arXiv:2603.04088v1 [math.AP] 4 Mar 2026

半离散能量的 Wasserstein 梯度流：城市区域演化与一致量化

JOÃO MIGUEL MACHADO

摘要。我们研究概率测度空间中半离散能量的 Wasserstein 梯度流，也就是依赖于两个测度的泛函——其中一个是绝对连续密度，另一个是原子测度。这些能量自然地出现在城市规划领域。为此，我们采用著名的 JKO格式，并证明其收敛到一个极限系统；该系统由带奇异对流的抛物型偏微分方程与常微分方程耦合而成，同时还呈现奇异动力学。首先，我们在更一般的假设下借助经典工具完成证明；随后进一步证明，对于线性扩散和多孔介质型扩散两种情形，收敛在 $L^2_t H^1_x$ 中成立。接着，我们研究该系统的一些定性性质，例如原子向其对应拉盖尔单元的重心收敛。最后，我们通过大量数值模拟，为提出该系统定性行为的猜想提供依据；例如在线性扩散的情形下，我们观察到一种动态结晶现象。

关键词。 最优传输、梯度流、城市规划、最优量化**2020年数学主题分类**。 49Q22, 35A15, 91B52

目录

1. 引言 1 1.1. 主要贡献 3 致谢 4 2. 最优传输与最小化运动格式 4 2.1. 最优传输、Wasserstein距离与半离散问题 4 2.2. 最小化运动格式 6 2.3. 两种插值 7 3. 最小化运动方案的收敛 8 3.1. 最优性条件 9 3.2. 压力的强收敛 14 3.3. 极限偏微分方程—常微分方程系统 15 3.4. 多孔介质情形下的强 L^2H^1 收敛 18 4. 定性性质 23 4.1. 原子动力学的不变性质 24 4.2. 关于最优量化方程的动力学 26 5. 数值模拟与猜想 29 一种结晶现象 30 关于密度长时间行为的讨论 31 参考文献 32

1. 引言

在本文中，我们研究一类耦合的 PDE-ODE系统，该系统与城市区域演化以及概率测度的最优量化的数学建模相关。

城市系统数学建模中的一个核心问题，是如何描述分布于某一地域上的人口与有限数量的工作场所或服务场所位置之间的相互作用。针对该问题的一种变分方法由 Buttazzo 与 Santambrogio 在 [12] 中提出，他们引入了一个能量泛函，用以描述三种主要

效应：通过对人口密度施加惩罚所体现的人口拥塞、运营工作场所的成本，以及从居住地到工作地点的总体运输成本。

在此情形下，人口密度由绝对连续概率测度 ϱ 描述，而工作场所或服务场所的分布则由原子测度 $\mu = \sum_{i=1}^{N} a_i \delta_{x_i}$ 给出，其中 x_i 对应第 i 个中心的位置，a_i 表示前往该中心的人口比例。上述能量为

$$\mathscr{E}(\varrho, \mu) \stackrel{\text{def.}}{=} \mathscr{F}(\varrho) + \mathscr{G}(\mu) + W_2^2(\varrho, \mu), \tag{1.1}$$

其中

$$\mathscr{F}(\varrho) \stackrel{\text{def.}}{=} \begin{cases} \int_\Omega F(\varrho(x))\mathrm{d}x, & \text{if } \varrho \ll \mathscr{L}^d \llcorner \Omega, \\ +\infty, & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{1.2}$$

表示人口密度的拥塞项，而

$$\mathscr{G}(\mu) \stackrel{\text{def.}}{=} \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} g(a_i), & \text{if } \mu = \sum_{i=1}^{N} a_i \delta_{x_i} \text{ with } (x_i)_{i=1}^N \subset \overline{\Omega}, \\ +\infty, & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{1.3}$$

表示给定工作场所原子分布的运营成本。由平方Wasserstein距离给出的耦合项表示人口前往工作场所的全局运输成本。定义及其性质见 [40, 43] ，或参见第 3 节的简要介绍。除 Butazzo 和 Santambrogio 的研究外，最优传输技术也被广泛用于对绝对连续概率密度与原子测度 [7 的耦合进行建模——因此属于半离散输运的范畴；关于半离散情形的更多细节，见 [28,35]。

从上述变分原理出发，我们的首要目标是通过能量 1.1 的梯度流，推导人口密度、工作地点以及在各地点工作的相应人口比例所满足的演化方程组。采用这一方法得到的方程如下

$$\begin{cases} \partial_t \varrho_t = \Delta P(\varrho_t) + \operatorname{div}\left(\varrho_t \left(\sum_{i=1}^{N} (x - x_i(t)) \mathbb{1}_{\Omega_i(t)}\right)\right) \\ \dot{x}_i(t) = -a_i(t) x_i(t) + \int_{\Omega_i(t)} x \mathrm{d}\varrho_t + N_\Omega(x_i), \text{ for } i = 1, \dots, N \\ \dot{a}_i(t) = \left(-g'(a_i(t)) + \psi_i(t)\right) \mathbb{1}_{\{a_i > 0\}}, \text{ for } i = 1, \dots, N \\ \Omega_i(t) = \operatorname{Lag}_i(\psi_t, \mathbf{x}_t), \ \psi(t) \text{ is a potential for } W_2^2(\varrho_t, \mu_t), \end{cases} \tag{1.4}$$

其中 $N_\Omega(x)$ 是 Ω 在 x 处的法锥，而 $P(\rho) \stackrel{\text{定义为}}{=} \rho F'(\rho) - F(\rho)$ 表示压力。请注意，指示函数乘在 a_i 的动力学项上；这意味着，如果在某一时刻 $\bar{t}$ i 原子的质量变为零，那么从此以后它就不再参与动力学。

我们将通过最小化运动方案（MMS）来实现这一目标，该方案采用积拓扑：密度 ϱ 由 ℓ^2 Wasserstein距离诱导，Ω^N 中原子集合及权重在 $(N-1)$ 维单纯形上的拓扑则由 ℓ^2 欧几里得范数诱导。尽管最小化运动方案可以在任意度量空间 [3], 中定义，但在最优传输领域，它更广为人知的名称是JKO格式。该格式最初于 [27,37] 提出，旨在将 Fokker-Planck 方程和多孔介质方程解释为此拓扑下的梯度流。自 [3], 以来，针对 Wasserstein 拓扑中相对于 McCann 意义下测地凸能量的梯度流，已有一套标准理论 [32]。尽管能够证明具有这种变分结构的成熟方程解具备许多有趣性质，但这一方法也被用于证明更复杂模型的解的存在性，参见 [17,31]。在这些参考文献以及本文中，尽管所研究的能量并非测地凸能量，我们仍然可以定义最小化运动方案并研究其性质。

系统1.4可以作如下解释： ϱ_t 上的第一个方程描述了压力 $P(\varrho_t)$扩散的趋势与其质量集中在每个拉盖尔单元 Ω_i 内并趋向原子 x_i之间的竞争。原子位置的演化与其对应拉盖尔单元重心到原子的距离成正比。另一方面，

其对应权重的演化由当前尺度 $g'(a_i)$下对增长的阻力与康托罗维奇势函数之间的波动相平衡。

空穴系统通过最优传输问题的最优性相互关联，这种最优性由 $\psi(t)$和拉盖尔单元的定义编码。

$$\mathrm{Lag}_i(\psi_t, \mathbf{x}_t) \overset{\text{def.}}{=} \left\{ x \in \Omega : \frac{1}{2}|x - x_i(t)|^2 - \psi_i(t) \le \frac{1}{2}|x - x_j(t)|^2 - \psi_j(t) \ j = 1, \dots, N \right\}.$$

这类最优性条件具有明确的经济均衡解释；事实上， ψ_i 可以解释为个人在 x_i工作时应预期获得的平均工资。因此，在就业需求分布$N(\mu_t = \sum a_i(t)\delta_{x_i\ (t)}$ 和由人口 ϱ_t给出的劳动力供给地理分布下，最优ψ 实现了薪酬与地理位移之间的均衡。此外，最优传输理论指出，康托罗维奇势函数在相差一个加法常数的意义下是唯一的；在我们的情形中， ψ 由以下事实唯一确定：$\sum_{i=1} \dot{a}_i(t) = 0.$

假设。 为了使这个问题在建模层面具有意义且在数学上具有挑战性，我们作出如下假设。

(H1) Ω 是 $\mathbb{R}^d$ 中的凸有界子集；(H2) $F \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}_+)$ 是凸的，且具有超线性增长

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{F(t)}{t} = +\infty$$

并满足 McCann 的位移凸性条件，即

$$t \mapsto t^d F(t^{-d}) \text{ is convex and nonincreasing.}$$

(H3) $g \in \mathscr{C}^1_{loc}((0,1])$ 满足 $g(0) = 0$，且在 0 处有尖点，其含义是

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{g(t)}{t} = +\infty.$$

将权重固定为常数 $a_i \overset{\text{定义为}}{=} 1/N$，并将密度惩罚项设为玻尔兹曼熵 $\mathscr{F}(\varrho) = \mathcal{H}(\varrho) \overset{\text{定义为}}{=} \int_\Omega \varrho \log \varrho \mathrm{d}x$，我们得到如下动态量化方程

$$\begin{cases} \partial_t \varrho = \Delta \varrho + \operatorname{div}\left(\varrho_t \sum_{i=1}^N (x - x_i(t)) \mathbb{1}_{\Omega_i(t)} \right), \\ \dot{x}_i(t) = b_i(t) - x_i(t), \text{ for } i = 1, \dots, N, \end{cases} \tag{1.5}$$

其中， $b_i(t) \overset{\text{定义为}}{=} N \int_{\Omega_i(t)} x \mathrm{d}\varrho_t$ 对应于第 i 个最优拉盖尔单元的重心。

1.1. 主要贡献。 如上所述，本文的一项主要贡献是通过 JKO格式推导方程 (1.4)，并证明其弱解的存在性。与离散系统的耦合引入了许多非平凡步骤。首先，处理边界效应颇具难度：原则上，原子可能在 Ω 的边界上演化，从而使法锥约束在其动力学中生效。阻止这种情况发生的原因是，原子受到拉盖尔单元重心的吸引，而且内能泛函 $\mathscr{F}$赋予的 ϱ_t 具有一致的时间可积性。 g 在 0 处有尖点这一事实也会给 a_i的动力学带来问题。我们的方法是证明，离散格式的任何极限曲线都具有这样的性质：每当一个原子到达 0，它在之后的整个演化过程中都会保持为 0。因此，只需刻画它们在首次消失之前任意开区间内的动力学。在任意这样的区间内， $g'(a_i(t))$ 都不会爆炸。

接下来，遵循JKO格式理论的最新进展 [41], ，我们证明与能量(1.1)相关联的JKO格式在 $L^2([0,T]; H^1(\Omega))$中强收敛，而不是借助更标准的工具所得到的在 $L^1([0,T] \times \Omega)$的强拓扑中的经典收敛。这一结果是在内能 $\mathscr{F}$ 为玻尔兹曼熵或多孔介质型时得到的，

即对某个 $m>1$，形如 $\Delta\varrho^m$ 的扩散。即便平流比半离散耦合动力学所产生的平流更为光滑，这也是相对于 [41], 的改进，因为迄今为止这类强收敛结果仅在线性扩散情形中得到。

通过收敛分析，我们能够研究方程 (1.4) 的定性性质，以及它的一些简化版本，在这些版本中不会出现边界效应。我们在第4节中完成这项工作，并证明原子永远不会触及边界，除非恰好在其质量降为 0 的时刻。我们还证明，如果一个原子初始位于边界上，那么它会立即被推入区域内部；换言之，若 $x_i(0)\in\partial\Omega$，则对于 t 在 0 的某个足够小邻域内的 t，$x_i(t)\in\Omega$的内部。这些性质立即表明，变分方程 (1.5) 在 $\mathbb{R}_+$ 上全局适定。在这种情况下，我们在定理 4.5 中证明，当 $t\to+\infty$ 时，原子与其相应重心之间的距离收敛于 0。我们将梯度流的能量耗散与对势函数 $t\mapsto\psi_i(t)$ 演化正则性的细致分析相结合，得出这一结论；这意味着重心的演化具有全局绝对连续性。此结论在引理2.1中得到证明。

我们在第5节通过大量数值模拟结束本文。这些模拟不仅证实了我们证明的理论结果，还使我们能够对系统的长期行为提出许多猜想，涵盖线性扩散和多孔介质型扩散。

致谢

作者谨向纪尧姆·卡利耶、康坦·梅里戈和菲利波·桑坦布罗焦致谢，感谢他们提出这一问题并提出诸多意见，使本文得以完善。作者还衷心感谢拉格朗日数学与计算研究中心的支持。

2. 最优传输与最小化运动格式

本节回顾最优传输和 Wasserstein 梯度流文献中的一些著名结果，并介绍后文将用到的一些记号。

2.1. 最优传输、Wasserstein距离与半离散问题。令 $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ 为一个紧凸集，记 $\mathscr{M}(\Omega)$ 为 Ω 上有限（标量）拉东测度的空间，记 $\mathscr{M}^d(\Omega)\overset{\text{定义为}}{=}\big(\mathscr{M}(\Omega)\big)^d$ 为有限向量值拉东测度的空间。Ω 上的（博雷尔）概率测度集合记为 $\mathscr{P}(\Omega)\subset\mathscr{M}(\Omega)$。给定 $\mu,\ \nu\in\mathscr{P}(\Omega)$。2-Wasserstein距离 W_2^2 由带有代价函数 $c(x,\ y)=|x-y|^2$ 的二次最优传输问题的值函数定义，并有三种等价表述：

$$W_2^2(\mu,\nu)\overset{\text{def.}}{=}\min_{\gamma\in\Pi(\mu,\nu)}\int_{\Omega\times\Omega}|x-y|^2\mathrm{d}\gamma(x,y)=\sup_{\substack{\varphi,\psi\in\mathscr{C}_b(\Omega)\\ \varphi\oplus\psi\le c}}\int_\Omega\varphi\mathrm{d}\mu+\int_\Omega\psi\mathrm{d}\nu,\tag{2.1}$$

其中，$\Pi(\mu,\ \nu)$ 是边缘测度为 $\mu,\ \nu$ 的运输计划集合。众所周知，该量定义了 $\mathscr{P}(\Omega)$ 上的一种距离，并能度量概率测度的窄收敛，即与连续有界函数 $\mathscr{C}_b(\Omega)$ 对偶意义下的收敛。关于这一主题的更多信息，读者可参阅众多专著 [3, 40, 43]。下文将简要讨论后续工作所需的相关性质。

对于二次情形，我们总能得到对偶问题 (2.1) 的最优 Kantorovich 势（$\varphi,\ \psi$）的存在性；紧域上的证明可参见例如 [40, 命题 1.11] 。原问题和对偶问题的最优解之间的关系如下：

$$\varphi(x)+\psi(y)=|x-y|^2\quad\gamma-\text{a.e.}$$

并且只要 $\mu\ll\mathscr{L}^d$，布雷尼耶定理就指出，$\gamma=(\mathrm{id}\ T)_\sharp\mu$ 集中在映射 T 的图像上，而该映射是某个凸函数的梯度

$$T=\nabla u,\ \text{and } u \text{ is related to the optimal potential } u=\frac{1}{2}|\cdot|^2-\varphi.$$

在这种情况下，我们还知道最优映射 T 是唯一的，而康托罗维奇势函数 $(\varphi,\ \psi)$ 在相差常数的意义下唯一。

半离散最优传输问题假设第一个边缘测度由绝对连续测度 $\varrho \ll \mathscr{L}^d$ 和离散测度给出。给定$\mathbf{x} = (x_i)_{i=1}^N \in \Omega^N$ 以及$\mathbf{a} = (a_i)_{i=1}^N \in \Delta_{N-1}$ 单纯形，我们令

$$\mu_{\mathbf{x},\mathbf{a}} \overset{\text{def.}}{=} \sum_{i=1}^N a_i \delta_{x_i},$$

表示原子集中在$\mathbf{x}$ 处、权重为$\mathbf{a}$的原子测度。在这种情况下，运输代价的对偶形式可写为

$$\frac{1}{2}W_2^2(\varrho, \mu_{\mathbf{x},\mathbf{a}}) = \sup_{\psi \in \mathbb{R}^N} \sum_{i=1}^N \int_{\mathrm{Lag}_i(\mathbf{x},\psi)} \left(\frac{1}{2}|x - x_i|^2 - \psi_i\right) \mathrm{d}\varrho + \sum_{i=1}^N a_i \psi_i, \tag{2.2}$$

其中$\mathbf{x} = (x_i)_{i=1}^N$，而 $\mathrm{Lag}_i(\mathbf{x}, \psi)$ 表示由 ψ 和$\mathbf{x}$诱导的第 i 个拉盖尔单元，定义如下：

$$\mathrm{Lag}_i(\mathbf{x}, \psi) \overset{\text{def.}}{=} \left\{ x \in \Omega : \frac{1}{2}|x - x_i|^2 - \psi_i \leq \frac{1}{2}|x - x_j|^2 - \psi_j, \ \forall j = 1, \ldots, N \right\}. \tag{2.3}$$

极大化者唯一，记为 $\psi \in \mathbb{R}^N$，相差一个常数向量的除外，并满足对所有 $i = 1, \ldots, N$，都有 $\varrho(\mathrm{Lag}_i(\mathbf{x}, \psi)) = a_i$。这些结论可通过将布雷尼耶定理应用于半离散情形得到。在全文中，我们固定以下记号

$$\Omega_i = \mathrm{Lag}_i(\mathbf{x}, \psi), \quad \Sigma_{ij} = \partial\, \mathrm{Lag}_i(\mathbf{x}, \psi) \cap \partial\, \mathrm{Lag}_j(\mathbf{x}, \psi) \text{ for } i \neq j,$$

当上下文清楚时，例如，拉盖尔剖分由 $W_2^2(\varrho, \sum a_i \delta_{x_i})$ 得到，且 ψ 为最优，我们将省略相关记号，并定义由该剖分诱导的相应最优康托罗维奇势

$$\Phi[\mathbf{x}, \psi](x) \overset{\text{def.}}{=} \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{2}|x - x_i|^2 - \psi_i\right] \mathbb{1}_{\Omega_i}(x). \tag{2.4}$$

由于拉盖尔单元是凸多边形，其面由点$\mathbf{x}$ 和势函数 ψ确定，因此它们关于这些量是稳定的，如下所述。

引理2.1。 给定一个序列$(\mathbf{x}_n, \psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛到$(\mathbf{x}, \psi)$，则有

$$\mathrm{Lag}_i(\mathbf{x}_n, \psi_n) \xrightarrow[n\to\infty]{L^1} \mathrm{Lag}_i(\mathbf{x}, \psi).$$

对我们而言，尤为重要的是考察最优传输代价关于测度的变分；在半离散情形下，则是计算其关于原子的梯度。前者例如可见 [40, 命题7.17]。半离散代价的导数可以用最优拉盖尔剖分的重心来表示。因此，我们引入以下记号

$$\mathbf{b}[\mathbf{x}, \psi] = (b_i[\mathbf{x}, \psi])_{i=1}^N \text{ where } b_i[\mathbf{x}, \psi] \overset{\text{def.}}{=} \fint_{\mathrm{Lag}_i(\mathbf{x},\psi)} x \mathrm{d}\varrho(x). \tag{2.5}$$

对半离散输运代价求导是一件非常微妙的事情，主要问题出现在两个点重合时；当它们越来越接近时，导数会变得越来越奇异。为此，引入以下关于广义对角线的记号很有用

$$\mathbb{D}_{N,\varepsilon} \overset{\text{def.}}{=} \{|x_i - x_j| \leq \varepsilon \text{ for some pair } i \neq j\}, \tag{2.6}$$

下文将总结与我们相关的结果。

引理 2.2. 设 $\varrho \in \mathscr{P}_{\mathrm{ac}}(\Omega)$，则以下结论成立：

(i) $W_2^2(\varrho, \nu)$ 的一阶变分由相差一个常数的唯一 *Kantorovich* 势 φ 给出（关于 ϱ），即对于任意 $\bar{\varrho} \in \mathscr{P}_{\mathrm{ac}}(\Omega)$，我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0^+} W_2^2(\varrho + \varepsilon(\bar{\varrho} - \varrho), \nu) = \int_\Omega \varphi \mathrm{d}(\bar{\varrho} - \varrho).$$

(ii) 在半离散输运情形下，固定 $\varrho \in \mathscr{P}_{\mathrm{ac}}(\Omega)$，令

$$F(\mathbf{x},\mathbf{a}) \overset{\text{def.}}{=} \frac{1}{2}W_2^2(\varrho,\mu_{\mathbf{x},\mathbf{a}}).$$

若对所有 $i=1,\dots,N$，均有 $\mathbf{x}\in\Omega^N\setminus\mathbb{D}_{N,\varepsilon}$ 和 $a_i>0$，则 $\mathbf{x}\mapsto F(\mathbf{x},\mathbf{a})$ 二阶可微，其梯度为

$$\nabla_{x_i}F(\mathbf{x},\mathbf{a})=\int_{\Omega_i}(x_i-x)\mathrm{d}\varrho = a_i\left(x_i-b_i[\mathbf{x},\psi]\right),$$

其中 ψ 是与 $\mu_{\mathbf{x},\mathbf{a}}$相关联的唯一康托罗维奇势。二阶导数为：对于 $i\neq j$

$$\nabla_{x_i,x_j}F(\mathbf{x},\mathbf{a})=\int_{\Sigma_{ij}}(x-x_i)\otimes(x-x_j)\frac{\varrho(x)}{|x_i-x_j|}\mathrm{d}\mathscr{H}^{d-1}(x),$$

且在对角线上，对所有 $i=1,\dots,N$

$$\nabla_{x_i,x_i}F(\mathbf{x},\mathbf{a})=a_iI_d-\sum_{j\neq i}\nabla_{x_i,x_j}F(\mathbf{x},\mathbf{a}).$$

此外，若 ϱ 连续，则 $\mathbf{x}\mapsto F(\mathbf{x},\mathbf{a})$ 为 $\mathscr{C}^2$。

我们不证明这一结果；对于条目（i），读者可参见 [40, 命题 7.17], ；对于条目（ii），读者可参见 [19]。在后一种情形中，利用包络定理可以给出一个简单的论证：令 ψ 表示一个最优康托罗维奇势，则有

$$\begin{aligned}\nabla_{x_i}F(\mathbf{x},\mathbf{a}) &= \nabla_{x_i}\left\{\int_\Omega \min_{j=1,\dots,N}\left(\frac{1}{2}|x-x_j|^2-\psi_j\right)\mathrm{d}\varrho+\sum_{j=1}^N\psi_ja_j\right\}\\ &=\int_{\mathrm{Lag}_i(\mathbf{x},\psi)}(x_i-x)\,\mathrm{d}\varrho = a_i(x_i-b_i[\mathbf{x},\psi]).\end{aligned}$$

利用梯度的这一刻画，可以很简单地证明$\mathbf{x}\mapsto F(\mathbf{x},\mathbf{a})$是半凹的，另见 [33]。为简单起见，令 $a_i=1/N$ 对所有 i均成立，并令 $F(\mathbf{x})$、$F(\mathbf{y})$分别表示将 ϱ 输运至$\mathbf{x}$ 和$\mathbf{y}$上的经验测度所需的最小成本。令Ω_i表示与 $F(x)$相关的最优拉盖尔剖分，则设 $\bar{F}(\mathbf{x})=F(\mathbf{x})-\frac{1}{2N}\|\mathbf{x}\|^2$，有

$$\begin{aligned}F(\mathbf{y}) &\le \sum_{i=1}^N\int_{\Omega_i}\frac{1}{2}|x-y_i|^2\mathrm{d}\varrho = F(\mathbf{x})+\sum_{i=1}^N\int_{\Omega_i}\left(\frac{1}{2}|x-y_i|^2-\frac{1}{2}|x-x_i|^2\right)\mathrm{d}\varrho\\ &\le F(\mathbf{x})-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N b_i\cdot(y_i-x_i)+\frac{1}{2N}\sum_{i=1}^N|y_i|^2-|x_i|^2.\end{aligned}$$

因此

$$\bar{F}(\mathbf{y})\le\bar{F}(\mathbf{x})+\nabla_{\mathbf{x}}\bar{F}(\mathbf{x})\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{x}),$$

这表明$\mathbf{x}\mapsto F(\mathbf{x})$是 $1/(2N)$半凹的。

2.2. 最小化运动格式。 为证明偏微分方程—常微分方程系统的存在性，我们采用所谓的最小化运动格式。该格式由一种可轻松推广至度量空间的隐式欧拉格式构成；关于这一一般表述的更多细节，请参阅 [3] 。

为简化起见，我们引入记号 $\mathbf{z}=(\varrho,\mathbf{x},\mathbf{a})\in\mathscr{P}_{\mathrm{ac}}(\Omega)\times\Omega^{\otimes N}\times\Delta_{N-1}$，其中 $\mathbf{x}=(x_i)_{i=1}^N$ 且 $\mathbf{a}=(a_i)_{i=1}^N$。集合 Δ_{N-1} 表示$(N-1)$维单纯形。考虑此乘积空间中$\mathbf{z}=(\varrho,\mathbf{x},\mathbf{a})$与$\mathbf{z}'=(\varrho',\mathbf{x}',\mathbf{a}')$之间的距离，其定义为

$$d^2_{W_2,\ell_2}(\mathbf{z},\mathbf{z}')\overset{\text{def.}}{=}W_2^2(\varrho,\bar{\varrho})+|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2+|\mathbf{a}-\mathbf{a}'|^2, \tag{2.7}$$

其中，$|\cdot|$表示欧氏距离。给定某个 $\mathbf{z}=(\varrho,\ \mathbf{x},\ \mathbf{a})$，并稍作滥用地记作 $\mathscr{E}(\mathbf{z})=\mathscr{E}(\varrho,\ \mu_{\mathbf{x},\ \mathbf{a}})$。

在此拓扑下的最小化运动格式由一个序列 $(\varrho_k^\tau,\ \mathbf{x}_k^\tau,\ \mathbf{a}_k^\tau)_{k\in\mathbb{N}}$ 构成，使得 $(\varrho_0^\tau,\ \mathbf{x}_0^\tau,\ \mathbf{a}_0^\tau)=(\varrho_0,\ \mathbf{x}_0,\mathbf{a}_0)$ 已给定，且对于 $k\geq 0$，我们有

$$\begin{aligned}\left(\varrho_{k+1}^\tau,\mathbf{x}_{k+1}^\tau,\mathbf{a}_{k+1}^\tau\right)_{k\in\mathbb{N}}\in\operatorname{argmin}\mathscr{F}(\varrho)+\mathscr{G}(\mu_{\mathbf{x},\mathbf{a}})+W_2^2(\varrho,\mu_{\mathbf{x},\mathbf{a}})\\ +\frac{1}{2\tau}\left(W_2^2(\varrho_k^\tau,\varrho)+\|\mathbf{x}_k^\tau-\mathbf{x}\|^2+\|\mathbf{a}_k^\tau-\mathbf{a}\|^2\right).\end{aligned}\tag{2.8}$$

不难证明该格式每一步的极小元都存在；然而，由于如前一节所述，该能量关于$\mathbf{x}$是半凹的，因此一般不能期望极小元唯一。只要上下文清楚，我们就省略对 τ 的依赖；此外，我们也用记号 $\mu_k=\mu_{\mathbf{x}_k,\ \mathbf{a}_k}$ 表示由最小化运动格式中的一个元素所诱导的原子测度。

以下结果可直接由定义得出，且属于标准结论。

引理 2.3。 假设 $\mathscr{E}(\varrho_0,\mu_0)<+\infty$，则存在一个仅依赖于Ω 和$T$ 的常数 $C>0$，使得

$$\mathscr{E}(\varrho_{k+1}^\tau,\mu_{k+1}^\tau)\leq\mathscr{E}(\varrho_k^\tau,\mu_k^\tau)\leq\cdots\leq\mathscr{E}(\varrho_0,\mu_0)\leq C,\quad \textit{for all } k\in\mathbb{N},\tau>0\tag{2.9}$$

$$\sum_{k=0}^{N_\tau-1}d_{W_2,\ell_2}^2(\mathbf{z}_k^\tau,\mathbf{z}_{k+1}^\tau)\leq C\tau.\tag{2.10}$$

证明。 为证明 (2.9)，将 $(\varrho_k^\tau,\mu_k^\tau)$ 作为定义 $(\varrho_{k+1}^\tau,\mu_{k+1}^\tau)$ 的问题中的竞争者，从而对所有 k，有

$$\frac{1}{2\tau}d_{W_2,\ell_2}^2(\mathbf{z}_k^\tau,\mathbf{z}_{k+1}^\tau)\leq\mathscr{E}(\varrho_k^\tau,\mu_k^\tau)-\mathscr{E}(\varrho_{k+1}^\tau,\mu_{k+1}^\tau).$$

由于距离 $d_{W_2,\ \ell_2}$ 非负，(2.9) 可由简单的归纳法得出。

反过来，对上述不等式关于 k 求和，由于右端可望远镜求和，且 $\mathscr{E}\geq 0$，我们得到

$$\sum_{k=0}^{N_\tau-1}d_{W_2,\ell_2}^2(\mathbf{z}_k^\tau,\mathbf{z}_{k+1}^\tau)\leq 2\mathscr{E}(\varrho_0,\mu_0)\tau,$$

结果由此得出。 □

2.3. **两种插值**。 给定时间区间 $[0,T]$ 以及通过最小化运动格式得到的序列 $(\varrho_k^\tau,\ \mathbf{x}_k^\tau,\ \mathbf{a}_k^\tau)_{k\in\mathbb{N}}$，我们考虑两种时间插值，即

- **阶梯插值：**

$$(\varrho_t^\tau,\mathbf{x}_t^\tau,\mathbf{a}_t^\tau)\overset{\text{def.}}{=}(\varrho_k^\tau,\mathbf{x}_k^\tau,\mathbf{a}_k^\tau),\ \text{if } t\in(k\tau,(k+1)\tau]\tag{2.11}$$

- **测地插值：** 第二族曲线 $(\bar\varrho^\tau,\ \bar{}\mathbf{x}^\tau,\ \bar{}\mathbf{a}^\tau)_{\tau>0}$ 现包含于$\mathscr{C}([0,T];\mathscr{P}_{\text{ac}}(\Omega))$，其定义为 $(\varrho_k^\tau,\ \mathbf{x}_k^\tau,\ \mathbf{a}_k^\tau)$ 与 $\left(\varrho_{k+1}^\tau,\ \mathbf{x}_{k+1}^\tau,\ \mathbf{a}_{k+1}^\tau\right)$ 在时刻 $k\tau$ 和 $(k+1)\tau$ 之间、相对于由 $d_{W_2,\ \ell_2}$ 诱导的拓扑的测地线。因此，令

$$s_t\overset{\text{def.}}{=}\frac{1}{\tau}((k+1)\tau-t),\ T_{k+1}^\tau\text{ is the OT map from }\varrho_{k+1}^\tau\text{ to }\varrho_k^\tau,\tag{2.12}$$

我们将测地插值定义为

$$\bar\varrho_t^\tau\overset{\text{def.}}{=}\left(T_{k+1}^\tau(t)\right)_\sharp\varrho_{k+1}^\tau,\ \text{with } T_{k+1}^\tau(t)\overset{\text{def.}}{=}\left((1-s_t)\mathrm{id}+s_tT_{k+1}^\tau\right)\tag{2.13}$$

$$\bar{\mathbf{x}}_t^\tau\overset{\text{def.}}{=}(1-s_t)\mathbf{x}_{k+1}^\tau+s_t\mathbf{x}_k^\tau\tag{2.14}$$

$$\bar{\mathbf{a}}_t^\tau\overset{\text{def.}}{=}(1-s_t)\mathbf{a}_{k+1}^\tau+s_t\mathbf{a}_k^\tau.\tag{2.15}$$

阶梯插值更容易与最优性条件联系起来（见命题 3.1），而根据构造，测地插值满足连续性方程，且具有适当的速度场；这是 Wasserstein 空间中测地线的一般性质（见 [40, Thm. 5.14] and [2, Chap. 8]）。因此，我们也定义速度集合，先从阶梯速度场开始

$$\mathbf{v}_t^\tau=\mathbf{v}_{(k+1)}^\tau=\frac{\mathrm{id}-T_{k+1}^\tau}{\tau},\ \text{for } t\in(k\tau,(k+1)\tau].\tag{2.16}$$

测地插值的速度可按如下方式计算：对于任意 $\phi \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ 和 $t \in (k\tau, (k+1)\tau]$，有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \phi \mathrm{d}\bar{\varrho}_t^\tau &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \phi \circ T_{k+1}^\tau(t)\mathrm{d}\varrho_{k+1}^\tau = \int_\Omega \nabla\phi \circ T_{k+1}^\tau(t)\cdot\left(\frac{\mathrm{id}-T_{k+1}^\tau}{\tau}\right)\mathrm{d}\varrho_{k+1}^\tau \\ &= \int_\Omega \nabla\phi\cdot\underbrace{\left(\frac{\mathrm{id}-T_{k+1}^\tau}{\tau}\right)\circ\left(T_{k+1}^\tau(t)\right)^{-1}}_{=\mathbf{v}_t^\tau}\mathrm{d}\bar{\varrho}_t^\tau.\end{aligned}$$

因此，测地速度插值可以等价地改写为

$$\mathbf{v}_t^\tau \overset{\text{def.}}{=} \mathbf{v}_{(k+1)}^\tau \circ \left(\mathrm{id} + (t-(k+1)\tau)\mathbf{v}_{(k+1)}^\tau\right)^{-1},\ \text{for } t \in (k\tau,(k+1)\tau], \tag{2.17}$$

并且 $(\varrho^\tau,\ \mathbf{v}^\tau)$ 满足连续性方程。

这一性质也可以用动量变量来表示，即 $\mathscr{M}^d([0,T]\times\Omega)$ 中的向量测度，定义如下：

$$E^\tau \overset{\text{def.}}{=} \mathbf{v}^\tau\varrho^\tau \text{ and } \bar{E}^\tau \overset{\text{def.}}{=} \bar{\mathbf{v}}^\tau\bar{\varrho}^\tau, \tag{2.18}$$

显然有

$$\partial_t\bar{\varrho}_t^\tau + \operatorname{div}\bar{E}^\tau = 0,\ \text{for all } \tau > 0,$$

在分布的意义下。

利用引理 2.3 中的先验估计，我们得到以下结果：两族插值 $(\varrho^\tau,\mathbf{x}^\tau,\mathbf{a}^\tau,E^\tau)_{\tau>0}$ 和 $\left(\bar{\varrho}^\tau,\bar{\mathbf{x}}^\tau,\bar{\mathbf{a}}^\tau,\bar{E}^\tau\right)_{\tau>0}$ 都具有紧性性质，且它们的极限一致。

命题 2.4 (第 8 章 [40])**.** 存在一条曲线

$$(\varrho_t,\mathbf{x}_t,\mathbf{a}_t,E_t)_{t\in[0,T]} \in \mathscr{C}^{0,1/2}([0,T];\mathscr{P}_{\mathrm{ac}}(\Omega)\times\overline{\Omega}\times\Delta_{N-1})\times\mathscr{M}^d([0,T]\times\Omega)$$

它是两族插值 $(\varrho^\tau,\mathbf{x}^\tau,\mathbf{a}^\tau,E^\tau)_{\tau>0}$ 和 $\left(\bar{\varrho}^\tau,\bar{\mathbf{x}}^\tau,\bar{\mathbf{a}}^\tau,\bar{E}^\tau\right)_{\tau>0}$ 的极限（沿未重新标记的子序列）。更确切地说，有

$$\begin{aligned}\varrho^\tau,\bar{\varrho}^\tau &\xrightarrow[\tau\to0]{W_2} \varrho \ \textit{uniformly in}\ [0,T],\\ (\mathbf{x}^\tau,\mathbf{a}^\tau),(\bar{\mathbf{x}}^\tau,\bar{\mathbf{a}}^\tau) &\xrightarrow[\tau\to0]{} (\mathbf{x},\mathbf{a})\ \textit{uniformly in}\ [0,T],\\ E^\tau,\bar{E}^\tau &\xrightarrow[\tau\to0]{E} \ \textit{in the narrow topology of}\ \mathscr{M}^d([0,T]\times\Omega).\end{aligned}$$

此外，$\partial_t\varrho_t$ + 散度 $E_t = 0$，其意义为分布意义下。

3. 最小化运动方案的收敛

鉴于第 2 节的结果，为了证明最小化运动格式收敛到耦合系统 (1.4)，我们只需刻画极限动量变量 E以及变量 $\mathbf{x}$,$\mathbf{a}$ 的动力学。这将在下文中借助刻画最小化运动最优性的欧拉–拉格朗日方程来完成。

然而，在刻画极限曲线时仍存在诸多困难。为处理非线性项 $\Delta P(\varrho)$，我们将需要 ϱ^τ 到 ϱ 的更强收敛，这可借助文献中已确立的结果来完成。

离散测度的演化更为微妙。关于$\mathbf{x}$的演化，我们需要谨慎处理边界效应，因为这些点被限制在 Ω 内；若任一步的极小化子位于边界上，则最优性条件必须将点推向定义域内部。然而，这些边界效应无法传递到极限 $\tau\to0$，除非我们假设$\partial\Omega$ 是光滑的。相反，我们在命题 3.2 中证明：若在最小化运动格式的某次迭代中某一点位于 Ω 的内部，则只要其质量保持为正，它便始终位于内部。

这就引出了问题的核心：质量 $\mathbf{a}$会怎样？由于$\mathbf{a}$附近的动力学包含奇异项 g'，当某个点的质量变为 0 时会发生什么并不明确。我们在命题 3.3 中证明，若 $(\varrho_t,\mathbf{x}_t,\mathbf{a}_t)_{t\geq0}$ 是由最小化运动格式得到的一条曲线，那么如果在某个时刻 $a_i(t) = 0$，则它在任意 $s > t$下都保持为零。这意味着，我们只需刻画 a_i 直至其首次消失时的动力学。

3.1. 最优性条件。 为了推导最优性条件，我们还需要*Bouligand* 切锥这一概念

$$T_\Omega(z) \overset{\text{def.}}{=} \left\{ v = \lim_{n\to\infty} v_n : z + \varepsilon_n v_n \in \Omega,\ \varepsilon_n \to 0 \right\} \tag{3.1}$$

参见 [26, 定义 5.1。1], , 该定义给出了在 Ω 中进行变分的可行方向。同样，法锥 由 $T_\Omega(z)$ 的极锥给出，例如参见 [26,第一部分，命题 5.2。4]。换言之，它可以写成

$$N_\Omega(z) \overset{\text{def.}}{=} \left\{ n \in \mathbb{R}^d : \langle n, v\rangle \le 0 \text{ for all } v \in T_\Omega(z) \right\}. \tag{3.2}$$

当 Ω 具有光滑边界时， $N_\Omega(z)$ 由外法向量生成。

命题 3.1。 设 $\left(\varrho^\tau_{k+1}, \mathbf{x}^\tau_{k+1}, \mathbf{a}^\tau_{k+1}\right)$ 是 (2.8) 的一个极小化子，并定义集合

$$I_{k+1} \overset{\text{def.}}{=} \left\{ i = 1, \dots, N : 0 < a^\tau_{k+1,i} < 1 \right\}, \tag{3.3}$$

该集合对应于权重约束未激活的那些指标。于是有

$$\begin{cases} -\mathbf{v}^\tau_{(k+1)} = \nabla F'(\varrho^\tau_{k+1}) + \displaystyle\sum_{i=1}^N (x - x^\tau_{k+1,i}) \mathbb{1}_{\Omega^\tau_{k+1,i}} & \varrho^\tau_{k+1} - a.e. \\ 0 \in \left(\dfrac{x^\tau_{k+1,i} - x^\tau_{k,i}}{\tau} + a^\tau_{k+1,i} \cdot x^\tau_{k+1,i} - \displaystyle\int_{\Omega^\tau_{k+1,i}} x \mathrm{d}\varrho^\tau_{k+1} \right) + N_\Omega(x_{k+1,i}), & i = 1, \dots, N \\ -\dfrac{a^\tau_{k+1,i} - a^\tau_{k,i}}{\tau} = g'(a^\tau_{k+1,i}) + \psi^\tau_{k+1,i}, & \textit{for all } i \in I_{k+1} \\ \Omega^\tau_{k+1,i} = \mathrm{Lag}_i\left(\psi^\tau_{k+1}, \mathbf{x}^\tau_{k+1}\right), & i = 1, \dots, N. \end{cases}$$

其中 ψ^τ_{k+1} 是与 μ^τ_{k+1} 在 $W_2^2\left(\varrho^\tau_{k+1}, \mu^\tau_{k+1}\right)$ 中对应的康托罗维奇势。

在此结果的证明中，由于 τ 是固定的，为简化记号，我们将其省略。

证明。 ϱ_{k+1} 的最优性条件与有界区域中的经典理论非常相似，参见 [40, 第 7,8], 章。因此，我们主要分析$\mathbf{x}_{k+1}$和$\mathbf{a}_{k+1}$。

的最优性条件： 由于对任意 $k \in \mathbb{N}$，内能 $\mathscr{F}$ 要求 $\varrho_{k+1} \ll \mathscr{L}^d$，我们可以使用引理 2.2 中的一阶变分公式。先推导 ϱ_{k+1}的最优性条件，因此给定 $\rho \in \mathscr{P}_{\mathrm{ac}}(\Omega)$，考虑变分 ϱ_ε 定义为= $\varrho_{k+1} + \varepsilon(\rho - \varrho_{k+1})$。由最优性可得

$$-\frac{1}{2\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0^+} W_2^2\left(\varrho_k, \varrho_\varepsilon\right) \le \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0^+} \mathscr{F}(\varrho_\varepsilon) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0^+} \frac{1}{2} W_2^2\left(\varrho_\varepsilon, \mu_{k+1}\right).$$

利用引理 2.2，我们得到

$$-\frac{\psi^\varrho_{k+1}}{\tau} = F'(\varrho_{k+1}) + \varphi^{\varrho,\mu}_{k+1},$$

其中， ψ^ϱ_{k+1} 和 $\varphi^{\varrho,\ \mu}_{k+1}$ 分别是与 ϱ_{k+1} 在 $W_2^2(\varrho_k,\ \varrho_{k+1})$和$W_2^2(\varrho_{k+1},\ \mu_{k+1})$中对应的康托罗维奇势。

另一方面，根据最优传输问题的最优性条件，有

$$\varphi^{\varrho,\mu}_{k+1}(x) + \psi_{k+1,i} = \frac{1}{2}\left\|x - x_{k+1,i}\right\|^2, \quad \text{for } \varrho_{k+1} - a.e.\ x \in \Omega_{k+1,i}.$$

由于 $\Omega_{k+1,\ i}$ 是凸多面体，其边界 ϱ_{k+1} 可忽略，因此

$$\nabla\varphi^{\varrho,\mu}_{k+1}(x) = \sum_{i=1}^N (x - x_{k+1,i}) \mathbb{1}_{\Omega_{k+1,i}}.$$

此外，由布雷尼耶定理可知，从 ϱ_{k+1} 到 ϱ_k 的最优映射由$T_{k+1} = \mathrm{id} - \nabla\psi^{\varrho}_{k+1}$给出。结合这些结果，我们得到

$$\frac{T_{k+1} - \mathrm{id}}{\tau} = \nabla F'(\varrho_{k+1}) + \sum_{i=1}^{N}(x - x_{k+1,i})\mathbb{1}_{\Omega_{k+1,i}}.$$

关于x的最优性条件：为了推导关于原子$\mathbf{x}_{k+1} =(x_{k+1,i})_{i=1}^N$的最优性条件，固定某个 i，并考虑 Bouligand 切锥*Bouligand* 切锥中的一个方向， $v \in T_\Omega(x_{k+1,i})$，其中

$$T_\Omega(z) \overset{\text{def.}}{=} \left\{v = \lim_{n\to\infty} v_n : z + \varepsilon_n v_n \in \Omega,\ \varepsilon_n \to 0\right\},$$

see [26, 定义 5.1。1]。因此，取 ε_n 和 v_n，使其如上文定义所述收敛于 v，并令

$$\bar{x}_{j,\varepsilon_n} \overset{\text{def.}}{=} \begin{cases} x_{k+1,j}, & \text{if } j \neq i, \\ x_{k+1,i} + \varepsilon_n v_n, & j = i, \end{cases}$$

并由此定义原子测度的一个变分如下

$$\mu_{\varepsilon_n} \overset{\text{def.}}{=} \sum_{j=1}^{N} a_{k+1,j}\delta_{\bar{x}_{j,\varepsilon_n}}.$$

在固定 ϱ_{k+1} 的情况下比较 μ_{k+1} 和 μ_{ε_n} 的能量，根据引理 2.2 可得

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2\tau}\frac{\|\bar{x}_{i,\varepsilon_n} - x_{k,i}\|^2 - \|x_{k+1,i} - x_{k,i}\|^2}{\varepsilon_n} + \frac{W_2^2(\varrho_{k+1},\mu_{\varepsilon_n}) - W_2^2(\varrho_{k+1},\mu_{k+1})}{\varepsilon_n}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\left\langle\frac{x_{k+1,i} - x_{k,i}}{\tau}, v_n\right\rangle + \partial_{x_i}\frac{1}{2}W_2^2\left(\varrho_{k+1},\mu_{k+1}\right)\cdot v_n + \frac{o(\varepsilon_n)}{\varepsilon_n}\right) \\ &= \left\langle\frac{x_{k+1,i} - x_{k,i}}{\tau} + \int_{\mathrm{Lag}_i(\psi_{k+1};\mathbf{x}_{k+1})}(x_{k+1,i} - x)\mathrm{d}\varrho_{k+1}, v\right\rangle. \end{aligned}$$

回顾一下，例如根据 [26, 第一部分，命题 5.2。4], ，法空间 $N_\Omega(x_{k+1,i})$由 $T_\Omega(x_{k+1,i})$的极锥给出，且 $\Omega_{k+1,i} = \mathrm{Lag}_i(\psi_{k+1}, X_{k+1})$和 $\varrho_{k+1}(\Omega_{k+1,i}) = a_{k+1,i}$，我们得到对所有 $i = 1,\dots,N$

$$-\left(\frac{x_{k+1,i} - x_{k,i}}{\tau} + a_{k+1,i}\cdot x_{k+1,i} - \int_{\Omega_{k+1,i}} x\mathrm{d}\varrho_{k+1}\right) = n_{k+1,i} \in N_\Omega(x_{k+1,i}).$$

关于的最优性条件a：接下来，我们对质量变量 $(a_{k+1,i})_{i=1}^N$进行变分。考虑两个指标 i, $j \in I_{k+1}$，并构造如下变分 $\mathbf{a}_\varepsilon = (a_{\varepsilon,h})_{h=1}^N$：

$$a_{\varepsilon,h} \overset{\text{def.}}{=} \begin{cases} a_{k+1,h}, & h \neq i,j, \\ a_{k+1,j} - \varepsilon, & h = j, \\ a_{k+1,i} + \varepsilon, & h = i. \end{cases}$$

并定义新测度 $\mu_\varepsilon \overset{\text{定义为}}{=} \mu_{\mathbf{x}_{k+1},\,\mathbf{a}_\varepsilon}$。当 ε 足够小时，该变分属于单纯形 Δ_{N-1}，因此是可容许的。因此，比较 $(\varrho_{k+1},\mu_{k+1})$ 与$^{-}(\varrho_{k+1},\mu_\varepsilon)$ 的能量，我们得到存在一个康托罗维奇势函数 ψ_{k+1}，使得

$$\frac{a_{k+1,i} - a_{k,i}}{\tau} + g'(a_{k+1,i}) + \bar{\psi}_{k+1,i} \geq \frac{a_{k+1,j} - a_{k,j}}{\tau} + g'(a_{k+1,j}) + \bar{\psi}_{k+1,j}.$$

$^{-}$此外，我们可以假设 ψ_{k+1} 在 ℓ^∞ 范数下有界，其界为常数 C_Ω；根据布雷尼耶定理，它是 Lipschitz 函数在点 $\{x_{k+1,i}\}$ 处的取值，并且$^{-}$在相差常数的意义下唯一确定，因此我们可以假设 $\psi_{k+1,1} = 0$。由 Lipschitz 连续性以及 Ω 具有有限直径可得该界。

交换 i 和 j的角色，可得等式

$$\begin{aligned} &\frac{a_{k+1,i} - a_{k,i}}{\tau} + g'(a_{k+1,i}) + \bar{\psi}_{k+1,i} \\ &\qquad = \frac{a_{k+1,j} - a_{k,j}}{\tau} + g'(a_{k+1,j}) + \bar{\psi}_{k+1,j} = c_{k+1},\ \text{for all } i,j \in I_{k+1}. \end{aligned}$$

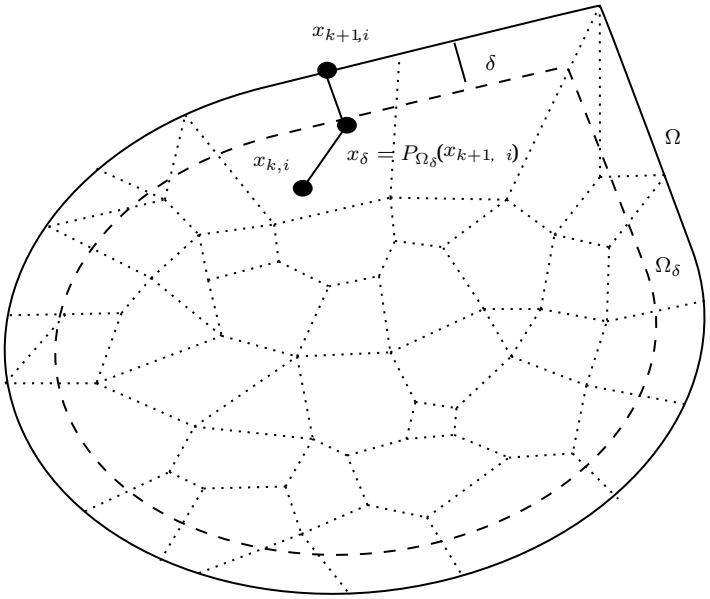

图 1. 若 $x_{k,\,i}$ 位于 Ω 的内部，且 $x_{k+1,\,i}$ 位于边界 $\partial\Omega$ 上，我们可以将 $x_{k+1,\,i}$ 投影到凸集 Ω_δ 上，得到一个更好的竞争者；该凸集由距边界至少为 δ 的点组成。

上面的常数 c_{k+1} 可以通过对所有这些量取平均得到，即

$$\begin{aligned} c_{k+1} &= \frac{1}{|I_{k+1}|}\left(\sum_{j\in I_{k+1}} \bar{\psi}_{k+1,j} + g'(a_{k+1,j}) + \sum_{j\in I_{k+1}} \frac{a_{k+1,j}-a_{k,j}}{\tau}\right) \\ &= \frac{1}{|I_{k+1}|}\left(\sum_{j\in I_{k+1}} \bar{\psi}_{k+1,j} + g'(a_{k+1,j}) + \sum_{j\in I_k\setminus I_{k+1}} \frac{a_{k,j}}{\tau}\right), \end{aligned}$$

其中，第二个等式源于 $a_{k+1,\,i}$ 和 $a_{k,\,i}$ 的和均为 1。

因此，将常数 c_{k+1} 加到康托罗维奇势函数上后，即 $\psi_{k+1,\,i} \text{ 定义为}= \bar{\psi}_{k+1,\,i} + c_{k+1}$，它们仍然是最优的，于是我们得到等式

$$-\frac{a_{k+1,i}-a_{k,i}}{\tau} = g'(a_{k+1,i}) + \psi_{k+1,i} \text{ for all } i \in I_{k+1},$$

由此证明完毕。 □

在前一个命题中，我们希望进一步了解极小元，从而消除对 Ω 和 Δ_{N-1} 的法锥的依赖。下一个结果给出了一个自然判据，用以判断点 $x_{k+1,\,i}$ 是否位于 Ω 的内部，此时法锥 $N_\Omega(x_{k+1,\,i})$ 为零。

命题 3.2. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 是紧凸集，且 $\left(\varrho_{k+1}^\tau, \mathbf{x}_{k+1}^\tau, \mathbf{a}_{k+1}^\tau\right)$ 是 (2.8) 的一个极小化子。那么，对所有 $i = 1, \ldots, N$，若 $a_{k+1,\,i} > 0$ 且 $x_{k,\,i} \in \Omega$的内部，则也有 $x_{k+1,\,i} \in \Omega$的内部。

在这段证明中，我们再次省略对 τ 的依赖，因为它是固定的。

证明。首先注意，由先验估计可知 $\mathscr{F}(\varrho_{k+1}) < +\infty$，因此，由于$F$是超线性的，$\varrho_{k+1}$一致可积，所以对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta' > 0$ 使得若

$$E \text{ is a Borelian with } |E| < \delta', \text{ then } \varrho_{k+1}(E) < \varepsilon.$$

反证假设 $x_{k+1,i} \in \partial\Omega$。此外，由于 $x_{k,i} \in \Omega$的内部，因此有 $\operatorname{dist}(x_{k,i}, \partial\Omega) > 0$。定义闭凸集族

$$\Omega_\delta \overset{\text{def.}}{=} \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \geq \delta\},$$

有：当 δ 足够小时，$x_{k,i} \in \Omega_\delta$；又由于 $\partial\Omega$ 的闵可夫斯基内容与其周长相同，因此有 $|\Omega \setminus \Omega_\delta| \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0$。因此，我们可以选取足够小的 δ，使得$\varrho_{k+1}(\Omega \setminus \Omega_\delta) < \varepsilon$。

对于这样的 δ 选择，我们令 $x_\delta \overset{\text{定义为}}{=} \operatorname{proj}_{\Omega_\delta}(x_{k+1,i})$，即投影到凸集 Ω_δ 上的唯一正交投影，并通过将条目 $x_{k+1,i}$ 替换为 x_δ，定义一个新的竞争者 $\mathbf{x}_\delta$，见图 3.1。因此，由于 $x_{k,i} \in \Omega_\delta$，由凸性可得

$$\|x_\delta - x_{k,i}\|^2 \le \|x_{k+1,i} - x_{k,i}\|^2 .$$

因此，通过比较该竞争者与极小化子的能量，可得

$$\begin{aligned} 0 \le & W_2^2(\varrho_{k+1}, \mu_{\mathbf{x}_\delta, \mathbf{a}_{k+1}}) - W_2^2(\varrho_{k+1}, \mu_{\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{a}_{k+1}}) \\ \le & \int_{\Omega_{k+1,i} \cap \Omega_\delta} \left(|x - x_\delta|^2 - |x - x_{k+1,i}|^2 \right) \mathrm{d}\varrho_{k+1} \\ & + \int_{\Omega_{k+1,i} \setminus \Omega_\delta} \left(|x - x_\delta|^2 - |x - x_{k+1,i}|^2 \right) \mathrm{d}\varrho_{k+1}. \end{aligned}$$

为估计第一项，注意到对于任意 $x \in \Omega_{k+1,i} \cap \Omega_\delta$，我们有

$$\begin{aligned} |x - x_\delta|^2 - |x - x_{k+1,i}|^2 =& |x_\delta|^2 - |x_{k+1,i}|^2 - 2\langle x, x_\delta - x_{k+1,i}\rangle \pm 2\|x_\delta - x_{k+1,i}\|^2 \\ =& |x_\delta|^2 - |x_{k+1,i}|^2 - 2\langle x_\delta, x_\delta - x_{k+1,i}\rangle \\ & - 2|x_\delta - x_{k+1,i}|^2 - 2\langle x - x_\delta, x_\delta - x_{k+1,i}\rangle \\ =& - |x_\delta - x_{k+1,i}|^2 - 2\langle x - x_\delta, x_\delta - x_{k+1,i}\rangle \le -\delta^2, \end{aligned}$$

其中，在最后一个不等式中，我们用到了 $x_{k+1,i} \in \partial\Omega$ 以及关于投影到闭凸集上的经典性质。

另一方面，为估计第二项，对于任意 $x \in \Omega_{k+1,i} \setminus \Omega_\delta$，有 $|x - x_\delta|^2 - |x - x_{k+1,i}|^2 \le \delta^2$。事实上，对于任意这样的 x，我们有

$$\begin{aligned} |x - x_\delta|^2 =& |x - x_{k+1,i}|^2 + |x_{k+1,i} - x_\delta|^2 + 2\langle x - x_{k+1,i}, x_{k+1,i} - x_\delta\rangle \\ \le & |x - x_{k+1,i}|^2 + |x_{k+1,i} - x_\delta|^2 \\ \le & |x - x_{k+1,i}|^2 + \delta^2, \end{aligned}$$

o再次，最后一个不等式来自凸集上的投影性质。回到能量估计，我们得到

$$\begin{aligned} 0 \le & W_2^2(\varrho_{k+1}, \mu_{\mathbf{x}_\delta, \mathbf{a}_{k+1}}) - W_2^2(\varrho_{k+1}, \mu_{\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{a}_{k+1}}) \\ \le & \delta^2 \left(-\varrho_{k+1}\left(\Omega_{k+1,i} \cap \Omega_\delta\right) + \varrho_{k+1}\left(\Omega_{k+1,i} \setminus \Omega_\delta\right) \right) \\ \le & \delta^2 \left(-a_{k+1,i} + 2\varrho_{k+1}\left(\Omega_{k+1,i} \setminus \Omega_\delta\right), \right). \end{aligned}$$

选择足够小的 δ，使得 $2\varrho_{k+1}(\Omega_{k+1,i} \setminus \Omega_\delta) \le 2\varepsilon < a_{k+1,i}$，则前述构造与极小性矛盾，因此必有$x_{k+1,i} \in \operatorname{int}\Omega$。□

关于权重 a_i^τ的行为，我们利用其最优性条件证明：若a_i 是 $\tau \to 0$时的一条极限曲线，那么它具有如下性质：若在某个时刻 a_i 达到 0，则此后任意时刻它都保持为零。

命题 3.3。设$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 为紧凸集，且 $\left(\varrho_{k+1}^\tau, \mathbf{x}_{k+1}^\tau, \mathbf{a}_{k+1}^\tau\right)$ 是(2.8)的一个极小化子。对于所有 $i = 1, \ldots, N$，设 $t \mapsto a_i(t)$ 是 $a_i^\tau(\cdot)$ 的一条极限轨迹，则若 $a_i(t) = 0$，我们有 $a_i(s) = 0$，对所有 $s \ge t$ 均成立。

证明。首先回顾命题 3.1 中定义的非活跃集 $I_{k+1} = \{h\colon\ 0 < a_{k+1,h} < 1\}$ 给定一条极限曲线 $a_i(\cdot)_{i=1,\ldots N}$，定义

$$t_1 \overset{\text{def.}}{=} \min\{t \ge 0 : a_i(t) = 0 \text{ for } i \in \{1, \ldots, N\}\} \text{ and } \Lambda_1 \overset{\text{def.}}{=} \{i : a_i(t_1) = 0\},$$

并通过归纳法定义，对于 $n > 1$

$$t_n \overset{\text{def.}}{=} \min\{t \ge 0 : a_i(t) = 0 \text{ for } i \in \{1, \ldots, N\} \setminus \Lambda_{n-1}\} \text{ and } \Lambda_n \overset{\text{def.}}{=} \{i : a_i(t_n) = 0\}.$$

特别是，我们预期 $\Lambda_n \subset \Lambda_{n+1}$。

我们先证明，对于所有时刻 $t \in (t_1, t_2)$ 以及所有指标 $i \in \Lambda_1$， $a_i(t) = 0$。固定某个时刻 $t \in (t_1, t_2)$，因此根据定义，存在某个 δ，使得对于所有 $j \notin \Lambda_1$，在 (t_1, t) 上都有 $a_j(\cdot) > \delta$。特别地，取满足 $k\tau < t_1 \le (k+1)\tau$ 的 $k \in \mathbb{N}$，那么当 τ 足够小时，由 a_i^τ 一致收敛到 a_i 可知，

$$a_{k,i}^\tau \le C\sqrt{\tau}, \text{ for all } i \in \Lambda_1 \text{ and } a_{n,j}^\tau \ge \delta/2, \text{ for all } j \notin \Lambda_1, t_1 \le n\tau \le t.$$

回顾集合 $I_{k+1} \overset{\text{定义}}{=} \{i \text{ 的定义：} 0 < a_{k+1,\,i}^\tau < 1\}$，并注意到 I_{k+1} 要么为空，要么至少含有两个元素；因为如果它只有一个元素，那么要么只有一个正的 $a_{k+1,\,i}^\tau$ 但小于 1，要么存在一个质量为 1 的指标以及另一个属于 I_{k+1} 的指标。无论哪种情况，都与总质量之和为 1 的事实相矛盾。现在我们将证明

$$\sum_{i \in \Lambda_1 \cap I_{k+1}} a_{k+1,i}^\tau \le \sum_{i \in \Lambda_1 \cap I_k} a_{k,i}^\tau \le CN\sqrt{\tau},$$

通过一个可以对所有满足 $n\tau < t$ 的 $n \ge k$ 使用归纳法进行的论证。I_{k+1} 为空的情形显然成立，因此我们假设 $|I_{k+1}| \ge 2$。

根据 $a_{k+1,\,i}^\tau$ 的最优性条件，我们有

$$\sum_{i \in \Lambda_1 \cap I_{k+1}} a_{k+1,i}^\tau - a_{k,i}^\tau = \tau \left(\sum_{i \in \Lambda_1 \cap I_{k+1}} -g'(a_{k+1,i}^\tau) - \psi_{k+1,i}^\tau \right).$$

现在我们可以使用康托罗维奇势 ψ_{k+1} 关于 $^-$ 势函数 ψ_{k+1} 的刻画；该势函数由一个取决于 Ω 的常数所界定。事实上，根据命题 3.1 的证明，我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in \Lambda_1 \cap I_{k+1}} a_{k+1,i}^\tau - a_{k,i}^\tau = \tau \Bigg(& \sum_{i \in \Lambda_1 \cap I_{k+1}} -g'(a_{k+1,i}^\tau) - \bar{\psi}_{k+1,i}^\tau \\
& + \frac{1}{|I_{k+1}|} \left(\sum_{j \in I_{k+1}} \bar{\psi}_{k+1,j} + g'(a_{k+1,j}^\tau) + \sum_{j \in I_k \setminus I_{k+1}} \frac{a_{k,j}^\tau}{\tau} \right) \Bigg) \\
\le \tau & \left(C_\Omega - \left(1 - \frac{1}{|I_{k+1}|} \right) \sum_{i \in \Lambda_1 \cap I_{k+1}} g'(a_{k+1,i}^\tau) + \frac{1}{|I_{k+1}|} \sum_{j \in I_{k+1} \setminus \Lambda_1} g'(a_{k+1,j}^\tau) \right) \\
& + \frac{1}{|I_{k+1}|} \sum_{j \in I_k \setminus I_{k+1}} a_{k,j}^\tau.
\end{aligned}$$

但请注意，对于所有指标 $j \in \Lambda_1 \setminus I_{k+1}$，质量 $a_{k+1,j}^\tau$ 都有一个严格大于零的下界，因此 $g'(a_{k+1,j}^\tau)$ 有一个有限正数作为上界。另一方面，当 $\tau \to 0$ 时，我们有 $g'(a_{k+1,i}^\tau) \to \infty$，对于 $i \in \Lambda_1 \cap I_{k+1}$。因此，在上述不等式中与 τ相乘的项，当 τ 足够小时为负。由此可得

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in \Lambda_1 \cap I_{k+1}} a_{k+1,i}^\tau &\le \sum_{i \in \Lambda_1 \cap I_{k+1}} a_{k,i}^\tau + \sum_{j \in I_k \setminus I_{k+1}} a_{k,j}^\tau \\
&= \sum_{i \in \Lambda_1 \cap I_{k+1}} a_{k,i}^\tau + \sum_{j \in I_k \setminus I_{k+1}} a_{k,j}^\tau = \sum_{i \in \Lambda_1 \cap I_k} a_{k,i}^\tau,
\end{aligned}$$

其中最后一个等号源于这样一个事实： $I_k \setminus I_{k+1} \subset \Lambda_1$。事实上，在我们当前的情形下$|I_{k+1}| \ge 2$，若 $i \in I_k \setminus I_{k+1}$，则必有 $a_{k+1,i}^\tau = 0$ 以及 $0 < a_{k,i}^\tau \le C\sqrt{\tau}$；而当 $i \in \Lambda_1^c$ 时，这不可能成立，因为在该补集上，$a_i^\tau(t)$ 在 (t_1, t) 上一致地与 0 保持正距离。

我们可以反复应用这一论证，从而得到

$$\sum_{i \in \Lambda_1 \cap I_{n+1}} a_{n+1,i}^\tau < \sum_{i \in \Lambda_1 \cap I_n} a_{n,i}^\tau, \text{ while } t_1 < (n+1)\tau < t_2.$$

这意味着对于所有 $t_1 < t < t_2$，我们有

$$\sum_{i \in \Lambda_1 \cap I_{n+1}} a_i^\tau(t) < \sum_{i \in \Lambda_1 \cap I_n} a_i^\tau(t_1) \le |\Lambda_1| C\sqrt{\tau}.$$

由一致收敛可知，对于区间 (t_1, t) 上的任意 $i \in \Lambda_1$， $a_i(\cdot) = 0$。

由于曲线 $t \mapsto a_i(t)$ 是连续的，因此必有 $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$，并且我们可以在时间区间 (t_2, t_3) 上对更大的指标集 Λ_2 重复相同的论证。由相同的论证和归纳原理可得，对于任意 $i \in \Lambda_n$ 和 $t \geq t_n$，均有 $a_i(t) = 0$。结论得证。

□

3.2. **压力的强收敛**。回顾一下，压力变量定义为$P(\varrho) = \varrho F'(\varrho) - F(\varrho)$，且 $P(\cdot)$ 是连续函数，我们注意到其梯度为

$$\nabla P(\varrho) = \varrho \nabla F'(\varrho).$$

因此，命题 3.1 中的最优性条件给出了关于 $(P(\varrho^\tau))_{\tau>0}$ 的一致估计。

引理 3.4。存在一个常数 C，仅依赖于 Ω 和 T，使得

$$\begin{aligned} \|P(\varrho^\tau)\|_{L^1([0,T];W^{1,1}(\Omega))} &\leq C, \\ \|\nabla P(\varrho^\tau)\|_{L^1([0,T]\times\Omega)} &\leq C, \end{aligned}$$

对所有 $\tau > 0$ 均成立。

证明。利用先验能量估计 (2.9)，很容易得到 $\|P(\varrho^\tau)\|_{L^1([0,T];L^1(\Omega))}$ 的界。由关于 ϱ^τ_{k+1} 的最优性条件可得，对于阶梯插值，有

$$|\nabla P(\varrho^\tau_t)| \leq (|\mathbf{v}^\tau_t| + \operatorname{diam}\Omega)\varrho^\tau_t, \text{ a.e. in } [0,T]\times\Omega,$$

因此

$$\begin{aligned} \int_0^T \|\nabla P(\varrho^\tau_t)\|_{L^1(\Omega)} \,\mathrm{d}t &\leq \sum_{k=0}^{N_\tau - 1} \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} \left(\int_\Omega |\nabla P(\varrho^\tau_{k+1})| \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t \\ &\leq \sum_{k=0}^{N_\tau - 1} \tau \left(\int_\Omega (|\mathbf{v}^\tau_{(k+1)}| + \operatorname{diam}\Omega)\varrho^\tau_{k+1} \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t \\ &\leq \tau N_\tau + \frac{1}{\tau} \sum_{k=0}^{N_\tau - 1} \int_\Omega |\mathrm{id} - T^\tau_{k+1}|^2 \mathrm{d}\varrho^\tau_{k+1} \\ &\leq \tau N_\tau + \frac{1}{\tau} \sum_{k=0}^{N_\tau - 1} W_2^2(\varrho^\tau_k, \varrho^\tau_{k+1}) \\ &\leq 2T + \mathscr{E}(\varrho_0, \mu_0), \end{aligned}$$

结论得证。 □

接下来，我们将把 ρ^τ 的收敛加强为在 L^1 中的强收敛，并由此证明 $P(\varrho^\tau)$ 和 $\nabla P(\varrho^\tau)$ 也收敛到极限。与 [16] 和 [21]，中的做法一样，这将借助 Savaré 和 Rossi 的以下结果 [39，定理 2] 来完成。

定理 3.5。在巴拿赫空间 $\mathcal{X}$ 上，给定

- 一个正规强制被积函数，$\Phi: \mathcal{X} \to [0, +\infty]$，即下半连续，且在 $\mathcal{X}$ 中具有相对紧子水平集；
- 一个伪距离 $d: \mathcal{X}\times\mathcal{X} \to [0, +\infty]$，即 d 是下半连续的；并且若 $d(\rho, \rho') = 0$满足 $\Phi(\rho)\ \Phi(\rho') < \infty$，则 $\rho = \rho'$。

设 $\mathcal{U}$为一组可测函数 $u: (0, T) \to \mathcal{X}$。假设

$$\sup_{u\in\mathcal{U}} \int_0^T \Phi(u(t))\mathrm{d}t < \infty \text{ and } \lim_{h\to 0} \sup_{u\in\mathcal{U}} \int_0^{T-h} d(u(t+h), u(t))\mathrm{d}t = 0,$$

则 $\mathcal{U}$包含一个子序列，它依测度收敛（关于 $t \in (0, T)$）到极限 $u_\star$。

命题3.6. 在子序列意义下，阶梯近似$(\varrho^\tau)_{\tau>0}$ 满足

$$\begin{aligned}\varrho^\tau &\xrightarrow[\tau\to 0]{} \varrho \ \textit{in}\ L^1([0,T]\times\Omega)\ \textit{and pointwise},\\ P(\varrho^\tau) &\xrightarrow[\tau\to 0]{} P(\varrho)\ \textit{in}\ L^1([0,T]\times\Omega)\ \textit{and pointwise},\\ \nabla P(\varrho^\tau) &\xrightarrow[\tau\to 0]{\star} \nabla P(\varrho)\ \textit{in}\ \mathscr{M}^d([0,T]\times\Omega).\end{aligned}$$

证明。 在整个证明过程中，我们将证明许多不同的收敛结果，但都只在子序列意义下成立，因此在每一步中，我们都默认已经选取了一个使此前所有收敛均成立的子序列，而不再明确说明。

首先，我们声称，对于这一族 $(\varrho^\tau,\ \mathbf{x}^\tau,\ \mathbf{a}^\tau)_{\tau>0}$，在作如下选择时，定理3.5的条件成立：

$$d(\xi,\xi') \overset{\text{def.}}{=} \begin{cases} d_{W_2,\ell_2}(\xi,\xi'), & \text{if } \xi,\xi'\in \mathscr{P}_{\mathrm{ac}}(\Omega)\times\mathbb{R}^{dN}\times\Delta_{N-1}\\ +\infty, & \text{otherwise}\end{cases}$$

and

$$\Phi(\xi) \overset{\text{def.}}{=} \begin{cases} \mathscr{F}(\varrho)+\|P(\varrho)\|_{\mathrm{BV}(\Omega)}+\|\mathbf{x}\|^2+\|\mathbf{a}\|^2, & \text{if } \xi\in \mathscr{P}_{\mathrm{ac}}(\Omega)\times\mathbb{R}^{dN}\times\Delta_{N-1}\\ +\infty, & \text{otherwise,}\end{cases}$$

如 [16, 21]所示。因此，存在一个子序列，使得 $\varrho^\tau \xrightarrow[\tau\to 0]{} \varrho$ 在$[0,T]$中依测度收敛；于是，进一步取子序列后，在$L^1\left([0,T]\right.$中也有收敛；$L^1(\Omega))$。由勒贝格控制收敛定理，还可得 ϱ^τ 在 $L^1([0,T]\times\Omega)$中收敛到 ϱ，并且对几乎处处的 $(t,\ x)\in[0,T]\times\Omega$ 都逐点收敛。

接下来讨论 $P(\varrho^\tau)$ 的收敛性。首先注意到，由于 $\rho\mapsto P(\rho)$ 是连续的，我们有 $P(\varrho^\tau)$ 几乎处处收敛到 $P(\varrho)$。此外，注意到引理 2.3 给出了一个一致有界性

$$\|P(\varrho^\tau)\|_{L^1([0,T];\mathrm{BV}(\Omega))}\le C,$$

并且借助索伯列夫嵌入，可得到 $\|P(\varrho^\tau)\|_{L^1([0,T];L^{d/(d-1)})}$ 的一致有界性。一个适当的插值不等式（例如在 [16,引理 5.3]，中证明）给出

$$\|P(\varrho^\tau)\|_{L^{(d+1)/d}([0,T]\times\Omega)}\le C,$$

因此，根据德拉瓦莱普桑定理 $[24,\text{定理 }2.29]$ $(P(\varrho^\tau))_{\tau>0}$，$[0,T]\times()$ 在 $[0,T]\times\Omega$ 上一致可积，因为

$$\sup_{\tau>0}\int_{[0,T]\times\Omega}\gamma\left(|P(\varrho^\tau(t,x))|\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}x<+\infty$$

其中超线性函数为 $\rho\mapsto\gamma(\rho)=|\rho|^{\frac{d+1}{d}}$。由维塔利收敛定理 [24,定理 2.2.4] 可知，$P(\varrho^\tau)$ 在 $L^1([0,T]\times\Omega)$ 中收敛到 $P(\varrho)$。

此外，$L^1([0,T]\times$有界变差$(\Omega))$中的一致有界性，加上在 L^1中的强收敛，使我们能够利用有界变差中的弱紧性 [1, 命题 3.13]，从而得出

$$\nabla P(\varrho^\tau)\xrightarrow[\tau\to 0]{\star}\nabla P(\varrho)\ \text{in}\ \mathscr{M}^d([0,T]\times\Omega),$$

结论得证。 □

3.3. **极限偏微分方程—常微分方程系统**。 现在，我们可以利用前述结果，得出所提出的最小化运动格式的收敛性，进而证明耦合系统 (1.4) 的弱解存在。

定理 3.7。 假设 $\mathscr{E}(\varrho_0,\mu_0)<+\infty$ 且满足以下条件之一

- 初始条件 $\mathbf{x}_0\in(\Omega$的内部$)^{\otimes N}$;
- Ω 具有 $\mathscr{C}^1$ 边界。

在这些假设下，式 (2.8) 中定义的最小化运动格式存在子序列收敛于 (1.4) 的弱解。

证明。 回想命题 2.4，数对 (ϱ,E) 满足连续性方程。因此，为了得到所需的极限，只需刻画动量测度 E。

为此，回想 $E^\tau \xrightarrow[\tau\to 0]{} E$ 属于 $\mathscr{M}^d([0,T]\times\Omega)$，其中 E^τ 是阶梯动量族，由欧拉–拉格朗日方程（命题 3.1）刻画为

$$E^\tau = \mathbf{v}^\tau \varrho^\tau = -\nabla P(\varrho^\tau) - \varrho^\tau \sum_{i=1}^N (x - x^\tau_{t,i}) \mathbb{1}_{\Omega^\tau_{t,i}}.$$

接下来，考虑 $\varphi \in \mathscr{C}^\infty_c((0,T)\times\Omega;\mathbb{R}^d)$，我们有

$$\begin{aligned}\int_{[0,T]\times\Omega} \varphi \cdot \mathrm{d}E &= \lim_{\tau\to 0} \int_{[0,T]\times\Omega} \varphi \cdot \mathrm{d}E^\tau \\ &= \lim_{\tau\to 0} \left(\int_{[0,T]\times\Omega} \mathrm{div}\varphi P(\varrho^\tau)\mathrm{d}x - \sum_{i=1}^N \int_{[0,T]\times\Omega} \varphi\cdot(x - x^\tau_{t,i})\mathbb{1}_{\Omega^\tau_{t,i}}\mathrm{d}\varrho^\tau \right).\end{aligned}$$

由 $P(\varrho^\tau)$ 在 $L^1([0,T]\times\Omega)$ 中强收敛到 $P(\varrho)$，第一项具有所需的极限。对于第二项，回忆一下，$x^\tau_{\cdot,\,i} \xrightarrow[\tau\to 0]{} x_{\cdot,\,i}$ 在 $[0,T]$ 中一致地成立。至于康托罗维奇势函数，我们回忆命题 3.1 的证明：势函数在相差一个常数的意义下唯一，并且用于 $\mathbf{a}^\tau_{k+1}$ 最优性条件的势函数形式为

$$\psi^\tau_{k+1,i} = \bar{\psi}^\tau_{k+1,i} + c^\tau_{k+1},$$

其中第一项对应于另一个势函数，它有一个依赖于区域的常数上界，$|\psi^\tau_{k+1,\,i}| \le C_\Omega$，而 c^τ_{k+1} 是一个常数，当 $\tau\to 0$ 时可能会趋于无穷。因此，我们可以定义曲线

$$\psi^\tau_t \overset{\text{def.}}{=} \psi^\tau_{k+1} \text{ and } \bar{\psi}^\tau_t \overset{\text{def.}}{=} \bar{\psi}^\tau_{k+1}, \text{ if } t \in (k\tau,(k+1)\tau].$$

因此，ψ^τ_t 一致有界，并在 $[0,T]$ 中逐点收敛到 ψ_t，这是与 $W_2^2(\varrho_t,\mu_t)$ 相关的有界康托罗维奇势函数。但请回忆引理2.1，

$$(\psi,\mathbf{x}) \mapsto \mathrm{Lag}_i(\psi,\mathbf{x})$$

从 $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$ 到 L^1 是连续的，并且由于拉盖尔单元在加上常数后保持不变，因此可得

$$\Omega^\tau_{t,i} = \mathrm{Lag}_i(\psi^\tau_t,\mathbf{x}^\tau_t) \xrightarrow[\tau\to 0]{L^1} \mathrm{Lag}_i(\psi_t,\mathbf{x}_t) = \Omega_{t,i} \text{ point-wise in } [0,T].$$

根据叶戈罗夫定理，对每个 $\varepsilon>0$，存在一个集合 $I_\varepsilon\subset[0,T]$，满足 $|[0,T]\setminus I_\varepsilon|\le\varepsilon$，在该集合上逐点收敛可以加强为一致收敛。因此，对每个$\varepsilon>0$，我们有

$$\begin{aligned}&\limsup_{\tau\to 0}\left|\int_{[0,T]\times\Omega}\varphi\cdot(x-x^\tau_{t,i})\mathbb{1}_{\Omega^\tau_{t,i}}\mathrm{d}\varrho^\tau - \int_{[0,T]\times\Omega}\varphi\cdot(x-x_{t,i})\mathbb{1}_{\Omega_{t,i}}\mathrm{d}\varrho\right| \\ &\quad\le \limsup_{\tau\to 0}\left|\int_{I_\varepsilon\times\Omega}\varphi\cdot(x-x^\tau_{t,i})\mathbb{1}_{\Omega^\tau_{t,i}}\mathrm{d}\varrho^\tau - \int_{I_\varepsilon\times\Omega}\varphi\cdot(x-x_{t,i})\mathbb{1}_{\Omega_{t,i}}\mathrm{d}\varrho\right| + C_{\varphi,\Omega,\varrho}\varepsilon.\end{aligned}$$

由 ϱ^τ 在 $L^1([0,T]\times\Omega)$ 中强收敛到 ϱ，命题 3.6，以及$x^\tau_{\cdot,i}$ 和 $\mathbb{1}_{\Omega^\tau_{t,i}}$的一致收敛可知，上述第二个 lim sup 为零。因此，我们得出

$$E = -\nabla P(\varrho) - \varrho\sum_{i=1}^N (x-x_{t,i})\mathbb{1}_{\Omega_{t,i}}.$$

接下来讨论原子的动力学。回顾命题 2.4，可知 $\bar{\mathbf{x}}^\tau$ 在 $H^1([0,T])$ 中弱收敛到 $\mathbf{x}$；同时，$\bar{\mathbf{x}}^\tau,\mathbf{x}^\tau$ 一致收敛（因而也在$L^2([0,T])$ 中强收敛）到 $\mathbf{x}$。为刻画 $\mathbf{x}$ 变量的极限动力学，考虑 $\varphi\in\mathscr{C}^\infty_c((0,T))$，并分两种情况讨论：

- 初始条件 $\mathbf{x}_0\in(\Omega\text{的内部})^{\otimes N}$；
- Ω 有一个 $\mathscr{C}^1$ 边界。

为简便起见，我们讨论第一种情况。在此情形下，命题 3.2 保证整个序列 $(\mathbf{x}_k)_k$ 都包含在 Ω 的内部，因此法锥的边界效应不会影响命题 3.1 中的欧拉–拉格朗日方程，所以我们有

$$\begin{aligned}
-\int_0^T \varphi'(t)x_{t,i}\mathrm{d}t &= \lim_{\tau\to 0} -\int_0^T \varphi'(t)\bar{x}^\tau_{t,i}\mathrm{d}t = \lim_{\tau\to 0}\int_0^T \varphi(t)\dot{\bar{x}}^\tau_{t,i}\mathrm{d}t \\
&= \lim_{\tau\to 0} -\int_0^T \varphi(t)\left(a^\tau_{k+1,i}\cdot x^\tau_{k+1,i} - \int_{\Omega^\tau_{k+1,i}} x\mathrm{d}\varrho^\tau_{k+1}\right)\mathrm{d}t \\
&= -\int_0^T \varphi(t)\left(a_{t,i}\cdot x_{t,i} - \int_{\Omega_{t,i}} x\mathrm{d}\varrho_t\right)\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

与之前一样，最后一个极限成立，是因为拉盖尔单元在 t 中一致收敛，且 ϱ^τ 收敛到 ϱ_t。由此得到流 $\mathbf{x}_t$ 的所需刻画。第二种情况的计算类似，只需加上法向量 $n_\Omega(x^\tau_{k+1,i})$；由于边界光滑，该向量收敛到 $N_\Omega(x_{t,i})$ 中的一个向量。

权重的动力学可以用与原子收敛类似的方法推导出来。此外，根据命题 2.4，我们知道 $\bar{\mathbf{a}}^\tau$ 在 $H^1([0,T])$ 中弱收敛到 $\mathbf{a}$，并且 $\bar{\mathbf{a}}^\tau, \mathbf{a}^\tau$ 都一致收敛到 $\mathbf{a}$。另一方面，我们必须考虑最优性条件在零点处呈现的奇异性，该条件由 a_i 变量中的项 $g'(a_i)$ 给出，并由康托罗维奇势函数予以补偿。正如我们所见，问题在于，康托罗维奇势函数由一个有界势函数加上一个常数组成，而该常数可能发散，以补偿任意单个趋于无穷大的 $g'(a_i(t))$ 中的奇异性。

如命题 3.3 的证明中所示，定义以下量

$$t_i \overset{\text{def.}}{=} \inf\{t \geq 0 : a_i(t) = 0\} \text{ for } i = 1,\dots,N,$$

对于固定的 i，取另一个指标 j，使得 $t_j \geq t_i$。如果这样的 j 不存在，则意味着 $a_i \equiv 1$ 和 $t_1 = +\infty$。因此，要刻画 a_i 的动力学，只需考虑 $\varphi \in \mathscr{C}^\infty_c((0,\ t_i))$ 中的测试函数，因为在此时间之后，我们知道 a_i 消失了。因此，对于这样的测试函数，我们得到 $\inf_{\operatorname{supp}\varphi} a_i$，$\inf_{\operatorname{supp}\varphi} a_j > 0$，并且由一致收敛可知，$a^\tau_i$ 和 a^τ_j 也满足同样的结论。因此我们得到

$$\begin{aligned}
\int_0^T (a_i(t)-a_j(t))\dot{\varphi}(t)\mathrm{d}t &= \lim_{\tau\to 0}\int_0^T (a^\tau_i(t)-a^\tau_j(t))\dot{\varphi}(t)\mathrm{d}t \\
&= \lim_{\tau\to 0} -\int_0^T (\dot{a}^\tau_i(t)-\dot{a}^\tau_j(t))\varphi(t)\mathrm{d}t \\
&= \lim_{\tau\to 0}\int_0^T \varphi(t)\left(g'(a^\tau_i(t)) - \psi^\tau_{t,i} - g'(a^\tau_j(t)) + \psi^\tau_{t,j}\right)\mathrm{d}t \\
&= \lim_{\tau\to 0}\int_0^T \varphi(t)\left(g'(a^\tau_i(t)) - \bar{\psi}^\tau_{t,i} - g'(a^\tau_j(t)) + \bar{\psi}^\tau_{t,j}\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^T \varphi(t)\left(g'(a_i(t)) - \bar{\psi}_{t,i} - g'(a_j(t)) + \bar{\psi}_{t,j}\right)\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

因为 $g \in \mathscr{C}^1_{loc}((0,1])$，其中 a^τ_i，a^τ_j 在 φ 的支集上有下界，且康托罗维奇势函数 ψ_t 一致有界且满足 Lipschitz 条件，收敛到康托罗维奇势函数 ψ_t。

于是我们得出结论，对于任意一对 i,j，只要 $t_j \geq t_i$，它们相应的动力学就满足

$$\dot{a}_i(t) + g'(a_i(t)) - \bar{\psi}_{t,i} = \dot{a}_j(t) + g'(a_j(t)) - \bar{\psi}_{t,j} = c_t,$$

其中，对于 $t < t_i$，有 $c_t \in L^2((0,\ t))$。现在，我们可以按照命题 3.1 的做法，定义一个新的 Kantorovitch 势函数 $\psi_t = \psi_t + c_t$，使得

$$\dot{a}_i(t) = -g'(a_i(t)) + \psi_{t,i} \text{ in } L^2((0,t_i)).$$

此外，由于对于 $t \geq t_h$有 $a_h(t) = 0$，我们得到

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{i \sim a_i(t) > 0} a_i(t) = \sum_{i \sim a_i(t) > 0} -g'(a_i(t)) + \psi_{t,i},$$

这就完成了对动力学所需的刻画，结果随之得出。 □

3.4. 强 L^2H^1 多孔介质情形下的收敛。 在上一节中，与开创性地引入 JKO 格式 [27, 37], 的论文一样，我们证明了最小化运动格式在 L^1 拓扑下的收敛。对于概率测度而言，这种做法很自然，但极限偏微分方程（例如 热方程、Fokker-Planck 方程、多孔介质方程）显然具有更高的正则性，这表明在更强的拓扑下也能收敛。在近期论文 [22, 41] 中，作者证明了玻尔兹曼熵泛函的 JKO 格式

$$\mathscr{F}(\varrho) = \mathscr{H}(\varrho) \overset{\text{def.}}{=} \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \varrho \log \varrho \mathrm{d}x, & \text{if } \varrho \ll \mathscr{L}^d \llcorner \Omega, \\ +\infty, & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{3.4}$$

（相应地，带有势能项的情形）在强 L^2H^2 拓扑下收敛到热方程（相应地，Fokker-Planck 方程）的唯一解。

对于方程 (1.4) 中的偏微分方程，半离散输运产生的平流项不够光滑，无法调整 [22, 41], 中的论证，因此我们可以预期 L^2H^1收敛。事实上，当内能由如下形式的多孔介质项给出时，我们将证明压力变量 $P(\varrho^\tau)$ 的阶梯插值收敛到 $P(\varrho)$，且收敛发生在 L^2H^1 的强拓扑下

$$\mathscr{F}_m(\varrho) \overset{\text{def.}}{=} \begin{cases} \dfrac{1}{m-1} \displaystyle\int_\Omega \varrho^m \mathrm{d}x, & \text{if } \varrho \ll \mathscr{L}^d \llcorner \Omega, \\ +\infty, & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{3.5}$$

得到 $F(\rho) = F_m(\rho) = \dfrac{1}{m-1}\underline{\rho^m}$，并由此得到压力 $P_m(\rho) = \rho^m$。

遵循 [22,41], 这一思路，证明策略首先是为 JKO格式的迭代项证明 L^p 估计：将其 L^p 范数界定为前一项估计的范数乘以一个因子，该因子在 $\tau \to 0$ 时仍可求和。这样便可在 $p \to \infty$ 时取极限，并在初始条件有界时得到 L^∞ 界。我们的论证利用了 $\rho \to \|\rho\|_p^p$ 的位移凸性，如 [22] 所示，以处理多孔介质项；这也给出了所需的梯度界。随后，通过改编 [41] 中的论证即可得到强收敛。线性扩散情形也能得到相同的收敛结果，但为使表述更简洁，我们选择聚焦于多孔介质情形。

定理 3.8。 设Ω 为 $\mathbb{R}^d$ 中具有 *Lipschitz* 边界的凸有界区域。令$(\varrho_k^\tau、\ \mathbf{x}_k^\tau、\ \mathbf{a}_k^\tau)_{k\in\mathbb{N}}$ 为通过 *JKO*格式得到的序列，其内能由玻尔兹曼熵(3.4) 或来自(3.5)的多孔介质项 $\mathscr{F}_m$ 给出。则有以下估计成立

(1) 对所有 $1 < p < +\infty$，若 $\varrho_0 \in L^p(\Omega)$，则对所有 $k \geq 1$ 都有

$$\|\varrho_k^\tau\|_{L^p(\Omega)} \leq (1 - \tau d(p-1))^{-1/p} \left\|\varrho_{k-1}^\tau\right\|_{L^p(\Omega)}.$$

若 $\varrho_0 \in L^\infty(\Omega)$，令 $p \to \infty$ 趋于极限可得

$$\|\varrho_k^\tau\|_{L^\infty(\Omega)} \leq e^{\tau d} \left\|\varrho_{k-1}^\tau\right\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

(2) 对于 $\varrho_0 \in L^{m+1}(\Omega)$，存在一个常数 C，其依赖于 m、T、Ω 和 ϱ_0，使得

$$\int_0^T \int_\Omega |\nabla P_m(\varrho^\tau)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \leq C,$$

对所有足够小的 τ 均成立。

此外，如果 $\varrho_0 \in L^{m+1}(\Omega)$，则在取子序列后，压力 $P_m(\varrho^\tau)$ 在 L^2H^1 的强拓扑下收敛到 $P(\varrho)$，其中 $(\varrho, \mathbf{x}, \mathbf{a})$ 是方程 (1.4)的一个解。

对于经典的多孔介质方程 JKO 格式（不含半离散输运项，且势函数为与 ϱ 无关的 Lipschitz 势），可以用相同的技巧证明这些估计。在这种情况下，这些估计意味着通过 JKO 格式得到的多孔介质方程的任何解都是一个能量解，参见 [42,第5节.3.2]和 [4,定义 7.1], ，其定义如下

定义 3.9。设 $m>1$，且 $V\in W^{1,\infty}(\Omega)$ 是一个向量场，它对几乎处处的 t 以及所有 $\rho\in\mathscr{P}(\Omega)$ 在空间上均为 Lipschitz。则 ϱ 是带平流的多孔介质方程的能量解

$$(PME_m)\qquad \partial_t\varrho=\Delta\varrho^m+\operatorname{div}(\varrho\nabla V),$$

如果它是分布意义下的解，且满足

(1) $\varrho\in\mathscr{C}([0,T];L^1(\Omega))\cap L^\infty([0,T]\times\Omega)$;

(2) $P_m(\varrho)\in L^2([0,T];H^1(\Omega))$.

尽管多孔介质方程可能存在多个弱解，但能量解是唯一的，参见 [42, 第 5.3 节。2] 和 [4]。这一讨论给出以下

推论 3.10。设 Ω 是 $\mathbb{R}^d$ 中的一个具有 *Lipschitz* 边界的凸有界区域。给定一个势函数 $V\in W^{1,\infty}(\Omega)$ 和一个初始条件 $\varrho_0\in L^{m+1}(\Omega)\cap\mathscr{P}(\Omega)$。令 $(\varrho^\tau)_{\tau>0}$ 为带平流的多孔介质能量所对应的 *JKO*格式的阶梯插值

$$\rho\mapsto\frac{1}{m-1}\int_\Omega\rho^m\mathrm{d}x+\int_\Omega V\rho\mathrm{d}x,$$

则压力$(P_m(\varrho^\tau))_{\tau>0}$在 $L^2\left([0,T];H^1(\Omega)\right)$ 的强拓扑中收敛到由势函数 V引入平流的多孔介质方程的唯一能量解。

多孔介质情形的 L^2H^2 收敛仍然悬而未决，即使平流项是光滑的亦然。证明 Fokker–Planck 情形中此类强收敛的主要工具，是 [20]中引入的 5 梯度不等式。在 [41,引理 5.1], 中，该不等式连同一个可控制的余项一并导出，随后可利用该余项得到更强收敛。

带有半离散运输项的情形的主要困难在于，它向动力学引入了一个具有奇异拉普拉斯算子的向量场，该向量场甚至在离散时间格式的计算中也会出现。因此，我们在下述引理中的第一步是显式计算该拉普拉斯算子。

引理 3.11. 给定$(\varrho,\ \mathbf{x},\ \mathbf{a})$，定义势函数

$$\Phi[\varrho,\mathbf{x},\mathbf{a}](x)\overset{\text{def.}}{=}\sum_{i=1}^N\left(\frac{1}{2}|x-x_i|^2-\psi_i\right)\mathbb{1}_{\Omega_i},\tag{3.6}$$

其中$(\Omega_i)_{i=1}^N$ 对应于与将ϱ 运输到$\mu_{\mathbf{x},\mathbf{a}}$ 相关联的最优拉盖尔镶嵌，且$(\psi_i)_{i=1}^N$ 是相应的康托罗维奇势。

$\Phi[\varrho,\mathbf{x},\mathbf{a}]$ 的梯度向量场由下式给出

$$\nabla\Phi[\varrho,\mathbf{x},\mathbf{a}](x)=\sum_{i=1}^N(x-x_i)\,\mathbb{1}_{\Omega_i},\tag{3.7}$$

且其拉普拉斯算子为如下测度

$$\Delta\Phi[\varrho,\mathbf{x},\mathbf{a}]=d+\sum_{j<i}(x_i-x_j)\cdot n_{\Omega_i}\mathscr{H}^{d-1}\llcorner\partial\Omega_j\cap\partial\Omega_i.\tag{3.8}$$

特别地，有 $\Delta\Phi[\varrho,\mathbf{x},\mathbf{a}]\le d$。

证明。为简化记号，我们将 $\Phi[\varrho,\mathbf{x},\mathbf{a}]$ 记为 Φ，并省略自变量。注意，由拉格朗日镶嵌的定义，(3.6)中定义的势函数可改写为

$$\Phi[\varrho,\mathbf{x},\mathbf{a}](x)=\min_{i=1,\dots,N}\frac{1}{2}|x-x_i|^2-\psi_i.$$

作为最优的康托罗维奇势函数，它是Lipschitz连续的，因此几乎处处可微。由此，根据包络定理，其梯度必须与（3.7）中的表达式一致。

我们只需在分布意义下计算其拉普拉斯算子。为此，取某个 $\varphi \in \mathscr{C}^1(\Omega)$ 并计算

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varphi \mathrm{d}(\Delta\Phi)\mathrm{d}x &= -\int_\Omega \nabla\varphi\cdot\nabla\Phi\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega}\varphi\nabla\Phi\cdot n_\Omega \mathrm{d}\mathscr{H}^{d-1}\\ &= -\sum_{i=1}^N\int_{\Omega_i}\nabla\varphi\cdot(x-x_i)\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^N\int_{\partial\Omega\cap\partial\Omega_i}\varphi(x-x_i)\cdot n_\Omega\mathrm{d}\mathscr{H}^{d-1}.\end{aligned}$$

上面第一个求和中的每个积分都可以展开为

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_i}\nabla\varphi\cdot(x-x_i)\mathrm{d}x =& -d\int_{\Omega_i}\varphi\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega_i\cap\partial\Omega}\varphi(x-x_i)\cdot n_\Omega\mathrm{d}\mathscr{H}^{d-1}\\ &+\int_{\partial\Omega_i\setminus\partial\Omega}\varphi(x-x_i)\cdot n_{\Omega_i}\mathrm{d}\mathscr{H}^{d-1},\end{aligned}$$

这里我们用到了以下事实： n_{Ω_i} 在 $\partial\Omega$处与 n_Ω 重合。另定义 $\Sigma_{ij} \overset{\text{定义}}{=} \partial\Omega_i\cap\partial\Omega j$ ，其中$i\neq j$; 并约定$n_{\Sigma_{ij}} = n_{\Omega_i} = -n_{\Omega_j}$。由于交集 $\partial\Omega_i\cap\partial\Omega_j\cap\partial\Omega$均可忽略，将所有这些项相加后，我们得到拉普拉斯算子的如下表达式

$$\Delta\Phi = d + \sum_{j<i}(x_i-x_j)\cdot n_{\Omega_i}\mathscr{H}^{d-1}\llcorner\partial\Omega_j\cap\partial\Omega_i.$$

然而请注意，对于任意点 $x\in\partial\Omega_j\cap\partial\Omega_i$，由凸性可得

$$\begin{aligned}(x_i-x_j)\cdot n_{\Omega_i}(x) &= (x_i-x)\cdot n_{\Omega_i}(x) - (x_j-x)\cdot n_{\Omega_i}(x)\\ &= (x_i-x)\cdot n_{\Omega_i}(x) + (x_j-x)\cdot n_{\Omega_j}(x) \le 0,\end{aligned}$$

由此我们得出 $\Delta\Phi\le d$。 □

现在我们来讨论 L^p， L^∞ JKO格式迭代项的估计，以及 H^1压力梯度的估计。相关论证是对文献 [22,41], 中方法的改编，并依赖于流交换技术。

定理 *3.8* 的第 *(1)* 和 *(2)* 项的证明： 为简化记号，我们省略 JKO格式迭代项对 τ 的依赖。如同 [22]，中一样，证明的策略是将上面的引理 3.11 与该泛函的测地凸性结合起来

$$\varrho\mapsto\mathscr{F}_p(\varrho) = \frac{1}{p-1}\int_\Omega\varrho^p\mathrm{d}x.$$

事实上，如果 $P_p(\varrho)$ $P_p(\eta)\in W^{1,1}(\Omega)$ 且 $\varrho_t \overset{\text{定义}}{=} ((1-t)\mathrm{id}+tT)_\sharp\varrho$ 是它们之间的测地线，则根据 [2, 引理 10.4.4.], ，例如可得

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0^+}\mathscr{F}_p(\varrho_t) &= \int_\Omega\nabla P_p(\varrho)\cdot(T-\mathrm{id})\mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega}P_p(\varrho)(T-\mathrm{id})\cdot n_\Omega\mathrm{d}\mathscr{H}^{d-1}\\ &\ge \int_\Omega\nabla P_p(\varrho)\cdot(T-\mathrm{id})\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

沿用引理 3.11 的记号，我们设 $\Phi_{k+1}\overset{\text{定义}}{=}\Phi[\varrho_{k+1},\mathbf{x}^{k+1},\ \mathbf{a}_{k+1}]$，并令 $T_{k+1}=\mathrm{id}-\nabla\varphi_{k+1}$ 表示从 ϱ_{k+1} 到 ϱ_k 的最优传输映射。由 JKO格式得到的序列所满足的最优性条件告诉我们

$$m\varrho_{k+1}^{m-1} = -\Phi_{k+1} - \frac{\varphi_{k+1}}{\tau}\ \text{in}\ \{\varrho_{k+1}>0\}.$$

因此，我们得出 ϱ_{k+1}^{m-1} 是Lipschitz连续的，故 ϱ_{k+1} 有界。因此，对于所有 $p>1$ ，压力 $P_p(\varrho_{k+1})\in L^1(\Omega)$，并且

$$\begin{aligned}\nabla P_p(\varrho_{k+1}) &= p\frac{m-1}{m}\varrho_{k+1}^{p-m+1}\nabla F_m'(\varrho_{k+1})\\ &= -p\frac{m-1}{m}\varrho_{k+1}^{p-m+1}\left(\nabla\Phi_{k+1}+\frac{\nabla\varphi_{k+1}}{\tau}\right)\in L^\infty(\Omega).\end{aligned}$$

由此可得，对于所有 $p>1$， $P_p(\Omega)\in W^{1,\infty}(\Omega)$，且 $\mathscr{F}_p$ 的测地凸性表明

$$\begin{aligned}\frac{1}{p-1}\int_\Omega \varrho_k^p\mathrm{d}x-\frac{1}{p-1}\int_\Omega \varrho_{k+1}^p\mathrm{d}x&\geq\int_\Omega \nabla P_p(\varrho_{k+1})\cdot(T_{k+1}-\mathrm{id})\mathrm{d}x\\&=p\int_\Omega \varrho_{k+1}^{p-1}\nabla\varrho_{k+1}\cdot(-\nabla\varphi_{k+1})\mathrm{d}x\\&=\tau p\int_\Omega \varrho_{k+1}^{p-2}\nabla\varrho_{k+1}\cdot\left(\nabla P_m(\varrho_{k+1})+\varrho_{k+1}\nabla\Phi_{k+1}\right)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

于是我们得到关键估计

$$\int_\Omega \varrho_k^p\mathrm{d}x-\int_\Omega \varrho_{k+1}^p\mathrm{d}x\geq\tau(p-1)p\left(m\int_\Omega \varrho_{k+1}^{p+m-3}|\nabla\varrho_{k+1}|^2\mathrm{d}x+\int_\Omega\nabla(\varrho_{k+1})^p\cdot\nabla\Phi_{k+1}\mathrm{d}x\right)\tag{3.9}$$

为得到 L^p 估计，我们将 (3.9) 右端第一项从下方以 0 为下界，并对第二项使用分部积分，从而得到

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varrho_k^p\mathrm{d}x-\int_\Omega \varrho_{k+1}^p\mathrm{d}x&\geq\tau(p-1)\left(\int_\Omega \varrho_{k+1}^p(-\Delta\Phi_{k+1})\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega}\varrho_{k+1}^p\nabla\Phi_{k+1}\cdot n_\Omega\mathrm{d}\mathscr{H}^{d-1}\right)\\&\geq-\tau(p-1)d\int_\Omega \varrho_{k+1}^p\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

其中我们利用了引理 3.11 中 $-\Delta\Phi_{k+1}\geq -d$ 这一事实，并且如引理 3.11 的证明中多次所做的那样，由区域的凸性可知边界项非负。由此得到第 (1) 项所需的估计；再令 $p\to\infty$ 取极限，我们便得到第 (2) 项中的 L^∞ 界。

接下来转向压力梯度估计：假设 $\varrho_0\in L^{m+1}(\Omega)$，并在 (3.9) 中考虑 $p=m+1$，我们得到

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varrho_k^{m+1}\mathrm{d}x-\int_\Omega \varrho_{k+1}^{m+1}\mathrm{d}x&\geq\tau m\left(m\int_\Omega \varrho_{k+1}^{2m-2}|\nabla\varrho_{k+1}|^2\mathrm{d}x+\int_\Omega\nabla(\varrho_{k+1}^{m+1})\cdot\nabla\Phi_{k+1}\mathrm{d}x\right)\\&=\tau\left(m^2\int_\Omega|\nabla P_m(\varrho_{k+1})|^2\mathrm{d}x+(m+1)m\int_\Omega\nabla P_m(\varrho_{k+1})\cdot\nabla\Phi_{k+1}\varrho_{k+1}\mathrm{d}x\right)\\&\geq\tau\left(\frac{m^2}{2}\int_\Omega|\nabla P_m(\varrho_{k+1})|^2\mathrm{d}x-\frac{m^2}{2}\int_\Omega|\nabla\Phi_{k+1}|^2\varrho_{k+1}^2\mathrm{d}x\right),\end{aligned}$$

其中最后一步来自 ε-Young不等式，其中取 $\varepsilon=(m+1)/m$。最后，将上述不等式两边对 k 求和后，左端呈望远镜式抵消；再注意到 $|\nabla\Phi_{k+1}|\leq$直径(Ω)，以及在区间 $(k\tau,(k+1)\tau)$ 上有 $\varrho^\tau=\varrho_{k+1}$，我们得到

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega|\nabla P(\varrho^\tau)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t&=\sum_k\tau\int_\Omega|\nabla P(\varrho_{k+1})|^2\mathrm{d}x\\&\leq\sum_k\tau\int_\Omega|\nabla\Phi_{k+1}|^2\varrho_{k+1}^2\mathrm{d}x+\frac{2}{m}\int_\Omega\varrho_0^{m+1}\mathrm{d}x\leq C_{m,\Omega,\varrho_0}.\end{aligned}$$

最后，为了得到 $P_m(\varrho_{k+1})$的 L^2H^1 界，注意到由于 $\varrho_0\in L^m(\Omega)$，由第(1)项可知，当 τ 足够小时，这对所有后续的 ϱ_k仍然成立。因此 $P_m(\varrho_{k+1})$的均值保持一致有界，且Poincaré-Wirtinger不等式给出

$$\begin{aligned}\|P_m(\varrho_k)\|_{L^2(\Omega)}&\leq\left\|P_m(\varrho_k)-\fint_\Omega P_m(\varrho_k)\right\|_{L^2(\Omega)}+\fint_\Omega P_m(\varrho_k)\\&\leq C\left\|\nabla P_m(\varrho_k)\right\|_{L^2(\Omega)}+\fint_\Omega P_m(\varrho_k).\end{aligned}$$

由此可知， $P_m(\varrho^\tau)$在 $L^2([0,T];\,H^1(\Omega))$内的 τ中保持一致有界。 □

现在考虑$(\varrho^\tau,\mathbf{x}^\tau,\mathbf{a}^\tau)_{\tau>0}$的一个未重新标记的子序列，由定理3.7可知，该子序列收敛到极限方程(1.4)。由前述推理，$(\varrho^\tau)_{\tau>0}$ 在$L^2([0,T];\,H^1(\Omega))$中有界，因此我们得出它在该希尔伯特空间的弱拓扑中收敛到ϱ。事实上，由于定理3.7蕴含$(\varrho^\tau)_{\tau>0}$的这一固定子序列在 $L^1([0,T];\Omega)$意义下收敛到某个解，我们可以在 $L^2([0,T];\,H^1(\Omega))$中再提取一个收敛子序列。该极限

则必须是同一个解，否则将与 L^1 收敛相矛盾。由弱 $L^2([0,T];\ H^1(\Omega))$收敛的乌雷松性质可知，原序列在 $L^2([0,T];\ H^1(\Omega))$中也必须弱收敛。

由于这是一个希尔伯特空间，要证明强收敛，只需证明范数收敛。为此，我们采用 [41, 第 4] 节中引入的插值，定义如下：

$$\varrho_t^{\tau,\varepsilon} \stackrel{\text{def.}}{=} \begin{cases} \varrho_{k+1}^\tau, & t\in(k\tau, k\tau+(1-\varepsilon)\tau], \\ \varrho_{k+1}^\tau \frac{(k+1)\tau-t}{\varepsilon\tau} + \varrho_{k+2}^\tau \frac{t-(k+1)\tau+\varepsilon\tau}{\varepsilon\tau}, & t\in(k\tau+(1-\varepsilon)\tau, (k+1)\tau], \\ \varrho_{\lceil \frac{T}{\tau}\rceil}^\tau, & t\in\left(\lceil\tfrac{T}{\tau}\rceil, T\right]. \end{cases} \tag{3.10}$$

这一新族的优点在于，它非常适合应用 $L^p([0,T];\ B)$ 中适当版本的 Aubin-Lions-Simon紧性定理，其中 B 是一个巴拿赫空间；同时，它在 $L^2([0,T],\ H^1(\Omega))$ 拓扑下与 ϱ^τ 一致地接近。

由于应用这一紧性定理仅取决于插值的构造，我们在以下引理中总结 [41,命题4.2和推论 4.4] 中得到的收敛性质。

引理 3.12。 设 $(\varrho^\tau)_{\tau>0}$ 是*JKO*格式阶梯插值的一个子序列，按照定理*3.7*在 $L^1([0,T]\times\Omega)$ 中强收敛到 ϱ。那么，$(\varrho^\tau)_{\tau>0}$和 $(P_m(\varrho^\tau))_{\tau>0}$分别在 $L^2\left([0,T];\ L^2(\Omega)\right)$ 中强收敛到 ϱ 和 $P_m(\varrho)$。

借助这些要素，我们可以完成强 $L^2\left([0,T];\ H^1(\Omega)\right)$ 收敛性的证明，其证明结构深受 [41, 定理 4.5] 的启发。

定理 *3.8* 的证明。 设 $(\varrho,\ \mathbf{x},\ \mathbf{a})^{t\in[0,T]}$ 是通过阶梯插值 $(\varrho^\tau,\ \mathbf{x}^\tau,\ \mathbf{a}^\tau)_{\tau>0}$ 的极限得到的耦合系统的一个解。为简化记号，回顾在 (3.6) 中引入的势函数$\Phi[\varrho,\mathbf{x},\ \mathbf{a}]$，并定义

$$\begin{aligned} \Phi[\varrho] &\stackrel{\text{def.}}{=} \Phi[\varrho,\mathbf{x},\mathbf{a}], \\ \Phi^\tau &\stackrel{\text{def.}}{=} \Phi[\varrho^\tau,\mathbf{x}^\tau,\mathbf{a}^\tau], \\ \Phi_{k+1} &\stackrel{\text{def.}}{=} \Phi[\varrho_{k+1}^\tau,\mathbf{x}_{k+1}^\tau,\mathbf{a}_{k+1}^\tau]. \end{aligned}$$

在定理 3.7 中，我们证明了 ϱ 在弱意义下是方程的一个解

$$\partial_t\varrho = \nabla P_m(\varrho) + \operatorname{div}\left(\varrho\nabla\Phi[\varrho]\right), \tag{3.11}$$

满足无通量边界条件，并且 $P_m(\varrho)\in L^1([0,T];$ 有界变差$(\Omega))$。在当前定理证明的第一部分中，我们实际上证明了 $P_m(\varrho)\in L^2\left([0,T];\ H^1(\Omega)\right)$。因此，我们可以将 $P_m(\varrho)$ 用作 (3.11) 的测试函数，从而得到

$$\begin{aligned} -\int_0^T\int_\Omega \left(|\nabla P_m(\varrho)|^2 + \varrho\nabla P_m(\varrho)\cdot\nabla\Phi[\varrho]\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t &= \int_0^T\int_\Omega P_m(\varrho)\partial_t\varrho\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &= \int_0^T \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{m+1}\int_\Omega \varrho_t^{m+1}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{m+1}\int_\Omega \varrho_T^{m+1}\mathrm{d}x - \frac{1}{m+1}\int_\Omega \varrho_0^{m+1}\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

换言之，我们有能量关系

$$\int_\Omega \varrho_T^{m+1}\mathrm{d}x - \int_\Omega \varrho_0^{m+1}\mathrm{d}x = -(m+1)\int_0^T\int_\Omega \left(|\nabla P_m(\varrho)|^2 + \varrho\nabla P_m(\varrho)\cdot\nabla\Phi[\varrho]\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{3.12}$$

另一方面，利用本定理第一部分证明中的情形 $p=m+1$，例如在方程(3.9)中，对JKO格式的离散迭代项成立

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \left(\varrho_k^\tau\right)^{m+1}\mathrm{d}x - \int_\Omega \left(\varrho_{k+1}^\tau\right)^{m+1}\mathrm{d}x \\ &\qquad \geq \tau\left(\int_\Omega |\nabla P_m\left(\varrho_{k+1}^\tau\right)|^2\mathrm{d}x + \int_\Omega \varrho_{k+1}^\tau\nabla P_m\left(\varrho_{k+1}^\tau\right)\cdot\nabla\Phi_{k+1}\mathrm{d}x\right). \end{aligned}$$

因此，对 k 求和后，左端的项相互抵消，我们得到

$$\int_\Omega \left(\varrho_0^\tau\right)^{m+1}\mathrm{d}x - \int_\Omega \left(\varrho_T^\tau\right)^{m+1}\mathrm{d}x \geq \int_0^T\int_\Omega \left(|\nabla P_m\left(\varrho^\tau\right)|^2 + \varrho^\tau\nabla P_m\left(\varrho^\tau\right)\cdot\nabla\Phi^\tau\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t. \tag{3.13}$$

由 ϱ_t^τ 在每个时刻 t 都逐点收敛到 ϱ_t （在 Wasserstein 拓扑下），以及 $P_m(\varrho^\tau)$ 的弱收敛，我们得到

$$\begin{aligned}\int_\Omega (\varrho_T)^{m+1}\mathrm{d}x &\le \liminf_{\tau\to 0^+}\int_\Omega (\varrho_T^\tau)^{m+1}\mathrm{d}x,\\ \int_0^T\int_\Omega |\nabla P_m(\varrho)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t &\le \liminf_{\tau\to 0^+}\int_0^T\int_\Omega |\nabla P_m(\varrho^\tau)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\end{aligned}\tag{3.14}$$

我们可以将以下项改写为

$$\begin{aligned}\lim_{\tau\to 0}\int_0^T\int_\Omega \varrho^\tau\nabla P_m(\varrho^\tau)\cdot\nabla\Phi^\tau\mathrm{d}x\mathrm{d}t &= \sum_{i=1}^N\lim_{\tau\to 0}\int_0^T\int_\Omega \mathbb{1}_{\Omega_i^\tau(t)}\varrho^\tau\nabla P_m(\varrho^\tau)\cdot(x-x_i^\tau)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ &= \sum_{i=1}^N\int_0^T\int_\Omega \mathbb{1}_{\Omega_i(t)}\varrho\nabla P_m(\varrho)\cdot(x-x_i)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ &= \int_0^T\int_\Omega \varrho\nabla P_m(\varrho)\cdot\nabla\Phi[\varrho]\mathrm{d}x\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

其中极限是按弱-强收敛计算的，因为 $\mathbb{1}_{\Omega_i^\tau}\xrightarrow[\tau\to 0]{L^1([0,T]\times\Omega)}\mathbb{1}_{\Omega_i}$ 对所有$i=1,\dots,N$均成立，因此 $\varrho^\tau\mathbb{1}_{\Omega_i^\tau}$在 $L^2\left([0,T]\right.$中强收敛；$\left.L^2(\Omega)\right)$且 $\nabla P_m(\varrho^\tau)\cdot(x-x_i^\tau)$在同一空间中弱收敛。

因此，回到 (3.13)，利用前述收敛、(3.14) 以及能量关系 (3.12)，我们得到

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega |\nabla P_m(\varrho)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t &\le \liminf_{\tau\to 0^+}\int_0^T\int_\Omega |\nabla P_m(\varrho^\tau)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \le \limsup_{\tau\to 0^+}\int_0^T\int_\Omega |\nabla P_m(\varrho^\tau)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ &\le \limsup_{\tau\to 0^+}\left(\int_\Omega (\varrho_0^\tau)^{m+1}\mathrm{d}x-\int_\Omega (\varrho_T^\tau)^{m+1}\mathrm{d}x-\int_0^T\int_\Omega \varrho^\tau\nabla P_m(\varrho^\tau)\cdot\nabla\Phi^\tau\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)\\ &\le \int_\Omega (\varrho_0)^{m+1}\mathrm{d}x-\int_\Omega (\varrho_T)^{m+1}\mathrm{d}x-\int_0^T\int_\Omega \varrho\nabla P_m(\varrho)\cdot\nabla\Phi[\varrho]\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ &= \int_0^T\int_\Omega |\nabla P_m(\varrho)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

根据引理 3.12，我们已经得到 $P_m(\varrho^\tau)$ 在 $L^2\left([0,T];L^2(\Omega)\right)$ 中强收敛到 $P_m(\varrho)$，因此上述计算意味着 $P_m(\varrho^\tau)$ 在 $L^2\left([0,T];H^1(\Omega)\right)$ 中的范数收敛；结合弱收敛即可得到所需结果。□

4. 定性性质

本节研究一个简化偏微分方程的定性行为。该方程是前文介绍的最小化运动格式的极限方程，但不包含由法锥编码的边界效应。关于区域和数据的所有假设均与引言中所述相同。由此得到的耦合偏微分方程–常微分方程系统为

$$\begin{cases}\partial_t\varrho_t=\Delta P(\varrho_t)+\operatorname{div}\left(\varrho_t\left(\displaystyle\sum_{i=1}^N(x-x_i(t))\mathbb{1}_{\Omega_i(t)}\right)\right)\\ \dot{x}_i(t)=-a_i(t)x_i(t)+\displaystyle\int_{\Omega_i(t)}x\mathrm{d}\varrho_t\\ \dot{a}_i(t)=\left(-g'(a_i(t))+\psi_i(t)\right)\mathbb{1}_{\{a_i>0\}}\\ \Omega_i(t)=\mathrm{Lag}_i(\psi_t,\mathbf{x}_t),\ \psi(t)\text{ is a potential for }W_2^2(\varrho_t,\mu_t).\end{cases}\tag{4.1}$$

我们首先证明，对于 (4.1) 的任意解，而不仅仅是通过最小化运动格式得到的解，原子始终严格位于区域内部。此外，当边界$\partial\Omega$ 光滑时，初始位于边界上的任意原子都会立即被推入内部（见定理 4.1）。随后，我们聚焦于一致量化情形 $a_i\equiv 1/N$，证明原子始终一致地彼此分离，且任意点与其拉盖尔单元重心之间的距离趋于零。

4.1. **原子动力学的不变性质**。 本小节将确立耦合系统 (1.4) 的若干定性性质。主要结果如下定理所述。

定理 4.1. 设Ω 为一个开的、有界的凸集，并设$(\varrho_t,\ \mathbf{x}_t,\ \mathbf{a}_t)^{t\in[0,T]}$ 是(1.4)的一个解。则下列性质成立：

(1) 族$(\varrho_t)^{t\geq 0}$ 是一致可积的。*(2)* 若对某个 $\bar{t}\geq 0$ 有 $a_i(\bar{t})\ =0$，则对所有 $t\geq\bar{t}$有 $a_i(t)\ =0$ 。*(3)* 若 $\partial\Omega$属于 $\mathscr{C}^1$ 类且 $x_i(0)\ \in\partial\Omega$，则 $x_i(t)$被瞬时推向内部，即对0的一个充分小邻域内的所有 t ，有 $x_i(t)\ \in\Omega$的内部。*(4)* 假设要么 $\partial\Omega$属于 $\mathscr{C}^1$类，要么$(x_i(0))_{i=1}^N\ \subset\Omega$的内部。则对任意 $t\ >\ 0$，若$x_i(t)\in\partial\Omega_i(t)$，则可得 $a_i(t)\ =0$。

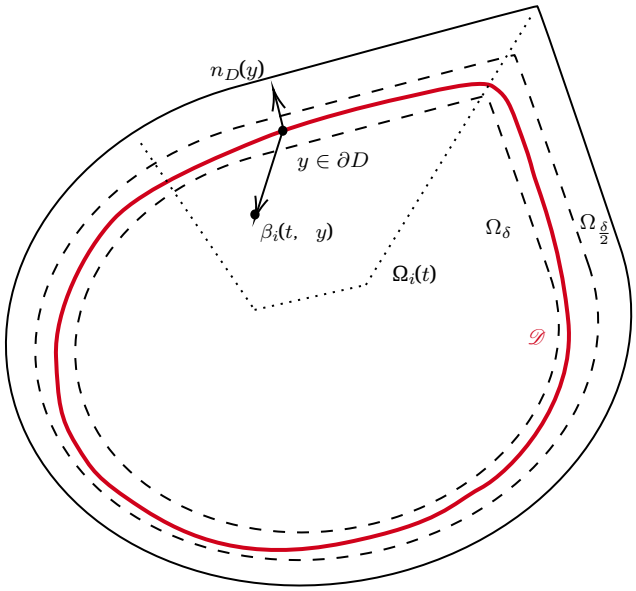

图 2. 不变区域 $\mathscr{D}$ 的构造。一致可积性ϱ_t 确保重心 $b_i(t,\ y)$ 保持在 Ω_δ 内，从而能够在 Ω_δ 与 $\Omega_{\delta/2}$ 的边界之间构造一个光滑且凸的不变集 $\mathscr{D}$ 。

证明依赖于动力系统方法：我们为原子位置（x_i）$_{i=1}^N$的动力学构造一个正向不变域，同时保持（$\varrho_t,\ a_i(t)$)固定。在此背景下，正向不变域是指一个由系统生成的轨道无法离开的区域。

定义 4.2. 设 $V\colon\ \mathbb{R}+\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ 是一个向量场，关于时间可测且关于空间连续。若集合 $A\subset\mathbb{R}^d$ 对于由 V 诱导的动力学是正向不变的，则意味着常微分方程 $\dot{x}_t=V(t,\ x_t)$ 的每个解 $(x(t))t\geq 0$，在满足 $x(0)\ \in A$ 时，对所有 $t\geq 0$ 均有 $x(t)\ \in A$ 。

正向不变集理论源于 Nagumo 的工作 [36] （另见 [5,第 4] 章）。这里，我们利用 Ω 的凸性以及从能量泛函 $\mathscr{F}$ 继承而来的 $(\varrho_t)^{t\geq 0}$ 的一致可积性，从而应用一个更简单的经典判据。特别地，若 A具有光滑边界，则 A 在由 V诱导的流下保持不变的一个充分条件是：对于所有 $y\in\partial A,\ \langle V(t,\ y)\ n_A(y)\rangle<0$，其中 $n_A(y)$ 表示在 y处取值的 ∂A的外单位法向量，参见例如 [23, 引理 1]。

证明。 **条目 (1)：** $(\varrho_t)^{t\in[0,T]}$ 的一致可积性由 De la Vallée Poussin 定理以及方程在 ϱ_t 上的梯度流结构得出。事实上，利用 ϱ_t 所满足方程的梯度流结构，我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathscr{E}(\varrho_t,\mu_t)\leq 0,\ \text{so that}\ \mathscr{F}(\varrho_t)\leq\mathscr{E}(\varrho_t,\mu_t)\leq\mathscr{E}(\varrho_0,\mu_0).$$

条目 (3)： 当 $\partial\Omega$ 是 $\mathscr{C}^1$ 时，边界上每一点的法锥都是一维子空间，即由 $N_\Omega(x) = n_\Omega(x)\mathbb{R}$ 给出；而 $\partial\Omega$ 在 x 处的切空间是该向量 $T_x\partial\Omega = \{n_\Omega(x)\}^\perp$ 的正交子空间，但不要将其与 Bouligand 切锥 (3.1) $T_\Omega(x)$ 混淆。为进行反证法，假设存在区间 $(0, \tau)$，使得 $x_i(t) \in \partial\Omega$，那么可推出 $\dot{x}_i(0) \in T_{x_i(0)}\partial\Omega$，并且有 $\dot{x}_i(0) \cdot n_\Omega(x_i(0)) = 0$。

定义凸集族

$$\Omega^\delta \overset{\text{def.}}{=} \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \geq \delta\},$$

使得 $|\Omega \setminus \Omega^\delta| \leq C\delta$。由 $(\varrho_t)_{t\in[0,T]}$ 的一致可积性，我们得出重心

$$b_i(t) \overset{\text{def.}}{=} \frac{1}{a_i(t)} \int_{\Omega_i(t)} x \mathrm{d}\varrho_t \in \operatorname{int} \Omega_\delta,$$

对所有充分小的 δ 都成立。

T为完成这一将导致矛盾的构造，请注意， $\dot{x}_i(0)$ 可以写成 as

$$\dot{x}_i(0) = a_i(0)(b_i - x_i(0)) + n_i, \text{ where } n_i \text{ is parallel to } n_\Omega(x_i(0)).$$

令 x_δ 表示 $x_i(0)$ 在凸集 Ω^δ 上的投影，使得 $x_i(0) - x_\delta = \delta \frac{n_i}{\|n_i\|}$。因此，事实 $\dot{x}_i(0) \cdot n_i = 0$ 意味着，对所有足够小且满足 $b_i \in \Omega^\delta$ 的 $\delta > 0$，有

$$\begin{aligned} 0 &= \|n_i\|^2 + a_i(0) \langle b_i - x_\delta, n_i \rangle + a_i(0) \langle x_\delta - x_i(0), n_i \rangle \\ &= \|n_i\|^2 + a_i(0) \langle b_i - x_\delta, n_i \rangle - a_i(0) \|n_i\| \delta, \\ &= \|n_i\|^2 + \frac{a_i(0)}{2} \left(\delta^2 + \|b_i - x_\delta\|^2 - \|x_i(0) - b_i\|^2 \right) - a_i(0) \|n_i\| \delta, \end{aligned}$$

其中，最后一个等式是利用由点b_i、$x_i(0)$ x_δ构成的三角形的余弦定理得到的。但请注意，这个等式不可能对无限多个 δ值成立，这与假设对所有 $t \in (0, \tau)$， $x_i(t) \in \partial\Omega$相矛盾。因此，我们得出结论： x_i 会瞬间进入内部。

条目 (4)： 反设 $\bar{t} > 0$ 是 x_i 首次到达边界$\partial\Omega$的时刻，且满足 $a_i(\bar{t}) > 0$。我们的做法是为 x_i 所满足的动力学构造一个不变区域。固定$(\varrho_t, \mathbf{a}_t)_{t\in[0,T]}$的轨道后，请注意，对每个 $i = 1$、.....、N，描述 $t \mapsto x_i(t)$演化的常微分方程为

$$\dot{x}_i(t) = V_i(t, x_i(t)), \text{ where } V_i(t, y) \overset{\text{def.}}{=} -\nabla_y W_2^2 \left(\varrho_t, a_i(t)\delta_y + \sum_{j\neq i} a_j(t)\delta_{x_j(t)} \right).$$

因此，我们有

$$V_i(t, y) = a_i(t)(\beta_i(t, y) - y) \text{ where } \beta_i(t, y) \overset{\text{def.}}{=} \frac{1}{a_i(t)} \int_{\Gamma_i(t,y)} x \mathrm{d}\varrho_t$$

并且 $\Gamma_i(t, y)$对应于由 ϱ_t 到 $a_i(t)\delta_y + \sum a_j(t)\delta_{x_j(t)}$的半离散输运所诱导的镶嵌中的第 i个拉盖尔单元。因此， V_i 显然关于时间可测，而其关于空间的$\mathscr{C}^0$ 正则性则源于半离散输运项 [19, 的可微性（定理1和命题 2]）。

为构造一个不变区域，令 $\delta \overset{\text{定义为}}{=} \min_{i=1,\ldots,N} \operatorname{dist}(x_i(0), \partial\Omega) > 0$ 并定义

$$\Omega_s \overset{\text{def.}}{=} \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \geq s\}.$$

因此，根据一致可积性以及 Ω 的凸性，对于任意 $\varepsilon > 0$，存在某个 $\bar{\delta} < \delta$以及一个具有光滑边界的紧凸集 $\mathscr{D}_{\bar{\delta}}$，使得

$$\Omega_{\bar{\delta}/2} \subseteq \mathscr{D}_{\bar{\delta}} \subseteq \Omega, \text{ with } \varrho_t(\Omega \setminus \Omega_{\bar{\delta}}) \leq \varepsilon \text{ for all } t \in [0, T].$$

设 $\bar{t} \overset{\text{定义}}{=} \min\{t \geq 0 : x_i(t) \in \partial\Omega\}$，并反设 $\bar{a}_i \overset{\text{定义}}{=} a_i(\bar{t}) > 0$。用 $\varepsilon \ll \frac{\bar{a}_i}{4}$进行前述构造，可得

$$\beta_i(t, y) \in \Omega_{\bar{\delta}} \text{ for all } t \in [0, T] \text{ and all } y \in \Omega.$$

因此，由于 $\mathscr{D}_{\bar{\delta}}$ 具有光滑边界且为凸的，对任意 $y \in \partial\mathscr{D}_{\bar{\delta}}$，我们得到

$$n_{\mathscr{D}_{\bar{\delta}}}(y) \cdot a_i(t)\,(\beta_i(t) - y) < 0,$$

这意味着，对于与 $t \mapsto x_i(t)$ 的动力学相关联的流，$\mathscr{D}_{\bar{\delta}}$ 是不变的。这与 $\bar{t}$ 的定义相矛盾，因此 $x_i(\bar{t}) \in \partial\Omega$ 只有在 $a_i(\bar{t}) = 0$ 时才可能发生。□

4.2. 关于最优量化方程的动力学。本段将权重 $a_i = \frac{1}{N}$ 固定为对所有 $i = 1, \ldots\ldots, N$ 均成立，从而聚焦于耦合系统的一种简化形式。在这种情况下，方程 (4.1) 成为能量的梯度流

$$\mathscr{E}(\varrho, \mathbf{x}) \overset{\text{def.}}{=} \mathscr{H}(\varrho) + F_N(\varrho, \mathbf{x}), \text{ where } F_N(\varrho, \mathbf{x}) \overset{\text{def.}}{=} \frac{1}{2} W_2^2 \left(\varrho, \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \delta_{x_i} \right),$$

这对应于一致量化问题。这样，方程 (4.1) 具有如下形式

$$\begin{cases} \partial_t \varrho = \Delta \varrho + \operatorname{div}\left(\varrho \nabla \Phi_t[\varrho_N, \mathbf{x}_t]\right), & \text{in } (0,\infty) \times \Omega, \\ -\dot{\mathbf{x}}_t = \nabla_{\mathbf{x}} F_N(\varrho_t, \mathbf{x}_t) = \frac{1}{N}(\mathbf{x}_t - \mathbf{b}_t). \end{cases} \tag{4.2}$$

由 JKO格式可保证解的存在性，前提是原子 $(x_{i,\,t})_{i=1}^N$始终彼此分离，并且对于所有 $t > 0$ 都远离边界 $\partial\Omega$。利用定理 4.1 的第 (4) 项，并令 $a_i(t) \equiv 1/N$，当初始原子 $\mathbf{x}_0$ 彼此不同且远离边界时，该条件成立。此外，由于 $\mathbf{x}_t$ 所满足的方程是半凹泛函的梯度流，原子不可能在有限时间内发生碰撞。因此，对于所有时间 $t \geq 0$，方程 (4.2) 的解均存在。类似的论述此前已在例如 [40, 第 6.4 节2], [30], 中提及，但我们将在下文的引理 4.3 中对其作更详细的讨论。

一个特别相关的情形是密度保持不变 $\varrho_t \equiv \varrho$，此时$\mathbf{x}_t$ 的动力学成为均匀重心量化中 Lloyd 算法的连续时间类比。对于离散Lloyd算法，已知（见 [10,34,38]）其迭代会收敛到这样的构型：每个 x_i 都与其重心重合。我们的目标是建立相应的连续情形结果，

$$\|\mathbf{x}_t - \mathbf{b}_t\| \xrightarrow[t\to\infty]{} 0. \tag{4.3}$$

并描述促成这一收敛的流的正则性与稳定性性质。

ϱ_t 的演化只会通过较弱的正则性假设影响分析：作为一个具有有界漂移的 Fokker–Planck 方程的解，它关于时间是 Hölder连续的，并且具有一致有界密度。因此，若干中间结果（例如引理 4.3）对于具有这些性质的任意连续曲线 ϱ_t 仍然成立，包括平稳情形 $\varrho_t \equiv \varrho$。

最后，梯度流结构保证$\mathbf{x}_t$具有有限动能

$$\int_0^\infty \|\dot{\mathbf{x}}_t\|^2 \,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \|\mathbf{x}_t - \mathbf{b}_t\|^2 \,\mathrm{d}t < +\infty, \tag{4.4}$$

但仅凭这一点并不能推出 (4.3)。 $t \mapsto \mathbf{x}_t - \mathbf{b}_t$ 还需要满足一致连续性。尽管 $\dot{\mathbf{x}}_t$ 显然是 Lipschitz 连续的，且 Lipschitz 常数为 Ω 的直径，但靠近广义对角线时，$\mathbf{b}_t$ 的演化可能会退化

$$\mathbb{D}_N \overset{\text{def.}}{=} \left\{ \mathbf{x} \in \Omega^N : x_i = x_j \text{ for some } i \neq j \right\}, \tag{4.5}$$

见图 4.2。实际上，当原子彼此靠近时，其动力学会变得奇异。对相邻单元 $i \sim j$（即满足 $\mathscr{H}^{d-1}(\Sigma_{ij}) > 0$，其中 $\Sigma_{ij} \overset{\text{定义为}}{=} \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j$）进行细致分析，可得到两两距离的定量下界，并证明整体适定性，详见下文的引理 4.3。

引理 4.3。设 Ω 是 $\mathbb{R}^d$的一个紧凸子集，并取一条连续曲线 $(\varrho_t)_{t\geq 0}$，其值于$\mathscr{P}_{\mathrm{ac}}(\Omega)$ </style>且密度一致有界。则有以下结论：

(1) 常微分方程的最大存在区间

$$-\dot{\mathbf{x}}_t = \nabla_{\mathbf{x}} F_N(\varrho_t, \mathbf{x}_t)$$

由 $\mathbb{R}_+$ 给出，前提是初始原子 $\mathbf{x}_0$ 互不相同，并且 $\partial\Omega$ 为 $\mathscr{C}^1$，或者初始条件远离边界 $\partial\Omega$。

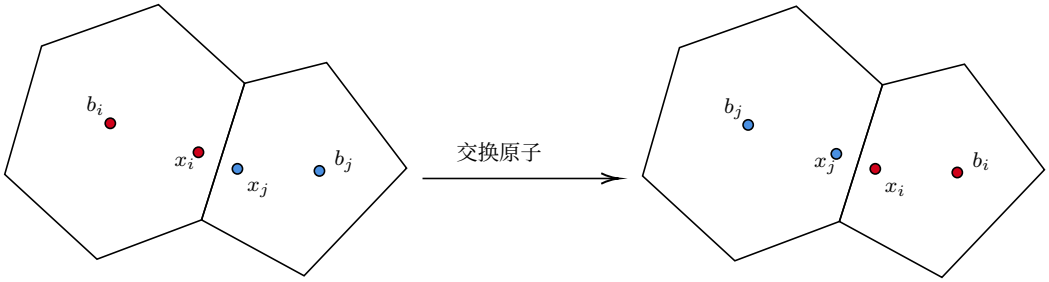

图3。原子的微小变化不会对重心产生太大影响，除非它们彼此过于接近。在这种情况下，各点距离很近，交换它们的标签意味着其位置只有微小变化，但会互换相距甚远的重心。

(2) 对所有时刻 $t \geq 0$，重心彼此远离，即存在 C_Ω 使得

$$|b_i(t) - b_j(t)| \geq \frac{C_{\Omega,\varrho}}{N^{d-1}}.$$

(3) 如果$(\varrho_t, \mathbf{x}_t)^{t\geq 0}$ 具有有限动能(4.4)，则存在一个常数 c，使得

$$|x_i(t) - x_j(t)| \geq c,$$

对所有 $i \sim j$ 和所有 $t \geq 0$均成立。

证明。 为证明第一项，我们回顾一下，根据 [19, 定理 1],，如果 $\varrho \in \mathscr{P}_{\mathrm{ac}}(\Omega)$，那么$\mathbf{x} \mapsto F_N(\varrho,\ \mathbf{x})$在$\Omega^N \setminus \mathbb{D}_N$中至多有二阶导数，其中 $\mathbb{D}_N$ 是(4.5)中定义的广义对角线，即碰撞原子的集合，而 Hessian矩阵为

$$\nabla_{x_i,x_j} F_N(\varrho, \mathbf{x}) = \int_{\Sigma_{ij}} (x - x_i) \otimes (x - x_j) \frac{\varrho(x)}{|x_i - x_j|} \mathrm{d}\mathscr{H}^{d-1}(x), \text{ for } i \neq j,$$

and

$$\nabla_{x_i,x_i} F_N(\varrho, \mathbf{x}) = \frac{1}{N} I - \sum_{j \neq i} \nabla_{x_i,x_j} F_N(\varrho, \mathbf{x}), \text{ for } i = 1, \ldots, N.$$

此外，若 ϱ是 $\mathscr{C}^0(\Omega)$，则 $F_N(\varrho,\ \cdot)$ 在 $\Omega^N \setminus \mathbb{D}_N$中是 $\mathscr{C}^2$。另一方面，给定 $\mathbf{x} \in \Omega^N \setminus \mathbb{D}_N$，$t \mapsto \nabla F_N(\varrho_t, \mathbf{x})$ 是连续的。无论哪种情况，都可以验证 Hessian矩阵在 $\Omega^N \setminus \mathbb{D}_N$的紧子集上有界，因此 $\mathbf{x} \mapsto \nabla_{\mathbf{x}} F_N(\varrho,\ \mathbf{x})$ 是局部 Lipschitz 的，所以根据 Cauchy-Lipschitz定理，该流在 $\Omega^N \setminus \mathbb{D}_N$的内部局部适定。

最大存在区间定理（例如参见 [11, 定理 2.3], ）指出，若 T 是解 $\mathbf{x}_t$ 存在的常微分方程解时间的上确界，则要么 $T = +\infty$，要么

$$\lim_{t \to T^-} \left(|\mathbf{x}_t| + \frac{1}{\operatorname{dist}(\mathbf{x}_t, \partial(\operatorname{int} \Omega^N \setminus \mathbb{D}_N))} \right) = +\infty.$$

对于所有 $t < T$，由于定理 4.1 的第 (4) 项，只要 $\partial\Omega$ 是 $\mathscr{C}^1$，或者初始原子远离边界，原子 $\mathbf{x}_t$ 与边界 $\partial\Omega$ 始终保持正距离。此外，为了控制 $\mathbf{x}_t$与 $\mathbb{D}_N$之间的距离，我们按 [30,34]中的方法进行：由于 $b_{i,\ t} \in \Omega_{i,\ t}$，我们有，对于 $i \neq j$，

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{1}{2} |x_{i,t} - x_{j,t}|^2 &= -\left\langle x_{i,t} - x_{j,t}, b_{i,t} - x_{i,t} - (b_{j,t} - x_{j,t}) \right\rangle \\ &= |x_{i,t} - x_{j,t}|^2 + \underbrace{\left\langle x_{i,t} - x_{j,t}, b_{j,t} - b_{i,t} \right\rangle}_{\geq 0} \geq |x_{i,t} - x_{j,t}|^2. \end{aligned}$$

由反向Grönwall不等式可得$|x_{i,\ t} - x_{j,\ t}|^2 \geq e^{-t} |x_{i,\ 0} - x_{j,\ 0}|^2$ 对所有 $t < T$均成立。我们得出，$\operatorname{dist}(\mathbf{x}_t,\ \partial(\Omega$的内部$^N \setminus \mathbb{D}_N)) \geq c_T > 0$ 对所有 $t < T$和 $T > 0$均成立。因此，唯一的可能性是 $T = +\infty$。

为证明结论 (2)，我们使用密度的上界 $\|\varrho_t\|_\infty \leq C_\varrho$。给定 $i \sim j$，不失一般性地假设 $\Sigma_{ij} \subset \{x_d = 0\}$。令 d_{ij}，使得 $\varrho_t(\{x_d > d_{ij} 0\}) = 1/2N$。那么必有

$b_i \in \{x_d = d_{ij}\}$，且 $\mathsf{dist}(b_i,\ \partial\Sigma_{ij}) = d_{ij}$。因此，我们有

$$\frac{1}{2N} = \varrho_t(\{x_d > d_{ij}0\}) \le C_\varrho |\{x_d > d_{ij}\} \cap \Omega| \le C_\varrho \operatorname{diam}\Omega d_{ij}^{d-1},$$

重新整理上述不等式并对 $|b_i - b_j| \ge \mathsf{dist}(b_i, \Sigma_{ij}) + \mathsf{dist}(b_j, \Sigma_{ij})$ 进行估计，即可得出结果。

接下来讨论第 (3) 项。反设对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在一个序列$t_k \xrightarrow[k\to\infty]{} +\infty$，使得存在一对 $i_k \sim j_k$ 满足

$$|x_{i_k}(t_k) - x_{j_k}(t_k)| \le \frac{\varepsilon}{3}.$$

由于 $t \mapsto \mathbf{x}_t$ 是 Lipschitz连续的，常数为 $\mathsf{diam}\,\Omega$，因此存在一个以 t_k 为中心、长度为 $|I_k| = 2\varepsilon/3$ $\mathsf{diam}\Omega$ 的区间 I_k，使得

$$|x_{i_k}(t) - x_{j_k}(t)| \le |x_{i_k}(t_k) - x_{i_k}(t)| + |x_{i_k}(t_k) - x_{j_k}(t_k)| + |x_{j_k}(t_k) - x_{j_k}(t)| \le \varepsilon$$

对所有 $t \in I_k$ 均成立。特别地，取远小于 $\frac{C_\Omega}{N^{d-1}}\frac{\varrho}{} \le |b_i - b_j|$ 的 ε，使得对于所有 $k \in \mathbb{N}$，$\frac{C_\Omega}{N^{d-1}}\frac{\varrho}{} \le \|\mathbf{x}_t - \mathbf{b}_t\|$ 都位于 I_k 内。在这种情况下，我们有

$$\int_0^\infty \|\mathbf{x}_t - \mathbf{b}_t\|^2 \,\mathrm{d}t \ge \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_{I_k} \|\mathbf{x}_t - \mathbf{b}_t\|^2 \,\mathrm{d}t = +\infty.$$

这就构成了一个收缩，因此 $|x_i - x_j|$ 必须一致地有下界。 □

上述引理给出了$\mathbf{x}_t$ 与广义对角线之间距离的一致下界，这意味着动力学不会渐近退化。然而，$\mathbf{b}_t$的演化取决于自由边界 $\Omega_i(t) = \mathsf{Lag}_i(\mathbf{x}_t, \psi_t)$的演化是否光滑，也就是说，取决于 ψ_t的正则性。由于 $t \mapsto \mathbf{x}_t$ 是一致 Lipschitz 的，我们将在下文看到，$t \mapsto \psi_t$ 的光滑性实质上取决于 ϱ_t的演化。

引理 4.4. 设Ω 是 $\mathbb{R}^d$的一个紧凸子集，并取一条$(\varrho_t)_{t\ge 0}$，它是取值于$\mathscr{P}_{\mathrm{ac}}(\Omega)$ 的连续曲线，具有一致有界密度，且 $t \mapsto \varrho_t$ 关于时间一致连续，其连续模为 ω_ϱ。那么 $t \mapsto \psi_t$以及由此得到的 $t \mapsto \mathbf{b}_t$ 均一致连续，连续模为 ω_ϱ。

证明。 重心演化的正则性由曲线 ϱ_t 的演化以及最优 Kantorovich 势函数 ψ_t的正则性决定。为此，定义函数$G_t : \Omega^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N+1}$ 如下

$$\begin{aligned} G_t : \Omega^N \times \mathbb{R}^N &\to E \overset{\text{def.}}{=} \{\textstyle\sum \psi_i = 0\} \\ (\mathbf{x}, \psi) &\mapsto (G_{i,t}(\mathbf{x}, \psi))_{i=1}^N, \end{aligned} \quad \text{where } G_{i,t}(\mathbf{x}, \psi) \overset{\text{def.}}{=} \varrho_t(\mathrm{Lag}_i(\mathbf{x}, \psi)) - \frac{1}{N}.$$

于是，对于所有 $t \ge 0$，在梯度流的演化过程中，我们有 $G_t(\mathbf{x}_t,\ \psi_t) \equiv 0$。此外，$G_t$ 的雅可比矩阵可以显式计算为

$$\frac{\partial G_{t,i}}{\partial \psi_j} = -\int_{\Sigma_{ij}} \frac{\varrho_t(x)}{|x_j - x_i|} \mathrm{d}\mathscr{H}^{d-1}(x) \text{ for } j \ne i, \quad \frac{\partial G_{t,i}}{\partial \psi_i} = -\sum_{j\ne i} \frac{\partial G_{t,i}}{\partial \psi_j},$$

$$\frac{\partial G_{t,i}}{\partial x_j} = -\int_{\Sigma_{ij}} \frac{x - x_i}{|x_j - x_i|} \varrho_t(x) \mathrm{d}\mathscr{H}^{d-1}(x) \text{ for } j \ne i, \quad \frac{\partial G_{t,i}}{\partial x_i} = -\sum_{j\ne i} \frac{\partial G_{t,i}}{\partial x_j}.$$

因此，对于每个 $t \ge 0$，雅可比矩阵 $D_\psi G_t$ 的秩为 $N - 1$。由于 E 是一个 $N - 1$维超平面，我们可以应用隐函数定理，将 ψ_t 表示为$\mathbf{x}_t$、$\psi_t = g_t(\mathbf{x}_t)$ 的 $\mathscr{C}^1$ 函数。此外，根据引理 4.3，由于点 x_i 一致地彼此分离，雅可比矩阵 $D_\psi G_t$ 在 E中有有界逆。因此，我们可以通过注意到以下事实来估计 ψ_t 对时间的敏感性：

$$0 = \underbrace{G_t(\mathbf{x}_t, \psi_t) - G_t(\mathbf{x}_s, \psi_s)}_{\overset{\text{def.}}{=} \Delta_{x,\psi} G} + \underbrace{G_t(\mathbf{x}_s, \psi_s) - G_s(\mathbf{x}_s, \psi_s)}_{\overset{\text{def.}}{=} \Delta_{t,s} G}$$

并估计各项。

对于第一项，由于在 t 固定时， ψ_t 对 $\mathbf{x}_t$ 的依赖关系由 $\mathscr{C}^1$ 决定，我们可以应用中值定理，找到满足下式的 $(\bar{\mathbf{x}}\ \bar{\psi})$：

$$\Delta_{x,\psi}G = D_{\mathbf{x}}G_t(\bar{\mathbf{x}},\bar{\psi})(\mathbf{x}_t-\mathbf{x}_s) + D_{\psi}G_t(\bar{\mathbf{x}},\bar{\psi})(\psi_t-\psi_s).$$

F对于第二项，每个分量都受 ϱ 关于时间的连续模控制 $_t$：

$$\Delta_{t,s}G_i = \varrho_t(\mathrm{Lag}_i(\mathbf{x}_s,\psi_s)) - \varrho_s(\mathrm{Lag}_i(\mathbf{x}_s,\psi_s)).$$

因此，由于关于 ψ 的雅可比矩阵具有有界逆，且 $t\mapsto\mathbf{x}_t$ 是 Lipschitz 连续的，我们得到

$$|\psi_t-\psi_s| \le \left\|D_{\psi}G_t(\bar{\mathbf{x}},\bar{\psi})^{-1}\right\|_{\infty}\left(\operatorname{diam}\Omega|t-s|+\omega_{\varrho}(|t-s|)\right).$$

这意味着 $t\mapsto\psi_t$ 在 L^1 中与 $t\mapsto\varrho_t$ 具有相同的连续模；又由于 $(\mathbf{x}\ \psi)\mapsto\mathrm{Lag}_i(\mathbf{x}_t,\psi_t)$ 在 $L^1(\Omega)$ 的强拓扑下是一致连续的，我们得出重心曲线 $t\mapsto\mathbf{b}_t$ 也继承了 ϱ_t 的相同连续模。□

现在，我们可以综合这些论证，得到所需的重心距离收敛结论 (4.3)。

定理 4.5。 如果 $\varrho_t\equiv\varrho$ 固定，或者 $(\varrho_t,\mathbf{x}_t)_{t\ge0}$ 满足 (4.2)，那么

$$\|\mathbf{x}_t-\mathbf{b}_t\| \xrightarrow[t\to\infty]{} 0.$$

证明。 若 $\varrho_t\equiv\varrho$ 固定，或者若$(\varrho_t,\ \mathbf{x}_t)_{t\ge0}$ 求解(4.2)，则一个简单的梯度流论证表明$\mathbf{x}_t$ 具有有限动能(4.4)。例如，在后一种情形中，注意到能量的时间导数由下式给出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathscr{E}(\varrho_t,\mathbf{x}_t) = -I(t) - \frac{1}{N^2}\|\mathbf{x}_t-\mathbf{b}_t\|^2,$$

其中 $I(t)$对应于 ϱ_t 关于与Kantorovich势函数 Φ_t相关联的Gibbs测度的Fisher信息：

$$I(t) = \int_{\Omega}\left|\frac{\nabla\varrho_t}{\varrho_t}+\nabla\Phi_t(x)\right|^2\mathrm{d}\varrho_t \ge 0.$$

因此对 $\mathbb{R}_+$ 积分，我们得到

$$\frac{1}{N^2}\int_0^{\infty}\|\mathbf{x}_t-\mathbf{b}_t\|^2\,\mathrm{d}t \le \mathscr{E}(\varrho_0,\mathbf{x}_0) < +\infty.$$

此外， $t\mapsto\varrho_t$ 在 $L^1(\Omega)$中也是一致连续的。在密度固定的情形中这显然成立，而在后一种情形中，这是因为它是具有有界漂移的Fokker-Planck方程的解，因而具有有界且Hölder连续的密度，例如参见 [18] 和 [6]。

利用上述引理4.3和4.4，由前面的讨论我们得到

$$\int_0^{\infty}\|\mathbf{x}_t-\mathbf{b}_t\|^2\,\mathrm{d}t < +\infty \text{ and } t\mapsto\|\mathbf{x}_t-\mathbf{b}_t\| \text{ is uniformly continuous,}$$

因此 $\|\mathbf{x}_t-\mathbf{b}_t\| \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$，结论得证。 □

5. 数值模拟与猜想

本节介绍一种用于数值模拟动态量化方程（1.5）的分裂格式。我们进行数值实验，旨在帮助提出关于系统长时间行为的猜想。该格式将求解时间区间离散化，并交替更新连续密度 ϱ 的近似值和原子的位置 $\mathbf{x}$。

描述 ϱ 演化的偏微分方程在网格 $\mathcal{T}$ 上离散化，该网格独立于点$\mathbf{x}$ 的演化，也独立于由半离散最优传输问题所诱导的 Laguerre 镶嵌。这使得我们可以采用分步格式：在每个时间步长，首先在密度固定的情况下，使用欧拉格式对其底层常微分方程进行一步求解，从而演化位置$\mathbf{x}$ ；借助 pysdot 软件包 [29]，这一步可以轻松完成。这种演化的优势在于可以采用离网方法 $\mathcal{T}$。随后，可使用通用的福克-普朗克型方程求解器（例如 FiPy [25]）高效地计算 ϱ 的演化。

一方面，更好地结合拉盖尔单元的演化与决定连续密度分辨率的底层网格 $\mathcal{T}$，有望得到能够考虑进出每个拉盖尔单元的质量流的数值方法，例如采用有限体积方法 [15]。另一方面，这种采用独立网格和拉盖尔剖分的方法，使原子测度的演化能够采用离网方法，因为此时拉盖尔镶嵌由标量康托罗维奇势函数唯一确定 $(\psi_i)_{i=1}^N$。我们的方法总结如算法1所示。

算法1： （1.5）的分裂格式

输入 ： 网格 $\mathcal{T}$ 上的初始密度 ϱ_0，初始点 $\mathbf{x}_0$, 时间步长 τ
输出： 近似序列 $(\varrho_n, \mathbf{x}_n)$
对于 $n = 0, 1, 2, \cdots$ **执行**
  // 使用 pysdot 计算 OT（半离散）
  使用 pysdot 计算 $\psi_n = (\psi_{n,i})_{i=1}^N$ 以及 $\mathbf{b}_n = (b_{n,i})_{i=1}^N$ 对应于 $W_2^2\left(\varrho_n, \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{x_{n,i}}\right)$；
  // 根据最优性条件计算最优传输映射

$$T_n(x) = x_{n,i^\star} \text{ where } i^\star = \operatorname*{argmin}_{i=1,\dots,N} \tfrac{1}{2}\|x - x_{n,i}\|^2 - \psi_{n,i}$$

  根据半离散最优传输的最优性条件；
  // 使用显式欧拉法更新点的常微分方程
  更新原子 $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - \alpha(\mathbf{x}_n - \mathbf{b}_n)$（例如 $\alpha = \tau N$）；
  // 在区间 $[\tau n, \tau(n+1)]$ 上固定平流
  设置平流 $\nabla\Phi_n(x) = x - T_n(x)$;
  // 使用 FiPy 在区间 $[\tau n, \tau(n+1)]$ 上求解偏微分方程
  求解 $\partial_t \varrho^n = \Delta\varrho^n + \operatorname{div}(\varrho^n \nabla\Phi_n)$，其中 $\varrho^n(0) = \varrho_n$，并设置 $\varrho_{n+1} = \varrho^n(\tau)$;
end

在所有实验中，为了更快地观察长时间行为，我们对$\mathbf{x}$ 的动力学做了些许修改；更具体地说，我们将其动力学乘以一个乘法因子

$$\dot{\mathbf{x}}_t = \alpha\,(\mathbf{b}_t - \mathbf{x}_t)\,.$$

由于根据定理 4.5，我们知道到重心的距离将趋于零，因此在动力学中加入乘法常数是合理的，因为当时间足够大时，$|x_i(t) - b_i(t)|$ 至多为 $\operatorname{diam}\Omega_i(t)$ 的量级；从启发式角度看，这一量级为 $N^{-1/d}$，即均匀量化问题中极小元之间的典型距离。因此，这个速度参数可以加快到重心的距离的收敛，从而更快地观察渐近行为。

在讨论实验之前，我们简要强调，以下数值结果属于探索性结果，主要旨在展示（4.2）的长时间行为的定性特征。

一种结晶现象。图 4–5 展示了点数 $N = 50$, 100、200、300、400、500 逐渐增加时所得的近似稳态, 以及速度缩放$\alpha_N = \sqrt{N}$。在线性扩散的情形下（见图 4），原子的稳态构型随着 N 增加而趋向于均匀三角晶格，呈现出明显的动态结晶效应。该图中的色彩图在各子图之间并不统一，以突出弥散密度 ϱ 趋于按照每个拉盖尔单元内最优康托罗维奇势所对应的吉布斯型权重集中的趋势。严格地说，当 N 和 t较大时，平稳构型可由以下形式很好地近似：

$$\varrho_N(t) \propto \sum_{i=1}^N e^{-\left(\frac{1}{2}|x - x_i(t)|^2 - \psi_i(t)\right)} \mathbb{1}_{\Omega_i(t)}. \tag{5.1}$$

随着 N 增大，拉盖尔单元 Ω_i 逐渐缩小，而 ϱ_N 在每个单元内趋于常数，因此式 (5.1) 在视觉上呈现为均匀密度。这一行为与 [8,9] 中针对弥散分量均匀的模型所确立的结晶现象一致。图 6 和图 7 进一步展示了这一趋势：它们在整个时间过程中使用统一的色彩图，表明随着系统趋近平衡，密度逐渐变得平坦。

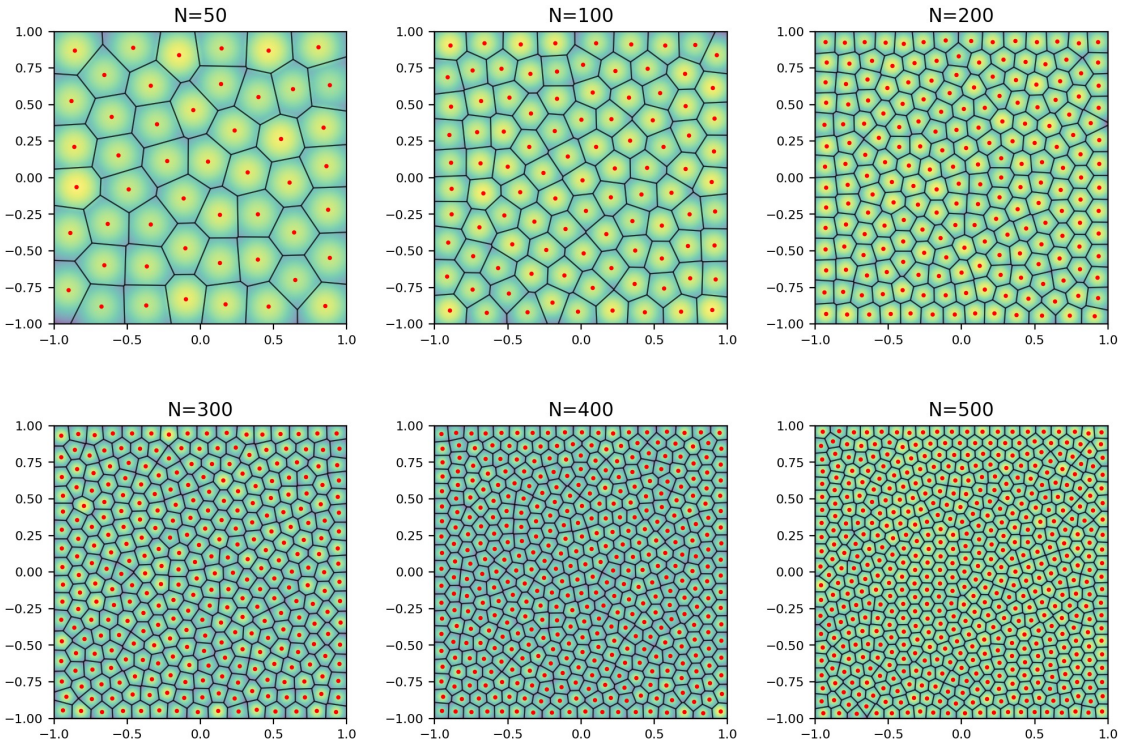

图 4. 线性扩散且速度为 $\alpha = \sqrt{N}$ 的模型中的结晶现象。 $N = 50$、100、200、300、400、500 在经过 200 个时间步并取 $\tau = 0.01$后的长时间构型。密度 ϱ 稳定到近乎均匀的分布，使拉盖尔单元形成静态的三角晶格。

对于含有多孔介质型扩散项的演化，也观察到类似但不太明显的结晶效应，如图 5 所示。这里设定 $P(\varrho) = \varrho^m$ ，其中 $m = 10$，并且仍取 $\alpha = \sqrt{N}$。非线性扩散促使区域在局部集中，从而在密度较高的区域附近形成更清晰的结晶图案。

关于密度长时间行为的讨论。现在我们进一步考察弥散分量 ϱ_t 的长时间行为。正如上一节所示，自然可以猜想，耦合系统的稳态构型应趋近于 Gibbs型分布 (5.1)。然而，当原子数量较少时，这种对应关系并不总是明显。

图 6 展示了线性扩散下仅有三个原子的 (4.2) 的演化过程。尽管这些原子趋向于各自拉盖尔单元的重心，但形成的镶嵌与密度的可见结构并未完全吻合。这表明，当 N 较小时，离散部分与连续部分之间的耦合过于粗糙，导致平衡态无法充分体现形式上的稳态形式 (5.1)。

对于更大的 N，情况会发生显著变化。在图 7 中，我们用$N = 50$ 个原子重复了同一实验。尽管所有时刻都采用固定的色彩图（这在视觉上夸大了密度变平的程度），但最终构型显示出近乎恒定的密度，这与稳态结构 (5.1) 以及图 4 中观察到的晶体状排列一致。这支持了这样一种观点：随着 $N \to \infty$，原子的离散测度变得足够稠密，从而恢复预期的宏观平衡。

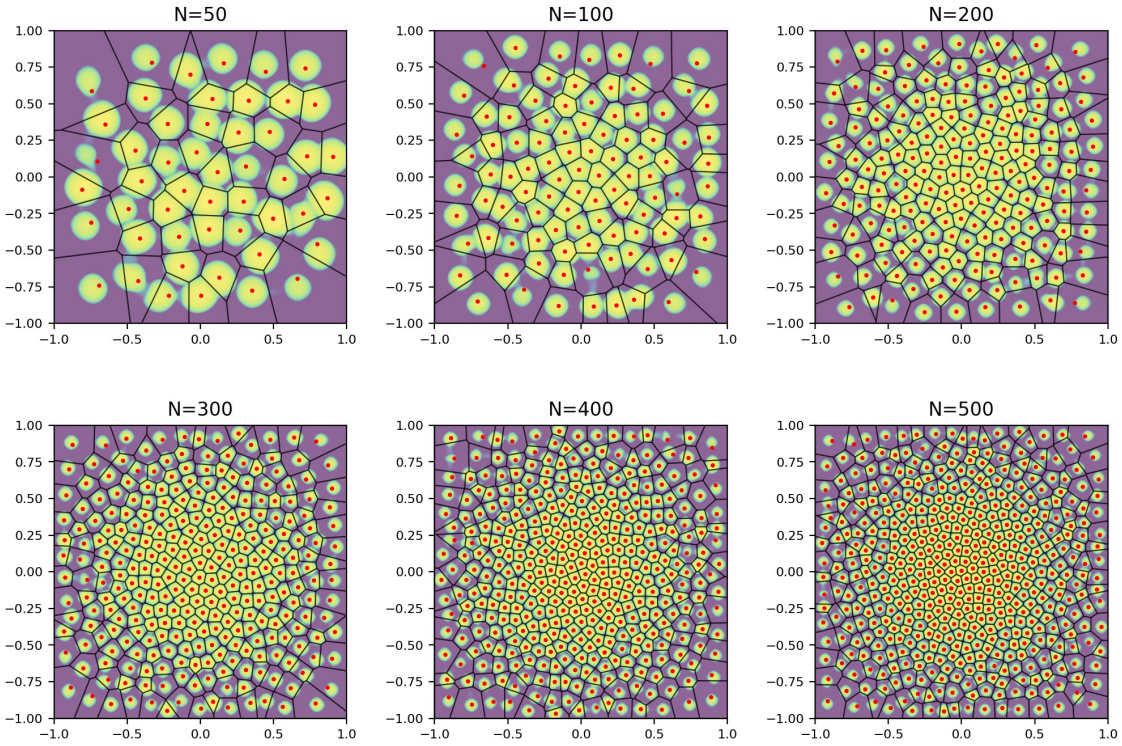

图 5. 采用多孔介质方程型扩散的模型中的结晶现象，即 $\Delta\varrho^m$ 其中 $m = 10$ 且速度为 $\alpha = \sqrt{N}$。图中展示的是经过 200 个时间步后、对应于$N = 50$、100、200、500、800、1000 的稳态构型，且 $\tau = 0.01$。非线性扩散增强了局域化，并在高密度区域形成更尖锐的结晶区域，但即使在较长时间后，仍可观察到微小波动。

图 8 和图 9 展示了模型多孔介质变体中相应的动力学，其中扩散项被替换为 $\Delta P(\varrho)$，其中 $P(\varrho) = \varrho^m$ 和 $m = 10$。在这一演化过程中，我们观察到的第一个特点是，即使初始条件分布得相当均匀（此处为截断高斯分布），早期动力学仍由朝原子测度的吸引作用主导。这使质量迅速集中在点 $\mathbf{x}_t$ 附近，随后则缓慢地扩散驱动弛豫，趋向多孔介质方程通常偏好的剖面。这种分为两个阶段的行为凸显了耦合系统中聚集与扩散之间微妙的平衡。

尽管定理 4.5 的分析并未直接涵盖非线性扩散情形，但数值结果始终表明，每个原子 x_i 都收敛到其拉盖尔单元的重心。这一行为与多孔介质方程已知的正则化效应相符；该效应可产生赫尔德连续密度 [13,14,42]。尽管目前缺乏针对耦合情形的严格结果，但收敛现象持续存在，这强烈表明这种正则性仍在稳定底层的常微分方程动力学。

当速度缩放减小至 $\alpha = 1$ 时，情况便有所不同；这与结晶实验中采用的加速 $\alpha_N = \sqrt{N}$ 不同。在这一较慢的机制下，尤其是当 N 较大时（例如 $N = 500$），密度不再均匀扩散，而是倾向于形成一个较大的单一连通分量，且集中程度更高，如图9所示。这表明非线性扩散与对重心的吸引之间存在相互竞争的效应：前者促成紧支撑剖面，后者推动空间均匀化。

参考文献

[1] L. Ambrosio、N. Fusco 和 D. Pallara。有界变差函数与自由间断问题。牛津数学专著丛书。牛津大学出版社，牛津、纽约，2000年3月。[2] L. Ambrosio、N. Gigli 和 G. Savaré。度量空间及概率测度空间中的梯度流。苏黎世联邦理工学院数学讲义。Birkhäuser Verlag，巴塞尔，2005年。

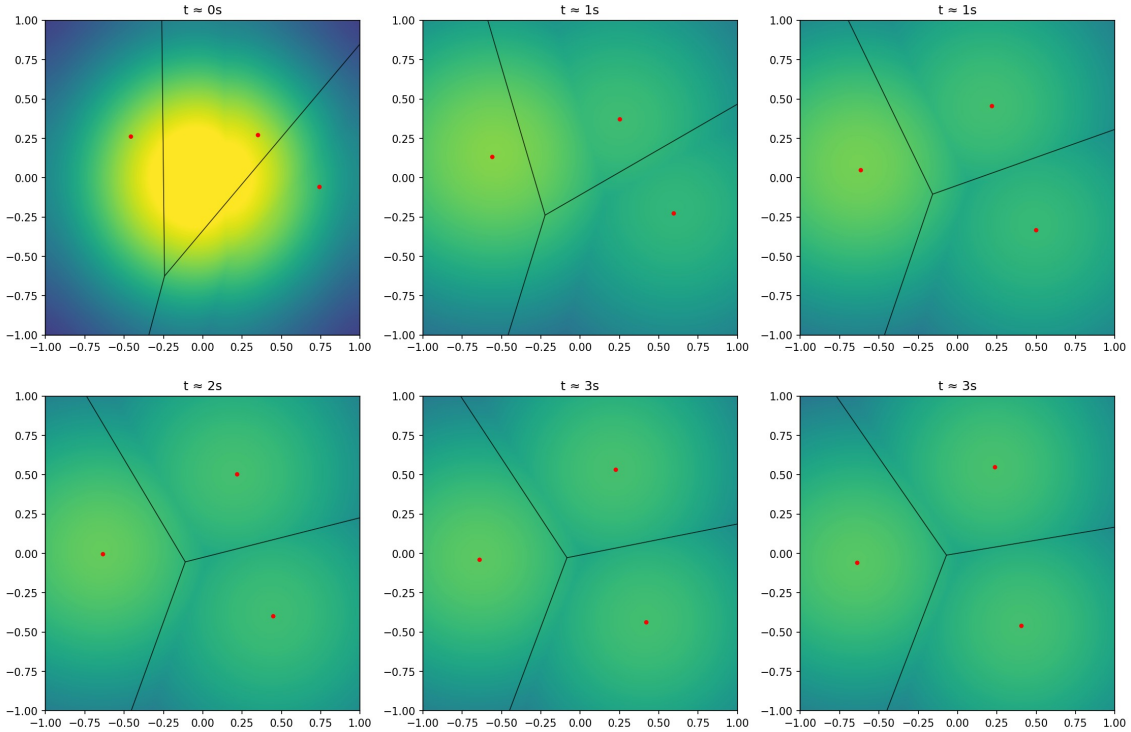

图 6. 含线性扩散和 $N = 3$个原子模型的长时间行为。原子收敛到其重心，但弥散密度 ϱ_t 与对应于 $\Phi_t[\mathbf{x}\ \psi]$的吉布斯型稳态剖面并不一致。

[3] L. Ambrosio、N. Gigli 和 G. Savaré。度量空间及概率测度空间中的梯度流。苏黎世联邦理工学院数学讲义。Birkhäuser Verlag，巴塞尔，第二版，2008年。[4] M. Bertsch 和 D. Hilhorst。种群动力学中的密度依赖扩散方程：趋于平衡。*SIAM* 数学分析杂志，17(4):863–883，1986年。[5] F. Blanchini 和 S. Miani。控制中的集合论方法，第78卷，$SCFA$。Birkhäuser Cham，第2版，2015年。[6] V. I. Bogachev、N. V. Krylov、M. Röckner 和 S. V. Shaposhnikov。福克–普朗克–科尔莫戈罗夫方程，第207卷，数学调查与专著。美国数学会，2015年。[7] G. Bouchitté、C. Jimenez 和 R. Mahadevan。一类最优选址问题的渐近分析。《纯粹与应用数学杂志》，95(4):382–419，2011年。[8] D. P. Bourne 和 R. Cristoferi。三角晶格对一类最优选址问题的渐近最优性。《数学物理通讯》，387(3):1549–1602，2021年。[9] D. P. Bourne、M. A. Peletier 和 F. Theil。具有 Wasserstein 相互作用的粒子系统中三角晶格的最优性。《数学物理通讯》，329(1):117–140，2014年。[10] D. P. Bourne 和 S. M. Roper。质心幂图、Lloyd 算法及其在最优选址问题中的应用。*SIAM* 数值分析杂志，53(6):2545–2569，2015年。[11] A. Bressan 和 B. Piccoli。控制数学理论导论，第1卷。美国数学科学研究所，2007年。[12] G. Buttazzo 和 F. Santambrogio。城市区域最优规划模型。*SIAM* 数学分析杂志，37(2):514–530，2005年。[13] L. A. Caffarelli 和 A. Friedman。多孔介质中气体流动密度的连续性。《美国数学会汇刊》，252:99–113，1979年。[14] L. A. Caffarelli 和 A. Friedman。n维多孔介质中气体流动自由边界的正则性。《印第安纳大学数学杂志》，29(3):361–391，1980年。[15] C. Cances、T. O. Gallouët 和 G. Todeschi。一种用于Wasserstein梯度流的变分有限体积格式。《数值数学》，146(3):437–480，2020年。[16] G. Carlier 和 M. Laborde。一种用于具有非局部非势漂移的非线性扩散的分裂方法。《非线性分析：理论、方法与应用》，150:1–18，2017年。[17] G. Carlier 和 C. Poon。关于全变差 Wasserstein 梯度流与 TV-JKO 格式。《*ESAIM*：控制、优化与变分法》，25:42，2019年。[18] L. Chizat、M. Colombo 和 X. Fernández-Real。由凸函数的Wasserstein梯度流导出的漂移扩散偏微分方程的收敛性。*arXiv*预印本 *arXiv:2507.12385*，2025年。

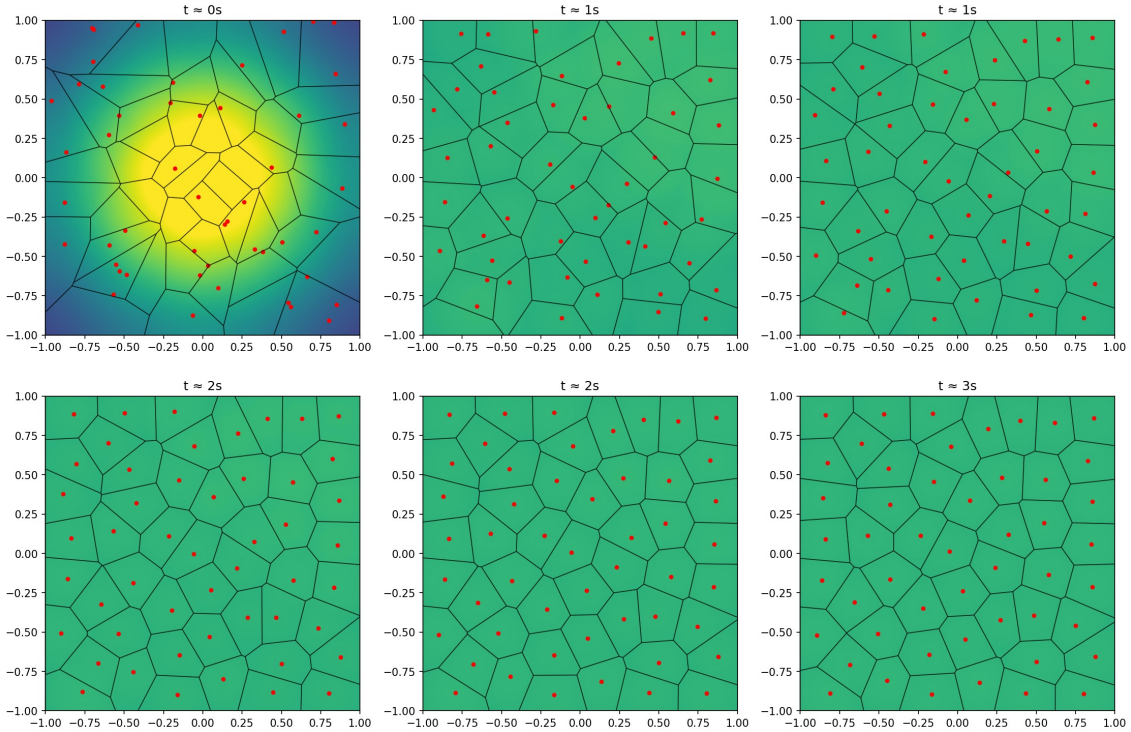

图 7. 线性扩散且含有 $N = 50$个原子时模型的长时间行为。弥散分量 ϱ_t 趋于均匀，与（5.1）中描述的渐近构型一致。所有时刻均使用相同的色标，使密度看起来几乎恒定的效果更加明显。

[19] F. De Gournay、J. Kahn 和 L. Lebrat。半离散最优传输关于离散测度参数的微分与正则性。《数值数学》，141：429–453，2019年。[20] G. De Philippis、A. R. Mészáros、F. Santambrogio 和 B. Velichkov。最优传输中的有界变差估计及其应用。《理性力学与分析档案》，219：829–860，2016年。[21] M. Di Francesco 和 D. Matthes。最速下降曲线是某类退化对流扩散方程的熵解。《变分法与偏微分方程》，50：199–230，2014年。[22] S. Di Marino 和 F. Santambrogio。线性与非线性 Fokker–Planck 方程及凯勒–西格尔模型中的 JKO 估计：L^p 与索博列夫界。《庞加莱研究所分析非线性年刊》，39(6)：1485–1517，2022年。[23] M. Fernandes 和 F. Zanolin。关于强流不变集的若干评述。《数学分析与应用杂志》，128：176–188，1987年。[24] I. Fonseca 和 G. Leoni。变分法的现代方法：L^p 空间。施普林格科学与商业媒体，2007年。[25] J. E. Guyer、D. Wheeler 和 J. A. Warren。FiPy：使用 Python 求解偏微分方程。《科学与工程计算》，11(3)：6–15，2009年。[26] J.-B. Hiriart-Urruty 和 C. Lemaréchal。凸分析与极小化算法 *I*：基础，第 305 卷。施普林格科学与商业媒体，1996年。[27] R. Jordan、D. Kinderlehrer 和 F. Otto。Fokker–Planck 方程的变分表述。*SIAM* 数学分析杂志，29(1)：1–17，1998年。[28] J. Kitagawa、Q. Mérigot 和 B. Thibert。半离散最优传输牛顿算法的收敛性。《欧洲数学会杂志》，21(9)：2603–2651，2019年。[29] H. Leclerc。pysdot：半离散最优传输库（Python），2025年。[30] H. Leclerc、Q. Mérigot、F. Santambrogio 和 F. Stra。人群运动与线性扩散的拉格朗日离散化。*SIAM* 数值分析杂志，58(4)：2093–2118，2020年。[31] B. Maury、A. Roudneff-Chupin 和 F. Santambrogio。一种梯度流型宏观人群运动模型。《应用科学中的数学模型与方法》，20(10)：1787–1821，2010年。[32] R. J. McCann。相互作用气体的凸性原理。《数学进展》，128(1)：153–179，1997年。[33] Q. Mérigot 和 J.-M. Mirebeau。通过半离散最优传输，沿保体积映射构造最短测地线。*SIAM* 数值分析杂志，54(6)：3465–3492，2016年。[34] Q. Mérigot、F. Santambrogio 和 C. Sarrazin。利用点云进行 Wasserstein 近似的非渐近收敛界。《神经信息处理系统进展》，34：12810–12821，2021年。[35] Q. Merigot 和 B. Thibert。最优传输：离散化与算法。载于《数值分析手册》，第 22 卷，第 133–212 页。Elsevier，2021年。

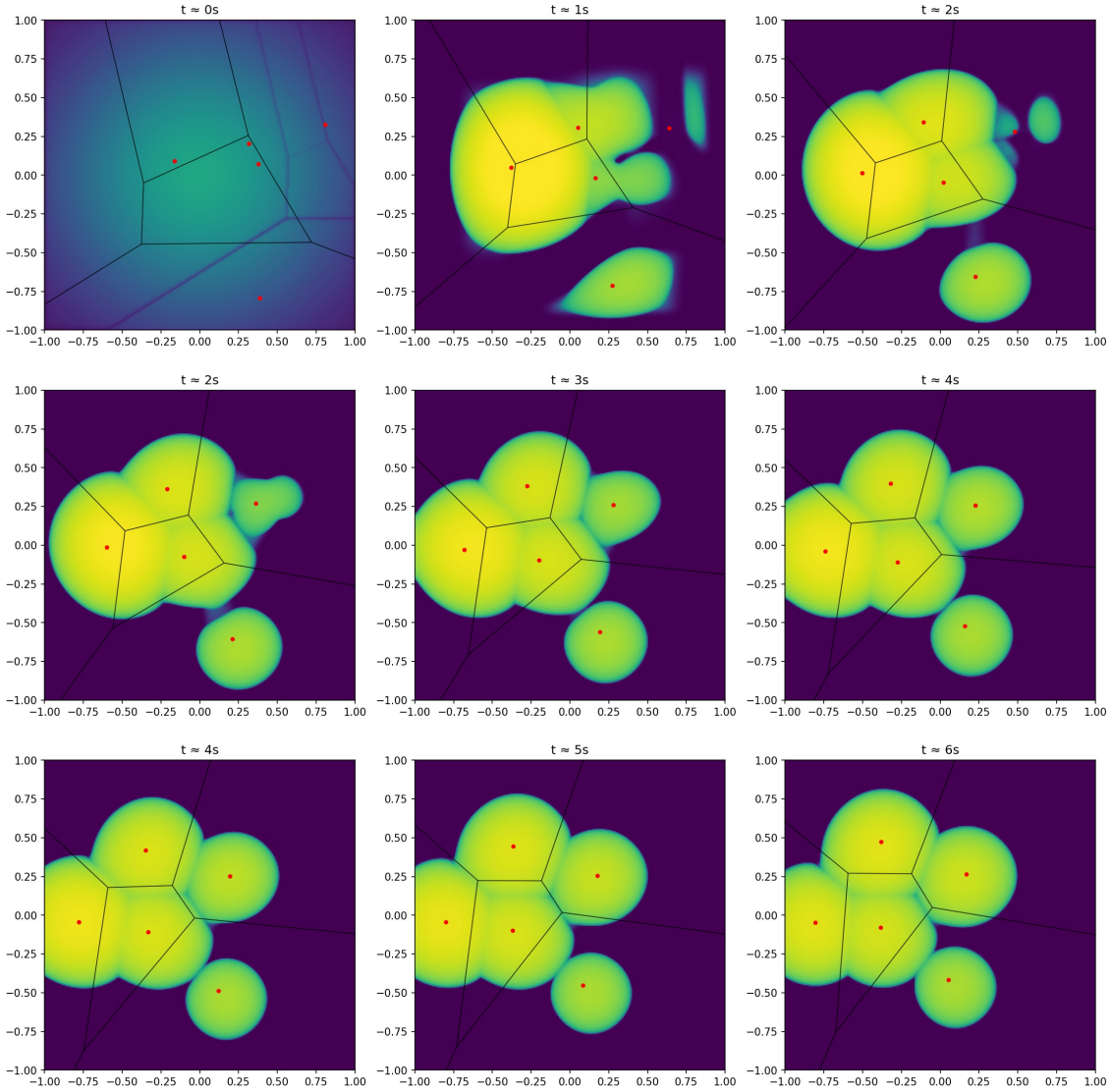

图 8. 具有 $P(\varrho) = \varrho^{10}$、$N = 5$ 个原子和 $\alpha = 1$的非线性扩散模型的长时间行为。原子向重心收敛的现象依然存在，尽管平衡密度仍然是空间非均匀的。

[36] M. Nagumo。《关于常微分方程积分曲线的位置》。日本物理数学学会会刊，24：551–559，1942年。[37] F. Otto。《耗散演化方程的几何：多孔介质方程》。《偏微分方程通讯》，26(1-2)：101–174，2001年。[38] L. Portales、E. Cazelles 和 E. Pauwels。《关于 Lloyd 算法的序列收敛》。《运筹学数学》，2025年。[39] R. Rossi 和 G. Savaré。《巴拿赫空间中演化问题的紧性、积分等度连续性与紧性》。《比萨高等师范学校年刊—科学辑》，2(2)：395–431，2003年。[40] F. Santambrogio。《应用数学家的最优传输》。*Birkäuser*，纽约，55(58-63)：94，2015年。[41] F. Santambrogio 和 G. Toshpulatov。Fokker–Planck方程的 JKO格式强 L^2H^2 收敛。《理性力学与分析档案》，248(6)：99，2024年。[42] J. L. Vázquez。《多孔介质方程：数学理论》。牛津大学出版社，2007年。[43] C. Villani 等。《最优传输：旧与新》，第 338 卷。Springer，2009年。

拉格朗日数学与计算中心，103 rue de Grenelle，巴黎，75007，法国电子邮件地址：joao-miguel.machado@ceremade.dauphine.fr

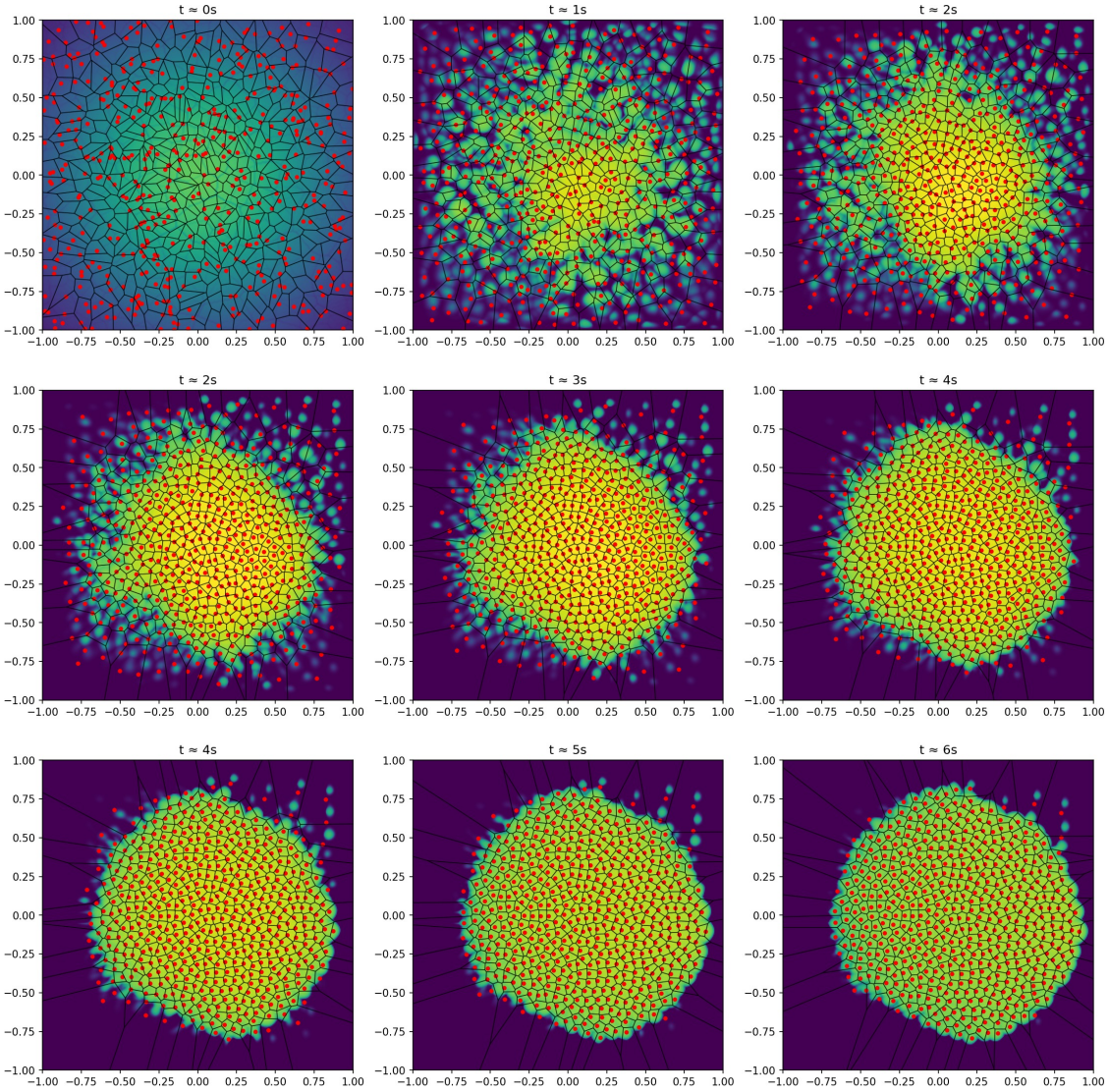

图9. 对于具有 $P(\varrho) = \varrho^{10}$,$N = 500$ 原子和 $\alpha = 1$ 的非线性扩散模型的长时间行为。较慢的动力学导致形成一个大型、连通的浓度区域，这与较快标度下观察到的均匀结晶模式形成对比。