降低基于测量反馈的伊辛机的超参数敏感性

Toon Sevenants*[1]、Guy Van der Sande[1]和Guy Verschaffelt[1]

[1]应用物理研究组，布鲁塞尔自由大学，布鲁塞尔，比利时

arXiv:2603.04093v1 [cs.LG] 4 Mar 2026

摘要

模拟伊辛机已被提出作为组合优化问题的启发式硬件求解器，只要其超参数经过仔细调谐，就有可能优于传统方法。其时间演化通常用时间连续动力学来描述。然而，大多数实验实现依赖于以时间离散方式运行的测量反馈架构。我们观察到，在此类装置中，有效超参数的范围远小于所设想的时间连续模拟伊辛机。在本文中，我们分析了这一差异，并讨论其对伊辛机实际运行的影响。接下来，我们提出并实验验证了一种方法，以降低这些测量反馈架构对超参数选择的敏感性。

I. 引言

THERE 社会中存在广泛的组合优化问题（COP） [1]–[5]。其中许多问题被归类为NP难，这意味着人们认为不存在能够利用多项式资源高效解决这类问题的算法 [6]。其根本原因在于，这些问题需要从一个随问题规模迅速增长（例如呈指数增长）的可能性集合中，寻找由代价函数定义的最优离散构型。传统数字计算机在尝试解决COP时，面临着时间和能耗方面的重大挑战 [7]，[8]。因此，人们开始探索替代计算范式，尤其是受物理启发的计算设备。这类设备通常具有随机性，以牺牲准确性换取速度和能效 [9]。

伊辛机（IM）是这类颇具前景的设备之一，它有望利用能量最小化的物理原理，高效解决COP。该系统有潜力在速度和能效方面超越传统数字方法，因此适合用于解决大规模复杂优化问题 [10]。

任何伊辛机（IM）的工作原理都基于这样一种可能性：将与组合优化问题（COP）相关的代价函数映射为伊辛哈密顿量，其形式如下：

$$H_{ising} = -\frac{1}{2}\sum_{ij} J_{ij}\sigma_i\sigma_j - \sum_i b_i\sigma_i \tag{1}$$

其中 $\sigma_i \in \{-1, 1\}$ 是二元变量，通常称为自旋， J_{ij} 是互连矩阵，用于指定哪些自旋相互耦合以及相互作用权重是多少，而值 b_i 表示外场，在本文中被设为零。专用的伊辛机硬件实现旨在模拟该自旋网络，并返回伊辛模型的最低能量构型；由于映射关系，该构型对应于原始优化问题的解。

目前已有若干伊辛机的硬件实现，涵盖电学领域和光学领域 [4], [10]–[13], [15]–[18]。其中一些在其硬件中直接实现二元自旋 $\{\sigma_i\}$，而其他实现则改用模拟自旋$\{x_i\}$ 。在后一种系统中，我们称之为模拟伊辛机，仍可通过将模拟自旋值映射为二元值来计算伊辛能量，最常用的是符号函数： $sign(x_i) = \sigma_i$。这一选择的一个优势在于，许多硬件本身就是模拟的，同时也允许使用梯度下降或动量等模拟优化方法，而这些方法在二元域中并不可行。此外，模拟硬件组件带有固有噪声，这对伊辛机的正常工作至关重要 [12]。

基于这些原因，模拟伊辛机具有很大的发展前景，这也是我们将在本文中重点研究它们的原因。需要注意的是，使用模拟自旋可能会导致自旋振幅出现不均一性，从而降低模拟伊辛机的性能。然而，近期的研究已经着眼于克服这一问题 [20]，[21]。

在模拟中，模拟伊辛机通常被建模为完全模拟系统，这意味着其动态会随时间连续演化 [22], [23]。然而，目前许多模拟伊辛机的实现依赖于结合模拟组件和数字组件的混合架构，其中数字组件几乎总是用于实现由互连矩阵规定的自旋耦合 [4], [15]。尽管这些实现仍使用模拟自旋变量，但其动态并非随时间连续运行，而是在特定的时钟采样点运行，即进行离散迭代。

本文的出发点是我们在实验中观察到：通过时间连续

*通信及请求请寄至T.S.（电子邮件：toon.jan.b.sevenants@vub.be）或G.V.（电子邮件：guy.verschaffelt@vub.be）

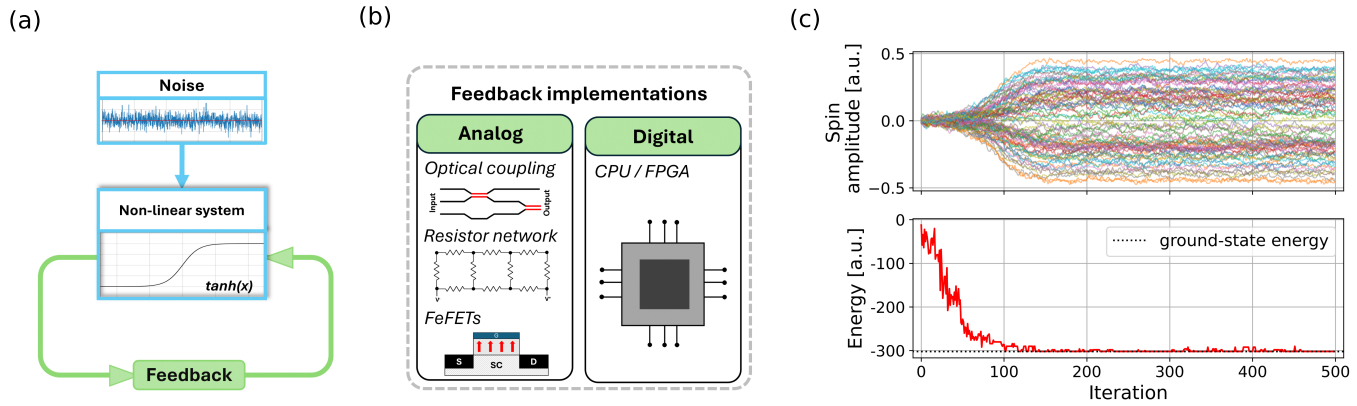


图1：**模拟伊辛机的基本工作原理。(a)** 模拟伊辛机运行过程的示意图。模拟噪声有助于系统逃离局部极小值，反馈信号则驱动系统趋向更低的能级，二者对所有模拟伊辛机的实现都至关重要。反馈信号可以通过多种方式实现，其中一些如**(b)**所示。**(c)**展示了时间离散模拟IM求解 $g05\ \ 80.1$ 最大割问题的一个仿真结果示例。上图显示模拟得到的自旋振幅，下图显示相应的能量演化。

模拟伊辛机模拟得到的超参数，无法在我们的光电混合模拟IM硬件装置 [4] 上得出解。为了深入了解这一现象，我们研究了时间离散与时间连续模拟伊辛机之间潜在的动力学差异。分析表明，在模拟伊辛机能够成功收敛至最优解的两种参数范围之间，存在一种不可忽视的重缩放效应。我们首先对这些发现进行定性讨论，随后提出一种应对上述超参数范围缩减的方法，并通过实验对其进行验证。

II. 方法

A. 时间离散与时间连续模拟伊辛机

模拟伊辛机可以通过让其自旋变量随时间动态演化来求解组合优化问题，从而使由式1给出的能量向基态降低。模拟伊辛机工作原理的总体示意图如图1(a)所示。这一结构对时间连续和时间离散模拟伊辛机均适用，二者都需要非线性、用于逃离局部极小值的高斯噪声，以及用于更新模拟自旋变量 $\{x_i\}$取值的反馈信号。该反馈信号由两项贡献组成，并由下式给出

$$f(t) = \alpha x_i(t) + \beta \sum_j J_{ij} x_j(t) \tag{2}$$

其中 α 表示增益，β 表示自旋之间的耦合强度。第一项表示增益，并强化自旋的当前状态；第二项对应于自旋间相互耦合，并根据与之耦合的自旋状态驱动每个自旋。如图1(b)所示，我们区分模拟实现的反馈信号和数字实现的反馈信号。尽管两个系统采用相同的反馈信号，但反馈回路的实现方式存在细微差别。本节将更详细地解释这两种情况。

在全模拟伊辛机中，耦合和反馈信号都直接通过模拟硬件本身实现，例如通过电阻网络 [24]，光学干涉 [25],或通过CMOS兼容铁电场效应晶体管 [26]。因此，系统无需任何数字组件，便会根据其内部动力学持续演化，趋向于能量较低的状态。因此，我们将该系统称为时间连续模拟伊辛机。模拟自旋变量 $x_i(t)$ 的动力学随后可由一阶微分方程描述。可以使用多种不同的非线性来模拟具体的硬件实现。在本文中，我们采用双曲正切函数。选择这种非线性，是因为它能够刻画硬件实现中由于物理组件的有限动态范围和饱和而产生的削波效应 [22]。因此，自旋-i的动力学方程可表示为

$$\frac{dx_i}{dt'} = \frac{1}{\tau_\ell}\Big(-x_i(t') + \tanh\big(f(t'-\tau_d) + \gamma\zeta_i(t')\big)\Big) \tag{3}$$

其中 τ_d 表示反馈延迟，$f(t'-\tau_d)$ 为反馈项，ζ_i 为随机噪声项，用于刻画模拟硬件固有的噪声，γ 为其振幅。时间 t' 与模拟硬件的弛豫时间 τ_ℓ采用相同单位，而该弛豫时间由模拟系统的有效带宽决定。线性项 $-x_i$表示硬件装置中发生的耗散，并确保系统弛豫至稳态。在考虑时间连续模拟时，我们考虑到 τ_d 通常远小于 τ_ℓ，因此常从方程中省略。由于 τ_ℓ 由给定装置中所用的具体模拟元件决定，更有用的做法是引入无量纲时间变量 $t = \frac{t'}{\tau_\ell}$ 对方程进行重整化，从而得到

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i = -x_i(t) + \tanh\big(f(t) + \gamma\zeta_i(t)\big). \tag{4}$$

其中时间变量 t 是无量纲的。我们将 F_i 称为自旋变量 i的传递函数。

另一方面，在混合测量反馈装置中，反馈回路不再仅由模拟元件组成。相反，耦合与反馈信号以数字方式处理，例如在现场可编程门阵列上处理，这要求在数字域中进行计算之前对自旋态进行显式测量。模拟域和数字域之间的转换以及数字处理本身都会增大反馈延迟 τ_d，使其通常大于模拟子系统的弛豫时间 τ_ℓ。因此，我们不能再从动力学方程中省略 τ_d。这种较大延迟时间的一个主要后果是，在数字处理后的信号被反馈之前，模拟动力学已趋于稳态。在此情形下，自旋态因此是迭代更新的，而不是随时间连续演化，我们将此类系统称为时间离散模拟伊辛机。由于我们在自旋振幅达到稳态后的离散时刻对其进行测量，我们将时间改写为

$$t \;=\; k \cdot \frac{\tau_d}{\tau_\ell}, \tag{5}$$

这里我们再次使用时间重归一化，$k(\in \mathbb{N})$表示迭代次数。τ_d/τ_ℓ比值是一个无量纲常数因子，使时间离散模拟IM的动力学能够用无量纲迭代次数 k表示。根据此定义，式（3）可化简为以下离散时间映射：

$$x_i[k] \;=\; \tanh\big(f[k-1] + \gamma\,\zeta_i[k]\big), \tag{6}$$

反馈项 $f[k-1]$ 在数字系统（例如中央处理器或现场可编程门阵列）中，利用前一次迭代测得的自旋振幅，在离散时间步长处计算。请注意，我们在式（6）中省略了 τ_d/τ_ℓ 比值，因为它只会重缩放时间，不会影响动力学。

B. 模拟伊辛机的建模与基准测试

要在传统数字计算机上模拟模拟伊辛机，我们使用无量纲的式（4）和式（6）。式（6）可以直接模拟，因为它明确给出了根据前一次迭代的自旋振幅进行自旋更新的方法。相比之下，式（4）采用欧拉法实现。由此得到的自旋动力学更新规则为

$$x_i[k] = x_i[k-1] + h \cdot F_i[k-1] \tag{7}$$

其中 h 表示（欧拉）时间步长，必须选择得足够小，才能捕捉自旋动力学的时间尺度。在我们对时间连续模拟伊辛机的模拟中，取 $h = 0.01$。值得注意的是，若要模拟时间离散模拟IM，也可以改为选择 $h = 1$，此时公式（7）将简化为公式（6）。由于选择

h实际上是这两个系统模拟之间唯一的区别，因此本文始终用它来明确区分时间连续和时间离散模拟伊辛机。图1(c)展示了一个时间离散模拟伊辛机的自旋和能量演化模拟示例。求解的问题是 g05_80.1，这是可免费访问的 BiqMac 库中的一个基准问题。该库包含最大割基准问题（见补充说明 1），这些问题常被用作模拟伊辛机的基准，因为它们已被证明

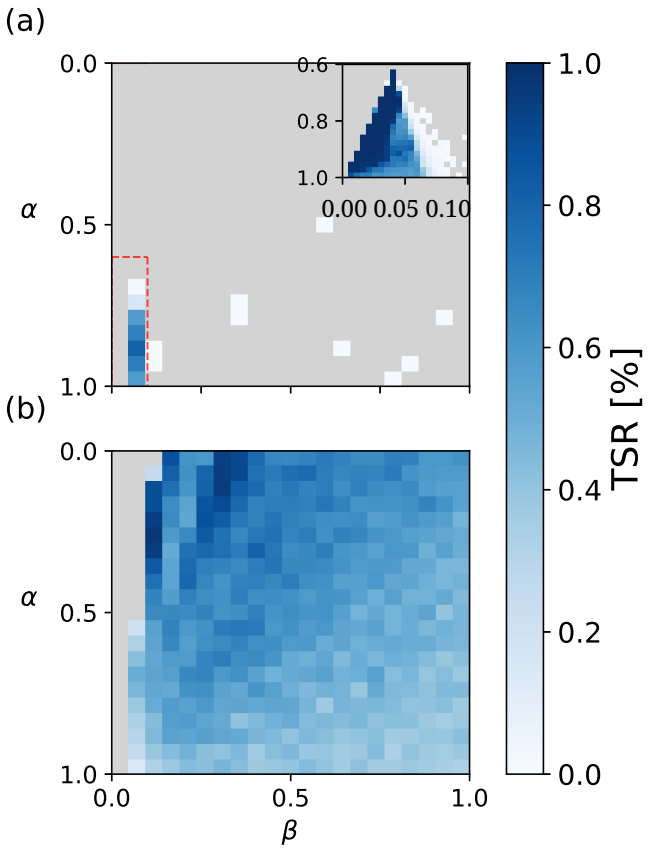


图 2：**时间离散和时间连续模拟伊辛机暴力参数网格扫描的比较，针对g05_80.1基准测试问题**。两幅图的横轴和纵轴分别为耦合强度 β 和增益 α，并以颜色表示瞬态成功率（TSR）。对于**(a)**中所示的时间离散系统，产生非零TSR的参数范围显著小于**(b)**中所示的时间连续系统。**(a)** 中的插图展示了红色虚线框所示区域的高分辨率放大图。

为 NP 难问题 [2], [6]。图1(c)显示，自旋振幅$\{x_i\}$ 最初在零附近初始化，但由于反馈信号的作用，这些振幅逐渐增大并分岔为正值或负值，分别对应自旋向上或自旋向下状态。

III. 结果与讨论

A. 超参数范围的缩小

像伊辛机（IM）这样的启发式求解器有一个典型特征：单次运行不一定总能找到当前问题的最优解。在本研究中，我们使用成功运行的百分比来量化求解器的性能。具体而言，我们采用瞬态成功率（TSR），其定义为模拟伊辛机在单次运行期间找到解的概率。启发式求解器的另一个特点是需要一组经过优化的超参数，才能高效运行。模拟伊辛机也有这一特点，并且有两个主要超参数

表 I：**来自*biqmac* 库**的 g05- 基准集的 AOO（以 % 表示）。对于每个问题，均给出了时间离散（h=1）和时间连续（h=0.01）模拟的 AOO。所用扫描的参数边界为 $\alpha \in [0.5; 1.0]$和 $\beta \in [0.0; 0.5]$,，分辨率为 21×21。最后一行显示了每种问题规模下，时间连续模拟伊辛机的 AOO 与时间离散模拟伊辛机的 AOO 的平均比值。

问题索引 (n)	g05 60.n		g05 80.n		g05 100.n	
	h=1	h=0.01	h=1	h=0.01	h=1	h=0.01
0	13.4	90.2	4.8	86.2	2.5	84.8
1	10.7	90.7	9.3	92.5	3.6	87.3
2	9.3	89.6	3.2	79.6	2.7	85.9
3	4.8	71.4	3.6	85.3	2.0	79.1
4	10.0	88.9	5.0	86.8	1.1	79.6
5	9.5	88.7	2.3	77.6	2.0	78.5
6	3.2	62.8	3.4	84.1	2.9	87.3
7	11.8	87.3	2.5	78.9	2.3	83.7
8	6.6	81.2	2.5	73.0	1.1	70.7
9	9.1	87.3	4.3	85.7	2.9	85.3
平均比率	10.7		23.3		40.1	

控制其动力学的参数：增益 α 和互耦合强度 β。为了确定能够使模拟伊辛机找到给定问题解的（α，β）组合，我们执行了暴力参数扫描。图 2 展示了此类扫描的一个示例。在这种方法中，系统会在预定义的超参数组合集合上进行评估，并将特定的性能指标（此处为 TSR）映射到蓝色色阶上。TSR 最高的超参数组合随后被视为最优超参数设置。在本文中，除非另有明确说明，否则 TSR 始终使用 250 次运行计算，每次运行包含 5000 次迭代。

图 2 展示了 biqmac g05_80.1 基准测试问题的参数扫描结果，涵盖时间离散模拟 IM 和时间连续模拟伊辛机。尽管两次扫描使用了相同的参数边界（ $[0, 1]$ 适用于 α 和 β），但可以观察到二者之间存在明显差异。图 2(a) 所示的时间离散模拟 IM 的参数扫描显示，其非零TSR区域明显小于图 2(b) 所示的时间连续模拟伊辛机。图 2(a) 中的插图对红色虚线框所示区域进行了放大。比较图 2(a) 和 (b) 可以清楚看出，对于离散时间系统而言，与时间连续情形相比，良好超参数的范围已经缩小。

为量化这一缩减，我们将运行区域（AOO）定义为参数扫描中产生非零TSR的超参数组合所占的百分比。该指标可在使用相同问题、参数边界和扫描分辨率的前提下，对不同参数扫描之间有用超参数组合的范围进行直接比较。所有g05基准问题在时间离散与时间连续系统下的AOO值均列于表I。在本分析中，参数边界选取为 $\alpha \in [0.5; 1.0]$ 和 $\beta \in [0.0; 0.5]$，扫描分辨率为 21×21。表I中含结果的三列分别对应具有60、80和100个自旋的问题。

从表I中，我们观察到，对于所有考虑的基准问题，时间离散情形与时间连续情形之间有用超参数组合的范围存在一个数量级的差异。离散时间系统的AOO至少比时间连续系统低十倍，而对于更大的问题，平均甚至低四十倍。

为了定性理解这种收缩为何发生，我们回顾时间离散模拟伊辛机与时间连续模拟伊辛机之间的差异。由第II-B节可见，两个系统之间的唯一差异在于所使用的时间步长h。将式7显式写出可得

$$x_i[k] = (1 - h) \cdot x_i[k - 1] + h \cdot \tanh(f[k - 1]) \tag{8}$$

由该表达式可见，减小 h 会增大线性项的贡献，同时降低双曲正切函数的影响。因此，在减小 h时，超参数 α 和 β 的有效影响会大幅减弱，因为它们决定了双曲正切函数内部的反馈信号 f。因此，下一个自旋态主要由前一个自旋态决定。从物理角度看，这对应于一个既以小增量更新其自旋态、又快速调整其反馈的系统。这使得系统能够更平滑地更新其自旋，并通过避免大幅过冲更有效地在复杂能量景观中导航。

相比之下，在时间步长为 $h = 1$的时间离散情形中，下一状态完全由式6的非线性映射决定。因此，一次迭代后自旋振幅的变化变得更大，这意味着与时间连续模拟伊辛机相比，该系统在各次迭代之间执行更大的更新。单纯降低增益或耦合强度并不有效，因为反馈信号必须保持足够强以诱发分岔。因此，该信号既不应过小也不应过大，以确保发生分岔，同时仍使自旋能够恰当地在能量景观中导航。这导致超参数之间需要显著更精细的平衡，并最终使AOO窄得多，正如在时间离散模拟IM中所观察到的那样。从物理上讲，这对应于一个强烈且在时间上相对缓慢地更新其自旋态的系统。

接下来，我们强调，超参数范围的这种收缩并非仅仅是平凡的重标度。如果时间步长的影响可以用一个简单的乘法因子来刻画，从而调整 α 和 β，那么时间离散表述与连续时间表述的参数范围将直接相关。为了证明情况并非如此，我们更详细地考察时间步长 h 如何与超参数相互作用。具体而言，我们在弱耦合区间 $\alpha \gg \beta$中将式8展开为直至三阶的泰勒级数。这一展开使我们能够分离时间步长对各个超参数 [22]的影响。对于 $h \neq 1$，式8于是变为：

$$\begin{aligned} x_i[k] = \Big(1 - h + h\alpha\Big) x_i[k - 1] - h\frac{\alpha^3 x_i^3[k - 1]}{3} \\ + h\beta \sum_j J_{ij} x_j[k - 1] \end{aligned} \tag{9}$$

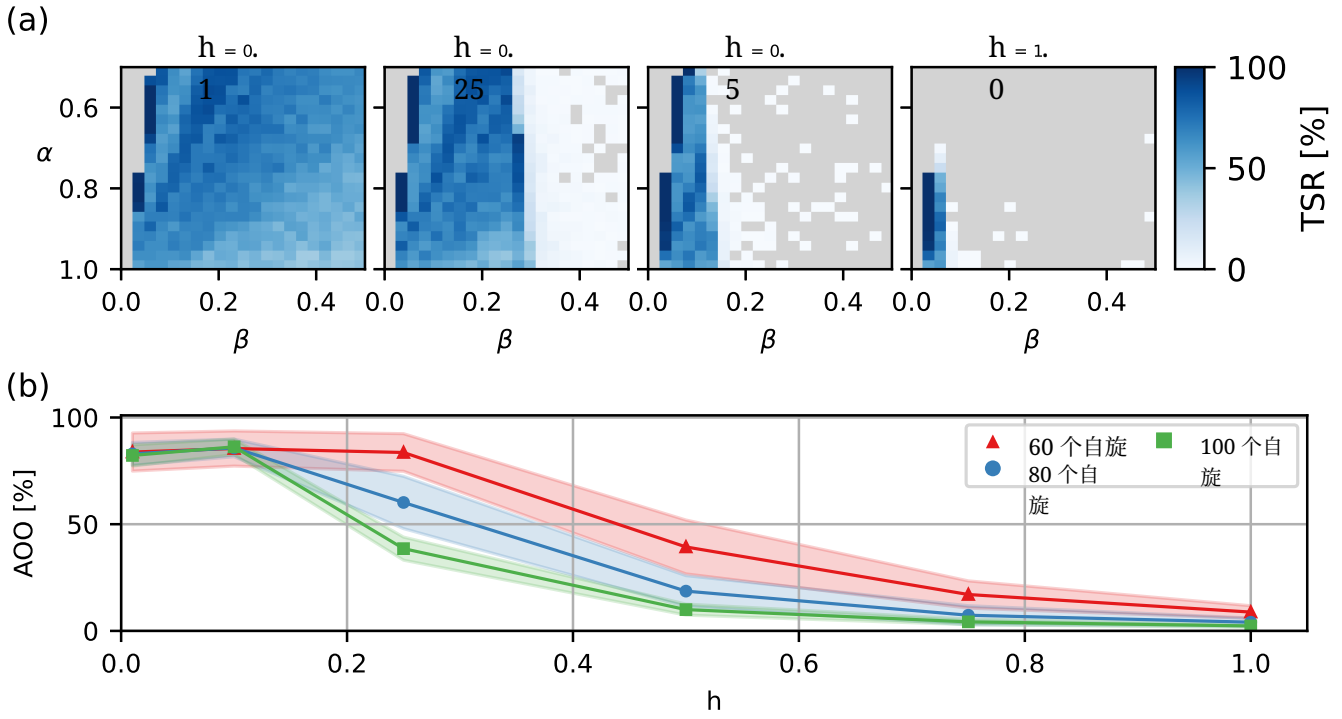


图3：**h 值对参数空间的影响**。**a** 针对 g05 80.1问题，在四种不同 h 值下进行的暴力参数网格扫描。网格扫描的 x 轴和 y 轴分别表示耦合强度 β 和增益 α。色条表示瞬态成功率（TSR），其中 TSR 为零时以灰色表示。**b** 运行区域（AOO）定义为导致瞬态成功率（TSR）非零的 (α,β) 组合所占的百分比；图中展示了该比例随 h 值及不同问题规模的变化。每种问题规模均由单独的符号和颜色表示。着色区域表示特定问题规模下的不同问题实例。

而对于 h=1，该方程变为

$$x_i[k] = \alpha x_i[k-1] - \frac{\alpha^3 x_i^3[k-1]}{3} + \beta \sum_j J_{ij} x_j[k-1] \tag{10}$$

为便于说明，我们在两个方程中都忽略了噪声项。

泰勒展开使我们能够发现，时间连续模拟伊辛机与时间离散模拟伊辛机的动力学之间存在非平凡差异。从 h=1 到 a$h \neq 1$时，我们有：

$$\begin{cases} \alpha^3 \to h\alpha^3 \\ \beta \to h\beta \\ \alpha \to (1 - h + h\alpha) \end{cases} \tag{11}$$

从该表达式中，我们观察到，前两项与 h 成正比，而最后一项则随 h 呈现不同的变化。这表明，不存在一个简单的缩放因子，能够将时间连续模拟伊辛机的最优超参数转换为时间离散模拟IM的最优超参数。

B. 增大超参数范围

根据上一节对公式9的讨论，我们预计，从较小到较大的 h 值的转变并不

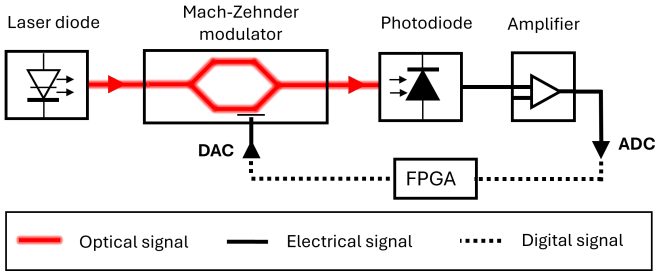


图4：**时分复用光电CIM的示意图**。在这一混合架构中，输入信号经过光学调制，随后转换为模拟电压，最后在现场可编程门阵列上进行采样、数字化并存储。计算得到的反馈信号被转换回电压，并发送至马赫-曾德尔调制器的调制输入端。

其特征并非是明显的截止点或阈值，而是 AOO 的逐渐变化。对于 $h < 1$，更新规则仍是前一自旋态与施加的反馈的加权组合，因此改变 h 会连续地改变这些项的相对贡献。因此，改变h 应导致系统动力学逐渐变化，而非突然转变。因此，我们提出通过调整 h的值来缓解

时间离散模拟伊辛机中 AOO 的缩小，并证明这种方法不仅在数值模拟中有效，在硬件上也同样有效。请注意，我们探索了几种影响 AOO 的替代方法，包括延长运行时间、改变噪声强度以及自旋符号方法 [3]。然而，这些方法都未能对 AOO 产生可测量或稳定的影响（见补充说明 2）。在模拟中，我们计算了h 在 $h = 1$和 $h = 0.01$这两个极端情况之间取不同值时的 AOO。尽管从非符合性角度看，任意选择 h 的值并不对应于特定的物理时间连续硬件实现，但在算法上是允许的。此外，在测量反馈回路中以数字方式计算反馈信号时，只需将 $h \neq 1$ 纳入时间离散系统即可。图3(a)展示了 g05_80.1 基准测试问题在 h取四种不同值时的参数扫描。随着 h从 0.01 增至 1.0，我们观察到能够产生非零TSR的超参数范围有所缩小。

为量化这种缩减，我们再次使用 AOO，并在图3(b)中绘出了所有 g05基准问题对应的数值，其中总共采用了六个不同的 h 值，范围介于0.01和1.0之间。数据点表示每种问题规模下的平均 AOO，基于每种问题规模的10个基准测试计算得出；数据点周围的阴影区域表示该分布的标准差。为确保公平比较，我们仍针对每种(α, β)组合以及 h的每个取值计算 TSR，每次运行进行5000次迭代，总计运行250次。

对于所有考察的问题，随着 h 趋近于1，AOO显著下降，可行的超参数范围也随之缩小。因此，与时间连续模拟伊辛机相比，时间离散模拟伊辛机对超参数选择的敏感性大幅提高。此外，数据表明这种效应与规模有关，也就是说，对于规模更大的问题实例，这种敏感性会更加显著。与此同时，图中显示 AOO 的变化并非突兀。逐渐减小 h 的值，会以平滑、连续的方式逐步提高 AOO。从图3(b)可以看出，所有基准问题均呈现出这一规律，这凸显了通过调节 h 来改变时间离散模拟伊辛机中超参数敏感性的潜力。

注意

AOO 值似乎会在最小的 h值处达到饱和。我们将这种饱和归因于固定的参数边界，这意味着尽管真实的参数空间可能会继续超出这些限制而扩展，但在施加的边界内无法捕捉这种增长。然而，减小 h也会降低式 7 欧拉积分的误差。当 h足够小时，系统动力学会非常接近时间连续模拟伊辛机的动力学，因此进一步减小 h不会导致有用超参数范围发生变化。

C. 实验验证

为进一步支持我们的论点，我们在硬件装置上验证了仿真结果。为此，我们采用了光电“简易版相干伊辛机”，

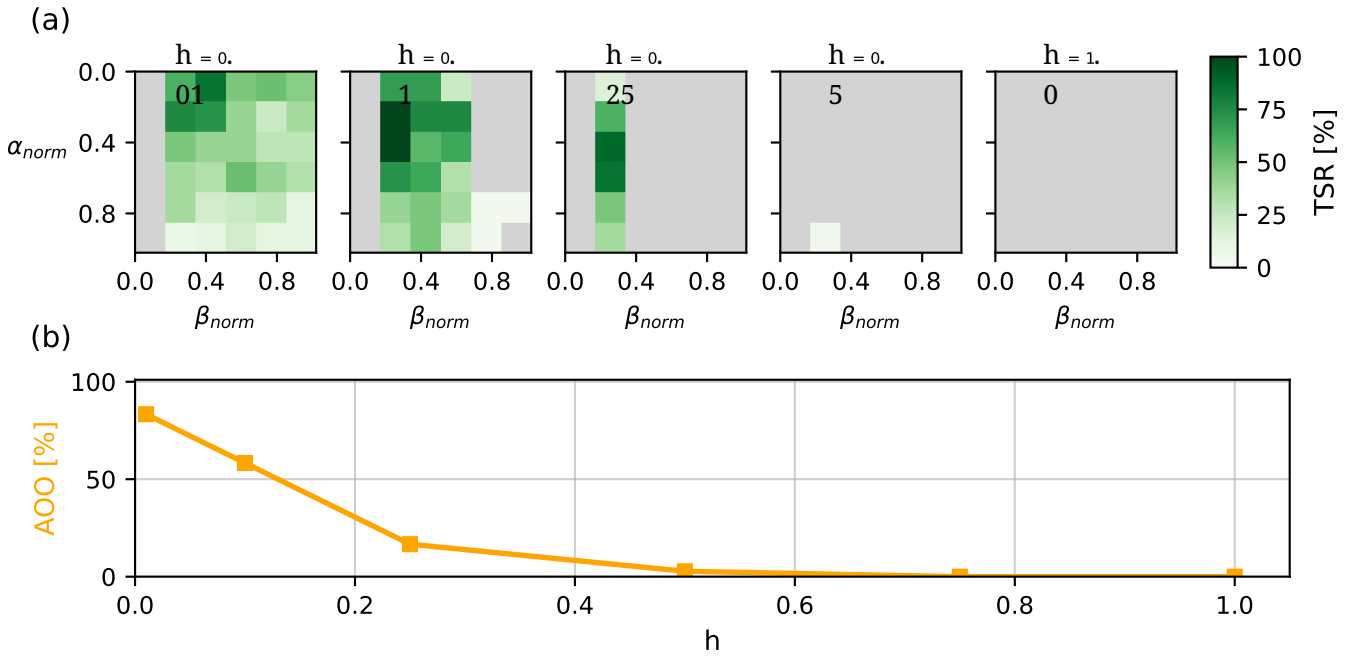


图 5：**实验验证参数敏感性随 h值减小而降低。(a)** 针对 g05_80.1 基准测试问题，在归一化 α_{norm}、β_{norm} 参数空间上进行参数扫描，展示了 h 的五个不同取值。评估指标为瞬态成功率（TSR）。随着 h 减小，超参数空间中更大的区域可产生非零TSR。**(b)** 与六个所评估的 h 值相对应的所得 AOO 值由符号标出（线条用于引导视线）。

其示意图如图 (4) 所示 [4]。该装置由一台标准分布式反馈激光二极管（λ = 1.55μm）、一个马赫-曾德尔调制器（MZM）、一个光电二极管，以及一块配备 14 位模数转换器和数模转换器的现场可编程门阵列（FPGA）组成。开始时，自旋依次编码为振幅，在脉冲串中沿光纤传播，也就是说，它们采用时分复用。这些光学自旋由光电二极管读出并转换为电压，随后由模数转换器数字化并存储在 FPGA 上。

一旦所有自旋均已完成测量，现场可编程门阵列便根据式 2，使用同样加载到该现场可编程门阵列上的耦合矩阵**J**计算反馈信号。最后，每个自旋的反馈信号从现场可编程门阵列发送至数模转换器，转换为模拟电信号，并施加到马赫-曾德尔调制器上，由其调制自旋在下一次迭代中的光振幅。该时分复用测量-反馈装置作为时间离散系统运行，因而可用式(6)对其进行建模。我们还可以利用该测量-反馈装置研究不同 h取值的影响，从而有效实现式(7)。为此，我们修改了运行在现场可编程门阵列上的软件，特别是通过将反馈信号 f_i 乘以 h的值来调整其缩放。该实现的伪代码见补充说明3。

在进行测量之前，我们以分岔扫描的形式执行标定程序。在该扫描中，实验增益 α_e 从零开始增大，直至自旋开始分岔。我们执行这一标定步骤，是因为仿真中使用的超参数与物理实验系统的超参数之间不存在直接的一一对应关系。由于理论预测分岔发生在$\alpha = 1$，我们可以确定发生该转变所对应的实验增益。在我们的装置中，该值为 $\alpha_{\mathrm{exp}}^{\mathrm{bif}} = 2.34$，随后我们将其用作仿真与实验超参数之间的转换因子（更多细节见补充说明 4）。

为了通过实验观察图3所预测的渐变过渡，我们在 g05_80.1 基准测试问题上对 α_{exp} 和β_{exp} 进行暴力网格扫描。选择该问题是因为它在仿真中对 $h = 1$ 和 $h = 0.01$均表现出较高的平均 TSR 值。总体而言，我们对实验装置进行了超参数扫描，涵盖 h 的六个不同取值，范围从 1 降至 0.01。为了平衡分辨率与测量时间，我们将扫描限制在 ($\alpha_{\mathrm{exp}}, \beta_{\mathrm{exp}}$) 平面内的 6×6 网格上，对每种参数组合执行 25 次运行。每次运行包含 2000 次迭代，与所选的 h 值无关。实验结果如图 5(a) 所示，其中 TSR 被映射到绿色色标上。两个坐标轴均按实验分岔值归一化，即 $\alpha_{\mathrm{norm}} = \alpha_{\mathrm{exp}}/\alpha_{\mathrm{exp}}^{\mathrm{bif}}$ 和 $\beta_{\mathrm{norm}} = \beta_{\mathrm{exp}}/\alpha_{\mathrm{exp}}^{\mathrm{bif}}$。该归一化确保所得超参数 α_{norm} 和 β_{norm} 均位于区间 $[0, 1]$, 内，与图2所示的仿真结果一致。

图 5(a) 最右侧的面板显示了 $h = 1$ 的结果，对应于时间离散模拟IM的标准运行条件。在所考虑的参数范围和分辨率内，没有任何（ $h \leq 0.25$, ）组合能得到非零TSR。这突显了此类实验装置所需的超参数微调。随着 h 减小，开始出现多个能使 TSR 变为非零的参数组合，这证实了模拟中观察到的整体趋势。图 5(b) 中展示的这些参数扫描所对应的 AOO 也体现了这一趋势。对于 $h \leq 0.25$，似乎存在一个特别有用的超参数范围。

实验结果中观察到的转变不如模拟中平滑。这很可能是由于实验参数扫描的分辨率有限，因为受时间限制，更高的分辨率不易实现。因此，在实验中使用较低的 h 值更为重要，因为这会提高在粗略参数扫描中找到非零TSR区域的可能性。

IV. 讨论

我们通过实验确认，在时间离散的测量反馈设置中，采用较小的人工欧拉步长 h可以扩大超参数范围，使系统对参数初始化和调优不那么敏感。此外，由于最优超参数是通过模拟获得的，减小 h步长也能显著降低该设置对仿真到硬件的参数转换误差的敏感性。

最后，在本研究中，我们使用双曲正切作为系统的非线性函数 [22]。不过，本文所述结果并不依赖于非线性函数的具体选择。采用其他非线性函数的实现，例如余弦平方或三阶非线性，在确定有效超参数时也会遇到类似困难。这是因为根本问题并非非线性函数本身，而是时间离散的测量反馈动力学。因此，所有时间离散模拟伊辛机都能从本文提出的见解中获益。

V. 结论

本文研究了模拟伊辛机的时间连续动力学与时间离散动力学之间的差异。我们观察到，后者的实现具有窄得多的有效参数取值范围，因此对超参数调优更加敏感。这带来了一个问题，因为如今许多模拟伊辛机的实现都是遵循时间离散动力学的混合型实现。为克服这一局限，我们提出并通过实验验证，引入一个较小的人工欧拉积分步长h可以降低对参数初始化、调优和转换的敏感性。此外，由于该方案不依赖于所选的非线性，因此适用于任何硬件平台。未来的研究将致力于理解为何 AOO 似乎会随着问题规模增大而降低，以及引入的 h-步长如何影响模拟伊辛机的整体求解时间。

VI. 数据可用性

作者声明，所有相关数据均已包含在稿件中。如有合理需求，可向通讯作者索取其他数据。

VII. 代码可用性

如有合理请求，可向通讯作者获取所用的软件代码。

VIII. 作者贡献

T.S. 完成了模拟和实验，并撰写了稿件。G.V.d.S 和 G.V. 负责监督该项目。所有作者均讨论了研究结果并审阅了稿件。

IX. 补充信息

利益冲突： G.V.d.S. 是 Communications Physics 的编委，但未参与本文的编辑审查或发表决定。其他所有作者均声明不存在利益冲突。

致谢： 本研究由佛兰德斯研究基金会（FWO）资助，资助项目编号为 G0A6L25N。此外，EOS项目“光子伊辛机”也提供了额外资助。该项目（EOS编号40007536）获得了FWO和F.R.S.-FNRS通过卓越科学（EOS）计划提供的资助。

参考文献

[1] F. Barahona、M. Gr¨otschel、M. J¨unger 和 G. Reinelt，《组合优化在统计物理学和电路布局设计中的应用》，*Operations Research* **36**，493–513，https://doi.org/10.1287/opre. 36.3.493（1988）。[2] A. Lucas，《许多NP问题的伊辛表述》，*Frontiers in Physics* **2**，74887，https://doi.org/10.3389/fphy.2014.00005（2014）。[3] P. A. Horvath、K. R. Roos 和 A. Sinha，《金融资产配置的伊辛自旋态解释》，*Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **445**，112–116，https://doi.org/10.1016/j.physa.2015.10.064（2016年）。[4] D. Saad、Y. Kabashima 和 T. Murayama，《作为伊辛模型的公钥密码学与纠错码》，*AIP Conference Proceedings* **553**，89–94，https://doi.org/10.1063/1.1358168（2001）。[5] B. Wang、F. Hu、H. Yao 和 C. Wang，《基于伊辛模型参数优化的质因数分解算法》，*Scientific Reports* **10**，7106，10 1038 41598 020 62802 5 2020 https://doi.org/ . /s - - -（）。[6] M. R. Garey 和 D. S. Johnson，《计算机与不可解性（第29卷）》，*W. H. Freeman & Co.*（2002）。[7] P. Anand 等，《面向可持续计算的物联网漏洞评估：威胁、现有解决方案与未决挑战》，*IEEE Access* **8**，9189773，9189773 2020 https://ieeexplore.ieee.org/document/（）。[8] M. Horowitz，《1.1 计算能耗问题（以及我们能采取的应对措施）》，*2014 IEEE International Solid-State Circuits Conference Digest of Technical Papers (ISSCC)* **6757323**，https://doi.org/10.1109/ ISSCC.2014.6757323（2014）。[9] N. Siddique 和 H. Adeli，《自然启发计算：概述及未来发展方向》，*CognComput* **7**，706–714，https://doi.org/ 10.1007/s12559-015-9370-8（2015）。[10] N. Mohseni、P. L. McMahon 和 T. Byrnes，《作为组合优化问题硬件求解器的伊辛机》，*Nature Re- views Physics* **4**，363–379，https://doi.org/10.1038/s42254-022-00440-8（2022年）。[11] Y. Shim、A. Jaiswal 和 K. Roy，《利用自旋霍尔效应（SHE）诱导的随机磁化反转进行基于伊辛计算的组合优化》，*Journalof appliedphysics***121**，193902，https: // doi.org/10.1063/1.4983636（2017）。

[12] D. Pierangeli、G. Marcucci 和 C. Conti，《通过空间光调制实现大规模光子伊辛机》，《物理评论快报》122，213902，10 1103 122 213902 2019 https://doi.org/ . /PhysRevLett. . ( )。[13] T. Takemoto、M. Hayashi、C. Yoshimura 和 M. Yamaoka，《一种基于存内计算方法、用于求解大规模组合优化问题的 30 k 自旋多芯片可扩展 CMOS 退火处理器》，《IEEE 固态电路期刊》55，145–156，https://ieeexplore.ieee.org/document/8906059 (2020)。[14] F. B¨ohm、G. Verschaffelt 和 G. Van der Sande，《一种用于求解优化问题的基于光电反馈系统的简易相干伊辛机》，《自然-通讯》10，3538，https://doi.org/10.1038/s41467-019-11484-3 (2019)。[15] T. Honjo、T. Sonobe、K. Inaba、T. Inagaki、T. Ikuta、Y. Yamada、T. Kazama、K. Enbutsu、T. Umeki、R. Kasahara 等，《十万自旋相干伊辛机》，《科学进展》7，http://doi.org/10.1126/ sciadv.abh0952 (2021)。[16] L. Q. English、A. V. Zampetaki、K. P. Kalinin、N. G. Berloff 和 P. G. Kevrekidis，《一种基于次谐波电谐振器网络的伊辛机》，Communications Physics 5，333，https://doi.org/ 10.1038/s42005-022-01111-x (2022)。[17] A. Litvinenko、R. Khymyn、V. H. Gonz´alez、R. Ovcharov、A. A. Awad、V. Tyberkevych、A. Slavin 和 J. ˚Akerman，《一种自旋波伊辛机》，Communications Physics 6，227，https://doi.org/10.1038/ s42005-023-01348-0 (2023)。[18] A. Mallick、Z. Zhao、M. K. Bashar、S. Alam、M. M. Islam、Y. Xiao、Y. Xu、A. Aziz、V. Narayanan、K. Ni 和 N. Shukla，《利用铁电晶体管阵列耦合的双稳态锁存器构建的兼容 CMOS 的伊辛机》，Scientific Reports 13，1515，https://doi.org/10.1038/ s41598-023-28217-8 (2023)。[19] D. Pierangeli、G. Marcucci、D. Brunner 和 C. Conti，《噪声增强型空间光子伊辛机》，《纳米光子学》9，4109–4116，https: // doi.org/10.1515/nanoph-2020-0119 (2020)。[20] T. Leleu、Y. Yamamoto、P. L. McMahon 和 K. Aihara，《通过校正振幅异质性消除模拟自旋系统中的局部极小值》，《物理评论快报》122，https://doi.org/10.1103/ PhysRevLett.122.040607 (2019)。[21] Y. Inui、M. D. S. H. Gunathilaka、S. Kako、T. Aonishi 和 Y. Yamamoto，《利用人工塞曼项控制相干伊辛机中的振幅均匀性》，Communications Physics 5，154，https://doi.org/10.1038/s42005-022-00927-x (2022)。[22] F. B¨ohm、T. V. Vaerenbergh、G. Verschaffelt 等，《非线性选择导致模拟伊辛机计算性能相差一个数量级》，Communications Physics 4，149，https://doi.org/10.1038/s42005-021-00655-8 (2021)。[23] T. Sevenants、G. Van der Sande 和 G. Verschaffelt，《具有模拟自旋变量的光学伊辛机实现对位分辨率的要求》，Communications Physics 8，11，https://doi.org/10.1038/ s42005-024-01919-9 (2025)。[24] J. Chou、S. Bramhavar、S. Ghosh 和 W. Herzog，《基于模拟耦合振荡器的加权伊辛机》，Scientific Reports 9，14786，https://doi.org/10.1038/s41598-019-49699-5 (2019)。[25] K. Takata、A. Marandi、R. Hamerly、Y. Haribara、D. Maruo、S. Tamate、H. Sakaguchi、S. Utsunomiya 和 Y. Yamamoto，《用于一维环和三次图问题的 16 位相干伊辛机》，Scientific Reports 6，34089，https://doi.org/10.1038/srep34089 (2016)。[26] A. Mallick、Z. Zhao、M. K. Bashar、S. Alam、M. M. Islam、Y. Xiao、Y. Xu、A. Aziz、V. Narayanan、K. Ni 和 N. Shukla，《利用铁电晶体管阵列耦合的双稳态锁存器构建的兼容 CMOS 的伊辛机》，Scientific Reports 13，1515，https://doi.org/10.1038/ s41598-023-28217-8 (2023)。[27] R. De Prins、J. Lamers、P. Bienstman 等，《在模拟伊辛机中纳入外场》，Communications Physics 8，482，https: // doi.org/10.1038/s42005-025-02387-5 (2025)。

补充说明

Toon Sevenants[*1]、Guy Van der Sande[1]和 Guy Verschaffelt[1]

[1]布鲁塞尔自由大学应用物理研究组，比利时布鲁塞尔

补充说明 1：最大割问题

求解最大割（最大割）优化问题常用于评估伊辛机的性能。最大割问题是 NP难问题，这意味着寻找最优解在计算上被认为十分困难。近期发表的研究报告了新的已知最优解，这反映出即使采用最先进的方法，该问题仍然颇具挑战性 [1]。

无向图 $G = (V,\ E)$ 上的最大割问题，定义为将图的顶点划分为两个集合，使连接这两个集合的边的总权重最大化。我们用 C 表示这一总权重，即割值。设 w_{ij} 为该图的对称耦合矩阵，其中 $w_{ii} = 0$ 和 $w_{ij} \geq 0$。为描述一个割，我们为每个顶点 i 赋予一个自旋 $s_i \in \{+1, -1\}$。自旋值相同的顶点位于割的同一侧。当且仅当 $s_i \neq s_j$ 时，边（$i,\ j$）计入割中。因此，加权割值可表示为

$$C \ = \ \sum_{i \neq j} w_{ij}\, \mathbf{1}_{\{s_i \neq s_j\}}. \tag{12}$$

我们可以用自旋来改写指示函数 $\mathbf{1}_{\{s_i \neq s_j\}}$：

$$\mathbf{1}_{\{s_i \neq s_j\}} \ = \ \frac{1 - s_i s_j}{2}, \tag{13}$$

因为当顶点位于同一侧时，$s_i s_j = +1$；当顶点位于相对两侧时，-1。将其代入 C 的表达式并化简，得到

$$C \ = \ \frac{1}{2} \sum_{i,j} w_{ij}\, \frac{1 - s_i s_j}{2} \ = \ \frac{1}{4} \sum_{i,j} w_{ij} \ - \ \frac{1}{4} \sum_{i,j} w_{ij}\, s_i s_j. \tag{14}$$

前面的额外因子 $1/2$ 用于消除求和造成的重复计数。现在将右侧的第一项移到左侧，得到

$$-\frac{1}{4} \sum_{i \neq j} w_{ij}\, s_i s_j \ = \ C \ - \ \frac{1}{4} \sum_{i \neq j} w_{ij}. \tag{15}$$

如果将伊辛能量定义为

$$H(\{s_i\}) \ = \ -\frac{1}{2} \sum_{i,j} J_{ij}\, s_i s_j, \tag{16}$$

其中 $J_{ij} = -w_{ij}$，我们可以将式 15 改写为

$$H(\{s_i\}) \ = \ -\left(2C \ + \ \frac{1}{2} \sum_{i,j} J_{ij} \right), \tag{17}$$

其中，右侧第二项是一个常数，与自旋构型 $\{s_i\}$无关。根据这一关系可知，最大化割值 C 等价于最小化伊辛能量 $H(\{s_i\})$。

本文使用了可免费访问的 BiqMac 库中的“g05_”基准测试集。该集合中的所有实例都是最大割问题，包含 60、80 或 100 个自旋变量。对于每种问题规模，我们使用 10 个实例。对于这些相对较小的最大割实例，其精确解已知，并记录于参考文献 [2] 中。

补充说明 2：探究其他影响因素

除了时间步长 h 的影响外，我们还评估了其他几种可能降低时间离散模拟IM参数敏感性的因素。具体而言，我们考察了三种可能的方法：增加运行时间、调整噪声强度，以及应用自旋符号方法 [3]。与前述实验一样，我们采用了“g05_”基准库中的三种问题规模（60、80 和 100 个自旋），并纳入每种问题规模下可用的全部十个实例。对于这三种方法，参数扫描均针对 $\alpha \in [0.5, 1.0]$ 和 $\beta \in [0.0, 0.5]$ 进行，使用 21×21 分辨率网格。对于每一组（α，β）参数，瞬态成功率（TSR）根据 250 次独立运行确定。实验中使用的迭代次数和噪声水平将在以下各节中针对每种方法分别说明。

A. 运行时间影响

为探究运行时间的影响，我们评估了六种不同的取值（以迭代次数表示）：100、500、1000、2000、5000 和 10000 次迭代。对于所有运行时间设置，我们均采用固定的噪声强度 $\gamma = 0.01$。此外，我们还考虑了前文所述的三种问题规模。所得 AOO 值如图6所示。数据点周围的阴影区域表示每种问题规模下可用的十个实例中 AOO 的变化情况。从图中可以看出，当运行时间跨越两个数量级变化时，AOO 并无显著差异。本文将模拟的运行时间设为 5000 次迭代，将实验的运行时间设为 2000 次迭代。

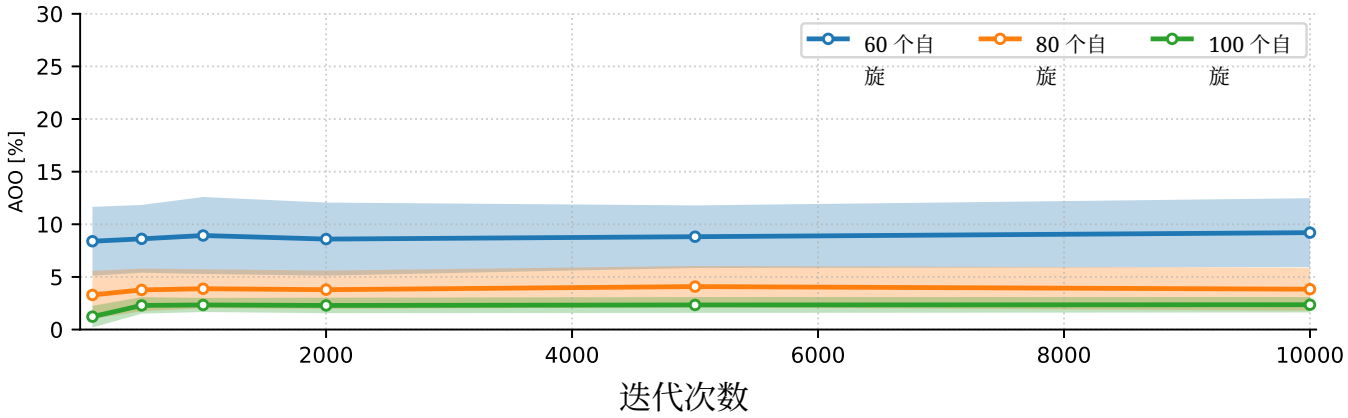


图6：**运行时间对三种不同问题规模下 AOO 的影响**。我们总共使用了 6 种不同的运行时间，范围从 100 到 10 000 次迭代。

B. 噪声影响

为探究噪声强度的影响，我们评估了七个不同的取值：0.001、0.005、0.01、0.05、0.1、0.5 和 1.0。对于所有噪声设置，我们均将运行时间固定为 5000 次迭代。这里，我们同样考虑了“g05_”基准库中的三种问题规模。所得 AOO 值如图7所示，数据点周围的阴影区域表示每种问题规模下可用的十个实例之间 AOO 的变化。请注意，x 轴采用对数刻度。

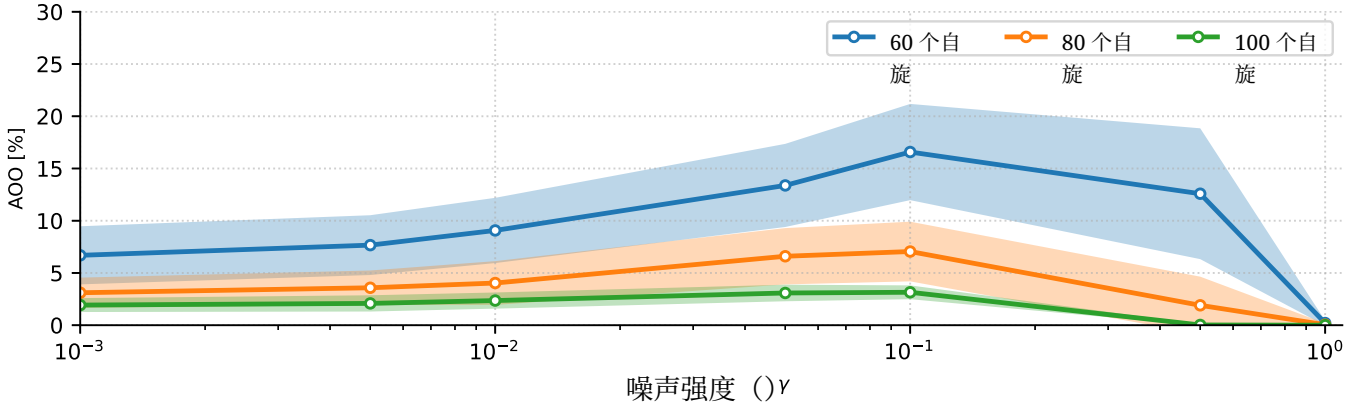


图 7：**噪声对三种不同问题规模下 AOO 的影响**。总共使用了 7 种不同的噪声强度，范围从 0.001 到 1.0。

随着噪声增大，AOO 也略有上升，但在噪声强度为 γ = 1.0 时降至零。这种上升在 60 自旋问题集上较为明显，而在 100 自旋问题集上几乎无法观察到。此外，即使对于 60 自旋问题集，这种变化也相对较小；相比之下，在相同的参数扫描范围和分辨率下，时间连续模拟伊辛机的 AOO 约为 80%。本文模拟中将噪声强度设为 0.01。

C. 自旋符号方法

自旋符号方法在参考文献 [3] 中提出，旨在提升模拟伊辛机在包含外场的问题上的性能。在此方法中，计算互耦反馈时使用二元自旋值。因此，自旋 x_i 的反馈信号会经过修改，使得更新方程变为

$$f_i = \alpha x_i + \beta \sum_j J_{ij}\, \sigma(x_j), \tag{18}$$

其中， $\sigma(x_j)$表示 x_j的符号。这种替换确保相互作用项能更准确地反映伊辛自旋的离散特性。其基本思想是，反馈应由伊辛能量景观的结构决定，而非由尚未收敛到二元值的连续状态变量决定。

在本研究中，我们不考虑外场，而是旨在探究与不使用自旋符号方法的系统相比，这种改动能否使模拟伊辛机在更大范围的（α， β）参数空间内找到正确解。图 8 展示了各问题规模对应的平均 AOO 值，其中深黄色柱表示使用自旋符号方法进行模拟所计算出的 AOO 值，深蓝色柱表示使用基于自旋振幅的反馈信号 $\{x_i\}$ 进行模拟所得的 AOO 值。误差棒表示每种问题规模下 10 个可用实例的 AOO 值的变化。所用的噪声强度和迭代次数分别为 0.01 和 5000 次迭代。

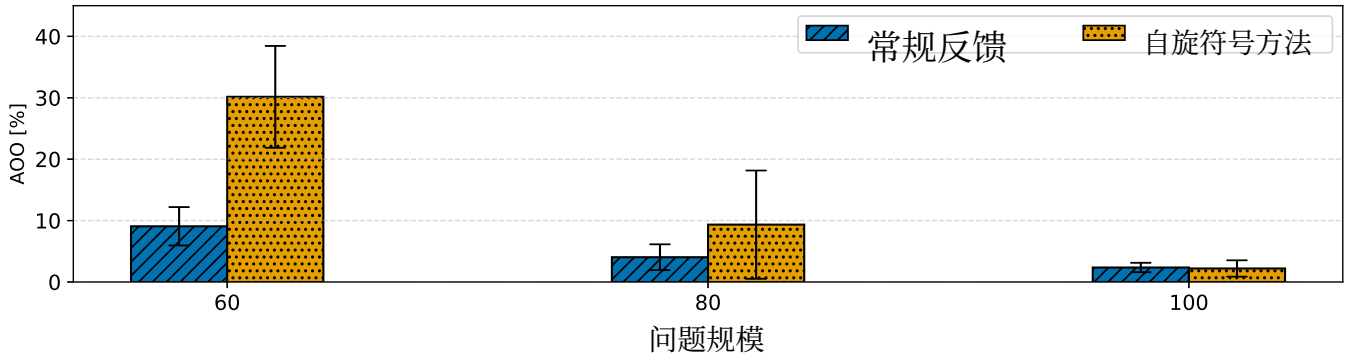


图 8：**噪声强度为 γ=00.01 时，自旋符号方法对 AOO 的影响**。 深蓝色柱表示未使用自旋符号方法进行的参考模拟，黄色柱表示使用自旋符号实现进行的模拟。除是否采用自旋符号方法外，所有模拟均使用相同的参数。

从图 8 可以看出，对于最小的 60 个自旋的问题规模，AOO 对反馈信号计算方法表现出明显的依赖性。然而，与时间连续模拟伊辛机中观察到的 AOO 相比，这种影响的幅度仍然相对较小；在相同的参数扫描范围和分辨率内，后者可达到约 80%。此外，随着问题规模增大，这种影响逐渐消失。对于 80 自旋的实例，其平均值仍高于参考系统的平均值，但误差棒显示不同问题实例之间差异很大，因此不存在一致的影响。对于 100 自旋的实例，未观察到平均 AOO 的显著差异。

为求完整，我们还评估了自旋符号方法对噪声的依赖性，如图 9 和图 10 所示。同样，我们没有发现 AOO 随问题规模增大而显著增加。

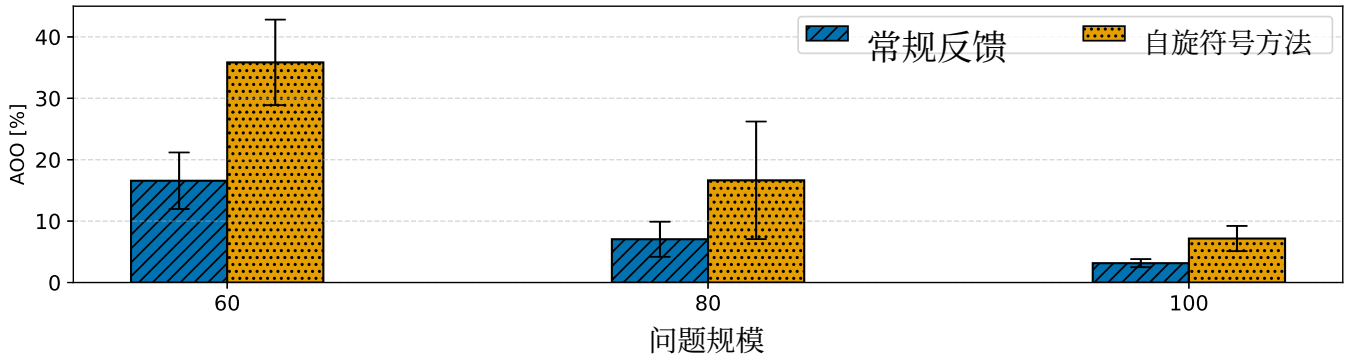


图 9：**噪声强度为 $\gamma = 0.1$ 时，自旋符号方法对 AOO 的影响**。深蓝色柱表示未采用自旋符号方法进行的参考模拟，黄色柱表示采用自旋符号实现进行的模拟。所有模拟的参数均相同，唯一的区别是是否采用自旋符号方法。

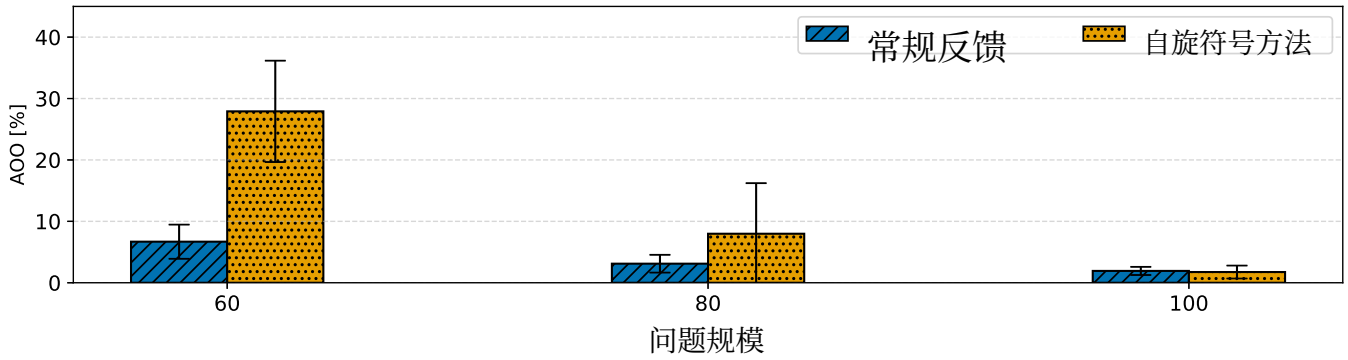


图 10：**噪声强度为 γ=0.001 时，自旋符号方法对 AOO 的影响**。深蓝色柱表示未采用自旋符号方法进行的参考模拟，黄色柱表示采用自旋符号实现进行的模拟。所有模拟的参数均相同，唯一的区别是是否采用自旋符号方法。

补充说明3：实验装置的现场可编程门阵列中使用的伪代码

算法1 主模拟IM执行循环

输入： N、噪声强度 γ、参数 a、b、h、长度 T
$N \leftarrow N + 10$ （额外的触发自旋和检查自旋）
初始化硬件
读取矩阵 J 和偏置向量 b_i
初始化 $spins \leftarrow 0$、$spins_old \leftarrow 0$
创建空的结果矩阵 R

对于 $t = 1$ 到 T **执行**
    $spins_new \leftarrow$ 采样($fback$)

    $spins \leftarrow spins_old + h(-spins_old + spins_new)$
    $R(:, t) \leftarrow spins$
    $spins_old \leftarrow spins$
    $fback \leftarrow -a \cdot spins - b \cdot J \cdot spins - b_i + \gamma \cdot$ 高斯噪声()
结束循环

写入 R 到文件

补充说明 4：分岔

分岔在许多伊辛机实现的运行中起着至关重要的作用，因为它决定了平凡的零解变得不稳定、自旋转变为二元状态的临界点。这一机制在仿真到实验的参数转换中也很重要，详情将在下文进一步讨论。

根据分岔理论，超临界叉形分岔的标准形式为 y

$$\frac{dx}{dt} = (\alpha - 1)x - x^3, \tag{19}$$

其中，$-x$ 项在伊辛机文献中常用，用于计入硬件实现中存在的额外损耗，而 α 是施加于伊辛机的增益。式19所描述的叉形分岔在无自旋耦合时发生于 $\alpha = 1$。然而在硬件中，实验装置中对应于该分岔点的增益无法事先直接得知。这种偏差源于物理损耗强于理论中所假设的线性损耗，以及数字化效应。自旋振幅具体由离散的ADC/DAC 数值表示，而非连续有界变量。这些硬件特有的影响导致参数值与数值模型中的参数值不同。

为将仿真结果与实验行为联系起来，我们进行分岔扫描：在无自旋耦合（即 β = 0）的情况下，测量最终稳态自旋振幅随增益参数 α的变化。由此我们可以确定实验分岔点（记为 $\alpha_{\text{exp}}^{\text{bif}}$），即零解失去稳定性的点。由于我们从理论得知分岔点为 $\alpha_{\text{sim}}^{\text{bif}} = 1$，$\alpha_{\text{exp}}^{\text{bif}}$ 实际上充当转换因子，将仿真中找到的最优参数映射为预期在实验中有效的参数。

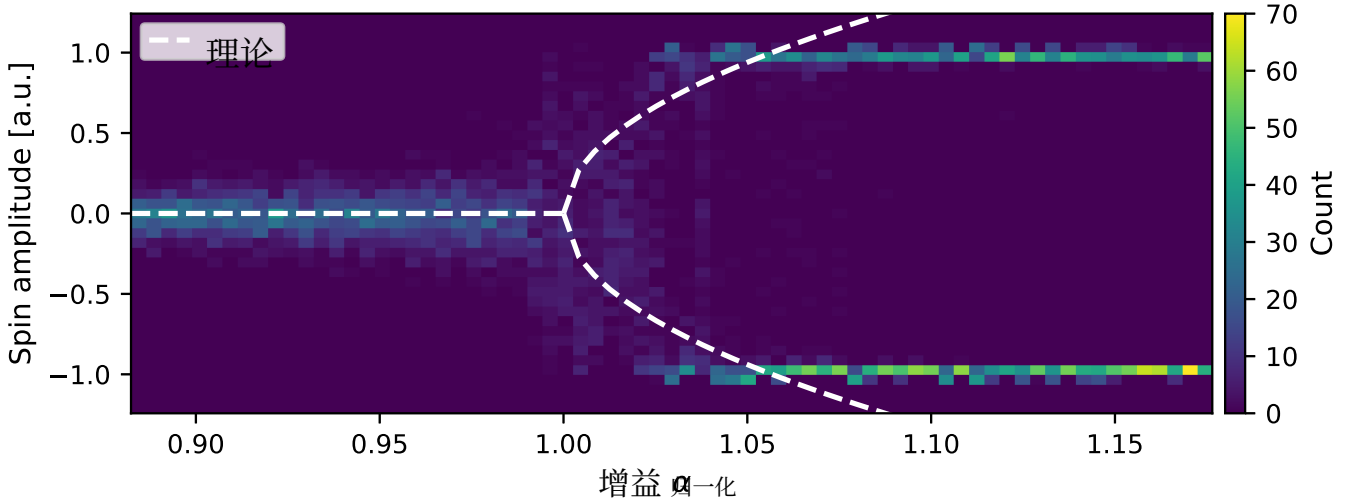


图 11：**叉形分岔附近未耦合人工自旋的行为**。该图展示了归一化的叉形分岔。较高 α_{norm} 下自旋振幅的饱和是由现场可编程门阵列的数模转换器/模数转换器中的削波效应造成的。

图 11 展示了在 OEO-IM [4] 上测得的分岔。对于每个实验 α 值，未耦合自旋均可自由演化 500 次迭代。经过这段时间后，记录最终的自旋态，并将其作为彩色直方图绘制在 y 轴上。对所有实验 α 值重复此过程，即可得到图 11 所示的叉形图。在该图中，自旋振幅经过归一化，范围为 $[-1, 1]$；实验 α_{exp} 值则按因子 $1/2.34 \approx 0.42$ 重新缩放，使分岔发生在 α_{norm} = 1.0。这意味着，要与实验设置相匹配，必须将模拟得到的最优参数乘以换算因子 $\alpha_{\text{exp}}^{\text{bif}}$= 2.34 。在实验测得的分岔上方，我们还用白色绘出了由公式 19 描述的理论叉形分岔。请注意，在较高的 α_{norm} 值下，实验测得的自旋振幅会出现饱和。这是由现场可编程门阵列的数模转换器/模数转换器中的削波效应造成的。

需要注意的是，在实践中，确定精确的实验分岔点并非易事。精确跃迁需要实验运行无限长的时间，而噪声会抑制接近分岔点时的自旋振幅，从而掩盖真正的分岔点。系统的参数敏感性与上述转换过程引入的不确定性相结合，凸显了混合模拟IM难以高效运行这一问题。

参考文献

[1] Khan, N. 和 Shukla, N. *G-Set*基准中*G63*实例的最新最大割解。arXiv:2510.21105。（2025年）。https://arxiv.org/ abs/2510.21105[2] Wiegele, A. Biq Mac库——中等规模最大割和二次0–1规划实例集。（2007）。https://biqmac.aau.at/ biqmaclib.html [3] De Prins, R.、Lamers, J.、Bienstman, P. 等。将外场纳入模拟伊辛机。Communication Physics 8，482（2025年）。https: // doi.org/10.1038/s42005-025-02387-5) [4] F. B¨ohm、G. Verschaffelt 和 G. Van der Sande，“一种基于光电反馈系统、用于求解优化问题的简易相干伊辛机”，《自然-通讯》**10**，3538，https://doi.org/10.1038/s41467-019-11484-3（2019年）。