arXiv:2603.04086v1 [math.AP] 4 Mar 2026

海森堡群和二步 Carnot 群上的无权Hardy不等式

Lorenzo D'Arca[1], Luca Fanelli[2], Valentina Franceschi[3] 和 Dario Prandi[4]

[1] *Department of Mathematics "Guido Castelnuovo", Sapienza University of Rome,Piazzale Aldo Moro 5, Roma 00185, Italy; lorenzo.darca@uniroma1.it*[2] *Ikerbasque, Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea & BCAM,Barrio Sarriena s/n, 38940 Leioa, Spain; luca.fanelli@ehu.eus*[3] *Dipartimento di Matematica "Tullio Levi-Civita", Università degli Studi di Padova,via Trieste 63, 35121 Padova, Italy; valentina.franceschi@unipd.it*
[4] *Laboratoire des Signaux et Systèmes, Université Paris-Saclay, CentraleSupélec, CNRS, Gif-sur-Yvette, France*

2026年3月5日

摘要

我们在垂直层为一维的二步 Carnot 群上建立了无权 Hardy 型不等式，并给出了最优 Hardy 常数的显式下界。我们采用一种定量的分部积分机制，以一个适当构造且范数受控的水平向量场取代非水平的欧拉向量场。作为应用，我们得到了海森堡群上 Kor´anyi 标度和 Carnot–Carath´eodory 距离对应的完全显式界，并通过一种广义 Kor´anyi 型齐次范数，将结果推广到非各向同性二步结构。

关键词：哈代不等式；卡诺群；海森堡群；次拉普拉斯算子；齐次范数；Carnot–Carath´eodory 距离；逆平方势。
2020 年数学主题分类：主要分类 26D10；次要分类 35J70、35P15、43A80。

1 引言

Hardy 不等式是现代分析中的重要工具，将几何与势理论和谱理论联系起来。其最简单的欧几里得形式为

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx \geq C_N \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^2}{|x|^2} \, dx, \qquad \forall u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}), \tag{1.1}$$

其中常数 $C_N = (N-2)^2/4$ 量化了梯度对边界奇异性的控制。

当 $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ 被开集 Ω 取代，且 $|x|$ 被到其边界的距离 $d(x, \partial\Omega)$ 取代时，已知相应的最优常数 $C(\Omega)$ 与 $\partial\Omega$ 的适当维数概念相关，例如闵可夫斯基维数和 Assouad维数 [13]。特别地，在 $\partial\Omega$ [20] 足够厚或足够薄的条件下，其正性得以保证。

另一方面， $C_N = C(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ 确定了算子的耦合参数λ 的临界值

$$P_\lambda = -\Delta - \frac{\lambda}{|x|^2} \qquad \text{on } L^2(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}). \tag{1.2}$$

事实上， C_N 标志着 $\lambda < C_N$ 的次临界区间与超临界区间 $\lambda > C_N$ 之间的精确阈值：在次临界区间内，算子保持正定，相关能量泛函具有强制性；而在超临界区间内，强制性失效，解可能在奇异集附近爆破。在临界水平，算子呈退化强制性：哈代不等式仍然成立，但无法进一步改进，且相应的“基态”剖面使不等式取等号， [9]。

在海森堡群中（见第 4.1 节），自 [17], 起，人们便开始研究哈代不等式；当时作者证明了以下锐哈代不等式

$$\int_{\mathbb{H}^n} |\nabla_{\mathbb{H}} u|^2 \, dx \geq \left(\frac{Q-2}{2}\right)^2 \int_{\mathbb{H}^n} \frac{|u|^2}{\rho^2} |\nabla_{\mathbb{H}} \rho|^2 \, dx, \qquad \forall u \in C_c^\infty(\mathbb{H}^n \setminus \{0\}), \tag{1.3}$$

其中， $\nabla_{\mathbb{H}}$ 表示水平梯度， ρ 是 $\mathbb{H}^n$ 中的 Koranyi范数，而 $Q = 2n + 2$ 是 $\mathbb{H}^n$ 的齐次维数。作者最初的研究动机是证明 Schr¨inger 算子 $-\Delta_{\mathbb{H}} + V$ 的唯一延拓性质，其中 $\Delta_{\mathbb{H}}$ 是 Heisenberg次拉普拉斯算子， V 是一个势。特别地，借助 (1.3)，他们推导出算子

$$-\Delta_{\mathbb{H}} + \lambda \frac{|\nabla_{\mathbb{H}} \rho|^2}{\rho^2}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{1.4}$$

这是 P_λ 在海森堡群中的加权对应形式。这些事实随后被推广到 [11]Carnot群的情形。

(1.3) 中出现的权重 $|\nabla_{\mathbb{H}} \rho|$ 沿垂直方向消失，因此，(1.4) 中出现的势在该方向上不起作用。这一事实阻碍了 [1] 的作者采用基于 Hardy 不等式 (1.3) 的技术来证明 Heisenberg次拉普拉斯算子的自伴性。这促使本文开展对无权Hardy不等式的研究。

上述不等式及其在不同背景下的推广，主要源于 ρ 与次拉普拉斯算子的基本解 [15]之间的关系。这一事实构成了建立 Hardy 型不等式的主要障碍：其中，Kor´anyi 范数 ρ 被从原点出发的、在几何上更为内禀的 Carnot–Carath´eodory 距离 δ_{cc}所取代。在这种情况下，由于 $|\nabla_H \delta_{cc}| = 1$ 几乎处处成立，(1.3) 的自然对应形式是无权的。也就是说，

$$\int_{\mathbb{H}^n} |\nabla_{\mathbb{H}} u|^2 \, dx \geq c \int_{\mathbb{H}^n} \frac{|u|^2}{\delta_{cc}^2} \, dx, \qquad \forall u \in C_c^\infty(\mathbb{H}^n \setminus \{0\}). \tag{1.5}$$

对于某些非锐的 $c > 0$ ，此类不等式已在 $[4, 5]$ 中得到证明。该不等式与下列算子有关，可与 (1.4) 比较:

$$-\Delta_{\mathbb{H}} + \frac{\lambda}{\delta_{cc}^2}. \tag{1.6}$$

在欧几里得情形中，Hardy 不等式 (1.1) 可由其径向形式推出

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left| \left\langle \nabla u, \frac{x}{|x|} \right\rangle \right|^2 dx \geq \left(\frac{N-2}{2}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^2}{|x|^2} dx, \quad \forall u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}). \tag{1.7}$$

事实上，上述问题的极小化序列可以选取为径向的，从而其梯度唯一的非零分量是径向分量。特别地，这样的序列随后也是极小化

对(1.1)而言也是如此。我们强调，这与重排不等式的存在性有关，例如P´olya-Szeg˝o不等式，而这类不等式在海森堡情形 [21, 22]中并不成立。事实上，如 [16], 所示，将水平梯度沿方向 $\nabla\delta_{cc}$ 投影所得到的径向Hardy不等式是平凡的（即以常数0成立），特别地，它并不蕴含带有 $c > 0$的完整Hardy 不等式(1.5)。

在本文中，我们首先仔细考察径向导数这一概念。在欧几里得情形下，算子 $\partial_r = \left\langle \frac{x}{|x|}, \nabla \right\rangle$ 既可以视为 (i) 梯度在从原点出发的距离方向上的投影，即 $\partial_r = \langle \nabla|x|, \nabla \rangle$；也可以视为 (ii) $\partial_r = \frac{\langle x, \nabla \rangle}{|x|}$，其中 $\langle x, \nabla \rangle$ 是欧氏伸缩的无穷小生成元，称为欧拉向量场。

在 $\mathbb{H}^n$ 中，对于 Carnot-Carth´eodory 距离 [16], 和 Kor´anyi 范数 ρ，这两种观点不再一致。着眼于后者，第一种方法导出的算子为

$$\left\langle \frac{\nabla_{\mathbb{H}}\rho}{|\nabla_{\mathbb{H}}\rho|}, \nabla_{\mathbb{H}} \right\rangle.$$

尽管表述方式不同，这正是 [17], 中采用的方法，并由此在 Hardy 不等式右端引入权重 $|\nabla_{\mathbb{H}}\rho|^2$，如 (1.3) 所示。另一方面，按照第二种方法推理，则需考虑与海森堡齐次结构相关联的欧拉向量场。该向量场是各向异性膨胀 $\delta_\lambda(x, y, t) = (\lambda x, \lambda y, \lambda^2 t)$ 的生成元，其中 $(x, y, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \simeq \mathbb{H}^n$，其表达式为

$$\mathcal{E} = \sum_{i=1}^{n} x_i \partial_{x_i} + y_i \partial_{y_i} + 2t\partial_t,$$

在这种情况下，径向导数的自然定义是 $\partial_\rho = \rho^{-1}\mathcal{E}$，并且正如 [23], 中所观察到的，相应的 Hardy 不等式具有如下无权形式：

$$\int_{\mathbb{H}^n} |\partial_\rho u|^2 \, dzdt \geq \left(\frac{Q-2}{2}\right)^2 \int_{\mathbb{H}^n} \frac{|u|^2}{\rho^2} \, dzdt.$$

然而，由于欧拉场 $\mathcal{E}$ 不是水平的，该不等式无法对$|\nabla_{\mathbb{H}} u|$提供任何控制。当试图在次黎曼情形下推导无权Hardy不等式时，这一问题构成了主要困难之一。

迄今为止，类似于 (1.5) 的不等式仅在常数 [4], 不显式给出的情况下得到证明，而 c 的锐值仍然未知。截至本文撰写之时，现有的最佳估计是 $0 < c < (Q-2)^2/4$，由 [16]证明。此外，由于有限维情形下的范数等价，对于某个正的常数 $c > 0$建立类似于 (1.5) 的不等式，会自动推出对于任何其他范数同样成立，尽管有关该常数确切取值的信息会丢失。

本文研究形如(1.5)的无权Hardy不等式，其定义在具有一维垂直层的二步 Carnot 群上，针对齐次范数 d的各种选取。更一般地，我们希望建立如下类型的不等式

$$\int_{\mathbb{H}^n} \frac{|\nabla_{\mathbb{H}} u|^p}{d^{p(\theta-1)}} \, dzdt \geq c \int_{\mathbb{H}^n} \frac{|u|^p}{d^{p\theta}} \, dzdt, \tag{1.8}$$

where $p \geq 2$ 和 $\theta \in \mathbb{R}$ 是一个固定参数，它们与非齐次gener相关联 -aliz算子(1.6)到非线性 L^p 情形的ations。

目前，这类结果仅能得到含隐式 Hardy 常数的形式。如上所述，在海森堡群中，Bahouri–Chemin–Xu 和

Bahouri–Chemin–Gallagher [4,5] 首先得到了这些结果。之后，Vigneron [24] 将其推广到了一般的二阶卡诺群。这些工作均涵盖 $p=2$ 和 $\theta=1$ 的情形。对于 $\theta\neq 1$，现有的不等式在左侧涉及不同的范数，因此与本文所考察的加权形式并不对应。

本研究旨在对这些结果进行定量改进，给出最优 Hardy 常数的显式下界。

1.1 技术

这正是我们工作的核心思想：尽管 $\mathcal{E}$ 并非水平向量场，我们证明了可以通过分部积分论证找到一个范数有界的水平向量场 Z，使得下列等号成立，

$$\int_{\mathbb{H}^n}\frac{u\mathcal{E}u}{\rho^2}\,dzdt=\int_{\mathbb{H}^n}\frac{u\left\langle\nabla_{\mathbb{H}}u,Z\right\rangle}{\rho}\,dzdt. \tag{1.9}$$

Sta从这一恒等式出发，通过以下计算可得关于 ρ 的无权Hardy不等式

$$\begin{aligned}0&\leq\int_{\mathbb{H}^n}\left|\left\langle\nabla_{\mathbb{H}}u,Z\right\rangle+\frac{Q-2}{2}\frac{u}{\rho}\right|^2dzdt\\&=\int_{\mathbb{H}^n}\left|\left\langle\nabla_{\mathbb{H}}u,Z\right\rangle\right|^2dzdt+\left(\frac{Q-2}{2}\right)^2\int_{\mathbb{H}^n}\frac{|u|^2}{\rho^2}dzdt+(Q-2)\int_{\mathbb{H}^n}\frac{u\mathcal{E}u}{\rho^2}dzdt.\end{aligned}$$

利用伴随恒等式 $\mathcal{E}^*=-Q-\mathcal{E}$，我们得到

$$\int_{\mathbb{H}^n}|\nabla_{\mathbb{H}}u|^2\,dzdt\geq\frac{1}{\sup_{\mathbb{H}^n}|Z|^2}\left(\frac{Q-2}{2}\right)^2\int_{\mathbb{H}^n}\frac{|u|^2}{\rho^2}\,dzdt. \tag{1.10}$$

因此，$|Z|$ 的上界给出了 Hardy 常数的下界。

通过分部积分论证，以水平向量场取代非水平 Euler 向量场这一思路，Vigneron 已在 [24] 中进行过探讨。然而，他的分析仍停留在定性层面，重点在于 Hardy 型不等式的存在性，而非确定相应的常数。与此不同，本文采取完全定量的视角，对构造过程中出现的所有常数进行精确追踪。我们的结果在非线性 L^p 框架下得以确立，并置于垂直层为一维的一般二步 Carnot 群框架中。

在论文最后一部分，即第 4.1 节中，我们专门研究海森堡群这一类群中最重要的例子，其几何结构使得完全显式的计算成为可能。我们还简要讨论垂直层维数更高的卡诺群，例如海森堡群的直积或更一般的二步结构。原则上，同样的方法也适用于这些群，不过由此产生的计算会复杂得多。

1.2 主要结果

设 $\mathcal{G}=(\mathbb{R}^m\times\mathbb{R},\circ)$，$m\in\mathbb{N}$ 为一个垂直方向为一维的二阶 Carnot群。也就是说，存在一个斜对称 $m\times m$ 矩阵 B，使得 $\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}$ 上的群运算定义为

$$(z,t)\circ(\eta,\tau)=\left(z+\eta,\ t+\tau+\frac{1}{2}\langle Bz,\eta\rangle\right)\qquad(z,t),(\eta,\tau)\in\mathbb{R}^m\times\mathbb{R},$$

其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 $\mathbb{R}^m$上的欧几里得标量积。相应的膨胀族定义为 $\delta_\gamma(z,t) = (\gamma z, \gamma^2 t)$，它定义了该群的一个自同构一参数群；一组水平向量场的正交归一基为

$$X_i = \partial_{z_i} + \frac{1}{2}(Bz)_i \partial_t, \qquad i = 1, \dots, m, \tag{1.11}$$

将水平向量用此基表示后， $\mathcal{G}$ 的水平层上的内积化为 $\mathbb{R}^m$上的标准欧几里得内积。光滑函数 u 的水平梯度和次拉普拉斯算子可显式表示为

$$\nabla_{\mathcal{G}} u = (X_1 u, \dots, X_m u) \qquad \text{and} \qquad \Delta_{\mathcal{G}} u = \Delta_z u + \frac{1}{4}|Bz|^2 \, \partial_t^2 u + \langle Bz, \nabla_z u \rangle \, \partial_t u, \tag{1.12}$$

其中， Δ_z 和 ∇_z 分别表示 $\mathbb{R}^m$上的通常拉普拉斯算子和梯度。注意，对易子满足 $[X_j, X_i] = B_{ij}\, \partial_t$，且 $[\partial_t, X_i] = 0$。由于 $B \neq 0$，由 $\{X_1, \dots, X_m\}$ 生成的李代数具有满秩，即这一族满足 H¨ormander 条件。这意味着 $\Delta_{\mathcal{G}}$ 是一个亚椭圆算子 [19]。

我们将作如下假设

$$\text{The kernel of } B \text{ is trivial.} \tag{H0}$$

满足这些假设的典型群的例子是海森堡群 $\mathbb{H}^n$，它对应于 $m = 2n$ 和

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 4I_n \\ -4I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

关于更多背景知识，请读者参阅 [8]。

定义 1. 连续函数 $d : \mathbb{R}^{m+1} \to [0, +\infty)$ 在 $\mathcal{G}$ 上是正齐次的，当且仅当

- $d(\delta_\lambda(z,t)) = \lambda\, d(z,t)$ 对每个 $\lambda > 0$ 以及 $(z,t) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ 均成立，
- $d(z,t) > 0$ 对所有满足 $(z,t) \neq (0,0)$ 的情形均成立。

此外， d 是正则的，当且仅当

(d.1) $d \in C^\infty(\mathcal{G} \setminus L)$，其中 $L = \{(z,t) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} : |z| = 0\}$ 表示群的中心

(d.2) 向量场 $\nabla_{\mathcal{G}} d$ 和导数 $\partial_t d$ 在原点以外的局部范围内有界，亦即

$$\|\nabla_{\mathcal{G}} d\|_{L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathcal{G}\setminus\{0\})} < +\infty, \qquad \|\partial_t d\|_{L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathcal{G}\setminus\{0\})} < +\infty;$$

对于几乎处处的 $t \in \mathbb{R}$，以下结论成立

$$\lim_{|z|\to 0} \left\langle \frac{z}{|z|}, B^{-1} \nabla_{\mathcal{G}} d \right\rangle = 0 \quad \text{for a.e. } t \in \mathbb{R},$$

注 1.1. 对于齐次范数，即满足三角不等式的正齐次函数， d 在原点之外的水平 Lipschitz 连续性是自动得到保证的

$$d((z,t) \circ (\eta,\tau)) \leq d(z,t) + d(\eta,\tau), \quad \forall (z,t), (\eta,\tau) \in \mathcal{G}. \tag{1.13}$$

例如，任何在原点之外欧几里得 Lipschitz 连续的正齐次函数都满足完整条件 (d.2)，如海森堡群中的 Kor´anyi 范数或 Carnot-Carth´eodory 范数。这一点可通过观察 $\nabla_{\mathcal{G}} d$ 和 $d\partial_t d$ 均为 0 次齐次函数得出。

于是，我们的主要结果如下。

定理 1.1. 设 $p \geq 2$、 $\theta \in \mathbb{R}$，且 d 是定义在 $\mathcal{G}$ 上的正则正齐次函数。那么，对于每个 $u \in C_c^\infty($ $\mathcal{G} \setminus \{0\})$，以下 Hardy 型不等式成立

$$\int_{\mathcal{G}} \frac{|\langle \nabla_{\mathcal{G}} u, Z_d \rangle|^p}{d^{p(\theta-1)}} \, dz \, dt \geq \left| \frac{Q - p\theta}{p} \right|^p \int_{\mathcal{G}} \frac{|u|^p}{d^{p\theta}} \, dz \, dt. \tag{1.14}$$

这里，向量场 Z_d 定义为

$$Z_d = \frac{m+2}{m} \frac{z}{d} - \frac{4p\theta}{m} \frac{t}{d^2} B^{-1} \nabla_{\mathcal{G}} d. \tag{1.15}$$

此外，若 d 满足 $\langle z$，且对所有 $z \in \mathcal{G} \setminus \{0\}$ 都有 $B^{-1}\nabla_z d\rangle = 0$，则不等式 (1.14) 是锐的，且等号在以下函数处成立

$$u(z,t) = \left(\frac{|t|}{|z|^2} \right)^{\frac{Q-2}{2p}}.$$

*Re*注 1.2. 假设 $\langle z$、 $B^{-1}\nabla_z d\rangle = 0$ 成立，当且仅当 d 沿着
inte的积分曲线为常数

$$v(z) = (B^{-1})^T z.$$

由于 B 是斜对称的，由 v 生成的流由 z 变量中的平面旋转构成。在海森堡群中，这对应于每一对 (x_j, y_j) 中的同步旋转，与 Kor´anyi 范数和 Carnot–Carath´eodory 范数的情形相同。

现在我们着手给出 Hardy 常数的估计，该常数定义为

$$c(d,p,\theta) := \sup \left\{ c \geq 0 \mid \int_{\mathcal{G}} \frac{|\nabla_{\mathcal{G}} u|^p}{d^{p(\theta-1)}} \, dz \, dt \geq c \int_{\mathcal{G}} \frac{|u|^p}{d^{p\theta}} \, dz \, dt, \text{ for any } u \in C_c^\infty(\mathcal{G} \setminus \{0\}) \right\}, \tag{1.16}$$

对于正齐次函数 d、 $p \geq 2$ 和 $\theta \in \mathbb{R}$，我们确实有以下直接推论。

推论 1.1. 设 $p \geq 2$、 $\theta \in \mathbb{R}$，并设 d 是 $\mathcal{G}$ 上的正则正齐次函数。那么，

$$c(d,p,\theta) \geq \frac{1}{\sup_{\mathcal{G}} |Z_d|^p} \left| \frac{Q - p\theta}{p} \right|^p. \tag{1.17}$$

对上述内容取适当的 d，我们即可得到 Hardy 常数 (1.16) 的显式下界。不出所料，这些直接计算中最容易处理的情形是海森堡群（精确定义请参阅第 4.1 节），在该情形下我们可以建立如下结果。

定理 1.2. 设 $p \geq 2$、 $\theta \in \mathbb{R}$，并考虑 $\mathcal{G} = \mathbb{H}^n$。那么，我们有以下结果

1. 对于 Kor´anyi 范数 ρ，有

$$c(\rho,p,\theta) \geq \begin{cases} \left| \frac{Q - p\theta}{p} \right|^p \left| \frac{Q-2}{Q} \right|^p & \text{if } p\theta \in \left[(1 - \sqrt{\frac{3}{2}})Q, (1 + \sqrt{\frac{3}{2}})Q \right], \\ \left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{p}{2}} \frac{(3p\theta(p\theta - 2Q))^{\frac{p}{4}}}{|p\theta - Q|^{\frac{p}{2}}} \left| \frac{Q-2}{p} \right|^p & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{1.18}$$

2. 对于 Carnot-Carath´eodory 范数 δ_{cc}，有

$$c(\delta_{cc},p,\theta)\geq\begin{cases}\left(\dfrac{Q-2}{Q}\right)^p\left|\dfrac{Q-p\theta}{p}\right|^p & \text{if } \theta\geq 0 \text{ and } Q\geq\dfrac{4p\theta}{12-\pi^2}\\[2ex] \dfrac{1}{\|g\|_\infty^{p/2}}\left|\dfrac{Q-p\theta}{p}\right|^p, & \text{otherwise.}\end{cases}\tag{1.19}$$

这里，$g:\ \nu\in[-2\pi,2\pi]\mapsto g(\nu)\in(0,+\infty)$ 定义如下：

$$g(\nu)=2\left(\frac{Q}{Q-2}\right)^2\frac{1-\cos\nu}{\nu^2}+\left(\frac{2p\theta}{Q-2}\right)^2\left(\frac{\nu-\sin\nu}{\nu^2}\right)^2-\frac{4p\theta Q}{(Q-2)^2}\frac{\nu-\sin\nu}{\nu^2}\frac{1-\cos\nu}{\nu}.\tag{1.20}$$

特别是，对于 $p=2$ 和 $\theta=1$，这给出了该最优 Hardy 常数的首个显式正下界 opt，从而改进了 [16] 中得到的估计 $0<c<(Q-2)^2/4$。

对于满足 (H0) 的更一般的二步卡诺群，我们可以为与下列 Kor´anyi 范数推广形式相关的 Hardy 常数建立显式下界：

$$\rho_B(z,t)=\left(|z|_B^4+|t|^2\right)^{\frac{1}{4}},\qquad |z|_B=\frac{1}{2}\sqrt{\langle z,(-B^2)^{1/2}z\rangle}.\tag{1.21}$$

这里，矩阵 $(-B^2)^{1/2}$ 定义良好且正定，因为 B 是斜对称且可逆的，而范数 $|\cdot|_B$ 通常称为与 B 相关的辛范数。注意，当 $\mathcal{G}=\mathbb{H}^n$ 时，$|z|_B=|z|$ 和 ρ_B 可化为标准 Kor´anyi 范数 ρ。

我们有如下结果。

定理 1.3。设 $\mathcal{G}$ 为满足 (H0) 的二步卡诺群。对于任意的 $p\geq 2$ 和 $\theta\in\mathbb{R}$，有如下结论：

$$c(\rho,p,\theta)\geq\begin{cases}\left(\dfrac{\lambda_{\min}(B)}{4}\right)^{\frac{p}{2}}\left|\dfrac{Q-p\theta}{p}\right|^p\left|\dfrac{Q-2}{Q}\right|^p & \text{if } p\theta\in\left[(1-\sqrt{\frac{3}{2}})Q,(1+\sqrt{\frac{3}{2}})Q\right],\\[2ex] \left(\dfrac{\lambda_{\min}(B)}{4}\right)^{\frac{p}{2}}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{p}{2}}\dfrac{(3p\theta(p\theta-2Q))^{\frac{p}{4}}}{|p\theta-Q|^{\frac{p}{2}}}\left|\dfrac{Q-2}{p}\right|^p & \text{otherwise.}\end{cases}\tag{1.22}$$

此处及下文中，我们令 $\lambda_{\min}(B):=\min\sigma\left((-B^2)^{1/2}\right)$，即对称正定矩阵 $(-B^2)^{1/2}$ 的最小特征值。特别地，当 $p=2$ 且 $\theta=1$时，有

$$c(\rho_B,2,1)\geq\frac{\lambda_{\min}(B)}{4}\frac{(Q-2)^4}{4Q^2}.\tag{1.23}$$

最后，我们考虑具有多个垂直方向的二步群。首先，我们针对 N 个 $\mathbb{H}^n$ 的乘积情形，得到定理 1.1 的一个类似结果（见定理 4.1），并由此得到以下推论。随后，我们在定理 4.2 中将这一构造推广到具有多个垂直方向的一般二步卡诺群。

推论 1.2。设 $p\geq 2$、$\theta\geq 0$，并令 $\rho(z,t)$ 为 $\mathcal{G}=(\mathbb{H}^n)^N$ 上的 Kor´anyi 范数。那么，若

$$n\geq\frac{1}{4}(p\theta-4),$$

以下 Hardy 型不等式对所有 $u\in C_c^\infty(\mathcal{G}\setminus\{0\})$ 均成立

$$\int_{\mathcal{G}}\frac{|\nabla_{\mathcal{G}}u|^p}{\rho^{p(\theta-1)}}\,dz\,dt\geq\left(\frac{n}{n+1}\right)^p\left|\frac{Q-p\theta}{p}\right|^p\int_{\mathcal{G}}\frac{|u|^p}{\rho^{p\theta}}\,dz\,dt.\tag{1.24}$$

1.3 论文结构

第 2 节介绍符号约定并汇总一些预备结果。第 3 节首先建立向量场 Z_d 和 $\mathcal{E}$ 之间的恒等式（命题 3.1），该恒等式在证明中起着根本性的作用，随后证明定理 1.1。

第4节专门讨论显式无权Hardy不等式。我们从海森堡群开始，比较Kor´anyi范数与Carnot Carath´eodory范数（第 4.1 节），然后考虑一个非迷向例子（第4.2节）。接下来我们转向具有不止一个垂直方向的群，处理 N 与 $\mathbb{H}^n$ 的乘积情形（第4.3节），随后讨论一般的二步情形。

2 预备知识

设 $\mathcal{G} = (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}, \circ)$， $m \in \mathbb{N}$，为一个满足假设(H0)的、具有一维垂直方向的二步Carnot群。

我们首先考虑一个适当的坐标变换，以便简化后文的计算。由于 B 是斜对称且可逆的，群 $\mathcal{G}$ 是偶数维的（即对 $n \in \mathbb{N}$有$m = 2n$），并且存在 λ_1，.....， $\lambda_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 以及一个正交矩阵 Q，使得

$$B = Q\Lambda Q^\top, \qquad \text{where} \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & & & \\ -\lambda_1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \lambda_n \\ & & & -\lambda_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times m}. \tag{2.1}$$

经过正交坐标变换，我们可以并且将假设，对于所有 i,

$$\lambda_i > 0.$$

然后，进行正交变量替换 $z \mapsto Q^\top z$ 后，我们可归结为情形 $B = \Lambda$。在这些坐标下，水平层由以下左不变向量场张成:

$$X_{2i-1} = \partial_{z_{2i-1}} + \frac{\lambda_i}{2}\, z_{2i}\, \partial_t, \qquad X_{2i} = \partial_{z_{2i}} - \frac{\lambda_i}{2}\, z_{2i-1}\, \partial_t, \qquad i = 1, \dots, n,$$

且垂直方向为 $T = \partial_t$。唯一非平凡的对易子为:

$$[X_{2i}, X_{2i-1}] = \lambda_i\, T, \qquad i = 1, \dots, n.$$

为后续使用，设

$$\nabla_{2i-1,2i} u = (0, \dots, 0, X_{2i-1}u, X_{2i}u, 0, \dots, 0), \tag{2.2}$$

$$\nabla^{\perp}_{2i-1,2i} u = (0, \dots, 0, -X_{2i}u, X_{2i-1}u, 0, \dots, 0), \tag{2.3}$$

并记

$$\mathbf{z}^{(i)} = (0, \dots, 0, z_{2i-1}, z_{2i}, 0, \dots, 0), \qquad \mathbf{z}^{(i),\perp} = (0, \dots, 0, -z_{2i}, z_{2i-1}, 0, \dots, 0).$$

下面的引理汇总了一些辅助恒等式，它们将用于定理 1.1 的证明。

引理 2.1. 设 d 是 $\mathcal{G}$ 上的正则正齐次函数，并假设

$$\langle z, B^{-1}\nabla_z d\rangle = 0.$$

于是，在 $\mathcal{G}\setminus L$ 上，

$$4\,\frac{t}{|z|^2}\left\langle B^{-1}\nabla_{\mathcal{G}} d, z\right\rangle \;+\; \langle z, \nabla_{\mathcal{G}} d\rangle = d.$$

证明。 d 的齐次性推出 $\mathcal{E}d = d$，即

$$\langle z, \nabla_{\mathcal{G}} d\rangle + 2t\,\partial_t d = d. \tag{2.4}$$

通过向量场的显式形式计算可得

$$\begin{aligned}
\left\langle B^{-1}\nabla_{\mathcal{G}} d, z\right\rangle &= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}\,\langle \mathbf{z}^{(i)}, \nabla^{\perp}_{2i-1,2i} d\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}\big(z_{2i}X_{2i-1}d - z_{2i-1}X_{2i}d\big) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}\left(z_{2i}\,\frac{\partial d}{\partial z_{2i-1}} - z_{2i-1}\,\frac{\partial d}{\partial z_{2i}}\right) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(z_{2i}^2 + z_{2i-1}^2)\,\partial_t d \\
&= \langle z, B^{-1}\nabla_z d\rangle + \frac{|z|^2}{2}\,\partial_t d.
\end{aligned}$$

The 右侧第一项因假设 $\langle z, B^{-1}\nabla_z d\rangle = 0$ 而消失。因此，将 $4t/|z|^2$ 乘以

$$4\,\frac{t}{|z|^2}\,\left\langle B^{-1}\nabla_{\mathcal{G}} d, z\right\rangle = 2t\,\partial_t d. \tag{2.5}$$

将 (2.5) 代入 (2.4)，得到该恒等式。 □

引理 2.2. 设 $\Omega \subseteq \mathcal{G}$ 为开集，且 $\varphi \in C^{\infty}(\Omega)$。那么，对任意 $i = 1, \ldots, n$,

$$\mathrm{div}_{\mathcal{G}}\big(\nabla^{\perp}_{2i-1,2i}\varphi\big) = \lambda_i\,\partial_t\varphi.$$

证明. 根据水平散度的定义，

$$\mathrm{div}_{\mathcal{G}}\big(\nabla^{\perp}_{2i-1,2i}\varphi\big) = X_{2i-1}(-X_{2i}\varphi) + X_{2i}(X_{2i-1}\varphi) = [X_{2i}, X_{2i-1}]\,\varphi.$$

由于 $[X_{2i}, X_{2i-1}] = \lambda_i\,\partial_t$，结论得证。 □

引理 2.3. 设 d 是 $\mathcal{G}$上的一个正则正齐次函数。那么，在 $\mathcal{G}\setminus\{0\}$上的分布意义下，以下恒等式成立：

(i) $\mathrm{div}_{\mathcal{G}}\left(\dfrac{t}{d^{p\theta+1}}\,B^{-1}\nabla_{\mathcal{G}} d\right) = -\dfrac{1}{2}\,\dfrac{\langle z, \nabla_{\mathcal{G}} d\rangle}{d^{p\theta+1}} \;+\; n\,\dfrac{t}{d^{p\theta+1}}\,\partial_t d,$

(ii) $\mathrm{div}_{\mathcal{G}}\left(\dfrac{z}{d^{p\theta}}\right) = \dfrac{2n}{d^{p\theta}} - \dfrac{p\theta}{d^{p\theta+1}}\,\langle z, \nabla_{\mathcal{G}} d\rangle.$

证明. 直接计算可得

$$\nabla_{2i-1,2i}\left(\frac{t}{d^{p\theta+1}}\right)=-\frac{\lambda_i}{2}\,\mathbf{z}^{(i),\perp}-(p\theta+1)\,\frac{t}{d^{p\theta+2}}\,\nabla_{2i-1,2i}d.$$

因此，利用引理 2.2，我们得到

$$\operatorname{div}_{\mathcal{G}}\left(\frac{t}{d^{p\theta+1}}\,\nabla^{\perp}_{2i-1,2i}d\right)=-\frac{\lambda_i}{2}\left\langle\frac{\mathbf{z}^{(i)}}{d^{p\theta+1}},\nabla_{2i-1,2i}d\right\rangle+\lambda_i\,\frac{t}{d^{p\theta+1}}\,\partial_t d. \tag{2.6}$$

除以 λ_i 并对 i 求和，我们得到 $\mathcal{G}\setminus L$ 上的 (i)。

为完成证明，固定 $\varepsilon>0$ 并令 $D_\varepsilon=\{(z,t)\in\mathcal{G}:\,|z|>\varepsilon\}$. 对于 $\phi\in C_c^\infty(\mathcal{G}\setminus\{0\})$,

$$\begin{aligned}\int_{D_\varepsilon}&\operatorname{div}_{\mathcal{G}}\left(\frac{t}{d^{p\theta+1}}B^{-1}\nabla_{\mathcal{G}}d\right)\phi\,dz\,dt\\&=-\int_{D_\varepsilon}\frac{t}{d^{p\theta+1}}\left\langle B^{-1}\nabla_{\mathcal{G}}d,\nabla_{\mathcal{G}}\phi\right\rangle dz\,dt+\int_{|z|=\varepsilon}\frac{t}{d^{p\theta+1}}\,\phi\left\langle B^{-1}\nabla_{\mathcal{G}}d,\frac{z}{|z|}\right\rangle dH_{2n}.\end{aligned}$$

根据假设 (d.3)，右端的边界积分在 $\varepsilon\to0^+$ 时趋于零，因为 ϕ 的支集与零点保持正距离。因此，由于 $D_\varepsilon\subset\mathcal{G}\setminus L$，在左端应用恒等式 (i)，并令 $\varepsilon\to0^+$，我们便在 $\mathcal{G}\setminus\{0\}$ 上以分布的意义得到 (i)。

(ii) 中的恒等式可用类似的方法证明。 □

3 定理 1.1 的证明

本节证明定理 1.1。为方便读者，我们使用记号 (2.2) 重述其内容。

定理。设 $p\geq2$、$\theta\in\mathbb{R}$，且 d 是定义在 $\mathcal{G}$ 上的正则正齐次函数。那么，对于任意 $u\in C_c^\infty($ $\mathcal{G}\setminus\{0\})$，下列 Hardy 型不等式成立

$$\int_{\mathcal{G}}\frac{|\langle\nabla_{\mathcal{G}}u,Z_d\rangle|^p}{d^{p(\theta-1)}}\,dz\,dt\geq\left|\frac{Q-p\theta}{p}\right|^p\int_{\mathcal{G}}\frac{|u|^p}{d^{p\theta}}\,dz\,dt. \tag{3.1}$$

这里，向量场 Z_d 定义为

$$Z_d=\frac{n+1}{n}\,\frac{z}{d}-\frac{2p\theta}{n}\,\frac{t}{d^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}\,\nabla^{\perp}_{2i-1,2i}d.$$

此外，若 d 满足 〈z，且对所有 $z\in\mathcal{G}\setminus\{0\}$ 都有 $B^{-1}\nabla_z d\rangle=0$，则不等式 (1.14) 是锐的，且等号在下列函数处取到

$$u(z,t)=\left(\frac{|t|}{|z|^2}\right)^{\frac{Q-2}{2p}}.$$

我们从下面的结果开始，它将水平向量场 Z_d 与非水平 Euler 向量场 $\mathcal{E}$ 联系起来。

命题 3.1. 设 $p\geq2$、$\theta\in\mathbb{R}$，并设 d 是 $\mathcal{G}$ 上的正则正齐次函数。那么，对于每个 $u\in C_c^\infty$（$\mathcal{G}\setminus\{0\}$），

$$\int_{\mathcal{G}}\frac{|u|^{p-2}u}{d^{p\theta-1}}\,\langle\nabla_{\mathcal{G}}u,Z_d\rangle\,dz\,dt=\int_{\mathcal{G}}\frac{|u|^{p-2}u\,\mathcal{E}u}{d^{p\theta}}\,dz\,dt=-\frac{Q-p\theta}{p}\int_{\mathcal{G}}\frac{|u|^p}{d^{p\theta}}\,dz\,dt. \tag{3.2}$$

证明. 根据 Z_d 的定义，在 $\mathcal{G}\setminus\{0\}$ 上我们有

$$\operatorname{div}_{\mathcal{G}}\left(\frac{1}{d^{p\theta-1}}\,Z_d\right)=\frac{n+1}{n}\,\operatorname{div}_{\mathcal{G}}\left(\frac{z}{d^{p\theta}}\right)-\frac{2p\theta}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}\,\operatorname{div}_{\mathcal{G}}\left(\frac{t}{d^{p\theta+1}}\,\nabla_{2i-1,2i}^{\perp}d\right).$$

代入引理 2.3 的恒等式 (i)–(ii)，并利用 $\mathcal{E}d=d$，得到

$$\operatorname{div}_{\mathcal{G}}\left(\frac{1}{d^{p\theta-1}}\,Z_d\right)=\frac{2n+2}{d^{p\theta}}-\frac{p\theta}{d^{p\theta}}=\frac{Q-p\theta}{d^{p\theta}}.$$

因此，

$$\int_{\mathcal{G}}\frac{|u|^{p-2}u}{d^{p\theta-1}}\,\langle\nabla_{\mathcal{G}}u,Z_d\rangle\,dz\,dt=\frac{1}{p}\int_{\mathcal{G}}\left\langle\nabla_{\mathcal{G}}|u|^{p},\frac{Z_d}{d^{p\theta-1}}\right\rangle\,dz\,dt=-\frac{Q-p\theta}{p}\int_{\mathcal{G}}\frac{|u|^{p}}{d^{p\theta}}\,dz\,dt.$$

最后，由伴随关系 $\mathcal{E}^{*}=-Q-\mathcal{E}$，我们有

$$\int_{\mathcal{G}}\frac{|u|^{p-2}u\,\mathcal{E}u}{d^{p\theta}}\,dz\,dt=-\frac{Q-p\theta}{p}\int_{\mathcal{G}}\frac{|u|^{p}}{d^{p\theta}}\,dz\,dt.$$

□

为了证明定理 1.1，我们结合一个代数恒等式 L^p、恰当的变量替换以及一族径向截断函数。首先回顾以下代数恒等式。

命题 3.2（ [12] 中的命题 2.1）。对于任意区域 $\Omega\subseteq\mathbb{R}^N$ 以及任意 $f,g\in L^p(\Omega)$，若 $p\geq 2$，

$$\|w(p,f,g)(f-g)\|_{L^2(\Omega)}^2=\|f\|_{L^p(\Omega)}^p+(p-1)\|g\|_{L^p(\Omega)}^p-p(|g|^{p-2}g,f)_{L^2(\Omega)},\tag{3.3}$$

其中

$$w(p,f,g)^2=p(p-1)\int_0^1 s\,|sg+(1-s)f|^{p-2}\,ds.$$

注 3.1. 注意，$\|w(p,f,g)(f-g)\|_{L^2}=0$ 当且仅当 $f=g$ 在 Ω 中几乎处处成立。我们将利用变量替换 $\Phi\colon\mathbb{R}^{2n}\setminus\{0\}\times\mathbb{R}\to\mathcal{G}\setminus L$，该方法已在海森堡群情形中于 [14]，引入，其表达式为

$$\Phi(\omega,\lambda)=\left(\frac{\omega}{(1+\lambda^2)^{1/4}},\frac{\lambda}{(1+\lambda^2)^{1/2}}\,|\omega|^2\right),\tag{3.4}$$

其逆变换为

$$(\omega,\lambda)=\Phi^{-1}(z,t)=\left(\rho\,\frac{z}{|z|},\frac{t}{|z|^2}\right),\qquad\rho=(|z|^4+t^2)^{1/4},$$

s因此 $|\omega|=\rho$。计算 ϕ 的雅可比行列式可得，对于每个可积的 f，

$$\int_{\mathcal{G}}f(z,t)\,dz\,dt=\int_{\mathbb{R}^{2n}\setminus\{0\}\times\mathbb{R}}f(\Phi(\omega,\lambda))\frac{|\omega|^2}{(1+\lambda^2)^{\frac{n+1}{2}}}\,d\omega\,d\lambda.\tag{3.5}$$

我们终于可以完成定理 1.1 的证明。

定理 1.1 的证明。等号 (1.14) 由直接应用命题 3.2 得到，其中

$$f = \frac{\langle \nabla_{\mathcal{G}} u, Z_d \rangle}{d^{\theta-1}}, \qquad g = -\frac{Q-p\theta}{p}\,\frac{u}{d^{\theta}}.$$

事实上，利用命题 3.1 计算混合项，可得

$$\int_{\mathcal{G}} \frac{|\langle \nabla_{\mathcal{G}} u, Z_d\rangle|^p}{d^{p(\theta-1)}}\,dzdt - \left|\frac{Q-p\theta}{p}\right|^p \int_{\mathcal{G}} \frac{|u|^p}{d^{p\theta}}\,dzdt = \|w(p,f,g)(f-g)\|^2_{L^2(\mathcal{G})} \geq 0.$$

在 $\langle z, B^{-1}\nabla_z d\rangle = 0$ 的情形下，我们通过刻画极值函数证明 (1.14) 的尖锐性。为此，我们注意到，(1.14) 中等号成立要求 $f = g$，这相当于

$$\left\langle \nabla_{\mathcal{G}} u, \frac{n+1}{n}\frac{z}{d^{\theta}} - \frac{2p\theta}{n}\frac{t}{d^{\theta+1}}\,B^{-1}\nabla_{\mathcal{G}} d \right\rangle + \frac{Q-p\theta}{p}\frac{u}{d^{\theta}} = 0. \tag{3.6}$$

令 $u(z,t) = \varphi(t/|z|^2)$，并计算

$$\nabla_{\mathcal{G}} u = \varphi'\!\left(\frac{t}{|z|^2}\right)\left(-2\,\frac{t}{|z|^4}z + \frac{1}{2|z|^2}Bz\right).$$

于是，由引理 2.1 可得

$$\langle \nabla_{\mathcal{G}} u, Z_d\rangle = \frac{2(p\theta-Q)}{Q-2}\,d^{-\theta}\,\frac{t}{|z|^2}\,\varphi'\!\left(\frac{t}{|z|^2}\right).$$

因此，方程 (3.6) 化简为

$$\frac{t}{|z|^2}\,\varphi'\!\left(\frac{t}{|z|^2}\right) = \frac{Q-2}{2p}\,\varphi\!\left(\frac{t}{|z|^2}\right).$$

这表明，极值函数轮廓为 $u(z,t) = \left(\frac{|t|}{|z|^2}\right)^{\frac{Q-2}{2p}}$，差一个乘法常数。

还需要进行截断论证。为此，我们固定一族径向截断
fun函数 $g_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+)$，$\varepsilon > 0$，使得

$$0 \leq g_\varepsilon(r) \leq 1, \qquad g_\varepsilon(r) = \begin{cases} 0 & 0 \leq r \leq \varepsilon \text{ or } r \geq 1/\varepsilon, \\ 1 & 2\varepsilon \leq r \leq 1/(2\varepsilon), \end{cases}$$

and

$$|g_\varepsilon'(r)| \leq \begin{cases} c/\varepsilon & \varepsilon \leq r \leq 2\varepsilon, \\ c\,\varepsilon & 1/(2\varepsilon) \leq r \leq 1/\varepsilon, \end{cases}$$

其中常数 $c > 0$ 与 ε 无关。固定 $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}\setminus\{0\})$，并令

$$u_\varepsilon(z,t) = \left(\frac{|t|}{|z|^2}\right)^{\frac{Q-2}{2p}} g_\varepsilon\!\left(\frac{t}{|z|^2}\right)\eta(d(z,t)), \qquad \varepsilon > 0,$$

使得 $u_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathcal{G}\setminus L)$。

由于 $\mathcal{G}$ 上的正齐次函数是等价的（第5.1, [8]节），存在 $C > 0$使得，在 $\rho = (|z|^4 + t^2)^{1/4}$下，

$$\frac{1}{C}\,\rho \leq d \leq C\,\rho. \tag{3.7}$$

因此我们可以选取 η，使得存在半径 $0<r_1<R_1$ 和 $0<r_2<R_2$，使得

$$\{r_1\le\rho\le R_1\}\subseteq\{\eta(d)\ge 1\},\qquad \operatorname{supp}\eta(d)\subseteq\{r_2\le\rho\le R_2\}.$$

下文中，$\mathrm{c}>0$ 表示一个可能逐行变化的常数。利用式 (3.4) 中引入的变量替换及相应的公式 (3.5)，我们计算得

$$\int_{\mathcal{G}}\frac{|u_\varepsilon|^p}{d^{p\theta}}\,dz\,dt=\int_{r_1\le|\omega|\le R_1}\int_0^{+\infty}\frac{|\omega|^2}{d^{p\theta}(\Phi(\omega,\lambda))}\frac{\lambda^{\frac{Q-2}{2}}}{(1+\lambda^2)^{\frac{n+1}{2}}}|g_\varepsilon(\lambda)|^p\,d\lambda\,d\omega.$$

对 $\omega\in\mathbb{R}^{2n}\setminus\{0\}$使用极坐标，并回顾 $|\omega|=\rho$，可得

$$\int_{r_1\le|\omega|\le R_1}\frac{|\omega|^2}{d^{p\theta}(\Phi(\omega,\lambda))}\,d\omega\ge\frac{|\mathbb{S}^{2n-1}|}{C^{p\theta}}\int_{r_1\le\rho\le R_1}\rho^{2-p\theta+2n-1}\,d\rho\ge \mathrm{c}>0.$$

另一方面，当 λ 充分大时，有 $\lambda^{Q-2}/(1+\lambda^2)^{\frac{n+1}{2}}\ge \mathrm{c}\lambda^{-1}$。因此，

$$\int_{\mathcal{G}}\frac{|u_\varepsilon|^p}{d^{p\theta}}\ge \mathrm{c}\int_{\lambda_0}^{\frac{1}{2\varepsilon}}\frac{1}{\lambda}\,d\lambda=\mathrm{c}\,\log\!\left(\frac{1}{2\lambda_0\varepsilon}\right).$$

接下来只需计算 u_ε下式 (1.14) 的左端。我们有，

$$\left|\frac{\langle\nabla_{\mathcal{G}}u_\varepsilon,Z_d\rangle}{d^\theta}\right|^p=|a+b+c|^p,$$

with

$$\begin{aligned}
a &= -\frac{Q-p\theta}{p}\left(\frac{|t|}{|z|^2}\right)^{\frac{Q-2}{2p}}g_\varepsilon\!\left(\frac{t}{|z|^2}\right)\eta(d)\frac{1}{d^\theta},\\
b &= -\frac{2(Q-p\theta)}{Q-2}\left(\frac{|t|}{|z|^2}\right)^{\frac{Q-2}{2p}}\frac{t}{|z|^2}\frac{1}{d^\theta}g'_\varepsilon\!\left(\frac{t}{|z|^2}\right)\eta(d),\\
c &= \frac{Q}{Q-2}\frac{\langle z,\nabla_{\mathcal{G}}d\rangle}{d^\theta}\left(\frac{|t|}{|z|^2}\right)^{\frac{Q-2}{2p}}g_\varepsilon\!\left(\frac{t}{|z|^2}\right)\eta'(d).
\end{aligned}$$

利用 [12], 中的推论 2.1，我们知道对所有 a，b，$c\in\mathbb{R}$，都存在一个常数 $c_p>0$，使得

$$|a+b+c|^p\le|a|^p+c_p|a|^{p-1}(|b|+|c|)+c_p|b|^p+c_p^2|b|^{p-1}|c|+c_p^2|c|^p.$$

$|a|^p$ 的贡献是显式的:

$$\int_{\mathcal{G}}|a|^p\,dz\,dt=\left|\frac{Q-p\theta}{p}\right|^p\int_{\mathcal{G}}\frac{|u_\varepsilon|^p}{d^{p\theta}}\,dz\,dt.$$

其余各项利用 g_ε 的结构和 η的支集进行估计。经过变量替换 $\lambda=t/|z|^2$后，每个涉及 b 或 c 的积分都可由如下形式的表达式控制

$$\int_0^\infty\frac{\lambda^\alpha}{(1+\lambda^2)^{Q/4}}\,|g_\varepsilon(\lambda)|^\beta\,|g'_\varepsilon(\lambda)|^\gamma\,d\lambda,\tag{3.8}$$

其中 β、$\gamma\ge 0$ 和

$$\alpha=\frac{Q-2}{2}+\gamma\quad\text{if }\gamma>0,\qquad \alpha=\frac{Q-3}{2}\quad\text{if }\gamma=0.\tag{3.9}$$

为说明这些指数的合理性，我们注意到，在 $\operatorname{supp}\eta(d)$ 上，有 $|z|$、$|t| \le R_2$ 和 $|\nabla_{\mathcal{G}} d| \le \mathrm{c}$。因此

$$|\langle z, \nabla_{\mathcal{G}} d\rangle| \le \mathrm{c}\,\frac{|z|}{\sqrt{|t|}} = \mathrm{c}\,\lambda^{-1/2}$$

在涉及 $|a|^{p-1}|c|$ 的项中，以及

$$|\langle z, \nabla_{\mathcal{G}} d\rangle|^p \le \frac{|z|}{\sqrt{|t|}}\,|z|^{p-1}\sqrt{|t|}\,|\nabla_{\mathcal{G}} d|^p \le \mathrm{c}\,\lambda^{-1/2}$$

在涉及 $|c|^p$ 的项中。相比之下，对于项 $|b|^{p-1}|c|$，由 $(|t|/|z|^2)^{\cdot}$ 产生的幂给出了所需的指数 α，而一致有界性 $|\langle z, \nabla_{\mathcal{G}} d\rangle| \le \mathrm{c}$ 已足够。

A 直接利用 (3.9) 检查 (3.8) 可知，所有此类项均一致有界 a
$\mathcal{G}$。因此

$$\int_{\mathcal{G}} |a|^{p-1}|b|\,dz\,dt = \mathcal{O}(1), \qquad \int_{\mathcal{G}} |a|^{p-1}|c|\,dz\,dt = \mathcal{O}(1), \qquad \int_{\mathcal{G}} |b|^{p}\,dz\,dt = \mathcal{O}(1),$$

类似地

$$\int_{\mathcal{G}} |b|^{p-1}|c|\,dz\,dt = \mathcal{O}(1), \qquad \int_{\mathcal{G}} |c|^{p}\,dz\,dt = \mathcal{O}(1).$$

综合上述估计可得

$$\begin{aligned}\left|\frac{Q-p\theta}{p}\right|^p &\le \inf_{u\in C_c^\infty(\mathcal{G}\setminus\{0\})} \frac{\displaystyle\int_{\mathcal{G}} \frac{|\langle \nabla_{\mathcal{G}} u, Z_d\rangle|^p}{d^{p(\theta-1)}}\,dz\,dt}{\displaystyle\int_{\mathcal{G}} \frac{|u|^p}{d^{p\theta}}\,dz\,dt} \\ &\le \frac{\displaystyle\int_{\mathcal{G}} \frac{|\langle \nabla_{\mathcal{G}} u_\varepsilon, Z_d\rangle|^p}{d^{p(\theta-1)}}\,dz\,dt}{\displaystyle\int_{\mathcal{G}} \frac{|u_\varepsilon|^p}{d^{p\theta}}\,dz\,dt} = \left|\frac{Q-p\theta}{p}\right|^p + \frac{\mathcal{O}(1)}{-\log(2\lambda_0\varepsilon)}.\end{aligned}$$

令 $\varepsilon \to 0$，即可完成对 (1.14) 的尖锐性以及该命题的证明。 □

4 无权 Hardy 不等式

本节将给出 (1.16) 中定义的量的显式下界，即 Hardy 不等式的最优常数 $c(d,p,\theta)$

$$\int_{\mathcal{G}} \frac{|\nabla_{\mathcal{G}} u|^p}{d^{p(\theta-1)}}\,dz\,dt \;\ge\; c\int_{\mathcal{G}} \frac{|u|^p}{d^{p\theta}}\,dz\,dt, \qquad u\in C_c^\infty(\mathcal{G}\setminus\{0\}),\ \theta\in\mathbb{R}. \tag{4.1}$$

我们通过推论 1.1 实现这一点：针对齐次函数 d 的特定选取，给出 (1.15) 中定义的向量场 Z_d 的上界。

区分各向同性情形 $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n$ 与真正的非各向同性情形是很方便的。在前一种情况下，矩阵 B 呈现分块对角形式

$$B = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \cdots \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

以及变量替换

$$(z,t)\mapsto(\eta,\tau)=\big(z,\tfrac{\lambda_1}{4}\,t\big)$$

这使其结构归结为标准海森堡群的结构。各向同性情形下的分析将在下一节进行，而各向异性情形则另行处理。

4.1 海森堡群

对于 $n\in\mathbb{N}$，海森堡群为 $\mathbb{H}^n=(\mathbb{R}^{2n+1},\circ)$，其群运算由 (4.2) 中的矩阵 B 确定，其中我们固定 $\lambda_1=4$。李代数由以下左不变向量场生成

$$X_{2i-1}=\partial_{z_{2i-1}}+2z_{2i}\,\partial_t,\qquad X_{2i}=\partial_{z_{2i}}-2z_{2i-1}\,\partial_t,\qquad \partial_t,\quad i=1,\dots,n,$$

其唯一的非平凡对易关系为

$$[X_{2i-1},X_{2i}]=-4\,\partial_t.$$

我们将水平梯度记为

$$\nabla_{\mathbb{H}}=(X_1,\dots,X_{2n}).$$

在此情形下，矩阵 B 满足

$$B^{-1}=4J,$$

其中，J 表示典范斜对称矩阵，它在每个水平二维子空间上执行旋转 $\pi/2$，即 $J^2=-I$。相应地，我们定义

$$\nabla_{\mathbb{H}}^{\perp}u:=J\,\nabla_{\mathbb{H}}u.$$

各向异性膨胀

$$\delta_\gamma(z,t)=(\gamma z,\gamma^2 t),\qquad \gamma>0,$$

是群自同构，并确定 $\mathbb{H}^n$ 的齐次结构，其齐次维数为 $Q=2n+2$。

我们将在 $\mathbb{H}^n$ 上考察两个显式的正则正齐次函数：Kor´anyi 标尺 $\rho=(|z|^4+t^2)^{1/4}$ 以及 Carnot–Carath´eodory 距离 δ_{cc}。前者与海森堡次拉普拉斯算子 [15]，的基本解相关，而后者则是由水平向量场 [2] 诱导的自然距离。

定理 1.2 的证明。证明 ρ 和 δ_{cc} 满足定理 1.1 的假设后，我们将给出与它们各自相关的向量场 Z_d 的显式上界，从而通过推论 1.1 得到 $c(d,p,\theta)$ 所需的下界。

我们先来考虑 Koranyi 标度 ρ。(1.15) 中定义的向量场形式如下：

$$Z_\rho=\frac{Q}{Q-2}\,\frac{z}{\rho}-\frac{p\theta}{Q-2}\,\frac{t}{\rho^2}\,\nabla_{\mathbb{H}}^{\perp}\rho.$$

对于 Kor´anyi 标度，恒等式

$$|\nabla_{\mathbb{H}}\rho|^2=\frac{|z|^2}{\rho^2},\qquad \langle z,\nabla_{\mathbb{H}}^{\perp}\rho\rangle=\frac{|z|^2t}{\rho^3}$$

由直接计算可得。结合注 1.1，它们表明假设 (d.1)–(d.3) 得以满足。

引入参数 $\lambda = t/|z|^2$，经过直接计算可得

$$|Z_\rho|^2 = \frac{1}{(1+\lambda^2)^{1/2}} \left[\left(\frac{Q}{Q-2} \right)^2 + \frac{p\theta(p\theta - 2Q)}{(Q-2)^2} \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2} \right].$$

对 $\lambda \in \mathbb{R}$ 取最大值即可得到所需的界 (1.18)。

现在转而讨论卡诺–卡拉索多里距离 δ_{cc}。回顾一下，δ_{cc} 在中心 $\{z = 0\}$ 之外连续且光滑，参见例如 [18, 定理 3.1]。为后续使用，方便起见，我们引入适用于 δ_{cc} 的极坐标，沿用 [3] 的做法（另见 [16]）。令 $S = \{w \in \mathbb{C}^n : |w| = 1\}$ 为 $\mathbb{C}^n$ 中的单位球面，并定义

$$\Phi : \mathcal{S} \times [-2\pi, 2\pi] \times (0, +\infty) \to \mathbb{H}^n, \qquad (a + ib, \nu, r) \mapsto (z, t),$$

其中 a、$b \in \mathbb{R}^n$，并且对于 $\nu \neq 0$，令

$$\begin{cases} z_{2i-1} = \dfrac{b_i(1-\cos\nu) + a_i \sin\nu}{\nu}\, r, \\ z_{2i} = \dfrac{-a_i(1-\cos\nu) + b_i \sin\nu}{\nu}\, r, \\ t = 2\, \dfrac{\nu - \sin\nu}{\nu^2}\, r^2, \end{cases}$$

而对于 $\nu = 0$，令

$$z_{2i-1} = a_i\, r, \quad z_{2i} = b_i\, r, \quad t = 0,$$

于是，

$$\delta_{cc}(\Phi(a + ib, \nu, r)) = r.$$

我们记录下 δ_{cc} 的导数满足以下恒等式（见 [3] 中的引理 3.11）。若 $(z, t) = \Phi(a + ib, \nu, r)$，其中 $\nu \neq 0$，则

$$X_{2i-1}\delta_{cc} = b_i \sin\nu + a_i \cos\nu, \qquad X_{2i}\delta_{cc} = b_i \cos\nu - a_i \sin\nu, \tag{4.3}$$

$$\partial_t \delta_{cc} = \frac{\nu}{4r}. \tag{4.4}$$

我们还使用以下关系

$$|z|^2 = 2\, \frac{1-\cos\nu}{\nu^2}\, r^2, \qquad z \cdot \nabla_{\mathbb{H}}^{\perp} \delta_{cc} = \frac{1-\cos\nu}{\nu}\, r, \tag{4.5}$$

其验证可由参数化 Φ 直接得出。特别地，

$$|\nabla_{\mathbb{H}} \delta_{cc}| = 1, \qquad |\partial_t \delta_{cc}| \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{H}^n \setminus \{0\}).$$

结合 (4.4)–(4.5) 得到

$$\left\langle \frac{z}{|z|}, \nabla_{\mathbb{H}}^{\perp} \delta_{cc} \right\rangle = 2|z|\, \partial_t \delta_{cc}.$$

由于右端在 $|z| \to 0$ 时趋于零，这表明假设 (d.3) 成立。此外，

$$\langle z, B^{-1} \nabla_{\mathbb{H}} \delta_{cc} \rangle = \langle \nabla_{\mathbb{H}}^{\perp} \delta_{cc}, z \rangle - 2|z|^2\, \partial_t \delta_{cc} = 0,$$

因此 δ_{cc} 满足定理 1.1 所要求的全部结构假设，从而可以应用推论 1.1。

在这种情况下，我们有

$$Z_{\delta_{cc}} = \frac{Q}{Q-2}\frac{z}{\delta_{cc}} - \frac{p\theta}{Q-2}\frac{t}{\delta_{cc}^2}\,\nabla_{\mathbb{H}}^{\perp}\delta_{cc}.$$

因此，极坐标表示 $(z,t) = \Phi(a+ib,\nu,r)$ 与 (4.5)–(4.4) 一起给出

$$|Z_{\delta_{cc}}(z,t)|^2 = 2\left(\frac{Q}{Q-2}\right)^2\frac{1-\cos\nu}{\nu^2} + \left(\frac{2p\theta}{Q-2}\right)^2\left(\frac{\nu-\sin\nu}{\nu^2}\right)^2 - \frac{4p\theta\,Q}{(Q-2)^2}\frac{\nu-\sin\nu}{\nu^2}\,\frac{1-\cos\nu}{\nu}.$$

由于上述结果与 a, b 和 r 无关，我们设

$$g(\nu) = |Z_{\delta_{cc}}(\Phi(a+ib,\nu,r))|^2, \qquad \nu\in[-2\pi,2\pi].$$

函数 g 在紧区间上连续且为正；因此，它存在一个严格为正且有限的上确界。特别地，这意味着

$$c(\delta_{cc},p,\theta) \geq \frac{1}{\|g\|_{\infty}^{p/2}}\left|\frac{Q-p\theta}{p}\right|, \tag{4.6}$$

从而证明了 (1.19) 的第二部分。由于对 (p,θ,Q) 存在非线性依赖，该上确界的一般闭式表达式似乎无法获得。

为证明 (1.19) 中的第一个界，我们证明：若假设

$$Q \geq \frac{4p\theta}{12-\pi^2} \geq 0.$$

Set

$$\mathfrak{f}(\nu) := \frac{1-\cos\nu}{\nu^2}, \qquad \mathfrak{g}(\nu) := \frac{\nu-\sin\nu}{\nu^2}, \qquad \mathfrak{h}(\nu) := p\theta\,\mathfrak{g}(\nu) - Q\nu\,\mathfrak{f}(\nu).$$

那么，

$$g(\nu) = 2\left(\frac{Q}{Q-2}\right)^2\mathfrak{f}(\nu) + \frac{4p\theta}{(Q-2)^2}\,\mathfrak{g}(\nu)\mathfrak{h}(\nu).$$

由于 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{h}$ 都是奇函数，且对于 $0<\nu<2\sqrt{3-p\theta/Q}$，有

$$\mathfrak{f}(\nu) \geq \frac{1}{2} - \frac{\nu^2}{24} > 0, \qquad \mathfrak{g}(\nu) \leq \frac{\nu}{6}, \qquad \mathfrak{h}(\nu) \leq \nu\left(\frac{p\theta}{6} - \frac{Q}{2}\right) + \frac{Q}{24}\nu^3 < 0,$$

由此可得 $\mathfrak{g}(\nu)\mathfrak{h}(\nu) \leq 0$. 因此

$$g(\nu) \leq \left(\frac{Q}{Q-2}\right)^2 \qquad \text{for } |\nu| < 2\sqrt{3-\frac{p\theta}{Q}},$$

且 $\nu=0$ 是 g 的局部最大值。

要得出 $\nu=0$ 取得全局最大值这一结论，还需要控制区域 $|\nu|\geq\pi$，因为关于 Q 的假设保证了 $2\sqrt{3-p\theta/Q}\geq\pi$.。由于 $|Z_{\delta_{cc}}|$ 关于 ν是偶函数，只需将范围限制在 $\nu\in[\pi,2\pi]$。在此区间上，

$$f(\nu) \leq f(\pi), \qquad g(\nu) \leq g(\pi) = \frac{1}{\pi},$$

因此

$$g(\nu) \le 2\left(\frac{Q}{Q-2}\right)^2 f(\pi) + \frac{4p^2\theta^2}{(Q-2)^2}\, g(\pi)^2 = \left(\frac{Q}{Q-2}\right)^2 \frac{4}{\pi^2}\left(1 + \frac{p^2\theta^2}{Q^2}\right).$$

右侧的上界为 $\left(\frac{Q}{Q-2}\right)^2$。因此，

$$\sup_{\nu\in[-2\pi,2\pi]} g(\nu) = \left(\frac{Q}{Q-2}\right)^2, \tag{4.7}$$

且最大值在 $\nu = 0$ 处取得。证明完毕。 □

4.2 各向异性情形

本节聚焦于 B 的至少两个特征值彼此不同的情形。与各向同性情形不同，不存在任何变量替换能够将底层群运算化为海森堡结构。这阻碍了上一节中所采用的简化方法，也使相关向量场 Z_d 的行为变得更加微妙。然而，对于 (1.21) 中定义的特定齐次范数，我们仍然可以为 $|Z_d|$ 提供显式上界。

定理 1.3 的证明。由于矩阵 B 如 (2.1) 所示为块对角矩阵，因此有

$$(-B^2)^{1/2} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \lambda_n & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}. \tag{4.8}$$

因此，(1.21) 中的范数可写为

$$\rho_B(z,t) = \left(|z|_B^4 + t^2\right)^{1/4}, \qquad |z|_B = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{4}(z_{2i-1}^2 + z_{2i}^2)}.$$

显然可以验证， ρ_B 是一个 1 次齐次函数，在 $\mathcal{G}\setminus\{0\}$ 上光滑，并满足定理 1.1 中的假设 (d.1)–(d.3)。

相应的向量场形式为

$$Z_{\rho_B}(z,t) = \frac{Q}{Q-2}\,\frac{z}{\rho_B} - \frac{4p\theta}{Q-2}\,\frac{t}{\rho_B^2}\, B^{-1}\nabla_{\mathcal{G}}\rho_B. \tag{4.9}$$

为了给 $c(\rho_B, p, \theta)$ 取上界，我们注意到

$$|\langle v, Z_{\rho_B}(z,t)\rangle| \le |v|\sqrt{\frac{4}{\min\lambda_i}}|Z_{\rho_B}(z,t)|_B \le |v|\frac{2}{\sqrt{\min\lambda_i}}\sup_{\mathcal{G}}|Z_{\rho_B}|_B. \tag{4.10}$$

因此，

$$c(\rho_B, p, \theta) \ge \left(\frac{\sqrt{\min\lambda_i}}{2\sup_{\mathcal{G}}|Z_{\rho_B}|_B}\right)^p \left|\frac{Q-p\theta}{p}\right|^p. \tag{4.11}$$

特别地，我们将证明归结为计算 $|Z_{\rho_B}(z,t)|_B$ 的最大值。

直接计算表明

$$|B^{-1}\nabla_{\mathcal{G}}\rho_B|_B^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4\lambda_i}\left((X_{2i-1}\rho_B)^2 + (X_{2i}\rho_B)^2\right) = \frac{|z|_B^2}{16\rho_B^2}, \tag{4.12}$$

$$\langle z, (-B^2)^{1/2}B^{-1}\nabla_{\mathcal{G}}\rho_B\rangle = \frac{|z|_B^2 t}{\rho_B^3}. \tag{4.13}$$

注意到，令 $t = \lambda|z|_B^2$，我们有 $\rho_B(z,\lambda|z|_B^2) = |z|_B(1+\lambda^2)^{1/4}$。因此，由（4.9）可得，

$$g(\lambda) := |Z_{\rho_B}(z, \lambda|z|_B^2)|_B^2 = \frac{1}{(1+\lambda^2)^{1/2}}\left[\left(\frac{Q}{Q-2}\right)^2 + \frac{p\theta(p\theta-2Q)}{(Q-2)^2}\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}\right]. \tag{4.14}$$

对 $\lambda \in \mathbb{R}$ 取最大值即可得到所需的界（1.22）。 □

注 4.1。在各向同性情形 $\lambda_i \equiv 4$ 下，有 $d = 2\rho$，因此上式化简为使用 Kor´anyi 规范得到的海森堡值。

上文考虑的齐次范数 $d(z,t)$ 通常并不与 $\mathcal{G}$ 上次拉普拉斯算子的基本解相关。在海森堡情形下，Kor´anyi 范数 ρ 源自基本解，并具有这样的性质：$|Z_\rho|$ 在水平平面 $\{t=0\}$ 上取得其最大值。自然会问，对于由非各向同性群上的基本解生成的齐次范数，这一性质是否仍然成立。

下一个例子表明情况并非如此。考虑 $\mathcal{G} = (\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}, \circ, \delta_\gamma)$，其群运算由下式确定

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Q = 6.$$

Beals–Gaveau–Greiner [7] 得到了基本解的如下积分公式

$$\Gamma(z,t) = \frac{\lambda_1\lambda_2}{4\pi^3}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s^2\,\mathrm{csch}(2\lambda_1 s)\cosh(2\lambda_2 s)}{\left(\lambda_1(z_1^2+z_2^2)s\,\coth(2\lambda_1 s) + \lambda_2(z_3^2+z_4^2)s\,\coth(2\lambda_2 s) - its\right)^2}\,ds.$$

相应的齐次范数为 $\rho = \Gamma^{-1/4}$。对于 $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ 和 $\lambda_2 = 1$，Balogh–Tyson [6]给出了显式表达式

$$\rho(z,t) = \frac{\left(\left(\frac{z_1^2+z_2^2}{2} + z_3^2 + z_4^2\right)^2 + t^2\right)^{1/8}\left(\frac{z_1^2+z_2^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{z_1^2+z_2^2}{2} + z_3^2 + z_4^2\right)^2 + t^2}\right)^{3/8}}{\left(\frac{z_1^2+z_2^2}{2} + z_3^2 + z_4^2 + \sqrt{\left(\frac{z_1^2+z_2^2}{2} + z_3^2 + z_4^2\right)^2 + t^2}\right)^{1/8}}.$$

另请参见 [10] ，了解显式推导的更多细节。

相关向量场的行为可能与各向同性情形存在显著差异。为说明这一点，考虑上述描述的情形 $p\theta = 2$ 和齐次范数 ρ。对于这一选择，向量场的形式为

$$Z_\rho = \frac{3}{2}\frac{z}{\rho} - 2\frac{t}{\rho^2}\left(-\frac{X_2\rho}{\lambda_1}, \frac{X_1\rho}{\lambda_1}, -\frac{X_4\rho}{\lambda_2}, \frac{X_3\rho}{\lambda_2}\right),$$

因此

$$|Z_\rho(z,t)|^2 = \frac{9}{4}\,\frac{|z|^2}{\rho^2} + 4\,\frac{t^2}{\rho^4}\left(\frac{(X_1\rho)^2+(X_2\rho)^2}{\lambda_1^2} + \frac{(X_3\rho)^2+(X_4\rho)^2}{\lambda_2^2}\right) - 6\,\frac{t}{\rho^3}\left(\frac{-z_1X_2\rho + z_2X_1\rho}{\lambda_1} + \frac{-z_3X_4\rho + z_4X_3\rho}{\lambda_2}\right).$$

Set

$$B(z,t) = |Z_\rho(z,t)|^2 - |Z_\rho(z,0)|^2.$$

当且仅当 $B(z,t) \le 0$ 时，$|Z_\rho|$ 在 $t=0$ 处取得最大值。

与海森堡情形不同，ρ 的解析结构排除了直接判定符号ana分析 $B(z,t)$。符号计算（使用 MATHEMATICA 完成）表明

$$B\big((0,0,0,\tfrac{1}{4}),\,0\big) > 0.$$

因此，$|Z_\rho|$ 的最大值并非在水平平面上取得，尽管 ρ 源自次拉普拉斯算子的基本解。

4.3 海森堡群的乘积

在欧几里得情形中，锐 Hardy 常数在笛卡尔积下并不稳定；例如，$\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ 中的最优常数并不等于两个二维情形的最优常数之和。这自然引出了一个问题：在海森堡群的情形中会发生什么？我们的目标是了解无权Hardy不等式中最优常数的下界在海森堡群的笛卡尔积下如何变化。

我们用 $\mathbb{H}^n$ 表示 $\mathbb{R}^{2n+1}$ 中的标准海森堡群，并考虑

$$\mathcal{G} = (\mathbb{H}^n)^N.$$

这是一个二步 Carnot 群，其底流形为 $\mathbb{R}^{2nN} \times \mathbb{R}^N$，膨胀为

$$\delta_\gamma(z,t) = (\gamma z, \gamma^2 t),$$

齐次维数为

$$Q = 2N(n+1).$$

记 $z = (z^{(1)}, \dots, z^{(N)})$，其中 $z^{(j)} \in \mathbb{R}^{2n}$，并记 $t = (t_1, \dots, t_N) \in \mathbb{R}^N$，则群运算按分量定义为

$$(z,t)\circ(\eta,\tau) = \Big(z+\eta,\ t+\tau+\tfrac{1}{2}\big(\langle B_{\mathbb{H}} z^{(1)}, \eta^{(1)}\rangle, \dots, \langle B_{\mathbb{H}} z^{(N)}, \eta^{(N)}\rangle\big)\Big),$$

其中 $B_{\mathbb{H}}$ 是海森堡群的标准斜对称矩阵，由式 (4.2) 给出，其中$\lambda_1 = 4$。

水平层由以下元素生成

$$X_{2i-1}^{(j)} = \partial_{z_{2i-1}^{(j)}} + 2z_{2i}^{(j)}\,\partial_{t_j}, \qquad X_{2i}^{(j)} = \partial_{z_{2i}^{(j)}} - 2z_{2i-1}^{(j)}\,\partial_{t_j},$$

对于 $j = 1, \dots, N$ 和 $i = 1, \dots, n$，唯一非平凡的对易关系为

$$[X_{2i}^{(j)}, X_{2i-1}^{(j)}] = 4\,\partial_{t_j}.$$

特别是，每个垂直向量场都可以写成

$$\partial_{t_j} = \frac{1}{4n} \sum_{i=1}^{n} [X_{2i}^{(j)}, X_{2i-1}^{(j)}].$$

膨胀的无穷小生成元在 $\mathcal{G}$ 上为

$$\mathcal{E} = \sum_{j=1}^{N} \left(\sum_{i=1}^{n} z_{2i-1}^{(j)} \, \partial_{z_{2i-1}^{(j)}} + z_{2i}^{(j)} \, \partial_{z_{2i}^{(j)}} + 2t_j \, \partial_{t_j} \right),$$

并且可以用水平向量场改写为

$$\mathcal{E} = \sum_{j=1}^{N} \left(\sum_{i=1}^{n} z_{2i-1}^{(j)} \, X_{2i-1}^{(j)} + z_{2i}^{(j)} \, X_{2i}^{(j)} + \frac{t_j}{2n} \, [X_{2i}^{(j)}, X_{2i-1}^{(j)}] \right). \tag{4.15}$$

为了陈述定理 1.1 在此乘积情形下的类似结果，我们使用第 j个因子上的水平梯度，

$$\nabla^{(j)} d = (X_1^{(j)} d, \dots, X_{2n}^{(j)} d), \qquad \nabla^{(j)\perp} d = (-X_2^{(j)} d, X_1^{(j)} d, \dots, -X_{2n}^{(j)} d, X_{2n-1}^{(j)} d),$$

并继续给出如下命题。

Pr命题 4.1. 设 $d \in C^\infty(\mathcal{G} \setminus \{0\})$为齐次范数，并固定 $p \geq 2$、 $\theta \in \mathbb{R}$。定义

$$Z_d = \frac{n+1}{n} \frac{z}{d} - \frac{p\theta}{2n} \frac{1}{d^2} \sum_{j=1}^{N} t_j \, \nabla^{(j)\perp} d, \tag{4.16}$$

从而对所有 $u \in C_c^\infty(\mathcal{G} \setminus \{0\})$，下列恒等式成立

$$\int_{\mathcal{G}} \frac{|u|^{p-2} u \, \mathcal{E} u}{d^{p\theta}} \, dz \, dt = \int_{\mathcal{G}} \frac{|u|^{p-2} u}{d^{p\theta-1}} \, \langle \nabla_{\mathcal{G}} u, Z_d \rangle \, dz \, dt \tag{4.17}$$

下一个结果是相应的 Hardy 不等式。

定理 4.1. 设 $d \in C^\infty(\mathcal{G} \setminus \{0\})$ 为齐次范数，并固定 $p \geq 2, \theta \in \mathbb{R}$。那么每个$u \in C_c^\infty(\mathcal{G} \setminus \{0\})$ 都满足

$$\int_{\mathcal{G}} \frac{|\langle \nabla_{\mathcal{G}} u, Z_d \rangle|^p}{d^{p(\theta-1)}} \, dz \, dt \;\geq\; \left| \frac{Q - p\theta}{p} \right|^p \int_{\mathcal{G}} \frac{|u|^p}{d^{p\theta}} \, dz \, dt, \tag{4.18}$$

其中 Z_d 是式 (4.16) 中定义的向量场。

证明. 设

$$f = \frac{\langle \nabla_{\mathcal{G}} u, Z_d \rangle}{d^{\theta-1}}, \qquad g = -\frac{Q - p\theta}{p} \frac{u}{d^\theta}.$$

由命题 4.1 和恒等式 $\mathcal{E}^* = -Q - \mathcal{E}$,

$$\int_{\mathcal{G}} \frac{|u|^{p-2} u}{d^{p\theta-1}} \, \langle \nabla_{\mathcal{G}} u, Z_d \rangle \, dz \, dt = \frac{1}{p} \int_{\mathcal{G}} \frac{\mathcal{E}(|u|^p)}{d^{p\theta}} \, dz \, dt = -\frac{Q - p\theta}{p} \int_{\mathcal{G}} \frac{|u|^p}{d^{p\theta}} \, dz \, dt.$$

代入 (3.3) 得到 (4.18)。 □

命题 4.1 的证明。对交换子项进行分部积分可得，对每个 j，

$$\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}\int_{\mathcal{G}}\frac{|u|^{p-2}u\,t_j}{d^{p\theta}}[X_{2i}^{(j)},X_{2i-1}^{(j)}]u\,dz\,dt=\int_{\mathcal{G}}\frac{|u|^{p-2}u}{d^{p\theta-1}}\left\langle\nabla_{\mathcal{G}}u,\frac{1}{n}\frac{z^{(j)}}{d}-\frac{p\theta}{2n}\frac{t_j}{d^2}\nabla^{(j)\perp}d\right\rangle dz\,dt.$$

利用该分解

$$\mathcal{E}=\langle z,\nabla_{\mathcal{G}}\rangle+\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}t_j[X_{2i}^{(j)},X_{2i-1}^{(j)}],$$

我们得到

$$\int_{\mathcal{G}}\frac{|u|^{p-2}u\,\mathcal{E}u}{d^{p\theta}}\,dz\,dt=\int_{\mathcal{G}}\frac{|u|^{p-2}u}{d^{p\theta-1}}\left\langle\nabla_{\mathcal{G}}u,\ \frac{z}{d}+\sum_{j=1}^{N}\Big[\frac{1}{n}\frac{z^{(j)}}{d}-\frac{p\theta}{2n}\frac{t_j}{d^2}\nabla^{(j)\perp}d\Big]\right\rangle dz\,dt.$$

括号内的向量场正是 Z_d。 □

我们将定理 4.1 应用于齐次范数

$$\rho(z,t)=\big(|z|^4+|t|^2\big)^{1/4}. \tag{4.19}$$

该齐次范数是由基本解自然诱导出的齐次规范。

对于每个 j，直接计算可得

$$|\nabla^{(j)}\rho|^2=\frac{|z^{(j)}|^2}{\rho^6}\big(|z|^4+t_j^2\big),\qquad\langle z,\nabla^{(j)\perp}\rho\rangle=\frac{t_j|z^{(j)}|^2}{\rho^3}.$$

将这些恒等式代入 Z_d 的表达式，得到

$$|Z_\rho|^2=\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\frac{|z|^2}{\rho^2}+\frac{p\theta}{n^2}\sum_{j=1}^{N}\frac{t_j^2|z^{(j)}|^2}{\rho^6}\left(\frac{p\theta}{4}\frac{|z|^4+t_j^2}{\rho^4}-(n+1)\right).$$

由于 $|z|^4+t_j^2\le\rho^4$，当 $\theta\ge0$ 时，求和项非正，并且

$$n+1\ge\frac{p\theta}{4}.$$

在此范围内，$|Z_\rho|$ 在 $t=0$ 处取得最大值，并且

$$\sup_{(z,t)}|Z_\rho|=\frac{n+1}{n}.$$

推论 4.1。设 $p\ge2$、$\theta\ge0$，并令 $\rho(z,t)$ 为 $\mathcal{G}$ 上的 Kor´anyi 范数，如 (4.19) 中所定义。若

$$n\ge\frac{1}{4}(p\theta-4),$$

那么每个 $u\in C_c^\infty(\mathcal{G}\setminus\{0\})$ 都满足

$$\int_{\mathcal{G}}\frac{|\nabla_{\mathcal{G}}u|^p}{\rho^{p(\theta-1)}}\,dz\,dt\ge\left(\frac{n}{n+1}\right)^p\left|\frac{Q-p\theta}{p}\right|^p\int_{\mathcal{G}}\frac{|u|^p}{\rho^{p\theta}}\,dz\,dt. \tag{4.20}$$

关于该推论，有以下两条简单的说明。(4.20) 中常数对 N 的依赖仅通过齐次维数 $Q = 2N(n+1) = NQ_n$ 体现，其中 $Q_n = 2n+2$ 是 $\mathbb{H}^n$ 的齐次维数。因此，该常数的形式为

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^p \left|\frac{NQ_n - p\theta}{p}\right|^p .$$

当 $0 \le p\theta \le 4$ 时，条件 $n \ge \frac{1}{4}(p\theta - 4)$ 不成立，例如 $p\theta = 2$ 时。

我们将前述构造推广到具有多个垂直方向的二阶卡诺群。设 $n, h \in \mathbb{N}$ 满足 $n \ge h$，并将 $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^h$ 分解为坐标为 (z,t) 的形式。选取实数域上线性无关、两两可交换的斜对称矩阵 $B^{(1)}, \dots, B^{(h)} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$。经过正交坐标变换后，这些矩阵具有如下分块形式

$$B^{(j)} = \operatorname{diag}\Big(\begin{pmatrix} 0 & \lambda_1^{(j)} \\ -\lambda_1^{(j)} & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & \lambda_n^{(j)} \\ -\lambda_n^{(j)} & 0 \end{pmatrix}\Big), \qquad \lambda_i^{(j)} \ge 0,\ i = 1,\dots,n,\ j = 1,\dots,h.$$

在 $\mathbb{R}^N$ 上赋予运算律

$$(z,t)\circ(\eta,\tau) = \big(z+\eta,\ t+\tau+\tfrac{1}{2}\langle Bz,\eta\rangle\big), \qquad \langle Bz,\eta\rangle = (\langle B^{(1)}z,\eta\rangle,\dots,\langle B^{(h)}z,\eta\rangle),$$

并赋予膨胀 $\delta_\gamma(z,t) = (\gamma z, \gamma^2 t)$。由此得到的空间 $\mathcal{G} = (\mathbb{R}^N, \circ, \delta_\gamma)$ 是一个二阶卡诺群，其水平层与垂直层的维数分别为 $2n$ 和 h。左不变水平向量场为

$$X_{2i-1} = \partial_{z_{2i-1}} + \sum_{j=1}^{h} \frac{\lambda_i^{(j)}}{2}\, z_{2i}\, \partial_{t_j}, \qquad X_{2i} = \partial_{z_{2i}} - \sum_{j=1}^{h} \frac{\lambda_i^{(j)}}{2}\, z_{2i-1}\, \partial_{t_j}, \qquad i = 1,\dots,n,$$

唯一非零的括号为

$$[X_{2i}, X_{2i-1}] = \sum_{j=1}^{h} \lambda_i^{(j)}\, \partial_{t_j}, \qquad i = 1,\dots,n. \tag{4.21}$$

$B^{(1)}$、…、$B^{(h)}$ 的线性无关性确保存在指标 i_1、…、$i_h \in \{1,\dots,n\}$，使得矩阵

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_{i_1}^{(1)} & \cdots & \lambda_{i_1}^{(h)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{i_h}^{(1)} & \cdots & \lambda_{i_h}^{(h)} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{h\times h}(\mathbb{R})$$

是可逆的。由 (4.21) 可知，每个垂直导数都可表示为

$$\partial_{t_j} = \sum_{k=1}^{h} (A^{-1})_{jk}\, [X_{2i_k}, X_{2i_k-1}], \qquad j = 1,\dots,h.$$

$\mathcal{G}$ 上的膨胀的无穷小生成元为

$$\mathcal{E} = \sum_{i=1}^{n} \big(z_{2i-1}\,\partial_{z_{2i-1}} + z_{2i}\,\partial_{z_{2i}}\big) + 2\sum_{j=1}^{h} t_j\,\partial_{t_j},$$

并且可以等价地用水平向量场表示为

$$\mathcal{E} = \sum_{i=1}^{n} \big(z_{2i-1}\, X_{2i-1} + z_{2i}\, X_{2i}\big) + 2 \sum_{j,k=1}^{h} t_j\, (A^{-1})_{jk}\, [X_{2i_k}, X_{2i_k-1}]. \tag{4.22}$$

为便于后续使用，我们定义

$$\nabla_{2i-1,2i} u = (0, \dots, 0, X_{2i-1}u, X_{2i}u, 0, \dots, 0), \qquad \nabla^{\perp}_{2i-1,2i} u = (0, \dots, 0, -X_{2i}u, X_{2i-1}u, 0, \dots, 0),$$

and

$$\mathbf{z}^{(i)} = (0, \dots, 0, z_{2i-1}, z_{2i}, 0, \dots, 0).$$

定理 4.2. 设 $d \in C^{\infty}(\mathcal{G} \setminus \{0\})$ 是一个光滑齐次范数，设 $p \geq 2$，并设 $\theta \in \mathbb{R}$。令

$$Z_d = \frac{z}{d} + \sum_{k=1}^{h} \frac{\mathbf{z}^{(i_k)}}{d} - 2p\theta \sum_{j,k=1}^{h} (A^{-1})_{jk}\, \frac{t_j}{d^2}\, \nabla^{\perp}_{2i_k-1,\,2i_k} d. \tag{4.23}$$

那么，对于每个 $u \in C_c^{\infty}(\mathcal{G} \setminus \{0\})$,

$$\int_{\mathcal{G}} \frac{|\langle \nabla_{\mathcal{G}} u, Z_d \rangle|^p}{d^{p(\theta-1)}}\, dz\, dt \;\geq\; \left| \frac{Q - p\theta}{p} \right|^p \int_{\mathcal{G}} \frac{|u|^p}{d^{p\theta}}\, dz\, dt. \tag{4.24}$$

对于每个光滑齐次范数 d，量 $|Z_d|$ 都一致有界。精确计算 $\max |Z_d|^2$ 的值在代数上颇为复杂，即使对于简单的范数，似乎也不存在闭式表达。

证明. 与定理 1.1 的证明类似，只要证明

$$\int_{\mathcal{G}} \frac{|u|^{p-2}u}{d^{p\theta-1}}\, \langle \nabla_{\mathcal{G}} u, Z_d \rangle\, dz\, dt = \int_{\mathcal{G}} \frac{|u|^{p-2}u\, \mathcal{E}u}{d^{p\theta}}\, dz\, dt \tag{4.25}$$

即可得到不等式 (4.24)。

分部积分可得

$$2 \int_{\mathcal{G}} (A^{-1})_{jk}\, \frac{|u|^{p-2}u\, t_j}{d^{p\theta}} [X_{2i_k}, X_{2i_k-1}] u\, dz\, dt = 2 \int_{\mathcal{G}} |u|^{p-2}u \left\langle \nabla_{\mathcal{G}} u,\, (A^{-1})_{jk}\, \nabla^{\perp}_{2i_k-1,2i_k} \left(\frac{t_j}{d^{p\theta}} \right) \right\rangle dz\, dt,$$

$$= \int_{\mathcal{G}} \frac{|u|^{p-2}u}{d^{p\theta-1}} \left\langle \nabla_{\mathcal{G}} u,\, \lambda^{(j)}_{i_k} (A^{-1})_{jk} \frac{\mathbf{z}^{(i_k)}}{d} - 2p\theta\, \frac{t_j}{d^2}\, \nabla^{\perp}_{2i_k-1,2i_k} d \right\rangle dz\, dt.$$

由于

$$\sum_{j=1}^{h} \lambda^{(j)}_{i_k} (A^{-1})_{jk} = 1,$$

对 k 求和，并使用式 (4.22) 中 $\mathcal{E}$ 的显式表达式，即可证明 (4.25)。 □

致谢。L. Fanelli 部分获得西班牙国家研究局（Agencia Estatal de Investigación）的资助，资助项目包括 BCAM Severo Ochoa 认证 CEX2021-001142-S/MCIN/AEI/10.13039/501100011033 和 CNS2023-143893；此外还获得 IKERBASQUE 以及由 MICIU/AEI/10.13039/501100011033 和欧洲区域发展基金/欧盟资助的研究项目 PID2024-155550NB-100 的支持。

参考文献

[1] Riccardo Adami、Ugo Boscain、Valentina Franceschi 和 Dario Prandi。三维次拉普拉斯算子的点相互作用。《亨利·庞加莱研究所年刊 C 辑：非线性分析》，38(4):1095–1113，2021年7月。[2] Andrei Agrachev、Davide Barilari 和 Ugo Boscain。《次黎曼几何全面导论》。剑桥高等数学研究丛书。剑桥大学出版社，剑桥，2019年。[3] L. Ambrosio 和 S. Rigot。海森堡群中的最优质量输运。《函数分析杂志》，208(2):261–301，2004年。[4] H. Bahouri、J.-Y. Chemin 和 I. Gallagher。精细化哈代不等式。《比萨高等师范学院科学分类学年刊》（第5辑），5(3):375–391，2006年。[5] H. Bahouri、J.-Y. Chemin 和 C.-J. Xu。加权索博列夫空间中的迹与迹提升定理。《朱西厄数学研究所杂志》，4(4):509–552，2005年。[6] Zolt´an M. Balogh 和 Jeremy T. Tyson。Carnot群中的极坐标。《数学杂志》，241(4):697–730，2002年。[7] Richard Beals、Bernard Gaveau 和 Peter Greiner。模型二步亚椭圆算子的格林函数及某些切向柯西–黎曼复形的分析。《数学进展》，121(2):288–345，1996年。[8] A. Bonfiglioli、E. Lanconelli 和 F. Uguzzoni。分层李群及其次拉普拉斯算子的位势理论。施普林格数学专著丛书。施普林格，柏林，2007年。[9] Cristian Cazacu、David Krejˇciˇr´ık、Nguyen Lam 和 Ari Laptev。磁性 p-拉普拉斯算子的哈代不等式。《非线性》，37(3):文章编号 035004，共27页，2024年。[10] Esther Bou Dagher 和 Bogus law Zegarl´ınski。高维各向异性海森堡群中的强制不等式。《数学物理分析》，12(1):文章编号 3，共33页，2022年。[11] Lorenzo D’Ambrosio。与退化椭圆微分算子相关的哈代型不等式。《比萨高等师范学院学年刊—科学类》，4(3):451–486，2005年。[12] Lorenzo D’Arca。欧几里得与非欧几里得情形下哈代不等式和 Rellich 型不等式的统一处理。2025年。[13] E. B. Davies。哈代不等式综述。载于《马兹亚纪念文集》，第110卷，第55–67页。施普林格出版社，巴塞尔，1999年。[14] Luca Fanelli、Haruya Mizutani、Luz Roncal 和 Nico Michele Schiavone。扰动海森堡次拉普拉斯算子不存在径向特征函数。《傅里叶分析及其应用杂志》，31(3):文章编号 37，共45页，2025年。[15] G. B. Folland。一个次椭圆算子的基本解。《美国数学会通报》，79(2):373–376，1973年。[16]Valentina Franceschi 和 Dario Prandi。海森堡群中关于卡诺–卡拉泰奥多里距离的 Hardy 型不等式。《几何分析杂志》，31(3):2455–2480，2021年。

[17] N. Garofalo 和 E. Lanconelli。海森堡群上的频率函数、不确定性原理与唯一延拓。格勒诺布尔傅里叶研究所年刊，40(2):313–356，1990。[18] Piotr Haj lasz 和 Scott Zimmerman。海森堡群中的测地线。《分析、几何与度量空间》，3(1):325–337，2015。[19]Lars H¨ormander。亚椭圆二阶微分方程。《数学学报》，119(0):147–171，1967。[20]Juha Lehrb¨ack。哈代不等式与 Assouad 维数。《数学分析杂志》，131(1):367–398，2017年3月。[21] Juan J. Manfredi 和 Virginia N. Vera De Serio。卡诺群中的重排。《数学学报（英文版）》，35(7):1115–1127，2019年7月。[22] Roberto Monti。度量空间与海森堡群中的重排。《几何分析杂志》，24(4):1673–1715，2013。[23] Michael Ruzhansky 和 Durvudkhan Suragan。齐性群上的哈代不等式，《数学进展》第327卷。伯克豪泽/施普林格，施普林格·恰姆，2019年。Hardy不等式百年。[24] Fran¸cois Vigneron。Carnot群上的 Hardy 不等式及某些亚椭圆向量场族上的 Hardy 不等式的一个简单证明。《突尼斯数学杂志》，2(4):851–880，2020年。