引理 5.1 **.** 设 $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ 是一个光滑闭曲面。那么 t 他设定

$$\{j \in \mathcal{V}_0(\Sigma) \mid j \text{ has only non-degenerate zeros}\}$$

是 $\mathcal{V}_0(\Sigma)$ 的一个泛型子集。

Proof of Lemma 5.1. 步骤 1: 首先，我们证明无旋向量场的相应结论；然后在第二步中，通过对偶论证将结果转用于无散场。为此，任取一个满足 $\mathrm{curl}_\Sigma(Y) = 0$ 的 $Y \in \mathcal{V}(\Sigma)$。我们的目标是调整莫尔斯函数情形下的论证，参见 [4, 第 1 章.2]。不过请注意，并非每个无旋场都是某个函数的梯度，因此还需要做一些额外工作。我们先任取 $\alpha > 0$ 和 $p \in \mathbb{R}^3$。然后定义向量场

$$F_p(x) := \alpha \nabla_\Sigma \frac{|x-p|^2}{2} + Y(x) \in \mathcal{V}(\Sigma). \tag{5.1}$$

进一步，我们将 Σ 的法丛定义为 $N := \{(x, v) \mid v \perp T_x\Sigma\} \subset \Sigma \times \mathbb{R}^3$ 其中 $T_x\Sigma$ 表示点 x 处 Σ 的切平面。法丛本身也是一个光滑流形，我们在其上定义如下光滑函数 N

$$\widehat{E} : N \to \mathbb{R}^3,\ (x, v) \mapsto x + v + \frac{Y(x)}{\alpha}. \tag{5.2}$$

与莫尔斯函数的情形相同，[4, 命题 1.2.1], 现在的目标是证明，对于固定的 $\alpha > 0$，使 F_p 具有退化零点的点 $p \in \mathbb{R}^3$ 包含在 E 的临界值集合中；这样，萨德定理（参见 [37, 定理 6.10], ）便可推出该集合是一个零测集。我们首先注意到

$$F_p(x) = 0 \Leftrightarrow \nabla_\Sigma \frac{|x-p|^2}{2} = -\frac{Y(x)}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha(x-p)^{\parallel} = -Y(x) \tag{5.3}$$

其中 $\cdot^{\parallel}$ 表示 $x - p$ 中与 $T_x\Sigma$ 相切的部分。现在我们可以任意固定 Σ 的一个坐标系 $(u_1, u_2) \mapsto x(u_1, u_2)$，并令 g_{ij} 表示度量张量，g^{ij} 表示相应的逆矩阵，Y^j 表示 Y 的局部表达式，从而得到 $F_p(x) = \left(\alpha g^{ij}(x-p) \cdot \partial_i x + Y^j\right)\partial_j x$，因此

$$\partial_k F_p^j(x) = \partial_k Y^j + \alpha g^{ij}\partial_k x \cdot \partial_i x + \alpha g^{ij}(x-p)\cdot\partial_k\partial_i x + \alpha \partial_i x \cdot (x-p)\partial_k g^{ij}$$

其中我们采用爱因斯坦求和约定。我们观察到 $\partial_i x \parallel \Sigma$ $\alpha\partial_i x \cdot (x-p) = \alpha\partial_i x \cdot (x-p)^{\parallel} =$ 因 $-Y(x)\cdot\partial_i x$ $x \in \Sigma$ F_p 此 ( ) ( ) ( )，其中我们利用了 (.)。我们得出结论：如果 是 的退化零点，那么下列矩阵是奇异的

$$\partial_k Y^j + \alpha\delta_k^j + \alpha g^{ij}(x-p)\cdot\partial_k\partial_i x - Y(x)\cdot\partial_i x\partial_k g^{ij},\ 1 \le j,k \le 2 \tag{5.4}$$

其中我们利用了 $\partial_k x \cdot \partial_i x = g_{ki}$，并且 $g^{ij}g_{ki} = \delta_k^j$ 是克罗内克δ。另一方面，现在可以验证：$q \in \mathbb{R}^3$ 是 $\widehat{E}$ 的临界值，当且仅当对于某个 (x, v)，有 $q = \widehat{E}(x, v) \in N$，且下列矩阵是奇异的；计算过程与 [4, 引理 1.2.2] 中完全相同，其中考虑了映射 $E(x, v) := x + v$，

$$\partial_k x \cdot \partial_i x - v \cdot \partial_k\partial_i x + \frac{(\partial_k(Y^m\partial_m x))\cdot\partial_i x}{\alpha}. \tag{5.5}$$

现在我们注意到，若 x 是 F_p 的零点，则 $\alpha(x-p)+Y(x) \perp T_x\Sigma$，因此我们可以选取 $v = -((x-p)+\frac{Y(x)}{\alpha})$，并注意到 $\widehat{E}(x, v) = p$。根据之前的推理，如果矩阵

$$\begin{aligned}\partial_k x\cdot\partial_i x + (x-p)\cdot\partial_k\partial_i x + \frac{Y(x)\cdot\partial_k\partial_i x}{\alpha} + \frac{(\partial_k(Y^m\partial_m x))\cdot\partial_i x}{\alpha}\\ = g_{ki} + (x-p)\cdot\partial_k\partial_i x + \frac{\partial_k(Y^m g_{mi})}{\alpha}\end{aligned}$$

是奇异的，其中我们表示了 $Y = Y^m\partial_m x$，并再次利用了 $\partial_k x\cdot\partial_i x = g_{ki}$。我们可以将上述表达式乘以 g^{ij}，并对 i 求和，这相当于乘以一个非奇异矩阵，因此上述矩阵是奇异的，当且仅当

$$\delta_k^j + g^{ij}(x-p)\cdot\partial_k\partial_i x + \frac{g^{ij}\partial_k(Y^m g_{mi})}{\alpha} \tag{5.6}$$

是奇异的。最后我们注意到

$$g^{ij}\partial_k(Y^m g_{mi}) = g^{ij}g_{mi}\partial_k Y^m + Y^m g^{ij}\partial_k g_{mi} = \partial_k Y^j - Y^m g_{mi}\partial_k g^{ij} = \partial_k Y^j - Y\cdot\partial_i x\partial_k g^{ij}$$

其中我们利用了 $0 = \partial_k\delta_m^j = \partial_k(g^{ji}g_{im})$ 和 $Y^m g_{mi} = Y^m\partial_m x\cdot\partial_i x = Y\cdot\partial_i x$。我们可以将其代入 (5.6)，并注意到这样得到的表达式（相差一个非零因子 α）与 (5.4) 中的表达式一致。

总结　　因此，我们证明了，如果 $x \in \Sigma$ 是 F_p的退化零点，那么 (5.3) 成立，而 (5.4) 定义了一个奇异　　r

矩阵。此外，通过 (5.5) 中的刻画，结果表明 ($p = \widehat{E}(x, v)$ with $v = -(x-p) - {}^{Y}{}_{(x)}\alpha$, $(x, v) \in N$) 是 $\widehat{E}$ 的一个临界值。因此，所有满足 F_p 具有退化零点的 $p \in \mathbb{R}^3$ 构成一个零测集。

现在我们可以考虑序列 $\alpha_n := \frac{1}{n}$，并注意到，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在一个零测集 $A_n \subset \mathbb{R}^3$，使得对所有 $p \in \mathbb{R}^3 \setminus A_n$，向量场 $F_n(x) := \frac{\nabla_\Sigma |x-p|^2}{2n} + Y(x)$ 只有非退化零点。接着令 $A := \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$，它仍是一个零测集，因此我们可以固定任意一个 $p \in \mathbb{R}^3 \setminus A$，并发现对每个$n \in \mathbb{N}$，向量场 $F_n(x) = \frac{\nabla_\Sigma |x-p|^2}{2n} + Y(x)$ 只有非退化零点。最后，如果 $\mathrm{curl}_\Sigma(Y) = 0$，显然对所有 n，也有 $\mathrm{curl}_\Sigma(F_n) = 0$，于是

$$\|F_n - Y\|_{C^1(\Sigma)} = \frac{1}{n} \left\| \nabla_\Sigma \frac{|x-p|^2}{2} \right\|_{C^1(\Sigma)} \to 0$$

因为 p 与 n无关。显然可以确认，在 C^1-拓扑下，无旋场空间中具有非退化零点的场构成的集合是开集。

步骤 2：我们固定 Σ 上任意一个（光滑的）单位法向量 $\mathcal{N}$，并注意到，与 $\mathcal{N}$ 作叉积会在 Σ 上的光滑无散场与 Σ 上的无旋场之间诱导出一个同构（这很容易从微分形式的角度看出：它对应于对相应的 1-形式应用霍奇星算子）。因此，给定任意一个 $j \in \mathcal{V}_0(\Sigma)$，我们可以将其写为 $j = \mathcal{N} \times Y$，其中 $Y \in \mathcal{V}(\Sigma)$ 是适当的，且旋度 $_\Sigma(Y) = 0$。根据步骤 1，我们可以在 $C^1(\Sigma)$ 拓扑下用无旋切向场 Y_n 逼近 Y，且这些场都只有非退化零点。相应地，我们定义 $j_n := \mathcal{N} \times Y_n \in \mathcal{V}_0(\Sigma)$，并且容易验证 $j_n \to j$ 属于 $C^1(\Sigma)$，此外，j_n 与 Y_n 的零点集重合，且当且仅当 x 是 Y_n 的退化零点时，j_n 才有退化零点 x。因此，j_n 都是仅有非退化零点的无散场，并且在 C^1 拓扑下逼近 j。

□

以下是定理 1.3 中所述相关向量场的对应结果。

引理 5.2。设 $S^1 \times [0,1] \cong \Sigma \subset \mathbb{R}^3$ 是一个光滑圆柱面，并考虑如下集合：

$$\mathcal{V}_0^{\mathrm{OT}}(\Sigma) := \{j \in \mathcal{V}_0(\Sigma) \mid j \parallel \partial\Sigma,\, j \neq 0 \text{ on } \partial\Sigma \text{ and the field lines of } j \text{ on the two distinct boundary components are oppositely oriented}\} \subset \mathcal{V}(\Sigma)$$

散度为零且“在边界上方向相反地切向”的向量场。则下列子集

$$\{j \in \mathcal{V}_0^{\mathrm{OT}}(\Sigma) \mid j \text{ has only non-degenerate zeros}\}$$

是 $\mathcal{V}_0^{\mathrm{OT}}(\Sigma)$ 的一个泛型子集。

Proof of Lemma 5.2. 我们先固定一个 $j \in \mathcal{V}_0^{\mathrm{OT}}(\Sigma)$，并注意到，根据霍奇–莫雷分解定理 [53, 定理 2.4, 2] 我们可以写成 $j = \mathcal{N} \times \nabla\phi + \gamma$，其中 $\phi \in C^\infty(\Sigma)$ 适当选取，且满足 $\phi|_{\partial\Sigma} = 0$；此外 $\gamma \in \mathcal{H}_N(\Sigma)$，这里用到了 j 散度为零且在边界上切向这一性质，而 $\mathcal{N}$ 表示 Σ 的一个（光滑）单位法向量。于是，根据 (1.4)–(1.7)，我们可以写成 $j = \mathcal{N} \times \nabla\chi$，其中 $\chi \in C^\infty(\Sigma)$ 适当选取，且 $\chi|_{\partial\Sigma}$ 在局部为常数，即在 $\partial\Sigma$ 的每个边界圆上为常数，但各圆上的常数可以不同。接着，我们可以沿着 $\partial\Sigma$ 上外法向量 n 的延拓考虑向外的流，即 $n \perp \partial\Sigma$、$n \cdot \mathcal{N} = 0$，因此不失一般性，可以假设 Σ 包含于稍大的柱面 $\widetilde{\Sigma}$ 中；我们也可以将 χ 延拓为 $\widetilde{\Sigma}$ 上的光滑函数 $\widetilde{\chi}$。根据标准莫尔斯理论，[4, 命题 1.2, 4], 我们可以用 $C^2_{\mathrm{loc}}(\mathrm{int}(\widetilde{\Sigma}))$ 中的莫尔斯函数 f_n 来逼近 $\mathrm{int}(\widetilde{\Sigma})$ 上的 $\widetilde{\chi}$。因此，由于 $\Sigma \subset \mathrm{int}(\widetilde{\Sigma})$ 是紧致的，限制函数 $f_n|_\Sigma$ 在 $C^2(\Sigma)$ 中逼近 χ。现在利用假设 $j \neq 0$ 在 $\partial\Sigma$ 上成立，这等价于 $\nabla_\Sigma\chi \neq 0$ 在 $\partial\Sigma$ 上成立。注意，对于适当的 $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$，有 $|\nabla_\Sigma\chi| \geq c_0 > 0$ 在 $[0,\epsilon] \times S^1 \cup [1-\epsilon, 1] \times S^1$ 上成立（这里隐含地使用了识别 $[0,1] \times S^1 \cong \Sigma$）。固定这样一个 ϵ，并固定一个满足 $\rho|_{\partial\Sigma} = 1$ 和 $\rho|_{[\epsilon,1-\epsilon]\times S^1} = 0$ 的隆起函数 $\rho \in C^\infty(\Sigma)$，然后定义

$$\chi_n := \rho\chi + (1-\rho) f_n|_\Sigma.$$

Then

$$\chi - \chi_n = (1-\rho)(\chi - f_n|_\Sigma) \Rightarrow \|\chi - \chi_n\|_{C^2(\Sigma)} \leq C(\rho)\|\chi - f_n|_\Sigma\|_{C^2(\Sigma)} \to 0 \text{ as } n \to \infty.$$

特别地，对于所有足够大的 n，$|\nabla_\Sigma\chi_n| \geq \frac{|\nabla_\Sigma\chi|}{2} \geq \frac{c_0}{2} > 0$ 在 $[0,\epsilon] \times S^1 \cup [1-\epsilon, 1] \times S^1$ 上。因此，$\nabla\chi_n \neq 0$ 在 $[0,\epsilon] \times S^1 \cup [1-\epsilon, 1] \times S^1$ 上。此外，$\rho = 0$ 在 $[\epsilon, 1-\epsilon] \times S^1$ 中，因此 $\chi_n = f_n$ 在此集合内；于是，由于 f_n 是莫尔斯函数，$\nabla\chi_n$ 在整个 Σ 上只有非退化零点。最后，由于 $\rho|_{\partial\Sigma} = 1$ 且根据 χ 的性质，$\chi_n|_{\partial\Sigma} = \chi|_{\partial\Sigma}$ 是局部常值的。最重要的是，这意味着 $\nabla_\Sigma\chi_n$ 垂直于

并且在 C^1 的 Σ 范数下逼近 $\nabla_\Sigma\chi$。接下来很容易验证，例如在法坐标中进行计算（参见 [38, 命题 5.24], ），将问题化归到标准的欧氏情形后可知，$\nabla_\Sigma\chi_n$ 与 j_n 的零点集相同：$=\mathcal{N}\times\nabla_\Sigma\chi_n$；并且，$\nabla_\Sigma\chi_n$ 的一个零点是非退化零点，当且仅当同一个零点对于 j_n 也是非退化零点。此外，容易验证 j_n 在 C^1 的 Σ 范数下收敛到 $\mathcal{N}\times\nabla_\Sigma\chi=j$（用微分形式表示时，$\mathcal{N}\times\nabla_\Sigma\chi$ 对应于 $\star d\chi$，其中 $\star$ 表示霍奇星算子，d 表示外微分）。总之，我们得到了一列向量场 $(j_n)_n\subset\mathcal{V}_0(\Sigma)$，满足 $j_n\neq 0$ 在 $\partial\Sigma$ 上成立，且在 Σ 内仅有非退化零点。我们还回顾 $\nabla\chi_n\perp\partial\Sigma$，这又意味着 $j_n=\mathcal{N}\times\nabla_\Sigma\chi_n\parallel\partial\Sigma$。最后，利用识别 $\Sigma\cong[0,1]\times S^1$，显然，由于 j 的场线在边界圆上定向相反，因此对于所有足够大的 n，j_n 的场线也必然如此。这证明了 $\{j\in\mathcal{V}_0^{\mathrm{OT}}(\Sigma)\mid \mathrm{j}\text{ 仅有非退化零点}\}$ 在 $\mathcal{V}_0^{\mathrm{OT}}(\Sigma)$ 中的稠密性。容易验证，该集合在 C^1-拓扑下是相对开集；参见 [4, 定理 1.2.5] 中关于莫尔斯函数的相应结论。因此我们得出，该集合是 C^1-泛的。

□

在定理 1.4 的证明过程中，我们还需要以下观察。回顾一下，$\mathcal{H}_N(\Sigma)=\{\gamma\in\mathcal{V}(\Sigma)\mid \mathrm{div}_\Sigma(\gamma)=0=\mathrm{curl}_\Sigma(\gamma),\ \gamma\parallel\partial\Sigma\}$。

引理5.3。设 $[0,1]\times S^1\cong\Sigma\subset\mathbb{R}^3$ 是一个光滑圆柱面。设 $j\in\mathcal{H}_N(\Sigma)$，则 j 的流在 $\mathrm{int}(\Sigma)$ 内不含任何非恒定的可缩周期轨道。

Proof of Lemma 5.3. 反设 j 的流在 $\mathrm{int}(\Sigma)$ 内有一个可缩的非恒定周期轨道。于是可以找到一个圆盘 $D\subset\mathrm{int}(\Sigma)$，其边界为该轨道，即 $j\parallel\partial D$。由 (1.4)-(1.7) 可知，对于 Σ 上的某个调和函数 ψ，可以写成 $j=\mathcal{N}\times\nabla_\Sigma\psi$，其中 $\mathcal{N}$ 是 Σ 上光滑的单位法向量。注意到 $j\parallel\partial D$ 蕴含 $\nabla_\Sigma\psi\perp\partial D$，进而蕴含 $\psi|_{\partial D}$ 为常数。现在根据最大值原理（第 6 章 6.4.1 定理 1] ψ），[14, 将在 ∂D 上取得最小值和最大值，因此 ψ 在整个 D 上为常数，进而 $\nabla_\Sigma\psi=0$ 在 D 中成立，特别地，$j=0$ 在 D 中成立。于是由唯一延拓原理（参见 [3], ）可得，$j=0$ 在整个 Σ 上成立，这与 j 的流存在真周期场线矛盾。

□

我们还需要以下结果，并为完整起见给出证明。回顾一下，对于给定的向量场 $X\in\mathcal{V}(\Sigma)$，我们可以通过如下性质定义其零点 $p\in\Sigma$ 的重数 $k\in\mathbb{N}_0$：在 p 周围某个（因而也是任意一个）给定的坐标图 μ 中，对于所有多重指标 $|\alpha|\leq k$ 及所有 $1\leq j\leq 2$，都有 $\partial^\alpha X^j(p)=0$；并且存在某个多重指标 $\tilde{\alpha}\in\mathbb{N}_0^2$，使得 $|\tilde{\alpha}|=k+1$ 且对于某个 $j\in\{1,2\}$，有 $\partial^{\tilde{\alpha}}X^j(p)\neq 0$。我们将向量场的零点 p 的重数记为 $m(p)$。

引理 5.4。设 (Σ,g) 是一个有边界（边界可能为空或不连通）的定向紧致光滑黎曼二维流形。再设 $X\in\mathcal{V}(\Sigma)$ 是一个调和向量场，即 $\mathrm{div}_\Sigma(X)=0=\mathrm{curl}_\Sigma(X)$。那么，要么 X 恒等于零，要么 $\mathrm{int}(\Sigma)$ 仅包含 X 的孤立零点，并且对于每个 $p\in\{q\in\mathrm{int}(\Sigma)\mid X(q)=0\}$，都有 $\mathrm{ind}_p(X)=-(m(p)+1)$，其中 $\mathrm{ind}_p(X)$ 表示 X 的孤立零点 p 的指标。

Proof of Lemma 5.4. 首先，由于 X 是调和的，根据 [3] 可知，X 要么恒等于零，否则其所有零点都必须是有限阶的。接着，再利用 X 是调和的这一事实，根据 [5] 可知，$\{q\in\mathrm{int}(\Sigma)\mid X(q)=0\}$ 是 $\mathrm{int}(\Sigma)$ 中由孤立点组成的可数局部有限子集。

现在固定任意一个 $p\in\{q\in\mathrm{int}(\Sigma)\mid X(q)=0\}$，并取以 p为中心的正规坐标系。于是，我们可以在该坐标系中计算指标 $\mathrm{ind}_p(X)$，因此不妨假设 X 定义在欧几里得球 $B_r(0)$ 上。向量场 X 的坐标表达式为 $X=f\partial_1+h\partial_2$，于是我们可以根据公式计算 X 在 p 处的指标

$$\mathrm{ind}_p(X)=\frac{1}{2\pi}\int_{\partial B_\epsilon(0)}\frac{fdh-hdf}{f^2+h^2}$$

其中 $\partial B_\epsilon(0)$ 以逆时针方式定向，且 $0<\epsilon\ll 1$ 可以任意选取。特别地，我们可以使用参数化 $\gamma_\epsilon(t):=\epsilon(\cos(t),\ \sin(t))$，并为记号简便起见，我们令 $\gamma(t):=\gamma_1(t)$。由于指标的计算与 $\epsilon>0$ 无关，参见 [16, 引理 7.1], 我们得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{ind}_p(X)&=\frac{\lim_{\epsilon\searrow 0}}{2\pi}\int_{\partial B_\epsilon(0)}\frac{fdh-hdf}{f^2+h^2}\\
&=\frac{\lim_{\epsilon\searrow 0}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\epsilon\frac{f(\gamma_\epsilon(t))\dot{\gamma}^i(t)\partial_i h(\gamma_\epsilon(t))-h(\gamma_\epsilon(t))\dot{\gamma}^i(t)\partial_i f(\gamma_\epsilon(t))}{f^2(\gamma_\epsilon(t))+h^2(\gamma_\epsilon(t))}dt\\
&=\frac{\lim_{\epsilon\searrow 0}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\left(\frac{f(\gamma_\epsilon(t))}{\epsilon}\right)\dot{\gamma}^i(t)\partial_i h(\gamma_\epsilon(t))-\left(\frac{h(\gamma_\epsilon(t))}{\epsilon}\right)\dot{\gamma}^i(t)\partial_i f(\gamma_\epsilon(t))}{\left(\frac{f(\gamma_\epsilon(t))}{\epsilon}\right)^2+\left(\frac{h(\gamma_\epsilon(t))}{\epsilon}\right)^2}dt
\end{aligned}$$

其中 $\gamma^1(t) = \cos(t)$ 且 $\gamma^2(t) = \sin(t)$，并且我们始终使用爱因斯坦求和约定。我们令 $n := m(p)$，并对固定的 $t \in \mathbb{R}$ 将函数 $\epsilon \mapsto f(\gamma_\epsilon(t))$ 泰勒展开，从而得到

$$f(\gamma_\epsilon(t)) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{\frac{d^k}{d\epsilon^k}|_{\epsilon=0} f(\gamma_\epsilon(t))}{k!} \epsilon^k + \rho(\epsilon, t)\epsilon^{n+2}$$

其中，$\rho \equiv \rho(\epsilon,\ t)$可在 ϵ 和 t中一致有界，即存在某个 $C > 0$，使得对所有 t和 ϵ，都有 $|\rho| \leq C$。我们观察到 $\frac{d}{d\epsilon} f(\gamma_\epsilon(t)) = \dot\gamma^i(t)\partial_i f(\gamma_\epsilon(t))$，因此 $\frac{d^2}{d\epsilon^2} f(\gamma_\epsilon(t)) = \ddot\gamma^i(t)\dot\gamma^j(t)\partial_i\partial_j f(\gamma_\epsilon(t))$。由此可得

$$f(\gamma_\epsilon(t)) = \frac{\gamma^{i_1}\gamma^{i_2}\dots\gamma^{i_{n+1}}\partial_{i_1}\partial_{i_2}\dots\partial_{i_{n+1}} f(0)}{(n+1)!}\epsilon^{n+1} + \rho\epsilon^{n+2}$$

这里我们用到了这是一个 n 阶零点，因此 f（以及 h）在0处的所有导数直到 n 阶都为零，并采用爱因斯坦求和约定。同样，我们可以将 $h(\gamma_\epsilon)$展开至 $n+2$阶，并将 $\partial_i h(\gamma_\epsilon(t))$和 $\partial_i f(\gamma_\epsilon(t))$展开至 $n+1$ 阶，从而得到

$$\begin{aligned}\frac{2\pi}{n+1}\operatorname{ind}_p(X) = \\ \int_0^{2\pi} \frac{\gamma^{i_1}..\gamma^{i_{n+1}}\partial_{i_1}..\partial_{i_{n+1}} f(0)\gamma^{j_1}..\gamma^{j_n}\dot\gamma^m\partial_{j_1}..\partial_{j_n}\partial_m h(0) - \gamma^{i_1}..\gamma^{i_{n+1}}\partial_{i_1}..\partial_{i_{n+1}} h(0)\gamma^{j_1}..\gamma^{j_n}\dot\gamma^m\partial_{j_1}..\partial_{j_n}\partial_m f(0)}{\left(\gamma^{i_1}..\gamma^{i_{n+1}}\partial_{i_1}..\partial_{i_{n+1}} f(0)\right)^2 + \left(\gamma^{i_1}..\gamma^{i_{n+1}}\partial_{i_1}..\partial_{i_{n+1}} h(0)\right)^2} dt \\ +o(1) \text{ as } \epsilon \searrow 0. \end{aligned} \tag{5.7}$$

我们断言，(5.7)中出现的被积函数等于 -1，由此即可完成证明。为此，我们固定任意一个满足 $|\alpha| = n$ 的多重指标 $\alpha \in \mathbb{N}_0^2$，并考察

$$\dot\gamma^m\partial^\alpha\partial_m f(0) = -\sin(t)\partial^\alpha\partial_1 f(0) + \cos(t)\partial^\alpha\partial_2 f(0) \tag{5.8}$$

其中我们使用了显式表达式 $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$，因此 $\dot\gamma(t) = (-\sin(t), \cos(t))$。由于 $\operatorname{div}_g(X) = 0$，我们得出

$$\partial_1(\sqrt{\det g}f) + \partial_2(\sqrt{\det g}h) = 0. \tag{5.9}$$

现在我们可以对 (5.9) 两边应用 ∂^α，并注意到，只有 $\partial^\alpha\partial_1$ 完全作用于 f 且 $\partial^\alpha\partial_2$ 完全作用于 h 的项不为零，因为 p 是 n阶零点。因此，根据莱布尼茨法则可得

$$\partial^\alpha\partial_1 f(0) = -\partial^\alpha\partial_2 h(0). \tag{5.10}$$

类似地，我们回想起 $\operatorname{curl}_g(X) = 0$，这意味着

$$\partial_1(g_{12}f + g_{22}h) = \partial_2(g_{11}f + g_{12}h).$$

再次对两边应用 ∂^α，此时除所有导数都作用于 f 或 h的项外，其余项均为零。此外，我们注意到，根据所选坐标系，有 $g_{ij}(0) = \delta_{ij}$，因此得到恒等式

$$\partial^\alpha\partial_1 h(0) = \partial^\alpha\partial_2 f(0). \tag{5.11}$$

现在我们可以将 (5.11) 和 (5.10) 代入 (5.8)，从而推得

$$\dot\gamma^m\partial^\alpha\partial_m f(0) = \gamma^m\partial^\alpha\partial_m h(0) \tag{5.12}$$

这里我们再次使用了 γ 的显式表达式。同理可推得

$$\dot\gamma^m\partial^\alpha\partial_m h(0) = -\gamma^m\partial^\alpha\partial_m f(0) \tag{5.13}$$

对于所有多重 指标 $|\alpha| \leq n$。我们可以将 (5.12) 和 (5.13) 代入 (5.7)，从而推得分子等于最小化分母，因此 (5.7) 可简化为 $\operatorname{ind}_p(X) = -(n+1) = -(m(p)+1)$，正如所需。

最后，为了说明确实可以约去该分式，我们需要论证 (5.7) 中被积函数的分母非零。为此，注意到若对于某个固定的 $t \in [0, 2\pi]$，分母为零，那么反复利用恒等式 (5.12) 和 (5.13)，便可得出

$$\gamma^{i_1}..\gamma^{i_k}\dot\gamma^{j_1}..\dot\gamma^{j_{n+1-k}}\partial_{i_1}..\partial_{i_k}\partial_{j_1}..\partial_{j_{n+1-k}} f(0) = 0 = \gamma^{i_1}..\gamma^{i_k}\dot\gamma^{j_1}..\dot\gamma^{j_{n+1-k}}\partial_{i_1}..\partial_{i_k}\partial_{j_1}..\partial_{j_{n+1-k}} h(0)$$

对每个 $0 \leq k \leq n+1$，因此，由于 $\gamma(t)$ 和 $\dot\gamma(t)$ 构成了 $\mathbb{R}^2$ 的基，对每个 $t \in [0, 2\pi]$，我们可推得，对于所有多重指标 $|\tilde\alpha| \leq n+1$，$\partial^{\tilde\alpha} f(0) = 0 = \partial^{\tilde\alpha} h(0)$，这与 p 是 n 阶零点这一事实矛盾。因此，结论成立。

□

我们得到以下显而易见且众所周知的推论；另请参见 [48, 定理 7]，其中针对二维环面的相关更强结果是通过不同的方法得出的。

推论 5.5. 设 (Σ, g) 是一个无边界的定向紧致光滑黎曼二维流形，我们定义 $\mathcal{H}(\Sigma) := \{\gamma \in \mathcal{V}(\Sigma) \mid \mathrm{div}_\Sigma(\gamma) = 0 = \text{旋度}_\Sigma(\gamma)\}$。则有以下结论

i) 若 Σ 是一个亏格为 $h \in \mathbb{N}_0$ 的曲面，则每个 $\gamma \in \mathcal{H}(\Sigma) \setminus \{0\}$ 至多有 $(2h-2)$ 个零点。

ii) 若 $\Sigma \cong S^2$，则 $\mathcal{H}(\Sigma) = \{0\}$。 iii) 若 $\Sigma \cong T^2$，则每个 $\gamma \in \mathcal{H}(\Sigma)$ 要么恒等于零，要么处处不为零。

Proof of Corollary 5.5. 若 $\gamma \in \mathcal{H}(\Sigma)\setminus\{0\}$，则根据引理 5.4 γ 只有孤立零点，因为 $\partial\Sigma = \emptyset$。此外，根据庞加莱-霍普夫定理，参见 [43, 第 6] 章，我们必有 $\sum_{p\in\{\gamma=0\}} \mathrm{ind}^2 - 2h \quad \chi\ \Sigma$ $\Sigma \quad h \in \mathbb{N}_0 \quad \Sigma$ ( ) (Σ)，其中 ( ) 表示 的欧拉示性数，而 表示 的亏格。

令 N 表示 γ 的零点数，由引理 5.4 和上述公式可得

$$2 - 2h = \sum_{p\in\{\gamma=0\}} \mathrm{ind}_p(\gamma) = -\sum_{p\in\{\gamma=0\}} (m(p)+1) \le -N \Rightarrow N \le 2h-2.$$

其余两个结论由以下事实得出： S^2 的亏格为 $h=0$，而 T^2 的亏格为 $h=$ 1. □

最后，w e 将需要散度为零的向量场具有以下性质 lds.

引理 5.6。 设 (Σ, g) 是一个定向、连通（不一定紧致的）、无边界的光滑黎曼二维流形，且 $j \in \mathcal{V}_0(\Sigma)$。那么，对任意一个从 j 上某个 $p \in \Sigma$ 出发的真周期轨道 γ_p，存在某个 $\delta > 0$，使得从某个 $q \in \Sigma$ 出发的 j 的每条轨道 γ_q，只要满足 $\mathrm{dist}_g(\gamma_q, \gamma_p) < \delta$，便与 γ_p 紧支撑环境同痕，其中 d_g 表示标准诱导黎曼距离。

Proof of Lemma 5.6. 我们首先定义向量场 $Y := \mathcal{N} \times j$，其中 $\mathcal{N}$ 表示 Σ 的任意光滑单位法向场（此处可以认为 Σ 嵌入于 $\mathbb{R}^3$ 中，但不一定是等距嵌入，且相关量均相对于拉回度量来考虑；或者，借助音乐同构将 j 与一个 1-形式对应，再对该 1-形式应用霍奇星算子，即可由 j 得到 Y）。我们注意到 $\mathrm{curl}_\Sigma(Y) = 0$，并令 γ 表示 γ_p 的像。由于 γ 是真周期轨道，我们可以找到一个围绕 γ 的开邻域 U，使得 $j \neq 0$ 属于 U，从而 $Y \neq 0$ 属于 U。接着，根据定理 9，我们可以考虑从 γ 出发的 $\frac{Y}{|Y|^2}$ 的流出，[37, 20]，这给出一个微分同胚 $\psi : (-\epsilon, \epsilon) \times \gamma \to U$（必要时可缩小 U），且 $\psi|_{\{0\}\times\gamma} = \mathrm{Id}$。我们注意到 $U \cong (0,1) \times S^1$，并且 γ 是 U 的第一基本群的一个生成元。随后可以验证 $\int_\gamma Y = 0$，因为 γ 与 j 相切，而 j 与 Y 垂直。由于 Y 无旋且 γ 是一个生成元，我们得出 Y 沿任意闭曲线的积分为零，且无旋，因此 Y 在 U 内存在标量势，即对于某个适当的函数 $f \in C^\infty(U)$，有 $Y = \nabla_\Sigma f$。

现在，直接计算表明，对于固定的 $p \in \gamma$， $\frac{d}{dt} f(\psi(t,p)) = \nabla_\Sigma f \cdot \frac{Y}{|Y|^2} = 1$ 其中我们用到了 $Y = \nabla_\Sigma f$，并且根据流出的定义， $\psi(t,p)$ 与从 p 出发的 $\frac{Y}{|Y|^2}$ 的积分曲线重合。由此容易得出， ψ 定义了 f 的各水平集之间的一个微分同胚。此外，由于 $\nabla_\Sigma f$ 法向于其水平集，而 $j \cdot \nabla_\Sigma f = 0$， j 必须切向于 f 的水平集，因此若 $d_g(\gamma_q, \gamma_p)$ 足够小，使得 $\gamma_q \cap U \neq \emptyset$，我们便得出 $\gamma_q \subset U$，并且它本身是一条周期轨道。

根据上述论证， γ_q 的像将与 f 的某个水平集 τ 重合（不失一般性， $\tau \ge 0$）。然后我们可以将 $\frac{Y}{|Y|^2}$ 乘以某个隆起函数 ρ，它在 $\psi([-\tau-\kappa, \tau+\kappa] \times \gamma)$ 上恒等于 1，而在 $\psi((-\epsilon, -\epsilon+\kappa) \times \gamma) \cup \psi((\epsilon-\kappa, \epsilon) \times \gamma)$ 上恒等于零，其中 $\kappa > 0$ 足够小，使得 $\rho \frac{Y}{|Y|^2}$ 容许一个全局定义的流 Ψ，该流在限制到 $[0,\tau] \times \gamma$ 上时与流出 ψ 重合。于是 Ψ： $[0,\tau] \times \Sigma \to \Sigma$ 产生一族连续的同胚，使得 γ_p 与 $\Psi_\tau \circ \gamma_p$ 环境同痕。最后，γ_q 与 $\Psi_\tau \circ \gamma_p$ 具有相同的像，并且以相同的方式定向，因此这些曲线的光滑性蕴含它们是环境同痕的；关于这一论证的详细说明，见 [19, 命题 A.1.13] 的证明。

由于环境同痕的概念是一种等价关系（参见注 3.7），我们得出结论： γ_p 和 γ_q 环境同痕，证毕。

□

5.2 定理1.1的证明

以下是该定理的精确数学表述

定理 5 7 *Let $T^2 \cong \Sigma \subset \mathbb{R}^3$ be a smooth toroidal surface and let* 。(环形电流的一般行为)。 0,, $j \in \mathcal{V}_0$ Σ . *Then generically c.f. Lemma 5.1 we have the following dichotomy:*

i) Either $j(p) \neq 0$ for all $p \in \Sigma$ and if this is the case, then j is semi-rectifiable,

ii) or $j(p) = 0$ for some $p \in \Sigma$. If this is the case, then the flow of j has the following properties

(a) The flow of j admits at least one centre- as well as saddle-point region c.f. Definition 3.1 and ,, Definition 3.2 and the number of centre regions coincides with the number of saddle regions.

(b) Every singular point of j is either a centre singularity or a saddle singularity.

(c) All but finitely many orbits of j are periodic and the number of non-periodic orbits of j coincides with the number of singular points of j.

(d) The ω- and α-limit set of each non-periodic orbit coincides with precisely one saddle point of j respectively (the ω- and α-limit set may, but need not to, consist of the same point).

(e) Let $\Gamma \subset \Sigma$ denote the union of all saddle singularities and non-periodic orbits of j. Then $U := \Sigma \setminus \Gamma$ is an open subset consisting of finitely many connected components $U_1 \ldots U_n$ for some $n \in \mathbb{N}$. ,,

(f) If some U_i contains a (necessarily centre) singularity then all orbits of j starting in U_i are contractible i.e. they represent the trivial element of the first fundamental group of Σ. ,

(g) If $j(p) \neq 0$ for all $p \in U_i$ then any two orbits of j starting in U_i are ambient isotopic relative to U_i within Σ.

注记 5.8. 我们强调，引理 5.1 和定理 5.7 对配备任意光滑黎曼度量 g 的环面曲面 Σ 也同样成立。

Proof of Theorem 5.7. 我们先考虑对所有 $p \in \Sigma$ 都有 $j(p) \neq 0$ 的情形。我们可以考虑 $Y := \mathcal{N} \times j$，其中 $\mathcal{N}$ 表示外单位法向量。这就定义了 Σ 上处处不为零的无旋向量场，并且处处满足 $Y \cdot j = 0$。于是，半可矫直性可直接由 [48, 定理 9] 得出。我们注意到，迄今为止我们并未使用关于向量场 j 的一般性假设。

现在我们注意到，根据引理 5.1，只需对仅有非退化零点的向量场 $j \in \mathcal{V}_0(\Sigma)$证明二分性即可。显然，要么对所有 $p \in \Sigma$ 都有 $j(p) \neq 0$，要么 j 在 Σ 中有一个零点。因此，接下来只需在假设 j 存在一个零点的条件下证明性质 (a)-(g)。

假设 $j(p) = 0$ 对于某个 $p \in \Sigma$成立。由于 j 的所有零点都是非退化的，j 的任意零点的指标不是 $+1$ 就是 -1，参见第 6 章：引理 4、引理 5]。此外，由于非退化零点是孤立的，因此 j 只有孤立零点。根据 Poincaŕe-Hopf 定理，[43, 第 6], 章，j 所有零点的指标之和等于 Σ 的欧拉示性数；由于 $\Sigma \cong T^2$，该数为 0。根据假设，j至少存在一个零点，因此事实上必定至少有一个指标为 $+1$ 的零点 p_+，以及一个指标为 -1的零点 p_-。

现在我们首先证明，指标为 -1 的零点对应一个鞍点区域。为此，我们在以 p_-为中心的法坐标中进行讨论。我们注意到，点 p_- 处对应的雅可比矩阵有 2 个（复）特征值 $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{C}$。由于 j 是散度为零的，且我们使用的是法坐标，因此可以立即得出，j 在点 p_- 处的雅可比矩阵迹为零，故 $\lambda := \lambda_1 = -\lambda_2$。此外，由于雅可比矩阵的所有元素均为实数，其行列式也必为实数，且可表示为 $-\lambda^2 = \det Dj(p_-) \in \mathbb{R}$（其中雅可比矩阵是在法坐标中计算的）。还要注意，雅可比矩阵在 p_- 处非奇异，因此 $\lambda \neq 0$。我们得出结论：λ 要么为实数且非零（对应于行列式为负），要么为纯虚数（且非零），对应于行列式为正。由于 p_- 处的指标等于 -1，且对应于 j 在 p_-处的雅可比矩阵行列式的符号，参见 [43, 第 6], 章，因此我们得出 $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$，从而 $Dj(p_-)$ 的两个特征值均为实数、非零且异号。正如注 3.3 中所述，根据 Hartman-Grobman定理，j 存在一个鞍点区域。

现在我们将论证，指标为 $+1$ 的零点 p_+ 对应于一个中心区域。注意，由上述论证，j 在 p_+ 处的雅可比矩阵的特征值为纯虚数，因此Hartman-Grobman定理不再适用。相反，我们固定 p_+ 周围的任意可缩邻域 U，并定义向量场 $w := j \times \mathcal{N}$。由于 j 散度为零，我们得出旋度$_\Sigma(w) = 0$，并且进一步可验证$j = \mathcal{N} \times w$。由 U 的可缩性，我们可以在 U 内表示 $w = \nabla_\Sigma f$（其中 $f(p_+) = 0$）。此外，显然 $\nabla_\Sigma f(p_+) = w(p_+) = 0$，因为 $j(p_+) = 0$，并且通过在法坐标中计算容易验证，p_+ 是 w 的非退化零点，因为它是 j 的非退化零点，而且 w 在 p_+ 处的指标等于 $+1$。因此，p_+ 是 f 在 U 中的非退化临界点，相应的海森矩阵要么正定，要么负定。因此我们可以应用莫尔斯引理，[42, 引理2.2], ，并找到 p_+ 周围的一个坐标系 μ，在其中 f 取形式 $f(x, y) = x^2 + y^2$ 以及 $\mu(p_+) = 0$，其中我们不失一般性地假设 f 在 p_+ 处的海森矩阵正定。我们进一步由 j 的定义以及由于 $\nabla_\Sigma f = w$ 观察到 $df(j) = j(f) = j \cdot \nabla_\Sigma f = 0$。此外，由 f在给定局部坐标系中的表达式立即可知，向量场$(-y, x)$在每个$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$处张成微分 df的核。我们已经观察到 $j(x, y)$也位于 df的核中

对每个(x,y)，从而（由于核是一维的）我们得出，在我们的坐标系中，对所有$(x,y)\neq 0$，有$j(x,y)=h(x,y)(-y,x)$，其中h是一个适当的非零标量函数（因为j在p_+的去心邻域中不消失）。我们注意到$(-y,x)$的场线都是不含零点的圆，因此在每个圆上h都与零有正距离下界。因此，j的场线也在$(0,0)$周围形成圆。因此我们可以令$W:=\mu^{-1}(B_r(0))$为$(0,0)$周围一个足够小的欧几里得球的原像，并得出$W\setminus\{p_+\}$由j的真周期轨道组成。这证明j的流具有一个中心区域。

因此，我们已经刻画了j在其所有奇点周围的流的行为，并证明至少存在一个鞍点和一个中心区域。

为证明陈述 (ii) 中对j的场线的刻画，我们注意到，在以任意一个固定奇异点为中心的法坐标中，局部而言，j满足一个 Lojasiewicz 型不等式$|j(q)|\geq C|q|$，其中某个$C>0$以及该邻域内所有的q均成立。若情况并非如此，则存在一个序列$q_n\to 0$，使得$\frac{|j(q_n)|}{|q_n|}\to 0$；又由于在我们的坐标系中$j(0)=0$，根据微分的定义，这意味着$Dj(0)\cdot\frac{q_n}{|q_n|}\to 0$。然而，由于$S^1$的紧致性（取子列后），$\frac{q_n}{|q_n|}\to q\neq 0$，因此对某个$q\neq 0$有$Dj(0)\cdot q=0$，这与$Dj(0)$的可逆性矛盾。由 [8,Theorem 1] 可直接推出，j的所有轨道都是真周期轨道，但奇异点以及连接奇异点的非周期轨道除外。

由于指标为$+1$的点对应于中心区域，因此不能与之连通，因为不同轨道不会相交，我们得出所有非周期轨道都连接鞍点奇点。现在，众所周知，ω-极限集是连通的；又由于它包含于j的零点集中，而该零点集由孤立点组成，因此只要$q\in\Sigma$满足γ_q非周期，且$p\in\Sigma$是j的一个适当鞍型奇点，就必有$\omega(q)=\{p\}$。鞍点奇点恰有两条入射场线和两条出射场线，参见图 1。因此，j的每个鞍点奇点p都恰好包含在两个（不同的）非周期轨线的ω-极限集和α-极限集中。因此，必定恰有$2\cdot$个$\{p\in\Sigma\mid p$是鞍点奇点$\}$非周期轨线。但正如我们所见，根据庞加莱-霍普夫定理，中心奇点的数量与鞍点奇点的数量相同，并且每个奇点不是中心型就是鞍型，因此非周期轨道的总数与奇点的总数相同。

现在令$\Gamma\subset\Sigma$表示j的所有非周期轨道与鞍点奇点的并集。根据前面的论证，我们可以观察到，Γ也可等价地表示为j的非周期轨道的闭包之并。由于这样的轨道只有有限条，Γ是有限个闭集之并，因而是闭集，所以$U=\Sigma\setminus\Gamma$是开集。此外，若U有无限多个连通分支，我们就可以抽取一个序列$(p_n)_n\subset U$，使得每个p_n都包含于一个不同的连通分支中，并且对某个适当的$p\in\Sigma$有$p_n\to p$。根据构造，必有$p\in\Gamma$。若p是鞍点奇点，那么根据定义 3.2（另见图 1），非周期轨道将p周围的某个适当邻域至多分成 4 个连通分支，因此，无限多个p_n必定包含在同一个分支中，这与p_n的选取相矛盾。剩下的情况是，p包含在j的一条非周期轨道γ中。然而，由于j的非周期场线的ω极限集和α极限集都只由鞍点构成，我们可以得出结论：$\Gamma\setminus\gamma$与p之间必有正距离。因此，在p附近，至多只有两个不同的连通分支能够相交，从而再次得到矛盾。由此可知，U确实只有有限多个连通分支。

最后，任取U的一个连通分支U_i，记$P_i:=\{p\in U_i\mid j(p)=0\}$，并令$W_i:=U_i\setminus P_i$。我们注意到，$P_i$至多由有限个点组成，因此$W_i$都是连通开集，故其自身也是流形；并且根据我们已经证明的结果，从某个W_i出发的j的所有轨道都是真周期轨道。

我们首先断言，W_i中的任意两条轨道都相对于W_i环境同痕。为此，固定$p\in W_i$，并定义集合$S:=\{q\in W_i\mid\gamma_q$相对于$W_i\}$与$\gamma_p$环境同痕，其中$\gamma_p$表示从$p$出发的$j$的场线。显然，$p\in S$，因此$S\neq\emptyset$。此外，若$q\in S$，则根据引理 5.6，存在某个$\delta>0$，使得对于所有$x\in B_\delta$，$\gamma_x(q)$在$W_i$内与$\gamma_q$紧支撑环境同痕，因此特别地，它相对于$W_i\subset\Sigma$与$\gamma_q$环境同痕。于是，根据$S$的定义以及相对于某个集合的环境同痕的传递性，我们得出$B_\delta(q)\subset S$，故S是开集。类似地，若$(q_n)_n\subset S$收敛于某个$q\in W_i$，则根据引理 5.6，当n充分大时，γ_{q_n}成立，并且γ_q与W_i内的$q\in S$紧支撑环境同痕；再次利用传递性可得S，即S是闭集。总之，S是连通集W_i的非空既开又闭子集，因此$W_i=S$，从而证明了该断言。特别地，若$j(p)\neq 0$位于U_i中，则$U_i=W_i$，第 (g) 条随之成立

最后，如果$P_i\neq\emptyset$，即U_i包含j的（中心）奇点，那么由于中心区域包含在Σ内可缩的真周期轨道，根据前述环境同痕，U_i内的所有轨道都必须是可缩的。更确切地说，所有从P_i出发的轨道都是常值轨道，因此可缩；而所有从W_i出发的轨道都将与围绕某个中心奇点的可缩轨道环境同痕，因此自身也是可缩的。

□

5.3 定理 1.3 的证明

现在我们给出该定理精确的数学表述

定理 5 9 *Let $S^1 \times [0,1] \cong \Sigma \subset \mathbb{R}^3$ be a smooth cylindrical*。（柱状流的一般行为）。（）,, *surface and let $j \in \mathcal{V}_0^{\mathrm{OT}}\ \Sigma$. Then generically c.f. Lemma 5.2 the flow of j has the following properties:*

i) The flow of j admits at least one centre and one saddle region and the number of centre regions coincides with the number of saddle regions.

ii) Every singular point of j is either a centre singularity or a saddle singularity.

iii) All but finitely many orbits of j are periodic and the number of non-periodic orbits of j coincides with the number of singularities of j.

iv) The ω- and α-limit set of each non-periodic orbit coincides with precisely one saddle point of j respectively (the ω- and α-limit set may, but need not to, consist of the same point).

v) Let $\Gamma \subset \Sigma$ denote the union of all saddle singularities and non-periodic orbits of j. Then U_i $= \Sigma \setminus \Gamma$ is an open subset consisting of finitely many connected components $U_1 \ \ldots \ U_n$ for some $n \in \mathbb{N}$. ,,

vi) If U_i contains a singularity, then all orbits of j starting in U_i are contractible.

vii) If $U_i \cap \partial\Sigma = \emptyset$ and U_i does not contain any singularities of j then any two orbits of j starting in U_i are ,int() *ambient isotopic relative to U_i within Σ .*

viii) The connected components U_i with $U_i \cap \partial\Sigma \neq \emptyset$ consist of poloidal orbits of j i.e. of proper periodic , orbits which represent non-trivial elements of the first fundamental group of Σ.

Proof of Theorem 5.9. 根据引理 5 2 $j \in$ ，我们只需对 $\mathcal{V}_0^{\mathrm{OT}}\ \Sigma$ Σ int( ) 内具有非退化零点的向量场 () 证明该陈述。

我们现在的目标是论证： j 在 int(Σ) 中至少有一个指标为 -1 的零点，并且在 int(Σ) 中有一个指标为 $+1$ 的零点。随后，定理 5.7 的证明中关于鞍点区域与中心区域存在性的论证将原样适用，并表明指标为 $+1$ 的零点对应于中心区域，而指标为 -1 的零点对应于鞍点区域。

正如在引理 5.2 的证明中一样，我们可以找到某个 $\psi \in C^\infty(\Sigma)$，使得 $\psi|_{\partial\Sigma}$ 是局部常值的且 $j = \mathcal{N} \times \nabla_\Sigma \psi$。我们进一步观察到， $j \neq 0$ 在 $\partial\Sigma$ 上这一事实，以及 j 的场线在各边界分支上定向相反，蕴含着 $\nabla_\Sigma \psi \neq 0$ 在 $\partial\Sigma$、$\nabla_\Sigma \psi \perp \partial\Sigma$ 上，并且 $\nabla_\Sigma \psi$ 要么沿两个边界圆均向外指，要么沿两个边界圆均向内指，见图 10。

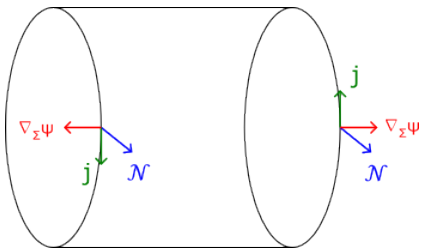

图 10：蓝色的是外单位法向量 $\mathcal{N}$。红色的是向外指向的 $\nabla_\Sigma \psi$，绿色的是 $j = \mathcal{N} \times \nabla_\Sigma \psi$。

首先，由带边界流形的庞加莱–霍普夫定理（参见 [43, 第6], 章），以及圆柱面的欧拉示性数为零这一事实可知， j 的所有零点的指标之和等于零。由于 j 只有非退化零点，我们可以像定理 5.7 的证明中那样得出结论：如果 j 至少有一个零点，那么它实际上必定至少有一个指标为 -1 的零点 p_-，以及至少有一个指标为 $+1$的零点 p_+。更进一步，指标为 $+1$ 的零点数必定与指标为 -1 的零点数相同。

为了说明 j 至少有一个零点（我们不妨假设 $\nabla_\Sigma \psi$ 处处指向外侧），我们利用这样一个事实：由于 $\nabla_\Sigma \psi \perp \partial\Sigma$ 处处非零且指向外侧，当我们接近 $\partial\Sigma$ 的边界圆时， ψ 的值会（严格地）增大。因此，令 $\partial\Sigma = C_1 \cup C_2$ 表示分解为两个边界圆，则存在点 q_1、$q_2 \in \in$int(Σ)，使得 $\psi(q_1) < \min_{q \in C_1} \psi(q)$，以及 $\psi(q_2) < \min_{q \in C_2} \psi(q)$；由此，存在某个 $\widetilde{q} \in \in$int(Σ)，使得 $\psi(\widetilde{q}) < \min_{q \in \partial\Sigma} \psi(q)$。于是（由紧致性） ψ 必然在 int(Σ) 内取得全局最小值，因而至少有一个临界点 x。这意味着 $\nabla_\Sigma \psi(x) = 0$，从而 $j(x) = \mathcal{N}(x) \times \nabla_\Sigma \psi(x) = 0$ 在 int(Σ) 内至少有一个零点。如前所述，这意味着存在至少一个指标为 -1 的零点和一个指标为 $+1$ 的零点，它们分别对应于一个鞍点和一个中心区域。

现在我们将论证，除了有限多个轨道之外，所有轨道都是真周期轨道，而其余轨道则是平衡点以及连接鞍点的非周期轨道。

首先注意到，由于 $\nabla_\Sigma\psi$ 沿着 $\partial\Sigma$ 处处指向外侧，因此对于任意固定的 $s\in\mathbb{R}$，水平集 $\{q\in \text{int}(\Sigma)\mid \psi(q)=s\}$（非空）到 $\partial\Sigma$的距离为正。这意味着，int(Σ)内 ψ 的所有正则水平集都是光滑、紧致且无边界的一维流形，即有限个圆的并，见 [43, 附录]。此外，$j\cdot\nabla_\Sigma\psi=0$，因此 j 与 ψ 的水平集相切，进而从 ψ 的正则水平集出发的 j 的所有轨道都是真周期轨道。显然，两个边界圆也都是 j的真周期轨道。一般位置的场 j 只有有限个奇点（均包含在 int(Σ)内）$p_1,..,p_N\in\text{int}(\Sigma)$，因此临界水平集只有有限个。现在，我们可以固定任意一个这样的临界水平集，并注意到，若从该水平集中移除相应的临界点，剩余的水平集将是一个光滑嵌入的无边界一维流形，因此其连通分支要么对应于真周期轨道，要么对应于与 $\mathbb{R}$ 微分同胚的轨道；而与 $\mathbb{R}$ 微分同胚的轨道恰好就是非周期轨道。

因此，若 γ_q 是非周期轨道，则 q 包含在 ψ 的一个临界水平集的连通分支中，该水平集已去除临界点，且此连通分支与 $\mathbb{R}$微分同胚。众所周知，ω-极限集非空且连通。若存在某个 $p\in\omega(q)$，使得$j(p)\neq 0$，即 $\nabla_\Sigma\psi(p)\neq 0$，那么 p 将属于 γ_q 的像，因为去除了临界点的临界水平集是一个一维流形，因此我们会在有限时间内到达 p；也就是说，γ_q 将是真周期轨道，这与 γ_q 的像和 $\mathbb{R}$微分同胚这一事实矛盾。因此$\omega(q)\subset\{p\in\text{int}(\Sigma)\mid j(p)=0\}$，并且由于 $\omega(q)$连通且零点集孤立，我们得出 $\omega(q)$是一个单点集。

从这里开始，我们可以完全照搬定理 5.7 的陈述 (ii) 中关于有限多个非周期轨道的分类证明，从而得出：非周期轨道的数量恰好等于 j 的奇点数量，并且任意此类轨道的 ω-极限集和 α-极限集分别与 j 的某个鞍型奇点重合。

为完成证明，我们可以考虑 $U:=\Sigma\setminus\Gamma$；与定理 5.7 中的情形一样，可知 U 至多有有限个连通分支。这些分支中至多有两个与 $\partial\Sigma$ 相交。去掉这些分支中的边界圆后，我们可以完全照搬定理 5.7 的证明，得出在每个这样的分支中，若 U_i 包含一个奇点，则所有轨道都是可缩的；否则，$U_i\setminus\partial\Sigma$ 内的所有分支在 int(Σ) 中关于 $U_i\setminus\partial\Sigma$ 环境同痕。最后，若 $\partial\Sigma\cap U_i\neq\emptyset$，则我们可以考虑 $Y:=\frac{\nabla_\Sigma}{(-\psi)\,|\nabla_\Sigma\psi|^2}$ 的向内流；它沿边界指向内部，并给出边界圆与 ψ 的（内部）水平集之间的一个微分同胚。回想一下，$j=\mathcal{N}\times\nabla_\Sigma\psi$，因此，边界圆附近的 j 场线与 ψ 的水平集重合。相应地，若 U_i 包含一个边界圆，则 $U_i\setminus\partial\Sigma$ 内存在与某个不可缩边界圆同伦的 j 场线，因此 U_i 必定仅由极向轨道构成。

□

5.4 定理 1.4 的证明

在本小节中，我们证明以下结果，其中回顾一下 $\mathcal{H}_N(\Sigma)=\{j\in\mathcal{V}(\Sigma)\mid \text{div}_\Sigma(j)=0$ $=$旋度$_\Sigma(j),\ j\parallel\partial\Sigma\}$。

定理 5.10. *Let $[0,1]\times S^1\cong\Sigma\subset\mathbb{R}^3$ be a smooth cylindrical surface and let $j\in\mathcal{H}_N(\Sigma)$. Then*

i) j is either identically zero or is otherwise no-where vanishing.

ii) If j is not identically zero then all of its orbits are proper poloidal orbits i.e. they represent non-trivial,, elements of the first fundamental group of Σ.

Proof of theorem 5.10. 我们假设 j 不恒为零，并首先证明 j 的所有零点都包含在 int(Σ) 中。首先，根据 (1.4)-(1.7)，我们写作 $j=I\mathcal{N}\times\nabla_\Sigma\psi$，其中 $I\in\mathbb{R}$ 是常数，ψ 是以下方程的解

$$\Delta\psi=0\text{ in }\Sigma,\ \psi|_{c_1}=0,\psi|_{c_2}=1 \tag{5.14}$$

其中 $\partial\Sigma=c_1\cup c_2$ 是将 $\partial\Sigma$ 分解为两个边界圆的结果。我们注意到，定理 5.10 中所述的性质在将 j 乘以非零常数后仍然成立，因此我们可以假设 $I=1$。

我们首先证明，对所有 $p\in\partial\Sigma$，$j(p)\neq 0$。为此我们注意到，根据最大值原理（[14, 第 6 章 6.4.2 定理 3],），由于 ψ 不是常数，ψ 只会在其边界上取得最小值和最大值，因此 $\min_{p\in\Sigma}\psi(p)=0$，$\max_{p\in\Sigma}\psi(p)=1$。由霍普夫引理（[14, 第 6 章 6.4.2],）可知，$n\cdot\nabla_\Sigma\psi\neq 0$ 在整个 $\partial\Sigma$ 上成立（因为每个边界点都是全局极值），其中 n 表示 $\partial\Sigma$ 在 Σ内的单位法向量，即 $n\perp\partial\Sigma$；而 $n\cdot\mathcal{N}=0$，其中 $\mathcal{N}$表示曲面 Σ的光滑单位法向量。因此，$\nabla_\Sigma\psi\neq 0$ 在 $\partial\Sigma$ 上成立，从而 $j=\mathcal{N}\times\nabla_\Sigma\psi\neq 0$ 在 $\partial\Sigma$ 上成立，证毕。

现在我们将证明 j 至多有有限个零点。根据引理 5.4，集合 $N := \{q \in \text{int}(\Sigma) \mid \nabla_\Sigma \psi(q) = 0\}$ 至多由可数个点组成，且这些点不会在 int(Σ) 内聚集。因此，若 N 是无限集，那么由 Σ 的紧致性可抽取一个序列 $(p_n)_{n} \subset N$，使其收敛到某个 $p \in \Sigma$。由于 N 不会在 int(Σ) 内聚集，我们可得 $p \in \partial\Sigma$；再由连续性，$\nabla_\Sigma \psi(p) = 0$，即 $j(p) = 0$，这与证明的第一部分矛盾。因此，j 确实至多有有限个零点，且它们都位于 int(Σ) 内。

现在我们将证明 j 根本没有任何零点。为导出矛盾，我们假设 $N \neq \emptyset$。首先运用引理 5.4，推得

$$\sum_{p\in N} \operatorname{ind}_p(\nabla_\Sigma \psi) = -\sum_{p\in N}(m(p)+1) \leq -\sum_{p\in N} 1 \leq -1 < 0 \tag{5.15}$$

这里用到了 ψ 是调和的这一事实，参见 (5.14)。注意，由于 ψ 仅在 c_1处取得其全局最小值，并且仅在 c_2处取得其全局最大值，因此 $\nabla_\Sigma \psi$ 沿着 c_1 指向内侧，沿着 c_2 指向外侧，所以我们不能直接使用庞加莱–霍普夫定理，见第 6]章。相反，我们可以将 $[0,1]\times S^1 \cong \Sigma$嵌入到 $\mathbb{R}^2$中；更确切地说，可以将其映射到标准环域 $A := D_2 \setminus \text{int}(D_1)$，其中 D_r 表示以 $0 \in \mathbb{R}^2$为中心的闭二维欧几里得圆盘。于是，我们可以将 ψ 视为定义在 A 上的函数（稍微滥用一下记号，仍用相同符号表示），并将其延拓为定义在 D_2 上的光滑函数 ψ，使得 $\nabla_g \widetilde{\psi}$（其中 g 是由嵌入 $\Sigma \hookrightarrow \mathbb{R}^2$诱导的拉回度量的任意延拓）只有孤立零点。其实现方式与引理 5.2 的证明思路类似：将 ψ 的任意延拓与适当的莫尔斯函数“粘合”起来。现在，我们可以按照外法向方向给边界圆定向，即将 ∂D_2 定向为逆时针，将 ∂D_1 定向为顺时针。我们用标准欧几里得坐标表示 $\nabla_g \psi = f\partial_1 + h\partial_2$，最后利用这一事实，参见推论 7.7]，，即 $\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D_2} \frac{fdh-hdf}{f^2+h^2} = \sum_{p\in\{q\in D_2 \mid \nabla\widetilde{\psi}(q)=0\}} \text{ind}_p(\nabla_g \widetilde{\psi})$；类似地，由于 ∂D_1 的定向相反，$\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D_1} \frac{fdh-hdf}{f^2+h^2} = -\sum_{p\in\{q\in D_1 \mid \nabla\widetilde{\psi}(q)=0\}} \text{ind}_p(\nabla_g \widetilde{\psi})$，从而得到

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\partial A} \frac{fdh-hdf}{f^2+h^2} = \sum_{p\in N} \operatorname{ind}_p(\nabla_\Sigma \psi). \tag{5.16}$$

现在我们将说明 $\int_{\partial A} \frac{fdh-hdf}{f^2+h^2} = 0$。为此，我们注意到 $\nabla_\Sigma \psi$ 沿着 ∂D_2 指向外侧，因此若令 $\gamma_2(t) = \lambda(t)(\cos(t), \sin(t))$ 为 的一个参数化，我们可以写成 $\rho(t)(\cos(t), \sin(t)) + \lambda(t)(-\sin(t), \cos(t))$，其中 $\rho,$是适当的光滑周期函数，$\rho(t) > 0$ 对所有 都成立。因此我们得到$f(\gamma_2(t)) = \rho(t)\cos(t) - \lambda(t)\sin(t)$，$h(\gamma_2(t)) = \rho(t)\sin(t) + \lambda(t)\cos(t)$，并计算得

$$\int_{\partial D_2} \frac{fdh-hdf}{f^2+h^2} = \int_0^{2\pi} \frac{f\dot{h}-h\dot{f}}{f^2+h^2}dt = \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2+\lambda^2+\rho\dot{\lambda}-\dot{\rho}\lambda}{\rho^2+\lambda^2}dt = 2\pi + \int_0^{2\pi} \frac{\rho\dot{\lambda}-\dot{\rho}\lambda}{\rho^2+\lambda^2}dt.$$

接着我们注意到，由于对所有 t，$\rho(t) > 0$，我们可以考虑定义良好的函数 $k(t) := \arctan\left(\frac{\lambda(t)}{\rho(t)}\right)$，直接计算可得 $\dot{k}(t) = \frac{\rho\dot{\lambda}-\dot{\rho}\lambda}{\rho^2+\lambda^2}$，因此 $\int_0^{2\pi} \frac{\rho\dot{\lambda}-\dot{\rho}\lambda}{\rho^2+\lambda^2}dt = 0$，因为 $k(t)$ 是 2π-周期的。由此我们得到$\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D_2} \frac{fdh-hdf}{f^2+h^2} = 1$；同理可得 $\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D_2} \frac{fdh-hdf}{f^2+h^2} = -1$，其中负号源于我们沿顺时针方向确定 ∂D_1 的取向。因此，正如所声称的，$\frac{1}{2\pi}\int_{\partial A} \frac{fdh-hdf}{f^2+h^2} = 1-1 = 0$。于是我们可以结合 (5.16) 和 (5.15)，从而推出

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial A} \frac{fdh-hdf}{f^2+h^2} = \sum_{p\in N} \operatorname{ind}_p(\nabla_\Sigma \psi) = -\sum_{p\in N}(m(p)+1) < 0$$

这就产生了矛盾。由此可得，$\{q \in \text{int}(\Sigma) \mid \nabla_\Sigma \psi(q) = 0\} = N = \emptyset$，因此总而言之，$\nabla_\Sigma \psi$ 在 Σ 中处处不为零，$j = \mathcal{N} \times \nabla_\Sigma \psi$也如此。

此处也请读者参阅 [1, 定理 1.1、定理 2.1 和定理 2.2]，了解关于平面上（欧几里得）调和函数以及满足更一般椭圆方程的函数的临界点重数的相关结果。

为了完成证明，我们还需要论证 j 只有极向周期轨道。首先，由于$j \parallel \partial\Sigma$ 和 $j \neq 0$ 位于 Σ 上，我们可以得出结论：两个边界圆（均为极向）是 j的场线。我们在本证明开头还看到，ψ 恰好在边界圆 c_1 上取得其全局最小值，并恰好在边界圆 c_2上取得其全局最大值。这意味着 $0 < \psi < 1$ 位于int(Σ)内，并且对任意固定的 $0 < s < 1$，每个水平集 $\{\psi = s\}$ 都是紧致的正则水平集，因为 $\nabla_\Sigma \psi \neq 0$ 在Σ上。由此可得，每个水平集 $\{\psi = s\}$ 都是有限个光滑嵌入圆的并，关于一维流形的分类，参见 [43, 附录] 。我们进一步注意到 $j \cdot \nabla_\Sigma \psi = 0$，因为 $j = \mathcal{N} \times \nabla_\Sigma \psi$。因此，$j$

在 ψ 的水平集上切向且处处不为零，因此 j 的所有轨道都必定是非恒定的周期轨道。根据引理5.3，这些周期轨道都不可能是可缩的，因此 j 的所有轨道都必定是极向的，即代表第一基本群中的非平凡元素。

j 的流不含任何鞍点或中心区域，这直接源于 $j \neq 0$ 在整个 Σ上。

□

5.5 定理 1.6 的证明

我们将证明以下结果。

定理 5 11 *Let $S^1 \times [0,1] \cong \Sigma \subset \mathbb{R}^3$ be a smooth cylindrical surface and $j \in \mathcal{V}_0\ \Sigma$ with $j \parallel \partial\Sigma$. Then。 () there exists some $S \subset \Sigma$ of zero area such that every orbit of j starting at some $p \in \Sigma \setminus S$ is periodic.*

In addition, if γ_p is a non-periodic orbit of j starting at some $p \in \Sigma$, then $\omega(p) \subset \{q \in \Sigma \mid j(q) = 0\}$. In particular if $j\ p \neq 0$ for all $p \in \Sigma$ then all orbits of j are proper periodic orbits and they all represent non ,( ) , trivial elements of the first fundamental group of Σ.

Proof of Theorem 5.11. 证明的第一部分是对 [26, 定理 14.1.1] 中给出的庞加莱-本迪克松定理证明的修改版。

我们首先注意到，根据庞加莱的回归定理，参见定理1.5，我们可以找到一个零面积集合 $S \subset \Sigma$，使得其中每个 $p \in \Sigma \setminus S$ 都是（正向）回复点；也就是说，存在一个序列 $t_k \equiv t_k(p) \to \infty$，满足 $\gamma_p(t_k) \to p$，其中 γ_p 表示从 p 出发的 j 的场线。我们声称，任何这样的轨道本身就是周期的。由于边界的面积为零，我们不妨假设 $p \in \text{int}(\Sigma)$。若 $j(p) = 0$，则无需证明任何内容，因此从现在起我们还假设 $j(p) \neq 0$ 和 $p \in \omega(p)$，即点 p 是正向回复的（注意，与 [26, 定理 14.1.1] 中的说法不同，我们事先并不知道整个轨道 $\gamma_p(\mathbb{R})$ 是否正向回复）。现在根据 [37, 定理 9.22]，我们可以在 p 周围找到一个坐标系 $\mu\colon U \to \mathbb{R}^2$，使得 j 在区域 U 内可表示为 ∂_1。于是我们可以考虑向量场 $Y := j \times \mathcal{N}$，其中 $\mathcal{N}$ 表示 Σ的外单位法向量。由于 $j \neq 0$ 在 U 内， Y 也如此，因此我们可以考虑从 p 出发的 Y 的（局部定义的）场线 γ_p^Y；该场线处处与 j 横截。适当缩小 U 后，我们不妨假设 $\mu(U) = D_r$ （以 0 为中心、半径为 r 的二维圆盘），且 γ_p^Y 与 D_r 内每一条平行于 x 轴的直线恰好相交一次，见图11。

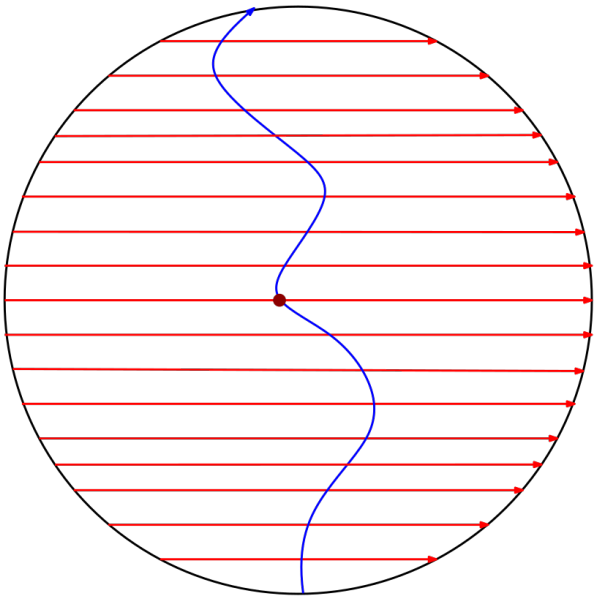

图11：图示圆盘 D_r。点 p 在中心处以一个粗点标出。 j的场线（红色）对应于从左向右延伸的直线。场线 γ_p^Y（蓝色）与 j横截，即永不与 x 轴平行，因此始终向上（或始终向下）移动。

由于 p 是（向前）回归的，因此存在最小的 $\tau > 0$，使得 $\gamma_p(\tau) \cap \gamma_p^Y \cap D_r \neq \emptyset$。接着，我们可以将 $\gamma_p[0,\tau]$和 $\gamma_p^Y[0,\tau_Y]$的路径拼接起来（必要时反转方向），从而得到一条闭合的（分段光滑）曲线 γ，见图12，其中 τ_Y满足 $\gamma_p^Y(\tau_Y) = \gamma_p(\tau)$。

它 n 由霍奇分解定理、 [53, 定理2.4.2和定理2.4.8], 以及（1.4）可得 -
（1.7）表明 $j = \mathcal{N} \times \nabla_\Sigma f$ 对于适当的函数 $f \in C^\infty(\Sigma)$，该函数在 $\partial\Sigma$ 上局部恒定，其中我们使用了

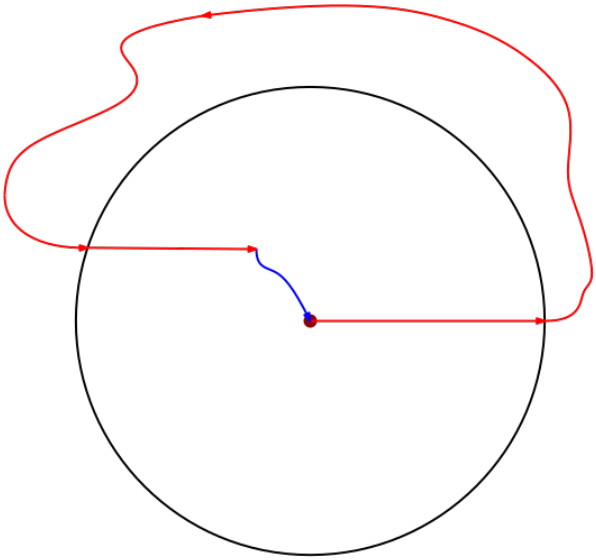

图 1 p：描绘了圆盘 D_r，其中点 p 在中心处标记为一个粗点。j 的场线γ_p（红色）在 D_r 内是一条直线，但在 D_r外可能发生弯曲。最终，该场线 γ_p再次进入圆盘 D_r，并将与场线 γ_p^Y（蓝色）相交；后者对应于 D_r 内的曲线段，而该曲线段不与 x-轴平行。这两条曲线共同构成闭曲线 γ。

由于 j 是散度为零的且 $j \parallel \partial\Sigma$。另一方面，由于 γ 是闭曲线，我们得到

$$\int_\gamma df = 0. \tag{5.17}$$

另一方面，$\gamma = \gamma_p[0,\tau] \oplus \gamma_p^Y[0,\tau_Y]$，因此我们也得到

$$\int_\gamma df = \int_{\gamma_p[0,\tau]} df + \int_{\gamma_p^Y[0,\tau_Y]} df = \int_{\gamma_p^Y[0,\tau_Y]} df = \int_0^{\tau_Y} |Y\left(\gamma_p^Y(s)\right)|^2 ds$$

其中我们利用了 $\dot\gamma_p$与 j相切，j与 $\nabla_\Sigma f$逐点正交，以及$Y = j \times \mathcal{N} = \nabla_\Sigma f$。因此，由（5.17）可得 $0 = \int_0^{\tau_Y} |Y(\gamma_p^Y(s))|^2 ds$，从而由于 $Y \neq 0$ 在 D_r内，$\tau_Y = 0$。但根据 τ的定义，这意味着 $\gamma_p(\tau) = \gamma_p^Y(\tau_Y) = \gamma_p^Y(0) = p$，因此 γ_p是周期的，因为 $\tau > 0$。

最后，我们将论证：若 $q \in \Sigma$ 满足 γ_q（从 q出发的 j 的轨道）非周期，则 $\omega(q) \subset \{p \in \Sigma \mid j(p) = 0\}$。

反设存在某个 $p \in \omega(q)$，使得 $j(p) \neq 0$。于是，我们可以像之前一样，取 p 周围的一个坐标图，使得 $j = \partial_1$ 在此坐标图内满足 [37, 定理 9.22 和定理 9.35]；同时，我们也可以像之前一样考虑 $Y = j \times \mathcal{N}$（选择单位法向量 $\mathcal{N}$，使得在 $p \in \partial\Sigma$的情况下，Y指向内侧）。类似地，对于某个 $\epsilon > 0$，若 $p \in \partial\Sigma$，我们可以考虑从 p 出发的 Y的场线 γ_p^Y（它将在区间 $[0,\epsilon$上定义）。由于 p 是回归的，因此存在最小时间 $\tau_1 > 0$，使得 γ_q 与 $\gamma_p^Y \cap D_r$ 相交；也存在最小时间 $\tau_2 > \tau_1$，使得 γ_q 再次与 $\gamma_p^Y \cap D_r$相交。接着，我们可以考虑由曲线段 $\gamma_q([\tau_1,\tau_2])$ 以及连接这两点的 γ_p^Y 部分组成的闭曲线 $\widehat{\gamma}$。这样便得到一条闭曲线，我们可以仿照 (5.17) 的论证，得出 γ_q 在时刻 τ_1 和 τ_2 与 γ_p^Y相交的两个点必定重合，因此 γ_q 是真周期轨道，这与我们关于 γ_q 非周期的假设相矛盾。

因此，若 $j \neq 0$ 属于 Σ，则 j 不可能存在非周期轨道，因为每条轨道都有非空的 ω-极限集。若存在任何此类轨道是可缩的，它就会围成一个圆盘；正如前文多次论证的那样，这将意味着 Σ 中存在一个零点，这显然荒谬。

□

致谢

本工作　　得到了 Inria AEX StellaCage 的支持。研究还部分得到了 MIUR Ex　颁予热那亚大学数学系的卓越系项目，CUP

D33C23001110001。我们感谢 Mario Sigalotti 和 Ugo Boscain 提供的宝贵讨论，也感谢 Renaissance Fusion SCIENCE 团队。

具有更一般边界条件的圆柱面上的泛型流

引理 A. 1 $S^1 \times [0,1] \cong \Sigma \subset \mathbb{R}^3$ $\mathcal{V}_0^{\mathrm{T}}$ Σ $= \{j \in$ 。设为一个光滑圆柱面，并考虑集合 ( ): $\mathcal{V}_0$ Σ $\mid j \parallel \partial\Sigma$ $j \neq 0$ $\partial\Sigma\} \subset \mathcal{V}$ Σ ( ) 以及在 ( ) 上的条件。那么该集合

$$\{j \in \mathcal{V}_0^{\mathrm{T}}(\Sigma) \mid j \text{ has only non-degenerate zeros}\}$$

是 $\mathcal{V}_0^{\mathrm{T}}(\Sigma)$ 的泛型子集。

Proof of Lemma A.1. 引理 5.2 的证明稍作相应调整即可适用。 □

定理 A.2. *Let $S^1 \times [0,1] \cong \Sigma \subset \mathbb{R}^3$ be a smooth cylindrical surface and let $j \in \mathcal{V}_0^{\mathrm{T}}(\Sigma)$. Then generically, c.f. Lemma A.1 the flow of j satisfies the following dichotomy* ,

i) j(p then all field lines of j are proper periodic orbits which are all) $\neq 0$ for all $p \in \Sigma$. If this is the case,, poloidal i.e. represent a non-trivial element of the first fundamental group of Σ.

ii) $j(p) = 0$ for some $p \in \Sigma$. If this is the case then the flow of j satisfies properties (i)-(viii) listed in Theorem 5.9

Proof of Theorem A.2. 若对所有 $p \in \Sigma$ 均有 $j(p) \neq 0$，则关于流的结论可由定理 5.11 得出。另一方面，若对某个 $p \in \Sigma$ 有 $j(p) = 0$，则要么 j 在边界圆上定向相反，因此该结论直接由定理 5.9 得出；要么，由于零点的非退化性， j 只有有限个零点，我们可以仿照定理 5.10 的证明，论证 $\sum_{p \in \{j=0\}} \mathrm{ind}_p(j) = 0$。基于这一点，并且根据假设， j 至少有一个零点，定理 5.9 的其余论证即可适用，从而得证。

□

参考文献

[1] G. Alessandrini 和 R. Magnanini。平面上椭圆方程解的孤立临界点指标。 *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze Serie 4* 19 4 567 598, ,, ( ): – 1992 .[2] T. Antonsen 、 E.J. Paul 和 M. Landreman。用于计算三维磁约束平衡形状梯度的伴随方法。 *J. Plasma Phys.*, 85:905850207, 2019.[3] N. Aronszajn、A. Krzywicki 和 J. Szarski。黎曼流形上外微分形式的唯一延拓定理。 *Ark. Mat.*, 4:417–453, 1962.[4] M. Audin 和 M. Damian。 *Morse Theory and Floer Homology*。施普林格，2014。[5] C. B¨ar。一阶半线性椭圆系统解的零点集。 *Inventiones mathematicae*, 138: 183–202, 1999.[6] C. Berg Smiet、J. Loizu、E. Balkovic 和 A. Baillod。有限 β 仿星器平衡中磁岛的高效单阶段优化。 *arXiv e-prints*, art. arXiv:2407.02097, 2024年7月。[7] H.-S. Bosch *et al*。稳态仿星器 Wendelstein 7-X 建造中的技术挑战。*Nucl. fusion*, 53:126001, 2013.[8] A. Cima、L. Jibin 和 J. Llibre。紧致连通曲面上的保面积流。载于 P. G. L. Leach、S. E. Bouquet、J.-L. Rouet 和 E. Fijalkow（编）， *Dynamical Systems, Plasmas and Gravitation*，第 313–319 页，柏林、海德堡，1999。施普林格·柏林·海德堡。 ISBN 978-3-540-49251-1。[9] R. Conlin、D.W. Dudt、D. Panici 和 E. Kolemen。DESC 仿星器代码套件。第 2 部分：扰动与延拓方法。 *J. Plasma Phys.*, 89:955890305, 2023.[10] L.E. Dudek、J.H. Chrzanowski、P.J. Heitzenroeder、S. Raftopoulos、M.E. Viola、G.H. Neilson、D. Rej、M.J. Cole、P. Goranson 和 K. Freudenberg。NCSX 建设状况。 *Fusion Engineering and Design* 84 351 354, 2009 , : – .

[11] D. Dudt、R. Conlin、D. Panici、E. Kolemen、K. Unalmis 和 P. Kim。DESC。*Zenodo*, v0.10.4 (doi:10.5281/zenodo.10611879), 2024。

[12] D.W. Dudt 和 E. Kolemen。DESC：仿星器平衡求解器。 *Phys. Plasmas*, 27:102513, 2020。[13] D.W. Dudt、R. Conlin、D. Panici 和 E. Kolemen。DESC 仿星器代码套件。第 3 部分：准对称性优化。 *J. Plasma Phys.*, 89:955890201, 2023。[14] L.C. Evans。 *Partial Differential Equations*。美国数学会，第 2 版，2010。[15] L. Fu、E.J. Paul、A.A. Kaptanoglu 和 A. Bhattacharjee。带二次约束和目标函数的仿星器线圈全局优化。 *arXiv e-prints*, art. arXiv:2408.08267, 2024。[16] W. Fulton。 *Algebraic Topology*。施普林格，1995。[17] N.I. Gavrilov。环面曲面上具有不变勒贝格测度的动力系统。

Differ. , ( ): –

Uravn. 12 3 438 445, 1976

.[18] N.I. Gavrilov。连通闭可定向曲面上具有不变勒贝格测度的动力系统。 *Differ. Uravn.*, 12(2):206–212, 1976。[19] W. Gerner。 *Minimisation Problems in Ideal Magnetohydrodynamics*。博士论文，亚琛工业大学，2020。[20] W. Gerner。作用于表面电流的毕奥-萨伐尔算子的性质。 *SIAM J. Math. Anal.*, 56 (5):6446–6482, 2024。[21] W. Gerner。毕奥-萨伐尔算子的核与像及其在仿星器设计中的应用。

J. , ( ): .

Math. Phys. 67 2 023504, 2026

[22] A.G. Goodman、K. Camacho Mata、S.A. Henneberg、R. Jorge、M. Landreman、G.G. Plunk、H.M. Smith、R.J.J. Mackenbach、C.D. Beidler 和 P. Helander。构造精确的准等动力磁场。 *J. Plasma Phys.*, 89:905890504, 2023。[23] W.H. Gottschalk 和 Hedlund G.A. 变换群的动力学。 *Transactions of the American Mathematical Society* 65 3 348 359, 1949

, ( ): –

.[24] P. Grisvard。 *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*。皮特曼出版公司，1985。[25] P. Hartman。欧几里得空间上的局部同胚。 *Bol. Soc. Mat. Mexicana*, 5:220–241, 1960。[26] B. Hasselblatt 和 A. Katok。 *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*。剑桥大学出版社，1995。[27] P. Helander。非轴对称磁场中的等离子体约束理论。 *Rep. Prog. Phys.*, 77: 087001, 2014。[28] P. Helander。更正：非轴对称磁场中的等离子体约束理论。

Rep. , : .

Prog. Phys. 81 099501, 2018

[29] S.A. Henneberg、S.R. Hudson、D. Pfefferl´e 和 P. Helander。等离子体与线圈联合优化算法。 *J. Plasma Phys.*, 87:905870226, 2021。[30] S.P. Hirshman 和 J.C. Whitson。三维磁流体动力学平衡的最速下降矩方法。 *Phys. Fluids*, 26:3553–3568, 1983。[31] L.-M. Imbert-Gerard、E.J. Paul 和 A.M. Wright。 *An Introduction to Stellarators*。工业与应用数学学会，2024。[32] R. Jorge、A. Goodman、M. Landreman、J. Rodrigues 和 F. Wechsung。仿星器单阶段优化：结合线圈与固定边界平衡。 *Plasma Phys. Control. Fusion*, 65 074003, 2023 : .[33] R. Jorge、A. Giuliani 和 J. Loizu。采用单阶段优化的简化柔性仿星器线圈。 *arXiv e-prints*, art. arXiv:2406.07830, 2024年6月。[34] J. Kappel、M. Landreman 和 D. Malhotra。磁场梯度尺度长度解释了为何某些等离子体需要靠近的外部磁线圈。 *Plasma Phys. Control. Fusion*, 66:025018, 2024。[35] M. Landreman。用于快速计算仿星器线圈形状的改进电流势方法。*Nucl. Fusion*, 57:046003, 2017。

[36] M. Landreman 和 A.H. Boozer. 用于约束环形等离子体的高效磁场. *Phys. Plasmas*, 23 032506, 2016 : .[37] J.M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. 施普林格，第 2 版，2012.[38] J.M. Lee. *Introduction to Riemannian Manifolds*. 施普林格，第二版，2018.[39] T. Ma 和 S. Wang. 2 *Discrete and continuous dynamical* 维 *systems* 7 2 431 445, 2001

不可压缩流的整体结构. , ( ): – .[40] T. Ma 和 S. Wang. 无散向量场的结构分类与稳定性. *Physica D*, 171: 107–126, 2002.[41] P. Merkel. 具有外部电流的仿星器边值问题的求解. *Nucl. Fusion*, 27: 867–871, 1987.[42] J.W. Milnor. *Morse Theory*. 普林斯顿大学出版社，1963.[43] J.W. Milnor. *Topology from the differentiable view point*. 普林斯顿大学出版社，1965.[44] D. Panici, R. Conlin, D.W. Dudt, K. Unalmis 和 E. Kolemen. DESC 仿星器代码套件。第 1 部分：快速、准确的平衡计算. *J. Plasma Phys.*, 89:955890303, 2023.[45] E.J. Paul, M. Landreman, A. Bader 和 W. Dorland. 用于基于梯度优化仿星器线圈形状的伴随方法. *Nuclear Fusion*, 58:076015, 2018.[46] E.J. Paul, T. Antonsen, M. Landreman 和 W.A. Cooper. 用于计算三维磁约束平衡形状梯度的伴随方法。第 2 部分：应用. *J. Plasma Phys.*, 86: 905860103, 2020.[47] D. Pereira Botelho, V. Prost, L.B. Pina Pereira 和 F.A. Volpe. 基于宽导体图案化的简化磁体设计与制造. *arXiv e-prints*, art. arXiv:2409.20143, 2024 年 9 月.[48] D. Perrella, D. Pfefferl´e 和 L. Stoyanov. 不变二维环面上无散向量场的可整直性. *Partial Differential Equations and Applications*, 3(50), 2022.[49] Y. Privat, R. Robin 和 Sigalotti M. 面向磁约束聚变的仿星器最优形状.

J. , : – .

Math. Pures Appl. 163 231 264, 2022

[50] V. Prost 和 F.A. Volpe. 高场仿星器电站的经济优化设计点.

Nucl. , : .

Fusion 64 026007, 2024

[51] Renaissance Fusion. Renaissance Fusion 专利.[52] R. Robin 和 F.A. Volpe. 仿星器线圈磁力的最小化. *Nucl. Fusion*, 62 086041, 2022 : .[53] G. Schwarz. *Hodge Decomposition - A Method for Solving Boundary Value Problems*. 施普林格出版社，1995。doi: https://doi.org/10.1007/BFb0095978.[54] W. Sengupta, E.J. Paul, H. Weitzner 和 A. Bhattacharjee. 磁通面附近具有精确准对称性的真空磁场。第 1 部分：轴对称曲面附近的解. *J. Plasma Phys.*, 86: 905860103, 2020.

[55] F. Wechsung, A. Giuliani, M. Landreman, A. Cerfon 和 G. Stadler. 单阶段基于梯度的仿星器线圈设计：随机优化. *Nucl. Fusion*, 62(7), 2022.[56] Y. Xu. 托卡马克与仿星器等离子体的综合比较. *Matter and Radiation at Extremes*, 1 4 192 200, 2016 ( ): – .