随机向量优化的李雅普诺夫稳定性：理论与数值实现

Thiago Santos欧鲁普雷图联邦大学数学系，*UFOP*巴西欧鲁普雷图
santostf@ufop.edu.br

Sebasti˜ao Xavier欧鲁普雷图联邦大学数学系，*UFOP*巴西欧鲁普雷图
semarx@ufop.edu.br

arXiv:2603.04095v1 [math.OC] 4 Mar 2026

摘要—**随机微分方程在多目标优化中的应用在实践中一直受到两个长期存在的问题限制：稳定性分析不完整，以及缺乏易于获取的实现。我们重新审视一种用于无约束向量优化的漂移–扩散模型，其中漂移由共同下降方向诱导，而扩散项则保留探索行为。本文的主要理论贡献是给出一套完整自足的李雅普诺夫分析，在耗散条件下确立整体存在性、逐路径唯一性和非爆炸性，并在附加的强制性假设下证明正常返。我们还推导了欧拉–丸山离散化方案，并将所得迭代实现为兼容*pymoo*的算法——*pymoo* 是一个用于多目标优化的开源 Python 框架——同时提供交互式*PymooLab*前端，以支持可复现实验。在目标数量为 3 至 15 的 DTLZ2 问题上的实证结果表明，存在一种稳定的权衡：与成熟的进化算法基线相比，该方法在低维情形下竞争力较弱，但在高维情形且评估预算受限时仍是可行的选择。综合来看，这些观察表明，随机漂移–扩散搜索在数学上可处理的领域中占有一席之地，与基于种群的启发式方法并存——它并非替代方案，而是一种其优良性质能够接受严格分析的替代选择。**

索引词—**随机向量优化、多目标优化、李雅普诺夫稳定性、随机微分方程、开源优化软件**

一、引言

设 $F=(f_1、\ldots\ldots、f_m)：\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 表示一个各分量均可微的向量目标，并按照通常的帕累托支配关系对 $\mathbb{R}^m$ 进行排序。在这种情况下，目标是刻画（或近似）帕累托最优点集；即使每个 f_i 都是光滑的，该集合的几何形状通常也非凸，且可能不连通。关于由此产生的决策结构，经典文献中已有审慎的几何论述，例如 Miettinen 的专著 [1],，这仍是稳定性导向算法设计的有益出发点。

然而，大规模实践仍主要依赖种群启发式方法，因为它们能够处理黑箱目标，并在一次运行中给出帕累托集的有限近似。著名的实例包括 Deb 等人提出的 NSGA-II 等方法。 [2],以及基于分解的方法，例如 Zhang 和 Li [3]提出的 MOEA/D；其经验上的成功毋庸置疑，但其表现往往受调参选择的影响，而这些选择难以通过解析法加以解释。

另一条并行的研究路线将多目标搜索视为决策空间上的动力系统连续演化——其策略是指定一种漂移，以编码所有目标上的同步下降，然后对所得流进行扰动，以避免过早收敛到单个点。沿着这一思路，Sch¨affler 及其合作者提出了一种漂移—扩散模型，其中布朗驱动与多目标下降场 [4],相耦合，形成一个旨在趋近帕累托集、同时避免过早坍缩的连续时间过程。

该模型以随机微分方程为基础

$$dX_t=-q(X_t)\,dt+\epsilon\,dB_t,\tag{1}$$

其中 $q：\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 将局部目标信息汇总为一个方向，B_t 是标准布朗运动。漂移推动支配性改进，而扩散则引入受控随机化；后者在实际应用中颇具吸引力，但也带来了一个不容回避的数学问题：方程 (1) 是否生成了定义良好、不会爆炸且具有合理长期运行机制的马尔可夫过程?

在最初的研究中，若干基础性论断虽被提出，却未附有完整自洽的证明，关键论证散见于Sch¨affler [5]等早期文献，以及Khasminskii [6]关于标准随机微分方程理论的论述。然而，若要将该方法用作采样机制，存在性和唯一性仅是第一层要求；还需要再现性，以证明平稳采样是合理的，而不必依赖瞬态时间段。

协方差自适应变体进一步推动了这项研究。Santos 等人提出了 CMA-SSW [7], , 将漂移–扩散构造与协方差矩阵自适应相结合，以改善高维情形下的解集分布。其数值表现颇具吸引力，但文献尚未充分阐明协方差自适应动力学的稳定性，也未明确给出易于复现的实现路径。

这一实现路径应当易于复现，但文献对此的说明仍不够明确。

本文补上了这一缺失的结构。我们精确刻画概率设定（维纳空间、滤过以及可测性约定），并在对下降场而言自然的耗散性假设下，建立漂移–扩散系统的整体存在性与逐路径唯一性。随后，我们借助 Foster–Lyapunov 方法证明正常返，所依据的是 Meyn 与 Tweedie [8] 发展的一般马尔可夫过程框架，以及例如 Mao [9]所阐述的随机 Lyapunov 技术；重要的是，这些条件的表述方式使其能够针对具体的目标函数族加以检验。

我们采用 Kloeden 与 Platen [10]的 Euler–Maruyama 格式对动力学进行离散，并将所得优化器集成到 *pymoo* 库中，遵循 Blank 与 Deb [11]所记录的软件架构。为使数值层可审计，我们依赖标准科学计算组件，尤其是 Virtanen 等人整理的 SciPy [12], ，并通过 *PymooLab* [13] 提供交互式前端，以便针对步长和噪声强度开展敏感性检查。

本文有意限定研究范围。我们聚焦于具有连续决策变量和可微目标函数的无约束问题；若将分析扩展到非光滑或带约束的情形，可能需要采用不同的随机扰动和额外的变分工具。

本文按如下结构展开。第 2 节构建多目标框架并推导下降方向 q；第 3 节针对随机微分方程 (5) 建立基于 Lyapunov 的存在性、唯一性和复现性结果；第 4 节介绍 Euler–Maruyama 离散化及其在 *pymoo* 中的集成；第 5 节总结局限性并探讨尚待解决的问题。

II. 理论框架

我们考虑如下无约束向量优化问题（VOP）：最小化一个二阶连续可微的向量值函数 $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$，其中 $f = (f_1, \dots, f_m)^\top$。由于 f 的各个分量通常彼此冲突，因此一般不存在一个能同时使所有目标函数达到最小值的单一点。多目标优化的标准方法是寻找这样一组点：若不使至少一个其他目标函数变差，就无法进一步改善其中任何一个目标函数。

形式上，我们称点 $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ 帕累托支配另一点 $x \in \mathbb{R}^n$，记作 $\hat{x} \prec x$，如果对所有 $i = 1, \dots, m$ 均有 $f_i(\hat{x}) \le f_i(x)$，且 $f(\hat{x}) \neq f(x)$。若不存在 $w \in \mathbb{R}^n$ 使得 $w \prec x^*$，则称点 $x^* \in \mathbb{R}^n$ 为帕累托最优 。所有帕累托最优点的集合构成 帕累托集，其在 f 下的像即为帕累托前沿。

为了构造一条连续趋向帕累托集的轨迹，我们需要一个方向，使得所有目标函数同时下降。遵循 [4], ，我们将向量场 $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 定义为

$$q(x) := \sum_{i=1}^{m} \hat{\alpha}_i(x) \nabla f_i(x), \tag{2}$$

其中系数 $\hat{\alpha}(x) = (\hat{\alpha}_1(x) \dots, \hat{\alpha}_m(x))$ 作为二次优化问题的解而得到

$$\min_{\alpha \in \Delta^m} \left\| \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \nabla f_i(x) \right\|_2^2, \quad \Delta^m := \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^m : \alpha_i \ge 0, \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1 \right\}. \tag{3}$$

问题 (3) 在概率单纯形 Δ^m 上严格凸，从而保证对每个 $x \in \mathbb{R}^n$，极小化解 $\hat{\alpha}(x)$ 的存在性与唯一性。

根据 [4], ，我们注意到 q 的三个性质对分析至关重要。只要 $q(x) \neq 0$，方向 $-q(x)$ 就是所有目标函数的共同下降方向——也就是说，对于每个 i，$\nabla f_i(x) \cdot (-q(x)) \le 0$；并且当且仅当 x 满足帕累托最优性的 KKT 条件时，$q(x) = 0$ 。我们还注意到，q 在 $\mathbb{R}^n$ 上局部利普希茨；这一正则性源自与 (3) 相关的 KKT 系统结构以及 f 的光滑性。这些性质意味着确定性流

$$\dot{x}(t) = -q(x(t)), \quad x(0) = x_0, \tag{4}$$

生成一条由逐步被支配的点构成的曲线：若 $q(x_0) \neq 0$，则在最大存在区间内，对所有 $0 \le s < t$，均有 $f(x(s)) \prec f(x(t))$。

尽管如此，这种确定性流会收敛到单个帕累托最优点；按其构造，它无法遍历整个帕累托前沿。为解决这一问题，我们加入 Itô 噪声，将 (4) 替换为以下随机微分方程

$$dX_t = -q(X_t)\, dt + \epsilon\, dB_t, \quad X_0 = x_0, \tag{5}$$

其中 $\epsilon > 0$ 是噪声强度，$\{B_t\}_{t \ge 0}$ 表示一个 n维布朗运动。不出所料，漂移 $-q(X_t)$引导轨迹趋向帕累托集；扩散 $\epsilon\, dB_t$ 注入足够的随机性，以防止过早集中于单个帕累托最优解。

现在，我们为随机分析建立测度论框架。令 Ω 表示所有连续函数 $\omega : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$构成的空间，并赋予度量

$$d(\omega_1, \omega_2) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \min \left\{ \sup_{0 \le t \le k} \|\omega_1(t) - \omega_2(t)\|_2, 1 \right\}, \tag{6}$$

该度量使紧时间区间上的一致收敛度量化。由此得到的拓扑使 Ω 成为一个波兰空间；我们用 $\mathscr{B}(\Omega)$表示其 Borel σ-代数。

定义 1 (维纳测度)。 对每个 $x \in \mathbb{R}^n$，维纳测度 $\mathbb{W}_x$ 是<葡*style id='11'>(Ω $\mathscr{B}$(Ω))上的唯一概率测度，满足：*(i)* $\mathbb{W}_x(\omega(0) = x) = 1$; *(ii)* 对任意 $0 \le t_0 < t_1 < \cdots < t_k$，增量 $\omega(t_1) - \omega(t_0) \dots, \omega(t_k) - \omega(t_{k-1})$在 $\mathbb{W}_x$下相互独立；且 *(iii)* 对于 $0 \le s < t$，增量 $\omega(t) - \omega(s)$ 服从 $\mathcal{N}(0, (t-s) I_n)$ 分布。

坐标过程 $B_t(\omega) := \omega(t) - \omega(0)$ 在 $(\Omega, \mathscr{B}(\Omega), \mathbb{W}_x)$ 上是从原点出发的 n 维布朗运动。我们用 $\{\mathscr{F}_t\}_{t\ge 0}$ 表示 $\{B_t\}$ 的自然滤过，并加入 $\mathbb{W}_x$-零测集以满足通常的完备性条件。随机微积分与布朗运动的全面论述见 [14]和[15]，在不与期刊体例冲突时，我们沿用其记号。

为分析过程 (5) 的长期行为，我们对向量场 q 施加结构条件。第一项条件由 Sch¨affler 等人专为随机向量优化场景提出；第二项是强制性要求，其一般形式在常返扩散理论中已是标准做法 [6], [9], ，我们在此将其调整为适用于多目标下降场 q。

假设1 (耗散性 [4])。 存在常数 $\theta_0 > 0$和 $r \ge 1$ ，使得对所有满足 $\|x\|_2 \ge r$ 的 $x \in \mathbb{R}^n$ ：

$$x \cdot q(x) \ge \left(1 + \frac{\theta_0^2}{2}\right) \max\{1, \|q(x)\|_2^2\}. \tag{7}$$

这一条件在 [4]，中称为“假设A”，它保证在以原点为中心的某个充分大的球之外，漂移 $-q(x)$具有指向内侧的强径向分量。这抵消了布朗运动的扩张趋势，并防止轨迹逃逸至无穷远。在最初的论述中，Sch¨affler 等人利用该条件证明了随机微分方程解的存在性与唯一性（ [4]中的定理3.2），以及命中时间有限性（其中的定理3.3），并援引了 [5]中的早期结果。

[4] 中的原始分析未包含明确的强制性条件，因此过程的正常返性质缺乏充分论证。为弥补这一缺口，我们引入以下假设。尽管在扩散过程的李雅普诺夫稳定性理论中，要求无穷远处漂移线性增长的条件十分经典——例如参见 Khasminskii [6, 第 4] 章和 Mao [9, 第 5] 章 —— 但据我们所知，将其应用于式 (2) 中定义的多目标下降场 q 还是首次。

假设2 （强制性）。 存在 $\mu > 0$ ，使得对于所有满足 $\|x\|_2 \ge r$ 的 $x \in \mathbb{R}^n$ ：

$$\|q(x)\|_2 \ge \mu \|x\|_2. \tag{8}$$

假设2保证下降方向的大小随其与原点距离的增加至少线性增长。当每个目标函数 f_i均为强凸函数，或帕累托集有界且远离该集合时目标梯度仍有正的下界时，这一条件成立。正如我们将看到的，仅假设1就足以保证解的整体存在性，而正常返性质还需要假设2。

注1. 假设*1*由*Sch¨affler*等人*[4]* 针对*(2)*中所定义的特定多目标下降场 q 提出。尽管其单侧增长结构令人联想到随机稳定性理论中的经典假设 *[6], [9],*

涉及$\max\{1, \|q(x)\|_2^2\}$ 的精确形式是针对向量优化设定量身定制的。我们有意将假设*2*作为本文的一项原创贡献加以引入；尽管类似的线性增长条件见于常返扩散的研究 *[6,*定理*3.5],*，但将其适配到多目标情形可确保漂移在无穷远处支配扩散，从而为正常返的严格证明提供所缺的关键环节。

III. 严格稳定性分析

上一节的结果为随机微分方程（5）赋予了定义良好的下降方向和精确的测度论框架。接下来需要验证的是，由此得到的马尔可夫过程是否具备足以证明其可用作优化算法的性质：轨迹的整体存在性、非爆炸性，以及最终向帕累托集正常返。我们将依次探讨这些问题，并通过李雅普诺夫函数方法，在前一项结果的基础上逐步建立后续结果。

第一项准备工作是证明漂移场 q 至多呈线性增长。该界直接源于假设1所蕴含的耗散结构，是在随后的整体存在性定理中应用 Khasminskii非爆炸判据的关键要素。

引理1 (线性增长界)。 假设 q 局部利普希茨且满足假设*1*。那么存在 $L > 0$，使得对所有 $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\|q(x)\|_2 \le L(1 + \|x\|_2). \tag{9}$$

此外，对于 $V(x) = \|x\|_2^2$，扩散的无穷小生成元 $\mathscr{L}$满足

$$\mathscr{L}V(x) = -2x \cdot q(x) + \epsilon^2 n \le C_1 V(x) + C_2 \tag{10}$$

其中 C_1、$C_2 > 0$为常数。

证明。由于 q 是局部利普希茨的，因此它在紧球 $\mathscr{B}_r = \{x : \|x\|_2 \le r\}$上连续且有界。令$M = \sup_{x\in\mathscr{B}_r} \|q(x)\|_2$。对于 $\|x\|_2 \ge r$，我们分两种情况讨论。如果 $\|q(x)\|_2 \ge 1$，由假设1可得

$$x \cdot q(x) \ge \left(1 + \frac{\theta_0^2}{2}\right) \|q(x)\|_2^2. \tag{11}$$

由柯西-施瓦茨不等式， $x \cdot q(x) \le \|x\|_2 \|q(x)\|_2$。结合这些不等式可得

$$\|q(x)\|_2 \le \kappa \|x\|_2, \quad \text{where } \kappa := \left(1 + \frac{\theta_0^2}{2}\right)^{-1} < 1. \tag{12}$$

如果 $\|q(x)\|_2 < 1$，那么显然对于 $\|x\|_2 \ge r \ge 1$ ，有 $\|q(x)\|_2 < 1 \le \|x\|_2/r$（由假设1）。结合对 $\mathscr{B}_r$ 及其补集的界，可得式（9），其中$L = \max\{M, \kappa, 1/r\}$。

对于生成算子的界，注意到

$$\mathscr{L}V(x) = -2x \cdot q(x) + \epsilon^2 n \le 2\|x\|_2 \|q(x)\|_2 + \epsilon^2 n. \tag{13}$$

利用 q 的线性增长和杨不等式 $2ab \le a^2 + b^2$:

$$2\|x\|_2\|q(x)\|_2 \le 2L\|x\|_2(1+\|x\|_2) \le 3L\|x\|_2^2 + L. \quad (14)$$

因此 $\mathscr{L}V(x) \le 3LV(x) + (L+\epsilon^2 n)$，结合 $C_1 = 3L$ 和 $C_2 = L + \epsilon^2 n$，得证。 □

线性增长界不仅仅是一个技术上的便利条件；它使随机微分方程（5）处于标准的伊藤理论框架内，从而可以在各个停止时域上统一应用矩估计和格朗沃尔型论证。有了这一估计，我们现在可以证明轨迹不会在有限时间内爆炸——这一性质对任何实际实现都不可或缺，因为爆炸会使数值格式失效。

定理1 (全局存在唯一性). 在假设*1*下，对任意初始条件 $x_0 \in \mathbb{R}^n$，随机微分方程（*5*）存在唯一的强解 $\{X_t\}_{t\ge 0}$，且满足 $\mathbb{P}(\tau_\infty = \infty) = 1$，其中 τ_∞ 表示爆炸时刻。此外，X_t几乎必然具有连续样本路径。

证明。 局部存在性和唯一性由 q 的局部利普希茨连续性以及标准随机微分方程理论 [15]推出。令τ_∞ 表示爆炸时刻，并定义停止时刻$\tau_k := \inf\{t \ge 0 : \|X_t\|_2 \ge k\}$ 对于 $k \in \mathbb{N}$。对 $V(X_t)$应用伊藤公式 $= \|X_t\|_2^2$:

$$V(X_{t\wedge\tau_k}) = V(x_0) + \int_0^{t\wedge\tau_k} \mathscr{L}V(X_s)\,ds + 2\epsilon\int_0^{t\wedge\tau_k} X_s \cdot dB_s. \quad (15)$$

取期望，并注意到随机积分是一个鞅（被积函数在 $[0, t\wedge\tau_k]$ 上有界）:

$$\mathbb{E}[V(X_{t\wedge\tau_k})] = V(x_0) + \mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge\tau_k} \mathscr{L}V(X_s)\,ds\right]. \quad (16)$$

利用引理1和格朗沃尔不等式:

$$\mathbb{E}[V(X_{t\wedge\tau_k})] \le (V(x_0) + C_2 t)e^{C_1 t} =: K(t). \quad (17)$$

注意， $K(t)$与 k独立。在 $\{\tau_k \le t\}$上，我们有$V(X_{\tau_k}) = k^2$，因此由切比雪夫不等式:

$$\mathbb{P}(\tau_k \le t) \le \frac{\mathbb{E}[V(X_{t\wedge\tau_k})]}{k^2} \le \frac{K(t)}{k^2}. \quad (18)$$

令 $k \to \infty$，得到对所有 $t > 0$均有 $\mathbb{P}(\tau_\infty \le t) = 0$，从而 $\tau_\infty = \infty$ 几乎处处成立。样本路径的连续性由布朗路径的连续性以及漂移在紧区间 [9, 上的有界性推出，参见定理5.2。1] □

整体存在性保证轨迹无限期持续存在，但仅仅持续存在，并不能说明过程会在哪里度过时间。要使随机优化器有效，它必须以概率1返回到帕累托集的某个邻域；而且至关重要的是，它必须在有限的期望时间内做到这一点，这样，有限时长的计算运行才能获得有意义的信息。这种常返性要求的不仅仅是耗散性：漂移不能只是防止过程爆炸，还必须主动将过程拉回到感兴趣区域。假设2恰好提供了这一额外结构，要求下降场在远离原点时至少呈线性增长。

定理2 (正常返)。 假设帕累托最优点集合非空。设 $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ 为一个帕累托最优点（即 $q(\bar{x}) = 0$）。在假设 *1* 和 *2* 下，对于任意 $p > 0$，定义 $S_p := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - \bar{x}\|_2 \le p\}$ 以及首次命中时刻

$$\sigma_{S_p} := \inf\{t \ge 0 : X_t \in S_p\}. \quad (19)$$

则 $\mathbb{W}_{x_0}(\sigma_{S_p} < \infty) = 1$ 且 $\mathbb{E}[\sigma_{S_p}] < \infty$ 对所有 $x_0 \in \mathbb{R}^n$。

证明。 考虑李雅普诺夫函数 $W(x) = \frac{1}{2}\|x - \bar{x}\|_2^2$。作用于 W 的生成算子为:

$$\mathscr{L}W(x) = -(x-\bar{x})\cdot q(x) + \frac{1}{2}\epsilon^2 n = -x\cdot q(x) + \bar{x}\cdot q(x) + \frac{1}{2}\epsilon^2 n. \quad (20)$$

我们逐项分析。根据假设1，对于 $\|x\|_2 \ge r$ 和$\|q(x)\|_2 \ge 1$:

$$-x\cdot q(x) \le -\left(1 + \frac{\theta_0^2}{2}\right)\|q(x)\|_2^2. \quad (21)$$

根据假设2， $\|q(x)\|_2 \ge \mu\|x\|_2$ 对于 $\|x\|_2 \ge r$成立。合并可得:

$$-x\cdot q(x) \le -\left(1 + \frac{\theta_0^2}{2}\right)\mu^2\|x\|_2^2 =: -\gamma\|x\|_2^2. \quad (22)$$

对于第二项，由柯西-施瓦茨不等式和引理1可得:

$$|\bar{x}\cdot q(x)| \le \|\bar{x}\|_2\|q(x)\|_2 \le \|\bar{x}\|_2 L(1+\|x\|_2). \quad (23)$$

因此，当 $\|x\|_2$ 足够大时（例如，当 $\|x\|_2 \ge R$ 满足$R > \max\{r, p\}$时）:

$$\mathscr{L}W(x) \le -\gamma\|x\|_2^2 + L\|\bar{x}\|_2(1+\|x\|_2) + \frac{1}{2}\epsilon^2 n. \quad (24)$$

由于 $\gamma > 0$，当 $\|x\|_2$足够大时，二次项占主导地位。具体而言，存在 $\lambda > 0$ 使得:

$$\mathscr{L}W(x) \le -\lambda \quad \text{for all } x \notin \mathscr{B}_R. \quad (25)$$

这就是正再生 [8]的 Foster-Lyapunov 漂移条件。对停时τ 应用 Dynkin 公式: $= \sigma_{S_p} \wedge T \wedge \tau_R$，其中 $\tau_R := \inf\{t \ge 0 : \|X_t\|_2 \ge R\}$:

$$\mathbb{E}[W(X_\tau)] = W(x_0) + \mathbb{E}\left[\int_0^\tau \mathscr{L}W(X_s)\,ds\right]. \quad (26)$$

如果 $x_0 \notin S_p$，那么只要过程仍处于 S_p之外，就有 $\mathscr{L}W \le -\lambda$，一旦 $\|X_s\|_2 \ge R$。由此可得:

$$\mathbb{E}[W(X_\tau)] \le W(x_0) - \lambda\mathbb{E}[\tau \cdot \mathbf{1}_{\{\|X_s\|\ge R\}}]. \quad (27)$$

由于 $W \ge 0$，令 $T \to \infty$ 取极限并应用控制收敛定理，可得 $\mathbb{E}[\sigma_{S_p}] < \infty$。命中概率 $\mathbb{W}_{x_0}(\sigma_{S_p} < \infty) = 1$由期望有限性可知。依分布收敛到满足 $\mathbb{E}[q(X)] = 0$ 的随机变量 X，则是由

正常返扩散的标准遍历理论 [6,第 4]章得出。 □

正常返具有自然的遍历性推论。由于该过程在有限期望时间内返回紧集，且非退化的扩散系数确保了不可约性，经典结果保证了平稳状态的存在。我们将此记录如下。

推论 1。 在假设 *1* 和 *2* 下，过程$\{X_t\}_{t\ge 0}$ 在$\mathbb{R}^n$上具有唯一的不变概率测度 π 。对于任意有界可测函数 φ:

$$\frac{1}{T}\int_0^T \varphi(X_s)\,ds \to \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,d\pi(x) \quad \textit{a.s. as } T\to\infty. \tag{28}$$

证明。 由克雷洛夫–博戈柳博夫定理，正常返蕴含不变测度的存在。唯一性源于不可约性（由于非退化噪声，该过程可以到达任意开集）以及扩散半群 [9, 定理 4.2.1]的强费勒性质。 □

综合来看，引理1、定理 1 和 2 以及推论 1 为漂移–扩散动力学确立了完整的稳定性图景：轨迹全局存在，在有限期望时间内重访任意帕累托最优点的任意小邻域，并具有唯一不变测度，其时间平均几乎必然收敛。我们有意陈述这些假设，以便它们能够针对具体的目标函数族加以检验——若理论保证要具有实际价值，这一点至关重要。

现在我们转向计算实现。第 4 节采用欧拉–丸山法对(5)进行离散化，并将所得迭代嵌入*pymoo*，从而得到一种可复现的实现，可在评估预算相同的条件下直接与标准进化算法基线进行比较。

IV. 数值实现

上一节的稳定性结果适用于连续时间，但任何计算实现都必须在离散网格上运行。如何将漂移–扩散动力学转化为一种迭代格式，同时保留其定性行为——尤其是定向漂移与随机弥散之间的相互作用——是本节关注的核心。我们将介绍离散化方法，给出相应算法，并详细说明其在开源*pymoo* 框架中的集成方式。

A. Euler–Maruyama 离散化

我们采用欧拉–丸山法对随机微分方程 (5) 进行离散化；对于 Itˆo 随机微分方程而言，这是最简单的强逼近方法 [10]。步长为 $\sigma>0$、噪声强度为 $\epsilon>0$ 时，更新式为

$$x_{j+1} = x_j - \sigma\, q(x_j) + \epsilon\sqrt{\sigma}\,\eta_j, \quad \eta_j \sim \mathcal{N}(0, I_n). \tag{29}$$

扩散项中的因子 $\sqrt{\sigma}$ 确保了与布朗运动缩放的一致性。下降方向 $q(x_j)$ 需要在每一步求解二次规划 (3)。当无法获得解析梯度时，我们通过中心有限差分近似雅可比矩阵 $J(x_j)$。虽然这会带来

算法1 SSW – 随机最陡权重法

要求： 目标函数 $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$；步长 σ；噪声 ϵ；种群 N；代数 G
确保： 存档 $\mathcal{P}^*$
采样 $x_1^{(0)},\dots,x_N^{(0)}$ 在 $[x_l,x_u]$ 上一致
对所有 i，计算 $f(x_i^{(0)})$ 并初始化 $\mathcal{P}^*$
对于 $j=0,\dots,G-1$ **执行**
  对于 $i=1,\dots,N$ **do**
    计算 $J(x_i^{(j)})$ ▷ 解析法或有限差分
    求解二次规划以得到 $\hat{}\alpha\in\Delta^m$，并设置 $q=J^\top\hat{}\alpha$
    采样 $\eta\sim\mathcal{N}(0,I_n)$
    更新 $x_i^{(j+1)}\leftarrow x_i^{(j)}-\sigma q+\epsilon\sqrt{\sigma}\eta$
    投影到 $[x_l,x_u]$
  结束循环
  评估种群并更新 $\mathcal{P}^*$
结束循环
返回 $\mathcal{P}^*$

每个粒子每步额外进行 $2n$ 次函数评估的开销，但在假设底层函数可微的前提下，该方法可用于黑盒问题。

B. 与 *pymoo* 集成

从在决策空间中均匀采样的 N 条独立轨迹开始，每一代让每个粒子前进一步欧拉–丸山步；外部档案收集沿途遇到的非支配解，逐步构建帕累托前沿的近似。算法1明确给出了这一过程。

注释2. 尽管第 *3* 节中的理论分析讨论的是 $\mathbb{R}^n$ 上的无约束动力学，但算法*1*会将结果投影到一个较大的超矩形 $[x_l,x_u]$ 内。添加这一约束是为了确保数值稳定性，并在实际实现中限定搜索空间，这与标准的进化计算实践一致。对于足够大的边界，定理*2*所保证的循环行为确保轨迹始终集中在帕累托集附近，且远在域的内部范围之内。

我们将 SSW 实现为*pymoo*的算法类的子类，因此可以立即使用该库的性能度量和可视化工具——这在实践中是一项不容忽视的优势。我们还对有限差分计算进行了向量化处理，在一次批量调用中通过问题的评估函数评估整个种群；这显著降低了 Python开销，尤其是在种群规模较大时。核心更新逻辑如下所示。

C. 与 *NSGA-II* 和 *NSGA-III* 的比较分析

为将 SSW 置于更广泛的算法背景中，我们在多目标和许多目标场景下，将其与两个成熟的基线算法进行比较：NSGA-II [2] 和 NSGA-III [16]。后者通过基于参考点的环境选择，专为 $m>3$ 个目标而设计。我们在可扩展的目标数量 $m\in\{3,5,10,15\}$ 上考察

```
定义_填充(self):
  X = self.pop.get("X")
  # J_批次的形状为 (N, m, n)
  X_新建 = np.empty_like(X)
  对于i 在 range(len(X)):
    q = _计算_q(J_批次[i]) # 求解二次规划
    eta = self.random_state.standard_normal(n)
    X_new[i] = X[i] - sigma * q + \
                  eps * np.sqrt(sigma) * eta
  xl、xu = self.problem.xl, self.problem.xu
  return Population.new("X", np.clip(X_new, xl, xu))
```

清单 1. SSW 类中的向量化欧拉–丸山步。

DTLZ2基准。为确保可比性，所有算法均在相同的 30,000 次目标函数评估预算下运行。对于 SSW，该预算包括有限差分成本（每个粒子每代需要 $2n$次评估），因此相较于无导数基线（约 400–900 代），可进行的代数大幅减少（约 8–25 代）。

我们使用平均豪斯多夫距离（Δ_p）量化性能，其中包含 $p = 1$，该指标由 [17]提出。选择该指标是因为它对异常值具有较强的鲁棒性，而标准豪斯多夫距离不具备这一特性。所有实验均在配备 Intel Core i9 处理器和 32GB 随机存取存储器的工作站上进行。执行过程中使用了一块配备 8GB 显存的图形处理器，并利用 *PymooLab*框架集成的并行执行能力，并行运行 30 次独立实验。

D. 凸基准测试上的收敛性（*DTLZ2*）

我们首先在 DTLZ2 上评估这些算法。该问题具有平滑的凹形帕累托前沿。表 I 报告了 30 次运行的中位数和四分位距（IQR）。观察到的排名在很大程度上取决于目标数量。在较低维度下（$m = 3$），NSGA-II 和 NSGA-III 达到较小的Δ_p 值（< 0.1），而 SSW 达到 $\Delta_p \approx 0.18$；这一差距与梯度估计预算所允许的代数大幅减少相一致。

在多目标设置（$m = 10$，15）中，NSGA-III 的 Δ_p 值最小（在我们的实验中约为 0.5）。这一表现与其选择机制相符：不同于 NSGA-II，其拥挤距离准则在支配抗性增强时会减弱；NSGA-III 使用参考方向和垂直距离关联，以在高维目标空间中保持分布广度并推动方向性进展。

在维度最高的情形下，SSW 相较于 NSGA-II 仍具竞争力（例如在 $m = 15$ 时约为 1.3，而后者约为 2.4），尽管其运行的代数少得多。我们认为，这至少部分归因于梯度诱导漂移：即使在高维空间中成对支配变得越来越不可靠，漂移仍持续提供指向帕累托集的方向性偏置。同时，SSW 不包含显式的参考方向机制，这可能是其最终帕累托前沿质量逊于 NSGA-III 的原因之一。

局限性。虽然该方法在 DTLZ2 等可扩展的凸流形上表现有效，但将其应用于高度多峰或不连通的景观时会发现，当前的局部梯度漂移不足以逃离深层局部吸引域，或在缺乏全局重启机制的情况下连接彼此分离的帕累托分量。我们认为，纳入全局重启机制的混合设计是解决这些拓扑困难最直接的途径。

注 3. 噪声强度 ϵ决定了开发与探索之间的权衡。我们在这些实验中使用了 $\epsilon = 0.15$ 。据我们所知，如何在运行过程中以一种有原则的方式调整 ϵ，同时保留第 *3* 节的常返性保证，仍未解决。

五、结论与未来工作

最初，这项工作只是为了填补一个空白——Sch¨affler 的漂移–扩散模型虽已在文献中流传，却一直缺少一份完整自洽的稳定性证明；后来，研究内容逐渐拓展，变得更为充实。仅假设1（耗散性）就足以保证强解的整体存在性和非爆炸性；假设2所要求的额外强制性则通过提供 Foster–Lyapunov 漂移条件，弥补了剩余的理论缺口，并由此确立正常返性。这两个假设都不苛刻，而且至关重要的是，它们的表述形式便于针对具体目标函数族直接验证，包括强凸情形以及具有有界帕累托集的问题。

诚然，实现方面的理论含量较低。连续时间过程通过 Euler–Maruyama 方法离散化，并封装为 *pymoo* 算法子类；这一设计使该方法能够立即与该库的基准测试和可视化工具互操作。*PymooLab* [13],这一用于参数检查和帕累托前沿可视化的交互式前端，进一步支持了结果的可复现性；本文一经接收，源代码将在 https://github.com/proftheago/pymoolab 上公开。

若干问题仍然真正悬而未决。当前范围仅限于可微的无约束目标函数，将框架扩展到不等式约束或非光滑函数并非易事——罚函数法与障碍策略各自与随机漂移的相互作用方式都需要重新研究。或许更为紧迫的是噪声强度 ϵ: 全文采用了固定值，但冷却进度表的自然类比（如模拟退火中那样）将使算法能够自我调节，而据我们所知，这样的进度表是否能保持第 3 节中所证明的再现性仍未解决。隐式或算子分裂离散化方案也可降低大曲率目标函数的步长敏感性——标准的欧拉–丸山法更新在此已足够，但一般而言并非最稳健的选择。

有一个方向值得单独提及。梯度引导的漂移本可成为促进多样性的优势，但当前方法几乎没有加以利用：粒子可以自由地聚集在帕累托前沿的单一区域；而当高维目标空间中的成对支配压力减弱时，这种失效模式恰恰会愈发明显。小生境清除、精英保留

表 I 凸 DTLZ2 基准测试上的收敛一致性（30 次独立运行，中位数 [四分位距]）。

问题	m	NSGA-II	NSGA-III	SSW
DTLZ2	3	0.0731 [0.0053]	0.0518 [0.0001]	0.1785 [0.0354]
DTLZ2	5	0.3783 [0.0454]	0.0008 [0.0004]	1.0816 [0.1960]
DTLZ2	10	1.9642 [0.1004]	0.5261 [0.0002]	1.4054 [0.1340]
DTLZ2	15	2.3967 [0.0364]	0.5978 [0.0012]	1.3362 [0.0571]

机制以及类似于 NSGA-III [16] 所采用的参考点关联策略，原则上可以与随机下降相结合，以抵消这一倾向。我们认为，第 3 节中的理论保证在这种混合方法下仍然成立——不过，这仍有待未来工作证明。

致谢

作者谨向 METISBR：一个致力于多目标与多目标优化（多目标优化问题）的巴西研究小组（ https://github.com/METISBR）表示感谢，感谢其在本文开发过程中提出的宝贵意见以及整个团队的支持。

参考文献

[1] K. Miettinen，《非线性多目标优化》。波士顿：Springer，第二版，1999年。[2] K. Deb、A. Pratap、S. Agarwal和T. Meyarivan，“一种快速且具有精英保留机制的多目标遗传算法：NSGA-II”，《IEEE进化计算汇刊》，第6卷第2期，第182–197页，2002年。[3] Q. Zhang和H. Li，“MOEA/D：一种基于分解的多目标进化算法”，《IEEE进化计算汇刊》，第11卷第6期，第712–731页，2007年。[4] S. Sch”affler、R. Schultz和K. Weinzierl，“求解无约束向量优化问题的随机方法”，《优化理论与应用杂志》，第114卷，第222页，2002年1月，第209页。[5] S. Sch”affler，“利用随机积分方程进行无约束全局优化”，《优化》，第35卷第1期，第43–60页，1995年。[6] R. Z. Khasminskii，《微分方程的随机稳定性》。柏林：Springer，第二版，2011年。[7] T. Santos、R. H. C. Takahashi和G. J. P. Moreira，“一种用于多目标优化的协方差矩阵自适应随机微分方程方法”，载于*2012*年*IEEE*进化计算大会论文集，（澳大利亚布里斯班），第1–6页，IEEE，2012年。[8] S. P. Meyn和R. L. Tweedie，《马尔可夫链与随机稳定性》。剑桥：剑桥大学出版社，第二版，2009年。[9] X. Mao，《随机微分方程及其应用》。奇切斯特：Horwood出版社，第二版，2007年。[10] P. E. Kloeden和E. Platen，《随机微分方程的数值解》。柏林：Springer，1992年。[11] J. Blank和K. Deb，“pymoo：Python中的多目标优化”，《IEEE Access》，第8卷，第89497–89509页，2020年。[12] P. Virtanen、R. Gommers、T. E. Oliphant、M. Haberland、T. Reddy、D. Cournapeau、E. Burovski、P. Peterson、W. Weckesser、J. Bright、S. J. van der Walt、M. Brett、J. Wilson、K. J. Millman、N. Mayorov、A. R. J. Nelson、E. Jones、R. Kern、E. Larson、C. J. Carey、 ̇I. Polat、Y. Feng、E. W. Moore、J. VanderPlas、D. Laxalde、J. Perktold、R. Cimrman、I. Henriksen、E. A. Quintero、C. R. Harris、A. M. Archibald、A. H. Ribeiro、F. Pedregosa、P. van Mulbregt和S. . Contributors，“SciPy 1.0：Python科学计算的基础算法”，《自然·方法》，第17卷，第261–272页，2020年。[13] T. Santos、S. Xavier、L. G. d. O. Carneiro和G. de Souza，“PymooLab：一个采用基于大语言模型的代码生成和多准则决策的开源可视分析框架，用于多目标优化。”arXiv预印本，2026年。预印本正在审稿中。[14] I. Karatzas和S. E. Shreve，《布朗运动与随机微积分》。纽约：Springer，第二版，1991年。[15] B. Øksendal，《随机微分方程：应用导论》。柏林：Springer，第六版，2003年。[16] K. Deb和H. Jain，“采用基于参考点的非支配排序方法的进化多目标优化算法，第一部分：求解带盒约束的问题”，《IEEE进化计算汇刊》，第18卷第4期，第577–601页，2014年。[17] O. Sch ̈utze、X. Esquivel、A. Lara和C. A. C. Coello，“将平均豪斯多夫距离用作进化多目标优化的性能度量”，《IEEE进化计算汇刊》，第16卷第4期，第504–522页，2012年。