arXiv:2603.04121v1 [math.AP] 4 Mar 2026

动理学福克-普朗克方程掠射集附近的尖锐正则性

KYEONGBAE KIM 和 MARVIN WEIDNER

Abstract. 我们证明了有界区域中线性动理学福克-普朗克方程解的最优正则性结果。我们的贡献有两方面。首先，我们为漫反射或给定流入边界条件建立了尖锐的 $C^{1/2}$ 正则性。在这一情形下，此前只知道解在某个较小的 $\alpha > 0$下是 C^α 的。其次，我们通过证明超越 $_{1\ 2}$ 临界正则性阈值的高阶展开，完整刻画了解在掠射集附近的行为。这些结果首次表明，在入射边界附近，解一直到掠射集都保持较高的光滑性。

1. Introduction

本文旨在研究具有物理边界条件的区域内，线性动理学方程解的边界行为。本文分析的原型模型是经典的柯尔莫哥洛夫方程

$$(\partial_t + v \cdot \nabla_x) f - \Delta_v f = F \quad \text{in } (0,T) \times \Omega \times \mathbb{R}^n, \tag{1.1}$$

然而，我们所有的 的结果适用于以下一般类别的动理学福克-普朗克方程

$$(\partial_t + v \cdot \nabla_x) f - \operatorname{div}_v(A \nabla_v f) = B \cdot \nabla_v f + F \quad \text{in } (0,T) \times \Omega \times \mathbb{R}^n \tag{1.2}$$

其系数足够光滑。这些是动理学理论中广为人知的模型，自然源于等离子体物理学中兰道方程的线性化。

建立解的正则性是动理学理论中的一项核心挑战。对于非截断玻尔兹曼方程和兰道方程等非线性模型，正则性与适定性直接相关 [HS20, GKTT17, GS25, HST25, ISV26] ，也与收敛到平衡态相关 [DV01, DV05]。近年来，人们对线性动理学方程（如 (1.2)）的正则性 [GIMV19, IM21] 及其非局部对应方程 [IS20, IS21], 产生了浓厚兴趣，因为这些结果为建立玻尔兹曼方程和兰道方程的条件正则性结果提供了必要的估计[CSS18, GIMV19, HS20], [IS20, IS22, FRROW25]。然而，尽管取得了这些进展，相关理论仍主要局限于内部正则性结果，或局限于 x-周期解。

刻画解在物理边界附近的行为，仍然是动理学理论中一个尚未解决的挑战；即便对于最简单的典范模型柯尔莫哥洛夫方程 (1.1)，这一问题目前也远未得到充分理解。困难主要源于边界的特征性，这会导致解在掠射集 [GJW99, HJV14] 附近出现奇异行为。

$$\gamma_0 = (0,T) \times \{(x,v) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^n : v \cdot n_x = 0\}.$$

2020 *Mathematics Subject Classification.* 35Q84, 35B65, 82C40.*Key words and phrases.* 动理学，Fokker-Planck, Kolmogorov，边界，次椭圆，漫反射，流入。

迄今为止，只有对满足镜面反射边界条件 [RW25], 的解，才建立了完整的正则性理论，即

$$f(t,x,v) = f(t,x,R_x v) \quad \text{for } x \in \partial\Omega, \quad \text{where } R_x v = v - 2(v \cdot n_x) n_x, \tag{1.3}$$

其中， n_x 表示 x处的外向单位法向量。在 [RW25], 中，已证明解的正则性至多为 $C^{4,\,1}$，直至 $\partial\Omega$；当 (t,x,v) 趋近于掠射集 γ_0 时，该正则性是最优的，而解在 C^∞ 远离 γ_0 时则具有 $L^\infty_t C^{\alpha/3,\,\alpha}_{v,\,x}$，以及 $C^{1,\,\alpha}_{v}$ 的正则性。此前，对于任意 $\alpha \in (0,1)$ [DGY22, GHJO20], 人们仅知道解具有 $L^\infty_t C^{\alpha/3,\,\alpha}_{v,\,x}$，和 $C^{1,\,\alpha}_{v}$的正则性。

除此之外，其他具有物理意义的边界条件在很大程度上仍未得到探索，而现有结果也未能达到最优正则性阈值，正如我们将在下文中讨论的那样。
本文的第一个主要贡献，是通过建立具有漫反射边界条件或给定流入条件的解的最优正则性估计，解决这一开放问题。这两种条件所诱导的边界行为均与镜面反射的边界行为形成鲜明对比，因为解一般而言在直至掠射集 γ_0 的范围内，其正则性并不会优于 $C^{1/2}$ 。

其次，受解在掠射集附近的奇异行为启发，我们在 γ_0 处建立了高阶展开，其正则性超过 $1/2$的阈值。这为高阶情形下解的渐近行为提供了精确刻画。作为应用，我们证明了具有零流入（即边界为吸收边界）的方程 (1.2) 的解 f 具有以下性质；据我们所知，这是首批超越 $1/2$临界阈值的正则性结果：

- 在入射边界附近， $f \in C^{3-\epsilon}$ 直至 γ_0，即当 $v \cdot n_x \nearrow 0$时， f 优于 $C^{1/2}$ ，
- 远离入射边界时， $f/\Phi \in C^{0,\,1}$ 直至 γ_0 ，其中显式函数为 $\Phi \in C^{1/2}$。

I在下文中，我们将详细介绍主要结果，并讨论其新颖性 y.

1.1. 最优正则性估计。我们将动力学边界 $\gamma := (0,T) \times \partial\Omega \times \mathbb{R}^n$分解为流出、流入和掠射部分 $\gamma = \gamma_+ \cup \gamma_- \cup \gamma_0$，其中

$$\gamma_\pm := (0,T) \times \{(x,v) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^n : \pm v \cdot n_x > 0\}, \quad \gamma_0 := (0,T) \times \{(x,v) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^n : v \cdot n_x = 0\}.$$

动理学方程有几种自然的边界条件（见 [Vil02]）。镜面反射边界条件 (1.3) 具有明确的物理解释，而且在数学上易于处理，因为它类似于诺伊曼条件。然而，由于边界在微观尺度上通常是粗糙的，粒子不会发生弹性反弹，而是与边界相互作用，并根据由边界温度决定的速度分布重新发射 [Mis10]。

这种机制由漫反射边界条件描述，给定函数 $\mathcal{M}$[1]，其定义如下：

$$f = \mathcal{N} f \quad \text{in } \gamma_-, \quad \text{where} \quad \mathcal{N} f(t,x,v) = \mathcal{M}(t,x,v) \int_{\mathbb{R}^n} f(t,x,w)(w \cdot n_x)_- \, \mathrm{d}w. \tag{1.4}$$

我们的首个主要结果完整刻画了满足漫反射边界条件的方程 (1.2) 的解的光滑性。

定理 1.1. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个有界光滑区域，且 A、 B、 $F \in C^\infty((0,T) \times \Omega \times \mathbb{R}^n)$ 和A 是一致椭圆的。设 $\mathcal{M} \in C^\infty(\gamma_-)$。设 f 是满足(1.4)中漫反射条件的(1.2)的弱解，并假设 f、 F和 $\mathcal{M}$ 在 $|v| \to \infty$时具有快速衰减[2]。

[1]通常假设 $\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{M}(t,x,w)(w \cdot n_x)_- \, \mathrm{d}w = 1$。一种规范选择是 $\mathcal{M}(v) = 2e^{-|v|^2}$。[2]这意味着，对任意 $k \in \mathbb{N}$ 和任意多重指标 β，$(1+|v_0|)^k f$、$(1+|v_0|)^k F$ 和 $(1+|v_0|)^k \partial^\beta \mathcal{M}$ 均有界。

那么，对于任意 $[t_0,t_1]\in(0,T)$，有

(i) f 在掠射集之外光滑，即 $f\in C^\infty(([t_0,t_1]\times\Omega\times\mathbb{R}^n)\setminus\gamma_0)$，(ii) $f\in C^{1/2}([t_0,t_1]\times\Omega\times\mathbb{R}^n)$，且满足估计 $\|f\|_{C^{1/2}([t_0,t_1]\times\Omega\times\mathbb{R}^n)}\le C\big(\|(1+|v|)^q f\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega\times\mathbb{R}^n)}+\|(1+|v|)^q F\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega\times\mathbb{R}^n)}\big)$，其中 q、$C>0$ 仅依赖于 n、t_0、t_1、Ω A、B、$\mathcal{M}$。

如下文的备注所阐明，定理 1.1 是我们关于漫反射条件的主要结果的简化版本。

注 1.2. 实际上，我们证明了以下更一般的结论：

- (ii) 在某些 $\epsilon>0$ 和 B 条件下，当 $\partial\Omega\in C^2$, $^\epsilon$, $A\in C^\epsilon$ 时仍然成立（见定理 8.2）。
- 在局部动力学圆柱中，只要系数 $A,B,F,\mathcal{M}$ 满足适当假设，我们就能证明远离 γ_0 处的 $k+\alpha$ 阶 Schauder 型估计（见定理 7.1(ii)）。

对于柯尔莫哥洛夫方程 (1.1) 的解而言， $C^{1/2}$ 正则性已经是新的；而且这种正则性是尖锐的，因为我们在半空间中构造了方程 (1.1) 的一个显式解 f，它满足 $h,\mathcal{M}\in C^\infty$，且 $f\in C^{1/2}$，但对于任意 $\epsilon>0$， $f\notin C^{1/2+\epsilon}$ （见例 7.7）。此外，值得注意的是，由于边界数据对解本身存在非局部依赖，远离 γ_0 处的 C^∞ 正则性也极具挑战性。关于动力学 H¨older 空间的精确定义，请参见第 2 节。

在我们的结果之前，人们只知道带有漫反射条件 (1.4) 的 (1.2) 的解在某个小的 $\alpha>0$ 情况下可延拓至边界 C^α （见 [Zhu24]），无论是在 γ_0 还是在 γ_-。要证明达到最优阶数的正则性结果，需要采用与 [Zhu24] 完全不同的技巧。此外，与镜面反射不同，(1.4) 并不像诺伊曼边界条件。因此，我们无法使用 [RW25], 的方法，需要提出重要的新思路，下面将对此加以说明。

相反，本文证明，漫反射与流入边界条件具有相同的解在掠射集 γ_0 附近的奇异边界行为

$$f=g\quad\text{in }\gamma_-,\tag{1.5}$$

在那里，正则性仅限于 $C^{1/2}$。事实上，我们的第二个主要结果确立了给定流入的最优 $C^{1/2}$ 正则性，并最终通过令 $g=\mathcal{N}f$ 推导出定理 1.1。流入条件规定了具有入射速度的粒子分布，是动理学理论中另一种基本且具有重要物理意义的边界条件（见 [Vil02]）。

下述定理刻画了具有给定流入条件的方程 (1.2) 的解的边界正则性，也是本文的第二个主要结果。

定理 1.3. 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 为有界光滑区域，且 $A,B,F\in C^\infty((0,T)\times\Omega\times\mathbb{R}^n)$ 和 A 一致椭圆。设 $g\in C^\infty(\gamma_-)$。设 f 为满足流入条件 (1.4) 的方程 (1.2) 的弱解，并假设 f,g 和 F 在 $|v|\to\infty$ 时快速衰减。

那么，对任意 $[t_0,t_1]\in(0,T)$，有

(i) f 在掠射集之外光滑，即 $f\in C^\infty(([t_0,t_1]\times\Omega\times\mathbb{R}^n)\setminus\gamma_0)$；(ii) $f\in C^{1/2}([t_0,t_1]\times\Omega\times\mathbb{R}^n)$，且满足以下估计

$$\|f\|_{C^{1/2}([t_0,t_1]\times\Omega\times\mathbb{R}^n)}\le C\left(\|(1+|v|)^q f\|_{L^1((0,T)\times\Omega\times\mathbb{R}^n)}+[g]_{C_q^{1/2+\epsilon}(\gamma_-)}+\|(1+|v|)^q F\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega\times\mathbb{R}^n)}\right),$$

其中 $q,C>0$ 仅依赖于 n,t_0,t_1,Ω A,B。 [3]

[3]我们记为 $[g]_{C_q^\alpha(\gamma_-)}=$ 上确界$_{z_0\in\gamma_-}(1+|v_0|)^q[g]_{C^\alpha(\mathcal{Q}_1(z_0)\cap\gamma_-)}$。 $\mathcal{Q}_1(z_0)$ 的定义见 (1.9)。

注 1.4。我们对定理 1.3 的更精确版本作一些说明。

- 当 $\partial\Omega \in C^{2,\epsilon}$, $A \in C^{\epsilon}$，且 $g \in C^{1/2+\epsilon}$ 对某个 $\epsilon > 0$ 成立时，(ii) 仍然成立，而 $B, F \in L^{\infty}$ （见定理 8.1）。我们预计，当 $g \in C^{1/2} \setminus C^{1/2+\epsilon}$ 时，不存在 $C^{1/2}$ 解。
- 我们还针对属于 $(-1, 1) \times \Omega \times \mathbb{R}^n$ 与一个动力学圆柱交集中的解，建立了直至 γ_0 的局部化 $C^{1/2}$ 估计（见定理 6.2）。
- 远离 γ_0 的 $k+\alpha$ 阶 Schauder 型估计已在 [RW25] 中建立。

直至掠射集的 $C^{1/2}$ 正则性对于柯尔莫哥洛夫方程 (1.1) 而言也尚属首次。在我们的结果之前，与漫反射情形一样，人们仅知道在 $g \neq 0$ 的情况下，解对于某个较小的 $\alpha > 0$ 是 C^{α} （见 [Sil22, Zhu24]）。此外，文献中还有若干关于吸收边界条件边界正则性的结果，即 $g \equiv 0$。下面我们将评述这些结果，以及定理 1.3 如何推广它们:

注记 1.5。• 在 [HJV14、HJJ15、HJJ18], 中，作者证明了 $f \in C_v^{1/2-\epsilon} \cap C_x^{1/6-\epsilon}$对任意 $\epsilon > 0$ 直至掠射集成立。他们的结果并未建立 t 中的任何正则性，并且他们所使用的 H¨older 空间无法刻画 (1.1) 的输运结构，这与定理 1.3 不同。

- [Zhu25] 建立了解的先验 $C^{1/2}$ 估计。这意味着，为使该估计成立，必须假定解直至边界的 $C^{1/2}$ 正则性（见 [Zhu25 中命题 4.3、引理 4.7]的吸收论证）。在我们的所有结果中，我们仅假定 f 为弱解，即$f \in H_v^1$ 直至边界。
- [Zhu25] 中的结果并不能在 v 中给出 (1.1) 全局解的全局估计，例如定理 1.3，因为常数对 $|z_0|$的依赖性并不显式。

此外，关于具有流入边界条件 (1.5) 的动理学方程的变分方法和迹定理的更多结果，请参阅 [LN21、AAMN24、AH26、Hou26] 。
定理 1.3 结果的尖锐性可由一维情形下方程 (1.1) 的显式 $C^{1/2}$ 解$g \equiv 0$ 推出。这些解可追溯到上世纪概率学家对积分布朗运动首次通过时间的研究（参见 [GJW99], ，另见 [McK63、Gol71、Sin92、IW94], 以及较近期的文章 [HJV14、Zhu24]）。

最后，尽管我们的结果对于吸收边界而言已是新的，但将这些最优正则性估计推广到一般的非零入流数据并非易事。这主要是因为在动理学框架下，标准的屏障论证似乎并不容易奏效。关于我们方法的更详细讨论，请参阅第1.3小节。

1.2. 掠射集附近的高阶估计。解在掠射集处的正则性较低，这与解在其他所有边界点附近的光滑性形成鲜明对比。这种在 γ_0 处的特殊行为源于输运算子对与边界相切的速度发生退化，从而破坏了解的次椭圆正则化。这一现象促使我们详细分析 γ_0 附近解的精确行为。在此背景下，自然会提出以下问题:

Can we characterize the higher order asymptotics of solutions near γ_0?

解决这一问题也是本文的另一项主要目标。此外，正如下文将要解释的，即使只是为了证明 $C^{1/2}$ 正则性，高阶渐近也至关重要。

作为分析的起点，我们回顾显式解

$$\phi_0(x,v)=\begin{cases}x^{1/6}U\left(-\frac{1}{6},\frac{2}{3},-\frac{v^3}{9x}\right) & \text{if } v<0,\\ c_0x^{1/6}e^{-\frac{v^3}{9x}}U\left(\frac{5}{6},\frac{2}{3},\frac{v^3}{9x}\right) & \text{if } v\geq 0\end{cases}$$

具有吸收边界的一维定常柯尔莫哥洛夫方程

$$\begin{cases}v\partial_x\phi_0=\partial_{vv}\phi_0 & \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R},\\ \phi_0=0 & \text{on } \{0\}\times(0,\infty),\end{cases}\tag{1.6}$$

这可追溯至 [Gol71, GJW99]。其中，$c_0=\frac{\Gamma(7/6)\Gamma(1/6)}{}$ 而 U 表示 Tricomi 合流超几何函数。ϕ_0 的精确边界行为可由 [Gol71, Sin92, IW94, GJW99], 显式计算得出，并揭示了三个具有不同渐近轮廓的特征区域:

$$\phi_0(x,v)\eqsim\begin{cases}x^{\frac{1}{6}}\left(\frac{v^3}{x}\right)^{-\frac{5}{6}}e^{-\frac{v^3}{9x}} & \text{if } x<v^3,\\ x^{\frac{1}{6}} & \text{if } x\geq|v|^3,\\ |v|^{\frac{1}{2}} & \text{if } x<-v^3.\end{cases}\tag{1.7}$$

很自然会猜想（事实上，这也是对上述问题的一种恰当改述）：柯尔莫哥洛夫方程的所有解

$$\begin{cases}(\partial_t+v\cdot\nabla_x)f-\Delta_v f=F & \text{in } \big((-1,1)\times\Omega\times\mathbb{R}^n\big)\cap\mathcal{Q}_1(z_0)=:\mathcal{H}_1(z_0),\\ f=g & \text{on } \gamma_-\cap\mathcal{Q}_1(z_0),\end{cases}\tag{1.8}$$

其中 $\mathcal{Q}_1(z_0)$ 表示一个标准的动力学圆柱（见 (1.9)），至少当 $g=0$ 时，在 γ_0 中任意边界点附近，其表现都类似于函数 ϕ_0，两者之差为一个光滑误差项。我们的主要结果证实了这一猜想，但也表明，在一般区域以及存在源项的情况下，情形要复杂得多。

我们的研究结果精确描述了解在 γ_0 处奇异性的各向异性特征。为陈述这些结果，我们需要将 $z_0\in\gamma_0$ 附近的区域分解为若干不同的子区域，类似于 (1.7)。我们记 $d_\Omega(x)=\operatorname{dist}(x,\partial\Omega)$，并对 $\epsilon\in(0,1]$ 写作:

$$\mathcal{R}_-^\epsilon:=\big\{d_\Omega^\epsilon(x)\leq(n_x\cdot v)^3\big\},\qquad \mathcal{R}_+=\{d_\Omega(x)\leq-(n_x\cdot v)^3\},\qquad \mathcal{R}_0=\{d_\Omega(x)\geq|n_x\cdot v|^3\}.$$

这里，若 $x\in\Omega$，我们将 n_x 记为 x 在 $\partial\Omega$ 上的投影 $\bar{x}\in\partial\Omega$ 处的外单位法向量，并且不失一般性地假设该投影在 $\mathcal{Q}_1(z_0)$ 中唯一[4]。

我们的第三个主要结果表明，柯尔莫哥洛夫方程的解在入射边界 γ_- 附近直至掠射集 γ_0 处，仍保持低于三阶的更高正则性，即当 $v\cdot n_x\nearrow 0$ 时。

定理 1.6. 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是一个有界光滑区域，且 $z_0\in\gamma_0$ 和 $\epsilon\in(0,1)$。设$F\in C^{5/2}(\mathcal{H}_1(z_0))$ 和 $g\in C^{2,1}(\mathcal{H}_1(z_0)\cap\gamma_-)$。设 f 是 (1.8) 在 $\mathcal{H}_1(z_0)$ 中的一个解。

那么，有 $f\in C^{3-\epsilon}(\mathcal{H}_{1/2}(z_0)\cap\mathcal{R}_-^\epsilon)$，并且

$$\|f\|_{C^{3-\epsilon}(\mathcal{H}_{1/2}(z_0)\cap\mathcal{R}_-^\epsilon)}\leq C\big(\|f\|_{L^1(\mathcal{H}_1(z_0))}+[F]_{C^{5/2}(\mathcal{H}_1(z_0))}+[g]_{C^{2,1}(\mathcal{H}_1(z_0)\cap\gamma_-)}\big),$$

其中 C 仅依赖于 n、ϵ、$|z_0|$ 和 Ω。

[4]我们总能找到 z_0 的一个管状邻域，使得到边界的投影是唯一的。

该结果对于系数足够光滑的动力学 Fokker-Planck 方程 (1.2) 的解仍然成立（见定理 8.4）。

需要强调的是，与定理 1.3(i)不同，定理 1.6 中的范数直到掠射集都保持一致有界。这一事实使定理 1.6 与 γ_- [Sil22、定理 1.3], [RW25、命题 4.5], 以及 [Zhu25、定理 1.2]中此前的高阶正则性结果有着根本区别。因此，据我们所知，定理 1.6 是首个证实沿特定方向一直到 γ_0 具有更高正则性的结果。

我们指出，定理 1.6 所建立的正则性是尖锐的，其含义是解一般不会超过 $C^{3-\epsilon}$ 正则性。事实上，我们构造了一个显式函数，该函数在全局上属于 $C^{1,1}$，并且在 $\mathcal{R}^{\epsilon}_-$中具有 $C^{3-\epsilon}$，同时它在满足吸收边界条件的情况下求解 (1.1)（见例 6.7）。注意，在齐次情形 $F \equiv 0$下，结合 [Sil22、定理 1.3] 与内部估计，甚至可以证明解在γ_- 附近一直具有 C^∞ 正则性，直到 γ_0。

在临界正则性阈值 $_{1\,2}$ 之上达到 γ_0 的正则性估计，在 $\mathcal{R}^{\epsilon}_-$ 中除了 $\epsilon \in (0, 1)$ 之外的任何区域都不成立；$\epsilon \in (0, 1)$ 正是定理 1.6 所考察的区域。事实上，显式解 ϕ_0 排除了这种行为：沿轨迹 $x = v^3$（即在 $\mathcal{R}^1_-$ 的边界上）以及在 $\mathcal{R}^0 \cup \mathcal{R}^+$ 中，该解仅具有 $C^{1/2}$ 正则性。不过，正如我们的下一个主要结果所述，在这些区域中，所有解（满足吸收边界条件）都渐近地表现得如同 ϕ_0，且误差项是 Lipschitz 连续的。

定理 1.7. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个有界光滑区域，且 $z_0 \in \gamma_0$。设 $F \in L^\infty(\mathcal{H}_1(z_0))$ 且$g \equiv 0$。设 f 是方程 (1.8) 在 $\mathcal{H}_1(z_0)$ 中的一个解，并定义 $\Phi(t, x, v) = \phi_0(\operatorname{dist}(x, \partial\Omega)\ v \cdot n_x)$。
Then, 成立

$$\frac{f}{\Phi} \in C^{0,1}\big(\mathcal{H}_{1/2}(z_0) \setminus \mathcal{R}^1_-\big).$$

此外，我们有如下估计

$$\|f/\Phi\|_{C^{0,1}(\mathcal{H}_{1/2}(z_0)\setminus\mathcal{R}^1_-)} \le C\big(\|f\|_{L^1(\mathcal{H}_1(z_0))} + \|F\|_{L^\infty(\mathcal{H}_1(z_0))}\big),$$

其中 C 仅依赖于 n、$|z_0|$、Ω。

对于具有足够光滑系数的动力学 Fokker-Planck 方程 (1.2) 的解，这一定理的一个变体仍然成立（半空间中的一个版本见定理 6.3，光滑凸区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$中的结果见定理 8.6）。在这种情况下，函数 Φ 必须作适当修改。注意，Φ^2 始终与到 γ_0的动力学距离（记作 $\operatorname{dist}_{\text{kin}}$，见 (8.16)）相当，且从高阶意义上看，

$$\Phi \asymp \operatorname{dist}_{\text{kin}}^{1/2}, \qquad D^\beta \Phi \lesssim \operatorname{dist}_{\text{kin}}^{1/2-|\beta|} \quad \text{in } \mathcal{H}_1(z_0) \setminus \mathcal{R}^1_-.$$

定理 1.7 证实，函数 ϕ_0 精确刻画了解在远离入射边界的 γ_0 附近的边界行为。不过请注意，定理 1.7 的渐近描述在入射边界附近不再成立。事实上，在附录 C 中构造的函数 ϕ_{-1} 是方程 (1.6) 的一个解，而根据 (C.38)，ϕ_{-1}/ϕ_0 在 γ_- 上直至 γ_0 都不是有界的。

注记 1.8. 在定理 1.7 的设定下，Lipschitz 正则性在某种意义上是尖锐的，正如我们在例 6.4 中所讨论的那样。然而，在某些特殊情形下，最优正则性指数更高，并且可以沿用我们的方法获得正则性估计，具体说明见注 6.5：

- 在半空间中，可以证明最优正则性为 $C^{3/2}$ 而不是 $C^{0,\,1}$。这表明系数的存在使解的边界行为变得更加复杂。

- 在半空间情形 $F \equiv 0$下，甚至可以证明最优正则性为 $C^{1,1}$，而不是 $C^{0,1}$。

我们强调，定理 1.6 和定理 1.7 似乎是首批证明带吸收边界的柯尔莫哥洛夫方程的解在临界阈值 $\frac{1}{2}$ 以上具有正则性的结果。与我们工作最为相关的研究可能是 [HLW24], ，其中作者根据 ϕ_0考察了半空间内柯尔莫哥洛夫方程解的精确边界行为。然而，[HLW24] 并未讨论余项的光滑性。另一方面，他们的结果给出了关于解的尖锐时间衰减估计。

1.3. 证明策略。我们所有主要结果的证明中共同面临的关键困难，均源于 γ_0处解的奇异行为。本文的核心创新在于刻画满足给定流入边界条件的解在 γ_0 附近的高阶渐近。请注意，相较于镜面反射（见 [RW25]），流入条件的情形更为复杂，因为解表现出更加奇异的行为。

1.3.1. 在 γ_0处的高阶展开。证明定理 1.3、定理 1.7 和定理 1.6 的主要思想是确立：(1.2) 的所有解在 γ_0 中的边界点处的行为与显式解 ϕ_0 相同，直至具有更高光滑性的误差项。

让我们在最简单的情形下解释这一结果，即当$\Omega = \{x_n > 0\}$ 为半空间时。我们考虑$(-1,1) \times \Omega \times \mathbb{R}^n$ 与动力学圆柱的交集中的解

$$\mathcal{Q}_R(z_0) = \big\{(t,x,v) \in (t_0 - R^2, t_0 + R^2) \times B_{R^3}(x_0 + (t-t_0)v_0) \times B_R(v_0)\big\}. \tag{1.9}$$

注意，在平坦情形下，成立 $\gamma = (-1,1) \times \{x_n = 0\} \times \mathbb{R}^n$，并且

$$\gamma_0 = (-1,1) \times \{x_n = 0\} \times \{v_n = 0\}, \quad \gamma_\pm = (-1,1) \times \{x_n = 0\} \times \{\pm v_n < 0\}.$$

让我们假设 f 求解带有给定流入的柯尔莫哥洛夫方程

$$\begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f - \Delta_v f = F & \text{in } Q_1(z_0) \cap \big((-1,1) \times \{x_n > 0\} \times \mathbb{R}^n\big) =: \mathcal{H}_1(z_0), \\ f = g & \text{in } \mathcal{Q}_1(z_0) \cap \big((-1,1) \times \{x_n = 0\} \times \{v_n > 0\}\big) \end{cases} \tag{1.10}$$

对某个 $z_0 \in \gamma_0$，其中 $F \in L^\infty(\mathcal{H}_1(z_0))$且 $g \in C^{\frac{1}{2}+\epsilon}(\mathcal{Q}_1(z_0) \cap \gamma_-)$，对某个 $\epsilon \in (0, \frac{1}{2})$。
我们在边界点 z_0 处建立如下 $\frac{1}{2} + \epsilon$ 阶展开，其中某个 $c_0 \in \mathbb{R}$:

$$|f(z) - g(z_0) - c_0\phi_0(x_n, v_n)| \lesssim r^{\frac{1}{2}+\epsilon} \quad \forall z = (t,x,v) \in \mathcal{H}_r(z_0). \tag{1.11}$$

由于函数 ϕ_0 是 $C^{1/2}$，结合 (1.11)、内部估计以及远离掠射集处的边界估计（见 [RW25]），我们得以推导出 $f \in C^{1/2}$，直至掠射集处。这证明了我们的主要结果——关于流入边界条件下最优正则性的定理 1.3。

我们强调，(1.11) 应被理解为一个阶数严格大于$\frac{1}{2}$的正则性估计，因为它表明函数 $z \mapsto f(z) - g(z_0) - c_0\phi_0(z)$ 在点 z_0处局部是 $C^{\frac{1}{2}+\epsilon}$。
尽管人们可能会想仅依靠基于显式解 ϕ_0的屏障论证来证明定理 1.3，但由于以下原因，我们无法通过这种方法达到最优正则性 $C^{1/2}$：

- 采用扰动论证时，自然会损失 ϵ阶导数；对于系数为 (1.2) 的方程，当 $\epsilon > 0$较小时也是如此。

- 如何处理非零边界数据 g并不明确。由于 g 通常并非 C^2，因此不能简单地将其从解中“减去”，以便将问题化为齐次问题。

展开式 (1.11) 使我们能够克服所有这些障碍，同时也为我们提供关于解行为的更高阶信息。

为了证明关于 γ_0 附近解的精确行为的主要结果定理 1.6 和定理 1.7，我们需要更高阶的渐近展开 $\beta < 3+\frac{1}{2}$。事实上，在这一方向上，我们最一般的结果是命题 5.1，其中我们证明存在多项式 $P \in \mathcal{P}_{\lfloor\beta\rfloor}$、 $p_{\phi_0} \in \mathcal{P}_{\lfloor\beta-\frac{1}{2}\rfloor}$、 $p_{\psi_0} \in \mathcal{P}_{\lfloor\beta-2\rfloor}$ 和 $p_{\phi_1} \in \mathcal{P}_0$，使得

$$|f(z) - P(z) - p_{\phi_0}(z)\phi_0(x_n, v_n) - p_{\psi_0}(z)\psi_0(x_n, v_n) - p_{\phi_1}\partial_{v_n}\phi_1(x_n, v_n)| \lesssim r^\beta \quad \forall z \in \mathcal{H}_r(z_0). \tag{1.12}$$

这一更高阶展开揭示了动理学方程的一个关键特征：仅凭显式的一维函数 ϕ_0，不足以全面刻画解在掠射集处的边界行为。事实上，定常柯尔莫哥洛夫方程还有另外两个显式解 ψ_0 和 ϕ_1；当 $\beta > 2$ 和 $\beta > 2 + \frac{1}{2}$ 时，分别必须将它们纳入展开中。函数 ϕ_1 满足 $\partial_x\phi_1 = c_1\phi_0$，其中某个 $c_1 \in \mathbb{R}$，它还是 (1.6) 的另一个显式解，其齐次次数为 $3 + \frac{1}{2}$，且渐近行为与函数 ϕ_0 非常相似（见 (C.37)）。另一方面，函数 ψ_0 满足

$$\begin{cases} v\partial_x\psi_0 - \partial_{vv}\psi_0 = 1 & \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}, \\ \psi_0 = 0 & \text{on } \{0\}\times(0,\infty), \end{cases} \tag{1.13}$$

其边界行为与 ϕ_0 的边界行为有根本区别。例如，结果表明 ψ_0 是二次齐次的（而不是 $1\,2$），这意味着 $\psi_0 \in C^{1,\,1}$（而不是 $C^{1/2}$），直至 γ_0。另一方面，函数 ψ_0 在 γ_- 处并不呈现指数衰减，而仅呈多项式衰减。确切地说，当 $v \cdot n_x \nearrow 0$ 时，其尖锐行为满足 $\psi_0 \in C^{3-\epsilon}(\{x_n^\epsilon \le v_n^3\})$，其中 $\epsilon \in$ 属于 (0, 1)（见引理 C.9）。因此，由于 (1.12)，我们能够推断，(1.10) 的任意解都具有与 $v \cdot n_x \nearrow 0$ 相同的正则性性质，从而得到定理 1.6。

注 1.9. 请注意，在 $\beta > 3+\frac{1}{2}$ 的情况下，需要对 (1.12) 作出修改。事实上，可以找到一个可数的解族 ϕ_m，它们是 (1.15) 的解，具有 $\frac{1}{2} + 3m$ 次齐次性，并满足 $\partial_x\phi_m = c_m\phi_{m-1}$，其中某个常数为 $c_m \in \mathbb{R}$。类似地，也可以找到函数 ψ_0 的高阶版本。我们在附录 C 中显式计算这些解，并证明了若干可能具有独立意义的性质。β 的值越大，展开中就必须包含越多涉及这些函数（及其导数）的项。尽管我们的方法能够处理这一点，但本文决定不纳入 $\beta > 3 + \frac{1}{2}$ 阶展开。

1.3.2. 刘维尔定理。即使在最简单的情形下，也就是当 f 满足方程 (1.10) 时，证明展开式 (1.11) 和 (1.12) 也远非易事。我们通过在边界点 $z_0 \in \gamma_0$ 处进行爆破论证来证明它们，这一论证高度依赖于以下关于半空间中解的刘维尔型分类结果（另见定理 4.1）：

定理 1.10。设 $\beta \in (0, 3 + \frac{1}{2})$ 以及 q、 Q 为多项式。设 f 为下列方程的一个解：

$$\begin{cases} (\partial_t + v\cdot\nabla_x)f - \Delta_v f = Q & in\ \mathbb{R}\times\{x_n > 0\}\times\mathbb{R}^n, \\ f = q & in\ \mathbb{R}\times\{x_n = 0\}\times\{v_n > 0\}, \end{cases}$$

使得

$$|f(t,x,v)| \le C(1 + |t|^{1/2} + |x|^{1/3} + |v|)^\beta \qquad \forall (t,x,v) \in \mathbb{R}\times\{x_n \ge 0\}\times\mathbb{R}^n. \tag{1.14}$$

那么，存在多项式 P、 p_{ϕ_0}、 p_{ψ_0} 和 p_{ϕ_1}，使得 f 具有如下形式

$$f = P + p_{\phi_0}\phi_0 + p_{\psi_0}\psi_0 + p_{\phi_1}\partial_{v_n}\phi_1.$$

值得注意的是，近期 [RW25] 针对满足镜面反射条件的解，提出了一种基于刘维尔定理、用于证明动理学方程边界正则性的爆破过程。然而，我们证明刘维尔定理的方法必须与 [RW25], 中的方法有根本区别，这也使定理 1.10 成为本文的主要贡献之一。事实上，镜面反射条件类似于纽曼型边界条件：对于 $Q = 0$ 中的解，可以通过镜像反射将其延拓为全局解，因此它们必为多项式。我们的问题中无法使用这一强有力的工具，因此必须采用全然不同的方法，即便对于一维中满足 $q = Q = 0$ 的定常解也是如此，也就是说，

$$v\partial_x f - \partial_{vv} f = 0 \quad \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}, \qquad f = 0 \quad \text{on } \{0\}\times(0,\infty). \tag{1.15}$$

在这种情况下，满足 (1.14) 的所有解（ $\beta < 3 + \frac{1}{2}$ ）均由 ϕ_0 给出（相差一个乘法常数）。证明如下：首先，通过求解一个常微分方程问题，我们证明 (1.15) 的唯一齐次解（相差一个乘法常数）为 ϕ_0。由此，只需证明 (1.15) 的所有解都是齐次解；然而，在我们的情形下，这远非显而易见。对于椭圆方程或非局部问题，这一点通常可以由斯图姆–刘维尔型定理推出（见 [ROS16, FRO22]），但此处无法采用这一工具，因为 ϕ_0 不属于相应的加权 L^2 空间。相反，我们的证明依赖于构造显式的下解和上解，从而在边界附近为 (1.15) 的解建立精确的上下界。这些界推出了 (1.15) 解的边界哈纳克型原理，并给出一个阶为 $\beta < \frac{1}{2} + \epsilon$的一维刘维尔定理；随后，借助最大值原理以及对 ϕ_0渐近行为的精确分析，我们可以提升这一结果。

1.3.3. 带系数的方程。本文提出一种统一方法，也可据此为带有系数 (1.2) 的一般线性动理学福克–普朗克方程的解建立类似于 (1.12) 的展开式。请注意，要在一般区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 中证明柯尔莫哥洛夫方程 (1.1) 的结果，就已经必须考虑非平移不变方程。

在这种情况下，展开式 (1.12) 及其证明都需要进行重大修改，其中一些修改我们将在下文讨论：

- 在任意点 z_0，都必须对函数 ϕ_0 （以及 ψ_0）进行适当缩放，使得 $v\partial_x\phi_0 = A_{n,n}(z_0)\partial_{vv}\phi_0$。因此，系数矩阵 A 的正则性对于从边界点 $z_0 \in \gamma_0$处的展开式推导解的正则性至关重要。
- 由于系数依赖于 z，且 A具有非对角结构，（缩放后的）函数 ϕ_0 将满足方程 (1.2)，其无界源项 F 在边界处的表现类似于 $\partial_v\phi_0$ 和 $\partial_{vv}\phi_0$ 。为弥补这一点，我们还必须将以下形式的函数纳入展开式 (1.12)，而这些函数在平移不变情形下并不存在，

$$v_n^i\partial_{v_n}^{(j)}\phi_0, \quad v_n^i\partial_{v_n}^{(j)}\phi_1, \quad v_n^i\partial_{v_n}^{(j)}\psi_0, \qquad \text{for } i,j\in\{0,1,2\}.$$

  由于所有这些函数都会产生更多误差项，因此在证明过程中，如何恰当地平衡这些误差项是一大关键困难。

由于系数的存在，（1.12）中上述修改给展开结果的证明以及主要结果带来了若干非平凡的挑战。例如，我们必须将 C^α 对 [Sil22, Zhu24] 的估计推广到源项可能具有散度形式或无界的方程（见引理 5.2 ）。我们在第 5 节中详细讨论了所有这些复杂问题。我们最一般的展开结果见命题 5.1。

1.3.4. 漫反射。最后，我们对漫反射条件相关主要结果的证明作几点说明（见定理 1.1）。

正如我们之前提到的，由于例 7.7，满足漫反射条件的解与具有给定流入的解具有相同的奇异边界行为。因此，为了证明解整体上具有 $C^{1/2}$，且在 γ_- 中局部具有 C^∞，我们需要证明

(a) 在 γ_- 中直到 γ_0 都有 $\mathcal{N}f \in C^{1/2+\epsilon}$，其中某个 $\epsilon > 0$, (b) 在 γ_- 中局部有 $\mathcal{N}f \in C^\infty$（远离 γ_0），

因此，结合 $g = \mathcal{N}f$ 应用定理 1.3，即可得出定理 1.1。
验证 (a) 和 (b) 并非易事，因为该量以积分方式取决于解在 f 中的取值，即

$$\mathcal{N}f(t,x,v) = \mathcal{M}(t,x,v)h(t,x,v), \qquad \text{where} \qquad h(t,x,v) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t,x,w)(w\cdot n_x)_- \,\mathrm{d}w.$$

为了证明 (a)，我们应用 f 的 $\alpha \in (0,1)$ 阶全局正则性估计，这些估计已在 [Sil22, Zhu24] 中建立，并将其与远离 γ_0 的正则性估计相结合（见 [RW25, 命题 4.5]），使用在 γ_0 处消失的权重 $(w\cdot n_x)_-$（见命题 7.2(i)）。

(b) 的证明要复杂得多，因为函数 f 通常仅在 γ_0 意义下具有 $C^{1/2}$，因此原则上，当 $(w\cdot n_x)_- \to 0$ 时，阶数为 β 的更高阶导数会像 $D^\beta f \sim (w\cdot n_x)_-^{-\beta+1/2}$ 一样爆炸。我们通过边界展平来规避这一问题，即考虑 $\Omega = \{x_n > 0\}$ 上的问题，并注意到在这种情况下，$n_x \equiv -e_n$ 变为常数。因此，函数 h 仅依赖于 (t,x')，而这两个方向均与边界相切。这意味着，为了获得 h（进而获得 $\mathcal{N}f$）的更高正则性，我们只需证明 f 在 γ_+ 上关于 (t,x') 具有更高正则性，直至 γ_0。为此，我们在切向方向 (t,x') 上对 f 取增量 $\delta_h f$，并分析这些增量所满足的线性动理学福克 – 普朗克方程（其精确定义见 (7.20)），该方程大致具有如下形式

$$\begin{cases} (\partial_t + v\cdot\nabla_x f)\delta_h f - \operatorname{div}_v(A\nabla\delta_h f) = \delta_h F + \operatorname{div}_v(A\nabla_v f) & \text{in } \{x_n > 0\}, \\ \delta_h f = \delta_h(\mathcal{N}f) & \text{on } \gamma_- \end{cases}$$

（另见 (7.29)）。这里的一个关键困难来自源项 $\operatorname{div}_v(A\nabla_v f)$，因为函数$A\nabla_v f$ 通常在 γ_0 处无界，这是因为 f 不比 $C^{1/2}$更好。我们通过结合展开式 (1.12) 与远离 γ_0 处的高阶正则性结果（见引理 7.3 和引理 7.5）来解决这一问题，从而推导出 $A\nabla_v f$ 属于某个合适的 L^p 空间，使得$\delta_h f$ 的正则性估计可由定理 1.3 通过扰动论证得到。对于更高阶增量，这一过程会变得愈发复杂，因此我们必须发展出精细的归纳论证，以推导出 $\mathcal{N}f$ 的C^∞ 正则性（见命题 7.2(ii)）。

1.4. 提纲。本文结构如下。在第 2 节中，我们介绍本工作所需的函数空间与弱解概念。第 3 节专门证明一维情形下带给定流入条件的定常解的刘维尔定理；在第 4 节中，我们通过证明半空间中的刘维尔定理来推广这一结果（简化版本见定理 1.10）。接下来，在第5节中，我们建立掠射边界点 $z_0 \in \gamma_0$ 处的展开，并证明命题 5.1，该命题特别蕴含 (1.11)、(1.12)。在第 6 节和第 7 节中，我们针对特殊情形 $\Omega = \{x_n > 0\}$ 下带系数的 (1.2) 的解建立主要结果，并讨论其尖锐性。在第 8 节中，我们将这些结果推广到一般区域，从而建立定理 1.1、定理 1.3、定理 1.7 和定理 1.6。最后，本文附有四个附录，其中

最值得注意的是附录 C：我们在其中找到 (1.6) 在吸收条件与给定流入条件下的显式可数族齐次解，并推导它们在接近 γ_0 时行为的精细估计。我们认为这些结果具有独立的意义。

1.5. 致谢。Kyeongbae Kim 和 Marvin Weidner 得到了德国研究联合会（DFG，即德国研究基金会）卓越战略项目 EXC-2047/1 - 390685813 的资助，并通过 CRC 1720 获得支持。

2. Preliminaries

本节将介绍一些记号、函数空间以及我们对弱解的定义，并给出若干辅助引理。

下文中，我们用 c 表示一般常数。在需要时，我们会在括号中说明其对参数的依赖；例如，$c = c(n, \Lambda)$ 表示常数 c 仅依赖于 n 和 Λ。此外，当 $\frac{1}{c}a \le b \le cb$ 时，对于某个万有常数 $c \ge 1$，我们记作 $a \eqsim b$。

首先，我们介绍一些几何记号：

- 我们将点 $X_0 \in \mathbb{R}^{2n}$ 和 $z_0 \in \mathbb{R}^{2n+1}$ 记作

$$X_0 = (x_0, v_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad z_0 = (t_0, x_0, v_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

  此外，我们用 $x_0' \in \mathbb{R}^{n-1}$ 表示 $x_0 = (x_0', x_{0,n}) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ 的前 $n-1$ 个分量。特别地，对于任意 $z_0 = (t_0, x_0, v_0) \in \mathbb{R}^{2n+1}$，我们记 $z_0' = (t_0, x_0', v_0') \in \mathbb{R}^{2(n-1)+1}$，其中 $x_0 = (x_0', x_{0,n})$ $v_0 = (v_0', v_{0,n})$。

- 我们回顾由下式定义的左群作用

$$z_0 \circ z = (t_0 + t, x_0 + x + tv_0, v + v_0), \quad z_0^{-1} = (-t_0, -x_0 + t_0 v_0, -v_0).$$

  特别地，我们记作

$$|z_0 - z_1| = |z_1^{-1} \circ z_0| := \max\{|t_0 - t_1|^{\frac{1}{2}}, |x_0 - (x_1 + (t_0 - t_1)v_1)|^{\frac{1}{3}}, |v_0 - v_1|\}$$

  and

$$|X_0 - X_1| = \max\{|x_0 - x_1|^{\frac{1}{3}}, |v_0 - v_1|\}.$$

- 对于任意 $r > 0$ 和 $z \in \mathbb{R}^{2n+1}$，我们记 $S_r z := (r^2 t, r^3 x, rv)$。
- 对于任意 $v_0 \in \mathbb{R}^n$，我们记 $\langle v_0 \rangle := 1 + |v_0|$。
- 动力学圆柱及其与区域的交集定义如下

$$\mathcal{Q}_R(z_0) = \left\{(t, x, v) : t \in (t_0 - R^2, t_0 + R^2) =: I_R(t_0), \ \ x \in B_{R^3}(x_0 + (t - t_0)v_0), \ \ v \in B_R(v_0)\right\},$$
$$\mathcal{H}_R(z_0) := \mathcal{Q}_R(z_0) \cap (\mathbb{R} \times \{x_n > 0\} \times \mathbb{R}).$$

- 在全文中，我们始终考虑系数矩阵 $A(z)$：$\mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}^{n^2}$ 使得 A 一致椭圆，其椭圆性常数为 $\Lambda \ge 1$，即

$$\Lambda^{-1} I_n \le A \le \Lambda I_n.$$

- 给定一个区域 $(a, b) \times \Omega \times V \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$，其中 Ω 和 V 均为有界集合，我们将 $(a, b) \times \Omega \times V$ 的动力学边界定义为

$$\partial_{\text{kin}}((a, b) \times \Omega \times V) = (\{t = a\} \times \Omega \times V) \cup ((a, b) \times \Omega \times \{v \in \partial V\}) \cup \gamma_-.$$

我们回顾 k　　如 [IS21] 中所述的动力学距离和动力学 H¨older 空间。对于任意 z_1, z_2，我们记 e

$$\operatorname{dist}(z_1,z_2) \coloneqq \min_{w\in\mathbb{R}^n}\left\{\max\left\{|t_1-t_2|^{\frac{1}{2}}, |x_1-(x_2+(t_1-t_2)w|^{\frac{1}{3}}, |v_1-w|, |v_2-w|\right\}\right\}.$$

于是我们观察到 $|z_1-z_2| \approx \operatorname{dist}(z_1,z_2)$。

对于任意 $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ 和 $\epsilon\in(0,1]$, , 我们记

$$C^{k,\epsilon}(D) \coloneqq \{f: D\to\mathbb{R} : \|f\|_{C^{k,\epsilon}_\ell(D)} \coloneqq \|f\|_{L^\infty(D)} + [f]_{C^{k,\epsilon}(D)} < \infty\},$$

$$[f]_{C^{k,\epsilon}(D)} \coloneqq \sup_{z_1\in D}\sup_{p\in\mathcal{P}_k}\sup_{z_1\neq z_2\in D}\frac{|(f-p)(z_2)|}{\operatorname{dist}(z_1,z_2)^{k+\epsilon}},$$

并将 $\mathcal{P}_k$ 记为动力学次数为 k 的动力学多项式空间（精确定义见 [RW25] ）。注意，我们采用以下约定。当我们写 $f\in C^\alpha(\mathcal{H}_R(z_0))$，其中 $\alpha\le 0$ 时，意指 $f\in L^\infty(\mathcal{H}_R(z_0))$。同理，当 $\alpha\le 0$ 时，$[f]_{C^\alpha(\mathcal{H}_R(z_0))} = \|f\|_{L^\infty(\mathcal{H}_R(z_0))}$。

此外 ver，每当 $k+\alpha\notin\mathbb{N}$时，我们将互换使用记号 $C^{k,\alpha} = C^{k+\alpha}$　　.

此外，我们将一个 k阶微分算子记为 D^k。例如， D^2 可以是$\partial_{v_i,\ v_j}$ 或$\partial_t + v\cdot\nabla_x$，而 D^3可以是$\partial_{v_i,\ v_j,\ v_k}$、 $\partial_{v_i}(\partial_t+v\cdot\nabla_x)$或 ∂_{x_i}。

2.1. 弱解概念。现在我们描述动理学Fokker-Planck方程在边界处弱解的定义。

定义2.1. 设 $\mathcal{Q}\subset\mathbb{R}\times\Omega\times\mathbb{R}^n$ 为开集。设 $B\in L^\infty(\mathcal{Q})$、 $F\in L^2(\mathcal{Q})$和 $g\in L^\infty(\gamma_-)$。我们称 f 是如下方程的弱解

$$\begin{cases}(\partial_t+v\cdot\nabla_x)f - \operatorname{div}_v(A\nabla_v f) = B\cdot\nabla_v f + F & \text{in } \mathcal{Q},\\ f = g & \text{in } \partial_{\text{kin}}\mathcal{Q},\end{cases} \tag{2.1}$$

如果 $\nabla_v f\in L^2(\mathcal{Q})$且 f 满足

$$-\int_{\mathcal{Q}} f(\partial_t+v\cdot\nabla_x)\psi\,dz + \int_{\mathcal{Q}} A\nabla_v f\nabla_v\psi\,dz = \int_{\mathcal{Q}} B\cdot\nabla_v f\psi\,dz - \int_{\gamma_-} g\psi(v\cdot n)\,d\gamma + \int_{\mathcal{Q}} F\psi\,dz$$

对任意$\psi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^{1+2n})$，其中支集$\psi\cap\partial Q\subset\gamma_-\cup\gamma_0$。

当 $\mathcal{Q}=\mathbb{R}\times\{x_n>\ \ 0\}\times\mathbb{R}^n$, h 是方程 (2.1) 的弱解，当且仅当 $h\in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}\times\{x_n>0\}; H^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n))$，并且

$$-\int_{\mathcal{Q}} f(\partial_t+v\cdot\nabla_x)\psi\,dz + \int_{\mathcal{Q}} A\nabla_v f\nabla_v\psi\,dz = \int_{\mathcal{Q}} B\cdot\nabla_v f\psi\,dz - \int_{\gamma_-} g\psi(-v_n)\,d\gamma + \int_{\mathcal{Q}} F\psi\,dz$$

对于任意满足 $\operatorname{supp}\psi\cap\partial\mathcal{Q}\subset\{x_n=0\}\times\{v_n\ge 0\}$ 的 $\psi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^{1+2n})$。

注意，该定义　　意味着 $v\cdot\nabla_x f\in L^2_{t,x}H_v^{-1}(\mathcal{Q})$，由与 [Sil22, p.15-16] 中相同的论证可得　　.

注2.2. 注意，若函数 $f\in C(\overline{\mathcal{Q}})$ 满足 $\nabla_v f\in L^2(\mathcal{Q})$、 $v\cdot\nabla_x f\in L^2(\mathcal{Q})$，且 $f=g$ on$\partial_{\text{kin}}\mathcal{Q}$ 在经典意义下满足

$$(\partial_t+v\cdot\nabla_x)f - \Delta_v f = F \quad \text{in } \mathcal{Q},$$

那么它就是（2.1）的弱解。这一点已在 [Definition 5.1 Sil 22]中指出。

引理2.3. 设 $f\in C(\overline{\mathcal{H}_R})$是下列方程的经典解

$$\begin{cases}(\partial_t+v\cdot\nabla_x)f - \Delta_v f = F - \operatorname{div}_v(G) & in\ \mathcal{H}_R,\\ f = 0 & in\ \gamma_-\cap\mathcal{Q}_R,\end{cases}$$

其中 $F, G\in L^2(\mathcal{H}_R)$。若 $\nabla_v f\in L^2(\mathcal{H}_R)$，则 f 是一个弱解。

证明。取一个函数 $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{1+2n})$，其支集为 $\psi \cap \partial\mathcal{H}_R \subset \{x_n = 0\} \times \{v_n \geq 0\}$。由于 f 是一个经典解，且 $F \in L^2(\mathcal{H}_R)$，我们有

$$\int_{\mathcal{H}_R} F\psi + G\nabla_v\psi \, dz = \int_{\mathcal{H}_R} (\partial_t + v \cdot \nabla_x - \Delta_v) f\psi \, dz =: J. \tag{2.2}$$

现在利用分部积分，并结合 $f \in C(\overline{H_R})$、$\nabla_v f \in L^2(\mathcal{H}_R)$、支集 $\psi \cap \partial\mathcal{H}_R \subset \{x_n = 0\} \times \{v_n \geq 0\}$ 以及 $f \equiv 0$ 属于 $\gamma_- \cap \mathcal{Q}_R$这一事实，我们将 J 估计为

$$J = \int_{\mathcal{H}_R} -f(\partial_t + v \cdot \nabla_x)\psi + \nabla_v f \nabla_v \psi \, dz.$$

现在插 入(2.2)表明 f 是一个弱解。至此证明完成 . □

2.2. 内部正则性。在此，我们给出动力学 Fokker-Planck 方程的两个内部正则性结果。首先，我们回顾 [IM21推论3.3]中的内部正则性估计。

引理 2.4. 设 g 是如下方程的弱解

$$(\partial_t + v \cdot \nabla_x)g - \Delta_v g = 0 \quad in \ \mathcal{Q}_R.$$

那么，对于任意非负整数 k,

$$\|D^k g\|_{L^\infty(\mathcal{Q}_{R/2})} \leq cR^{-k}\|g\|_{L^\infty(\mathcal{Q}_R)}$$

其中 $c = c(n, k)$ 为某个常数。

接下来，我们给出散度形式下的内部 Schauder 型估计。

引理 2.5. 设 f 是一个弱解，满足

$$(\partial_t + v \cdot \nabla_x)f - \mathrm{div}_v(A\nabla_v f) = B \cdot \nabla_v f + F - \mathrm{div}_v(G) \quad in \ \mathcal{Q}_1.$$

若 $A \in C^\epsilon(\mathcal{Q}_1)$、$B \in L^\infty(\mathcal{Q}_1)$、$F \in L^\infty(\mathcal{Q}_1)$ 和 $G \in C^\epsilon(\mathcal{Q}_1)$，则有

$$\|f\|_{C^{1,\epsilon}(\mathcal{Q}_{\frac{1}{2}})} \leq c(\|f\|_{L^1(\mathcal{Q}_1)} + \|F\|_{L^\infty(\mathcal{Q}_1)} + [G]_{C^\epsilon}(\mathcal{Q}_1)),$$

其中 $c = c(n, \Lambda, \epsilon, \|A\|_{C^\epsilon(\mathcal{Q}_1)} \ \|B\|_{L^\infty(\mathcal{Q}_1)})$。

由于证明与 [KLN25], 中的论证十分相似，详细内容留待附录 B。

3. A Liouville theorem for stationary solutions in 1D

本节旨在证明一维半空间中的刘维尔定理（见定理 3.15）。其证明分为几个步骤。

- 首先，在第 3.2 小节中，我们建立一个关于 ϕ_0的展开，其在 (0, 0) 处的阶为$\frac{1}{2} + \alpha$，其中 $\alpha > 0$ 足够小。特别地，该展开导出 h/ϕ 在 $\mathcal{R}_0$ 中的 H¨older 连续性，并已蕴含了一个适用于增长速度不超过 $1 + |z|^{\frac{1}{2}+\alpha}$的函数的刘维尔定理。
- 其次，在第 3.3 小节中，我们基于最大值原理以及 ϕ_0 的渐近行为，通过精细论证，将刘维尔定理适用的函数范围扩展到增长速度不超过 $1 + |z|^{\frac{1}{2}+3-\epsilon}$的函数。
- 第三，在第 3.4 小节中，我们求得了半空间内满足流入条件的非齐次方程的显式齐次解。结合上一步的刘维尔定理，即可完成定理 3.15 的证明。

我们先介绍一维情形下的平稳动理学圆柱，如下所示 s:

$$\begin{aligned} &Q_R(x_0,v_0) = (x_0 - R^3, x_0 + R^3) \times (v_0 - R, v_0 + R), \\ &H_R(x_0,v_0) = (x_0 - R^3, x_0 + R^3) \times (v_0 - R, v_0 + R) \cap \{x > 0\} \times \mathbb{R}, \\ &H_R^+ \coloneqq ((R/2)^3, R^3) \times (-R, R). \end{aligned} \tag{3.1}$$

3.1. 平稳情形下的 Harnack型不等式。首先，让我们根据（2.1）引入动理学福克-普朗克方程平稳版本的适当弱解概念

定义3.1. 设 $Q = (a,b) \times (c,d)$ 且 $g \in C(\overline{Q})$。我们称 h 是下述方程的弱解

$$\begin{cases} v\partial_x h - \partial_{vv} h = F & \text{in } Q, \\ h = g & \text{in } \partial_{\text{kin}} Q, \end{cases} \tag{3.2}$$

若 $h \in L^2((a,b); H^1(c,d))$ 且 h 满足

$$-\iint_Q h(v\partial_x \psi)\,dx\,dv + \iint_Q \partial_v h \partial_v \psi\,dx\,dv = -\int_{\gamma_-} g\psi(v\cdot n)\,d\gamma + \int_Q F\psi\,dx\,dv$$

对于任意满足 $\operatorname{supp}\psi \cap \partial Q \subset \gamma_- \cup \gamma_0$ 的 $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$。

当 $Q = (0,\infty) \times \mathbb{R}$ 时，如果 h 是（3.2）的弱解，且 $h \in L^2_{\text{loc}}(0,\infty; H^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}))$，并且

$$-\iint_Q h(v\partial_x \psi)\,dx\,dv + \iint_Q \partial_v h \partial_v \psi\,dx\,dv = -\int_{\{x=0\}\times\{v>0\}} g\psi(-v)\,d\gamma \tag{3.3}$$

对于任意满足 $\operatorname{supp}\psi \cap \partial Q \subset \{x=0\} \times \{v \geq 0\}$ 的 $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$。

注 3.2. 现在，我们对 (3.2) 的解的存在性和正则性作两点说明。

- 注意，当 Q 是有界区域且 $g \in C^\infty(\overline{Q})$ 时，根据 [AH26 的定理1、定理3和定义3.3], , 存在 (3.2) 的唯一弱解 h 。注意，根据 [Sil22 的定义 5.1] 之后的说明，以及 [AH26 的引理 3.1 和定义3.3], , [AH26] 中给出的弱解概念与定义3.1中的概念一致。
- 通过考虑 $h(t,x,v) = h(x,v)$，我们发现 h 也是下式的一个弱解

$$(\partial_t + v\cdot\nabla_x)h - \partial_{vv}h = F \quad \text{in } (-1,0] \times Q$$

在 $I \times \partial_{\text{kin}} Q$ 上满足 $h = g$。因此，由 [Sil22] 和引理 2.4 可知，若 $g \in C^\alpha(\overline{Q})$ 且 $F \in C^\infty(Q)$，则有 $h \in C^\infty_{\text{loc}}(Q) \cap C^\alpha(\overline{Q})$。

~在本小节中，我们用 $\mathcal{Q}$ 表示由下式定义的单侧动力学圆柱

$$\widetilde{\mathcal{Q}}_r(z_0) \coloneqq \left\{ z : t \in (t_0 - r^2, t_0],\, v \in B_r(v_0),\, x \in B_{r^3}(x_0 + (t-t_0)v_0) \right\}.$$

首先，基于 [GIMV19], 中给出的 Harnack不等式的抛物型版本，我们给出平稳情形下的 Harnack不等式。由于底层的动力学几何，圆柱在 x 中是倾斜的。

引理 3.3。设 $h \geq 0$ 是下列方程的弱解

$$v\partial_x h - \partial_{vv} h = 0 \quad in\ Q. \tag{3.4}$$

存在常数 $\theta, \gamma \in (0, 1/2)$ 和 $c \geq 1$，使得对于任意 $R \in (0,2]$,

$$\sup_{A_\gamma \times B_{\theta R}(v_0)} h \leq c \inf_{A_0 \times B_{\theta R}(v_0)} h,$$

其中

$$A_\gamma := \{x : |x - x_0 - v_0(t - R^2\gamma)| < (\theta R)^3,\, t \in (-(R\theta)^2, 0]\}$$
$$= \begin{cases} \big(x_0 - v_0R^2(\gamma+\theta^2) - (\theta R)^3, x_0 - v_0R^2\gamma + (\theta R)^3\big) & \text{if } v_0 > 0, \\ \big(x_0 - v_0R^2\gamma - (\theta R)^3, x_0 - v_0R^2(\theta^2+\gamma) + (\theta R)^3\big) & \text{if } v_0 < 0 \end{cases},$$

每当 $\mathrm{r}\,(x_0, v_0)$ 满足 $\{x\colon\ |x-(x_0+v_0t)| < R^3\colon\ t\in(-R^2,0]\} \times B_R(v_0) \subset Q$。

证明。注意，若 $\{x\colon\ |x-(x_0+v_0t)| < R^3\colon\ t\in(-R^2,0]\} \times B_R(v_0) \subset Q$，则 $\widetilde{\mathcal{Q}}_R(0,x_0,v_0) \subset(-R^2, 0] \times Q$。接下来，我们观察到 $h = h(t,x,v)$ 是一个弱解，满足

$$(\partial_t + v\cdot\partial_x)h - \partial_{vv}h = 0 \quad \text{in } (-R^2, 0] \times Q.$$

现在，应用 [GIMV19] 中给出的内部哈纳克不等式，可知存在常数 $\theta,\gamma \in(0,1/2)$ 和 $c \geq 1$，使得

$$\sup_{\widetilde{\mathcal{Q}}_{\theta R}(-R^2\gamma, x_0, v_0)} h \leq c \inf_{\widetilde{\mathcal{Q}}_{\theta R}(0,x_0,v_0)} h$$

对于某个常数 $c \geq 1$。因此，我们得到了所需的估计。 □

通常，可以迭代应用哈纳克不等式（Harnack 链），以比较解在更一般区域中的取值。特别地，对于任意固定的 v_0，我们可以证明 $h(\cdot, v_0)$ 的取值具有可比性。由于底层的动力学几何，可比性的“方向”很大程度上取决于 v_0 的符号。

引理 3.4. 设 $h \geq 0$ 是下列方程的一个弱解

$$v\partial_x h - \partial_{vv}h = 0 \quad in\ H_{\mathcal{R}}.$$

若 $v_0 \in [0, \mathcal{R}/2]$，则对任意 $0 < x_0 \leq x_1 < \mathcal{R}^3/2$，有

$$h(x_0, v_0) \leq ch(x_1, v_0), \tag{3.5}$$

其中常数 c 仅取决于 x_0、v_0 和 $\mathcal{R}$。

若 $v_0 \in [-\mathcal{R}/2, 0)$，则对任意 $0 \leq x_0 \leq x_1 < \mathcal{R}^3/2$，有

$$h(x_1, v_0) \leq ch(x_0, v_0), \tag{3.6}$$

其中常数 c 仅依赖于 $|v_0|$和 $\mathcal{R}$。

注 3.5. 注意，在 $v_0 < 0$的情况下，可以选取 $x_0 = 0$。此外，式 (3.5) 和 (3.6) 中的常数 c还依赖于 $\theta,\gamma \in (0, 1/2)$，它们由引理 3.3 确定。不过，常数 θ,γ都是普适的，因此我们只写常数 c仅依赖于 $x_0, v_0, \mathcal{R}$ 或 $|v_0|, \mathcal{R}$。

证明. 我们分别证明关于 $v_0 > 0$ 和 $v_0 < 0$ 的结论。

- 令 $v_0 \geq 0$ 和 $0 < x_0 < x_1$。首先，注意存在 $R_0 \leq \mathcal{R}/2$ 使得

$$x_0 - v_0(2R_0)^2 - (2R_0)^3 = 0, \tag{3.7}$$

因为当 $r \geq 0$ 时，$g(r) = x_0 - v_0(2r)^2 - (2r)^3$ 单调不增，且

$$g\left(\left(\frac{x_0}{16v_0}\right)^{\frac{1}{2}}\right) > 0 > g\left(\left(\frac{x_0}{4v_0}\right)^{\frac{1}{2}}\right). \tag{3.8}$$

此外，由 (3.8) 可得

$$\left(\frac{x_0}{16v_0}\right)^{\frac{1}{2}} < R_0 < \left(\frac{x_0}{4v_0}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.9}$$

which 将确保 (3.5) 仅依赖于 R_0 到 x_0 以及 v_0。现在我们选择 se

$$R_1 \coloneqq \min\left\{R_0, \frac{\sqrt{x_1 - x_0}}{2(1+\sqrt{v_0})}\right\}$$

可以看出，存在一个非负整数 k，使得

$$\frac{x_1 - x_0}{k+1} \le v_0 R_1^2 \gamma < \frac{x_1 - x_0}{k},$$

其中，常数 $\gamma \in (0, 1/2)$ 由引理 3.3 确定。注意，根据 R_1 的定义并由 (3.9)，存在某个仅依赖于 x_0、v_0 和 $\mathcal{R}$ 的 $k_0 > 0$，使得 $k \le k_0$。因此，存在 $R \le R_1$，使得

$$\frac{x_1 - x_0}{k_0 + 1} = v_0 R^2 \gamma. \tag{3.10}$$

现在我们定义

$$y_j \coloneqq x_1 - (\theta R)^3 - v_0 R^2 \gamma j \tag{3.11}$$

可以看出

$$x_1 = y_0 + (\theta R)^3 \text{ and } x_0 = y_{k_0+1} + (\theta R)^3. \tag{3.12}$$

此外，由 (3.7) 和 (3.10) 可知

$$\{x : |x - (y_j + v_0 t)| < R^3 : t \in (-R^2, 0]\} \subset (0, \mathcal{R}^3)$$

对任意 $j = 0, 1, \dots, k_0 + 1$。现在利用 (3.11)，并在引理 3.3 中用 y_j 替换 x_0，即可推出

$$\begin{aligned} \sup_{(y_{j+1} - v_0\theta^2 R^2 - (\theta R)^3, y_{j+1} + (\theta R)^3) \times B_{\theta R}(v_0)} h &= \sup_{(y_j - v_0(\theta^2+\gamma)R^2 - (\theta R)^3, y_j - v_0 R^2\gamma + (\theta R)^3) \times B_{\theta R}(v_0)} h \\ &\le c \inf_{(y_j - v_0\theta^2 R^2 - (\theta R)^3, y_j + (\theta R)^3) \times B_{\theta R}(v_0)} h \end{aligned}$$

现在结合 Harnack 链和 (3.12)，可得

$$\begin{aligned} h(x_0, v_0) &\le \sup_{(y_{k+1} - v_0\theta^2 R^2 - (\theta R)^3, y_{k+1} + (\theta R)^3) \times B_{\theta R}(v_0)} h \\ &\le \cdots \le c^{k+1} \inf_{(y_0 - v_0\theta^2 R^2 - (\theta R)^3, y_0 + (\theta R)^3) \times B_{\theta R}(v_0)} h \le c^{k_0+1} h(x_1, v_0). \end{aligned} \tag{3.13}$$

- 令 $v_0 < 0$ 和 $0 \le x_0 \le x_1$。注意，$h = h(t, x, v)$ 是下列方程的弱解

$$(\partial_t + v\partial_x)h - \partial_{vv} h = 0 \quad \text{in } (-\mathcal{R}^2, 0] \times H_{\mathcal{R}}.$$

由于 $\{x = 0\} \times [-2|v_0|, -|v_0|/4] \subset \gamma_+$，由 [Sil22] 与 [RW25] 可知，$h$ 在 $[0, 7\mathcal{R}^3/8] \times [-2|v_0|, -|v_0|/4]$ 中是光滑的。因此，存在 h 的光滑延拓 $H \ge 0$，定义在 $(-3\mathcal{R}^3/4, 3\mathcal{R}^3/4) \times (-3|v_0|/2, -|v_0|/2)$ 上，使得 $H = h$ 在 $[0, 3\mathcal{R}^3/4] \times [-3|v_0|/2, -|v_0|/2]$ 中成立。根据注 3.2，存在唯一弱解 $F \ge 0$，使得

$$\begin{cases} v\partial_x F - \partial_{vv} F = 0 & \text{in } (-3\mathcal{R}^3/4, 3\mathcal{R}^3/4) \times (-3|v_0|/2, -|v_0|/2), \\ F = H & \text{on } \{x = 3\mathcal{R}^3/4\} \times [-3|v_0|/2, -|v_0|/2] \cup [-3\mathcal{R}^3/4, 3\mathcal{R}^3/4] \times \{v = -|v_0| \pm |v_0|/2\}. \end{cases}$$

由于 h 是如下方程的光滑解

$$\begin{cases} v\partial_x h - \partial_{vv} h = 0 \text{ 属于 } (0, 3\mathcal{R}^3/4), \quad \times (-3|v_0|/2, -|v_0|/2) h = H \qquad \text{位于} \\ \{x = 3\mathcal{R}^3/4\} \times [-3|v_0|/2, -|v_0|/2] \cup [0, 3\mathcal{R}^3/4] \times \{v = -|v_0| \pm |v_0|/2\}, \end{cases}$$

根据注 3.2， $F = h$ 属于 $[0, 3\mathcal{R}^3/4] \times [-3|v_0|/2, -|v_0|/2]$。由于 $|v_0| \le \mathcal{R}/2$ 和 $x_1 \le \mathcal{R}^3/2$，常数

$$R_0 := \frac{\mathcal{R}}{4(\sqrt{|v_0|} + 1)}$$

满足

$$x_1 - v_0(2R_0)^2 + (2R_0)^3 \le 3\mathcal{R}^3/4.$$

现在，我们按照第一步的类似方法，寻找一个如 (3.11) 所示的合适序列。首先，我们选取

$$R_1 := \min\left\{ R_0, \frac{\sqrt{x_1 - x_0}}{2(1 + \sqrt{|v_0|})} \right\}$$

可知存在一个非负整数 k 使得

$$\frac{x_1 - x_0}{k+1} \le -v_0 R_1^2 \gamma < \frac{x_1 - x_0}{k}.$$

与前面一样，存在仅依赖于 v_0 和 $\mathcal{R}$ 的 $k_0 > 0$，使得 $k \le k_0$。此外，存在R 使得

$$\frac{x_1 - x_0}{k_0 + 1} = -v_0 R^2 \gamma.$$

取 $y_j := x_0 + (\theta R)^3 - v_0 R^2 \gamma j$，得到

$$x_0 = y_0 - (\theta R)^3 \quad \text{and} \quad x_1 = y_{k_0+1} - (\theta R)^3 \tag{3.14}$$

and

$$\{x : |x - (y_j + v_0 t)| < R^3 : t \in (-R^2, 0]\} \times B_{\theta R}(v_0) \subset Q$$

对任意 $j = 0, 1, \dots, k_0$，其中我们记 $Q = (-3\mathcal{R}^3/4, 3\mathcal{R}^3/4) \times (-3v_0/2, -v_0/2)$。

现在，我们将引理 3.3 中的 x_0 替换为 y_j，并将其应用于函数 F，从而得到

$$\begin{aligned} \sup_{(y_{j+1} - (\theta R)^3, y_{j+1} - v_0 R^2 \theta^2 + (\theta R)^3) \times B_{\theta R}(v_0)} F &= \sup_{(y_j - v_0 R^2 \gamma - (\theta R)^3, y_j - v_0 R^2 (\theta^2 + \gamma) + (\theta R)^3) \times B_{\theta R}(v_0)} F \\ &\le c \inf_{(y_j - (\theta R)^3, y_j - v_0 R^2 \theta^2 + (\theta R)^3) \times B_{\theta R}(v_0)} F, \end{aligned} \tag{3.15}$$

其中第一次等号用到了 (3.14)。

与 (3.13) 一样，结合 (3.14) 和 (3.15)，我们可得

$$\begin{aligned} h(x_1, v_0) = F(x_1, v_0) &\le \sup_{(y_{k_0+1} - (\theta R)^3, y_{k_0+1} - v_0 R^2 \theta^2 + (\theta R)^3) \times B_{\theta R}(v_0)} F \\ &\le \cdots \le c^{k_0+1} \inf_{(y_0 - (\theta R)^3, y_0 - v_0 R^2 \theta^2 + (\theta R)^3) \times B_{\theta R}(v_0)} F \\ &\le c^{k_0+1} F(x_0, v_0) = c^{k_0+1} h(x_0, v_0). \end{aligned} \tag{3.16}$$

由（3.13）和（3.16），我们得到所需结果。 □

3.2. 一个展开 i n 一维。在本小节中，我们记 $\phi := \phi_0$，其中 ϕ_0 定义为

$$\phi_0(x,v) = \begin{cases} x^{\frac{1}{6}} U\left(-\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, -\frac{v^3}{9x}\right) & \text{if } v < 0, \\ \frac{1}{6} x^{\frac{1}{6}} e^{-\frac{v^3}{9x}} U\left(\frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \frac{v^3}{9x}\right) & \text{if } v \geq 0. \end{cases}$$

另见 (C.11)。本小节的目标是证明以下关于 h/ϕ在 (0,0) 处的振荡估计，其中 h 是满足一维吸收边界条件的平稳柯尔莫哥洛夫方程的一个解:

命题 3.6。设 $R \geq 1$ 和 h 是以下方程的弱解

$$\begin{cases} v\partial_x h - \partial_{vv} h = 0 & in\ H_R, \\ h = 0 & in\ \{x = 0\} \times (0, R). \end{cases}$$

那么，对于某些常数 $c \geq 1$ 和 $R_0 \geq 1$，有

$$|h/\phi| \leq c R^{-\frac{1}{2}} \|h\|_{L^\infty(H_R)} \quad in\ H_{R/R_0} \tag{3.17}$$

and

$$\sup_{H_{rR}} \frac{h}{\phi} - \inf_{H_{rR}} \frac{h}{\phi} \leq c r^\alpha R^{-\frac{1}{2}} \|h\|_{L^\infty(H_R)} \quad for\ any\ r \leq 1/R_0. \tag{3.18}$$

命题 3.6 的证明分几个步骤进行。

首先，我们证明以下引理，它给出了半空间中任意非负解h 关于 ϕ的逐点下界。

引理 3.7. 设 $h \geq 0$ 是以下方程的弱解

$$\begin{cases} v\partial_x h - \partial_{vv} h = 0 & in\ (0, 4^3) \times (-4, 4), \\ h = 0 & on\ \{x = 0\} \times (0, 4). \end{cases} \tag{3.19}$$

则有

$$\inf_{H_2^+} \frac{h}{\phi} \leq c \inf_{H_1} \frac{h}{\phi}. \tag{3.20}$$

证明. 记

$$m_0 \coloneqq \inf_{H_2^+} \frac{h}{\phi}$$

并假设 $m_0 > 0$，否则证明即告完成。于是 $h \geq m_0 \phi$ 属于 H_2^+，这意味着

$$h \geq \frac{m_0}{c_0} \quad \text{in } H_2^+ \tag{3.21}$$

其中 $c_0 \geq 1$是某个常数；这里还用到了由(C.36)可知 $\phi \geq c_0^{-1}$属于 H_2^+。

现在，我们将剩余的证明分为三个步骤。

步骤 1. 首先，我们 将构造一个合适的屏障函数。为此，我们定义函数 ψ b y

$$\psi(x,v) \coloneqq (v-2)^2,$$

并注意到

$$\psi(v) \in [1,16] \quad \text{on } [-2,1], \quad \psi'(v) \leq 0 \quad \text{on } (-\infty, 2], \quad \psi''(v) \geq 0, \quad \text{and} \quad \psi(2) = 0. \tag{3.22}$$

现在我们想证明，函数 $\varphi := \phi\psi$ 是以下方程的下解

$$v\partial_x\varphi - \partial_{vv}\varphi = 0 \quad \text{in } (0, 2^3] \times (-2, 2). \tag{3.23}$$

为此，我们利用(C.23)中给出的项 J_1 和 J_2，以及带有 $\lambda_m = \frac{1}{6}$、 $b = \frac{2}{3}$ 和 $a_m = \frac{5}{6}$的(C.24)，并结合(C.1)与(C.9)，从而看出

$$\partial_v\phi(x,v) = \begin{cases} \frac{1}{6}x^{\frac{1}{6}}\left(-\frac{v^2}{3x}\right)U\left(-\frac{1}{6}+1, \frac{2}{3}+1, -\frac{v^3}{9x}\right) < 0 & \text{if } v < 0, \\ \frac{1}{6}x^{\frac{1}{6}}e^{-\frac{v^3}{9x}}\left(-\frac{v^2}{3x}\right)\left[U\left(\frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \frac{v^3}{9x}\right) + \frac{5}{6}U\left(\frac{5}{6}+1, \frac{2}{3}+1, \frac{v^3}{9x}\right)\right] < 0 & \text{if } v \geq 0. \end{cases}$$

鉴于由(C.36)可得 $\partial_v\phi \leq 0$ 与 $\phi \geq 0$，我们推出

$$v\partial_x\varphi - \partial_{vv}\varphi = (v\partial_x\phi - \partial_{vv}\phi)\psi - 2\partial_v\psi\partial_v\phi - \partial_{vv}\psi\phi = -2\partial_v\psi\partial_v\phi - \partial_{vv}\psi\phi \leq 0,$$

当 $v \leq 2$时。由此可得(3.23)。

步骤 2. 接下来我们证明，对任意 $x \in [0,1]$,

$$h(1,-2) \leq ch(x,-2). \tag{3.24}$$

这由引理 3.4中取 $x_1 = 1$、 $v_0 = -2$和 $x_0 = x \in [0,1]$时的(3.5)得出。此外，仿照(3.5)的证明，我们推得常数 c 是普适的。

步骤 3. 现在我们利用 (3.23) 中给出的上解 φ和估计 (3.24)，借助最大值原理推导所需结果。由 (3.21) 和 (3.24) 可得

$$h \geq \frac{m_0}{c_1} \quad \text{on } ([0,1] \times \{v = -2\}) \cup (\{x = 1\} \cup [-2, 0]) =: \Gamma_1$$

其中某个常数为 $c_1 \geq 1$。由 (C.36) 可知，存在常数 $c_2 \geq 1$，使得在 Γ_1 上有 $\frac{\phi}{c_2} \leq \frac{1}{16c_1}$。因此，我们得到

$$\frac{m_0\varphi}{c_2} = \frac{m_0\phi\psi}{c_2} \leq \frac{16m_0\phi}{c_2} \leq \frac{m_0}{c_1} \leq h \quad \text{on } \Gamma_1,$$

这里也用到了 (3.22) 中的第一个观察。此外，由于 $\psi(2) = 0$，且在$\{x = 0\} \times$ 上有 $\phi = 0$ $(0, 2],$，我们得到

$$\frac{m_0\varphi}{c_2} = \frac{m_0\phi\psi}{c_2} = 0 \leq h \quad \text{on } ([0,1] \times \{v = 2\}) \cup (\{x = 0\} \times [0, 2]) = \Gamma_2.$$

利用这一点以及 (3.23)，可得

$$\begin{cases} (v\partial_x - \partial_{vv})(m_0\varphi/c_2 - h) \leq 0 & \text{in } (0,1) \times (-2, 2), \\ m_0\varphi/c_2 \leq h & \text{in } \partial_{\text{kin}}((0,1) \times (-2,2)) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \end{cases}$$

由此，根据最大值原理可得 $m_0\varphi/c_2 \leq h$ 属于 H_1 （参见 [AH26，定理 3]）。利用 (3.22) 中对于 $v \in [-1, 1]$ 有 $\psi(v) \in [1, 9]$ 这一事实，即可得到所需估计。证明至此完成。□

接下来，我们给出一个内部哈纳克估计的变体。

引理 3.8. 设 $h \geq 0$ 是 (3.19) 的弱解。则有

$$\sup_{H^+_{2\theta}} \frac{h}{\phi} \leq c \inf_{H^+_{2\theta}} \frac{h}{\phi}, \tag{3.25}$$

其中，常数 $\theta \in$ (0, 1) 由引理 3.3 确定。

证明。根据引理 3.3，取 $v_0 = 0$、 $R = 2$ 和 $x_0 = 9\theta^3$，我们有

$$\sup_{(\theta^3,8\theta^3)\times B_{2\theta}} h \le \sup_{\{|x-9\theta^3|<(2\theta)^3\}\times B_{2\theta}} h \le c \inf_{\{|x-9\theta^3|<(2\theta)^3\}\times B_{2\theta}} h \le c \inf_{(\theta^3,8\theta^3)\times B_{2\theta}} h,$$

为 $\{|x - 9\theta^3| < (2\theta)^3\} \times B_{2\theta} \subset H_4$。由于 θ 是万有常数，由(C.36)，对某个常数 $c \ge 1$，我们得到 $\frac{1}{c} \le \phi \le c$ 属于 $H^+_{2\theta}$。因此，所需估计立即得出。□

我们的下一个目标是证明(3.19)的解 h 关于 ϕ 的一个适当上界（见引理 3.10）。作为第一步，我们证明 h 在 γ_-处以无穷阶消失。该证明遵循与 [Zhu25第 3]节中所给论证相同的思路。

引理 3.9。设 $\mathcal{R} > 0$ 与 h 是如下方程的弱解

$$\begin{cases} v\partial_x h - \partial_{vv} h = 0 & in\ (0, (2\mathcal{R})^3) \times (-2\mathcal{R}, 2\mathcal{R}), \\ h = 0 & on\ \{x = 0\} \times (0, (2\mathcal{R})^3). \end{cases} \tag{3.26}$$

固定满足 $v_0 \ge R$的 v_0、 $R > 0$。则存在常数 $C_1 \ge 1$，使得对任意 $x \in [0, R^3/2^{10}]$,

$$|h(x, v_0)| \le 2e^{-\frac{1}{C_1}\frac{v_0 R^2}{x}} \|h\|_{L^\infty(Q)}, \tag{3.27}$$

每当 $Q := [0, x] \times [v_0 - \sqrt{2}R/8, v_0 + \sqrt{2}R/8] \subset (0, (2\mathcal{R})^3) \times (-2\mathcal{R}, 2\mathcal{R})$。

证明。我们固定 $r \le R^3/C_0$，其中常数 C_0 将在后面确定（见 (3.37)）。定义拟距离函数为

$$\rho(x, v) := \left(\frac{R^2}{4r}(x + r)^2 - R(x + r)(v - v_0) + 64r(v - v_0)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

于是我们观察到

$$\rho(0, v_0) = \frac{Rr^{\frac{1}{2}}}{2} \quad \text{and} \quad \rho(r, v_0) = Rr^{\frac{1}{2}},$$

and

$$[0, r] \times \left\{ v = v_0 \pm \frac{\sqrt{2}}{8} R \right\} \subset \left\{ (x, v) : 2R^2 r \le \rho^2(x, v) \le 4R^2 r \quad \text{and} \quad x \ge 0 \right\}. \tag{3.28}$$

我们现在将证明

$$h(x, v) \le \left(\frac{v_0}{4c_2 r^2} + \frac{1}{R^2 r} \right) \rho^2(x, v) e^{-\frac{v_0 R^4}{c_2 \rho^2} + \frac{v_0 R^2}{2c_2 r}} \|h\|_{L^\infty(Q_r)} \quad \text{in } Q_r \tag{3.29}$$

对某个常数 $c_2 \ge 1$，其中

$$Q_r := [0, r] \times \left[v_0 - \frac{\sqrt{2}}{8} R, v_0 + \frac{\sqrt{2}}{8} R \right]. \tag{3.30}$$

为此，我们将证明分为三步。

步骤 1. 构造一个合适的递增凸函数。为此，我们固定一个常数 $c_2 \ge 1$，其值将在稍后确定（见步骤 2 末尾）。我们定义如下：对于 $\xi \ge 0$,

$$\Phi(\xi) := \int_0^\xi e^{-\frac{v_0 R^4}{c_2 \tau}} \, d\tau \tag{3.31}$$

可见

$$\tau^2\Phi''(\tau) - \frac{v_0R^4}{c_2}\Phi'(\tau) = 0. \tag{3.32}$$

由于

$$(\tau^2\Phi'(\tau))' = \tau^2\Phi''(\tau) + 2\tau\Phi'(\tau) = (c_2^{-1}v_0R^4 + 2\tau)\Phi'(\tau),$$

我们得到

$$\tau^2\Phi'(\tau) = \int_0^\tau (c_2^{-1}v_0R^4 + 2s)\Phi'(s)\,ds \le (c_2^{-1}v_0R^4 + 2\tau)\Phi(\tau), \tag{3.33}$$

这里用到了微积分基本定理，以及 $\Phi'(s) \ge 0$ 和$\Phi(0) = 0$ 这一事实。因此，令

$$\Psi(\xi) \coloneqq \frac{\Phi(\xi)}{\Phi(2R^2r)}, \tag{3.34}$$

我们推得

$$\begin{aligned}\Psi(\xi) = \frac{\Phi(\xi) - \Phi(0)}{\Phi(2R^2r)} \le \frac{c_2^{-1}v_0R^4 + 4R^2r}{(2R^2r)^2}\frac{\xi\Phi'(\xi)}{\Phi'(2R^2r)} &= \frac{c_2^{-1}v_0R^4 + 4R^2r}{(2R^2r)^2}\frac{\xi e^{-\frac{v_0R^4}{c_2\xi}}}{\Phi'(2R^2r)} \\ &\le \left(\frac{v_0}{4c_2r^2} + \frac{1}{R^2r}\right)\xi e^{-\frac{v_0R^4}{c_2\xi} + \frac{v_0R^2}{2c_2r}},\end{aligned} \tag{3.35}$$

这里还用到了中值定理、取 $\tau = 2R^2r$ 的 (3.33)，以及 $\Phi' \ge 0$ 单调不减这一事实。

步骤 2。构造一个合适的屏障函数。更确切地说，我们希望证明，如果 $C_0 = 2^{10}$ andc_2 足够大，那么

$$v\partial_x(\Phi(\rho^2)) - \partial_{vv}(\Phi(\rho^2)) \ge 0 \quad \text{in } Q_r, \tag{3.36}$$

其中，区域 Q_r 在 (3.30) 中给出。
为此，我们注意到

$$\partial_x(\Phi(\rho^2)) = \left(\frac{R^2}{2r}(x+r) - R(v-v_0)\right)\Phi'(\rho^2)$$

and

$$\partial_{vv}(\Phi(\rho^2)) = 128r\Phi'(\rho^2) + \Phi''(\rho^2)\left(-R(x+r) + 128r(v-v_0)\right)^2.$$

因此，对于任意 $(x,v) \in Q_r$，我们有

$$v\partial_x(\Phi(\rho^2)) - \partial_{vv}(\Phi(\rho^2)) \ge \left[vR^2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{8}\right) - 128r\right]\Phi'(\rho^2) - c(Rr)^2\Phi''(\rho^2)$$

其中某个常数为 $c \ge 1$。现在我们选择 $C_0 = 2^{10}$，使得

$$\left[vR^2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{8}\right) - 128r\right] \ge \left[v_0R^2\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{8}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{8}\right) - 128r\right] \ge \frac{v_0R^2}{4} - 128r \ge \frac{v_0R^2}{8}, \tag{3.37}$$

这意味着，

$$v\partial_x(\Phi(\rho^2)) - \partial_{vv}(\Phi(\rho^2)) \ge \frac{v_0R^2}{8}\Phi'(\rho^2) - c(Rr)^2\Phi''(\rho^2),$$

在 Q_r 为 某个常数 c。事实上，我们用到了 $v_0 \geq R$ 这一事实。此外，我们得到 t

$$\begin{aligned} \frac{R^2 r}{16} \leq R^2(x+r)\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{2}}{8}\right) &\leq R(x+r)\left(\frac{R(x+r)}{4r}-(v-v_0)\right) \\ &\leq \rho^2(x,v) \leq \rho^2\left(r, v_0-\sqrt{2}R/8\right) \leq 4rR^2, \end{aligned} \tag{3.38}$$

即，它在 Q_r 中成立，其中 $r \eqsim R^{-2}\rho^2$。因此，我们得到

$$v\partial_x(\Phi(\rho^2)) - \partial_{vv}(\Phi(\rho^2)) \geq \frac{v_0 R^2}{8}\Phi'(\rho^2) - c\rho^2 r\Phi''(\rho^2) \geq cR^{-2}\left(\frac{v_0 R^4}{8c}\Phi'(\rho^2) - \rho^4\Phi''(\rho^2)\right).$$

现在取 $c_2 = 8c \geq 1$，并利用 (3.32) 推导出 (3.36)。

步骤 3。现在我们要证明，对于任意 $r \leq R^3/2^{10}$，都有

$$h(x,v) \leq \|h\|_{L^\infty(Q_r)}\Psi(\rho^2) \quad \text{in } Q_r. \tag{3.39}$$

为此，我们注意到，由 (3.28) 和 (3.34) 可得

$$\Psi(\rho^2) \geq 1 \quad \text{on } [0,r] \times \left\{ v = v_0 \pm \frac{\sqrt{2}}{8}R \right\},$$

and

$$\Psi(\rho^2) \geq 0 \quad \text{on } \{x=0\} \times \left[v_0 - \frac{\sqrt{2}}{8}R, v_0 + \frac{\sqrt{2}}{8}R \right],$$

作为函数 $\Phi \geq 0$ 在 (3.31) 中给出的是非递减的。利用这些观察以及 (3.36)，我们得到

$$\begin{cases} v\partial_x(\Psi(\rho^2)) - \partial_{vv}(\Psi(\rho^2)) \geq 0 & \text{in } Q_r, \\ \Psi(\rho^2) \geq \dfrac{h}{\|h\|_{L^\infty(Q_r)}} & \text{in } \partial_{\mathrm{kin}} Q_r. \end{cases}$$

根据最大值原理，我们对任意 $r \leq R^3/2^{10}$ 导出 (3.39)。由 (3.39)、(3.35)，我们得到 (3.29)。最后，对任意 $r \leq R^3/2^{10}$ 与 $C_1 = 4c_2$，并结合 $\rho^2(r, v_0) = R^2 r$ 这一事实（其中常数 $c_2 \geq 1$ 在步骤 2 中确定），我们利用 (3.29) 得到

$$h(r,v_0) \leq \left(\frac{v_0}{4c_2 r^2} + \frac{1}{R^2 r}\right) R^2 r e^{-\frac{v_0 R^2}{2c_2 r}} \|h\|_{L^\infty(Q_r)} \leq \left(\frac{v_0 R^2}{4c_2 r} + 1\right) e^{-\frac{v_0 R^2}{2c_2 r}} \|h\|_{L^\infty(Q)} \leq 2e^{-\frac{v_0 R^2}{C_1 r}} \|h\|_{L^\infty(Q)},$$

其中我们利用了如下事实：对任意 $\xi \in \mathbb{R}$ 有 $\frac{\xi}{2}e^{-\xi} \leq e^{-\frac{\xi}{2}}$。注意，我们可以对 $(-h)$ 建立同样的估计。综合起来，通过选取 $x = r$，只要 $x \leq R^3/2^{10}$，我们便导出 (3.27)。□

现在，我们可以证明函数 h/ϕ 在 $(0,0)$ 处的有界性，其中 h 是 (3.19) 的解。这里的关键困难在于，ϕ 在 γ_- 附近指数级地趋于零，而引理 3.9 给出的指数衰减速率对于较大的 $v > 0$ 并非最优。我们通过在适当小的尺度上应用引理 3.9，并引入另一个屏障函数，来规避这一问题。

引理 3.10. 设 h 是方程 (3.19) 的弱解。那么存在常数 R_0、$c \geq 1$，使得

$$|h/\phi| \leq c\|h\|_{L^\infty(H_1)} \quad \textit{in } H_{1/R_0}.$$

证明。F 首先，固定一个常数 $c \geq 1$，其取值将在后文确定（见 (3.43)），并定义

$$\psi(x,v) \coloneqq c\phi(x,v) + 2ve^{-\frac{1}{C_1}\frac{1}{8x}}, \tag{3.40}$$

其中常数 C_1 由引理 3.9 给出。于是我们注意到

$$v\partial_x\psi - \partial_{vv}\psi \geq v^2\frac{1}{C_1}\frac{1}{8x^2}e^{-\frac{1}{C_1}\frac{1}{8x}} \geq 0, \tag{3.41}$$

and

$$\psi(x,v) \geq e^{-\frac{1}{C_1}\frac{1}{8x}} \quad \text{on } [0,2^{-13}] \times \{v = 1/2\} \quad \text{and} \quad \psi(0,v) = 0 \quad \text{for } v \in (0,1/2]. \tag{3.42}$$

此外，通过取 $c \geq 1$ 充分大，我们得到

$$\psi(x,v) \geq 1 \quad \text{on } ([2^{-13},1/8] \times \{v = 1/2\}) \cup (\{x = 1/8\} \times [-1/2,0]) \cup ([0,1/8] \times \{v = -1/2\}), \tag{3.43}$$

其中使用了 (C.36)。现在由引理 3.9，并结合 $\mathcal{R} = 1$、$v_0 = 1/2$ 和 $R = v_0$，注意到

$$h(x,1/2) \leq e^{-\frac{1}{C_1}\frac{1}{8x}}\|h\|_{L^\infty(H_1)} \quad \text{for any } x \in [0,2^{-13}]. \tag{3.44}$$

因此由 (3.44)、(3.42) 和 (3.43)，我们有

$$\psi \geq \frac{h}{\|h\|_{L^\infty(H_1)}} \quad \text{on } \partial_{\text{kin}}H_{1/2}. \tag{3.45}$$

因此，通过对 ψ 和 h应用最大值原理（其合理性由(3.41)和(3.45)所保证），我们推出

$$h \leq \|h\|_{L^\infty(H_1)}\psi \quad \text{in } H_{1/2}. \tag{3.46}$$

现在我们将证明，当 $R_0 \geq 2$ 充分大时，则

$$e^{-\frac{1}{C_1}\frac{1}{8x}} \leq c\phi(x,v) \quad \text{in } H_{1/R_0}. \tag{3.47}$$

为此，注意到存在充分大的 $R_0 \geq 1$，使得

$$\begin{aligned} e^{-\frac{1}{C_1}\frac{1}{8x}} \leq xR_0^{\frac{5}{2}}e^{-\frac{1}{9R_0^3x}} \leq xv^{-\frac{5}{2}}e^{-\frac{v^3}{9x}} \quad &\text{for any } (x,v) \in H_{1/R_0} \cap \mathcal{R}^-, \\ e^{-\frac{1}{C_1}\frac{1}{8x}} \leq x^{\frac{1}{6}} \quad &\text{for any } (x,v) \in H_{1/R_0} \cap \mathcal{R}^0, \\ e^{-\frac{1}{C_1}\frac{1}{8x}} \leq |v|^{\frac{1}{2}} \quad &\text{for any } (x,v) \in H_{1/R_0} \cap \mathcal{R}^+. \end{aligned}$$

因此，我们推　出(3.47)（由(C.36)）。结合(3.47)与(3.40)，我们进一步估计(3.46)为　y

$$h \leq c\|h\|_{L^\infty(H_1)}\phi \quad \text{in } H_{1/R_0} \tag{3.48}$$

对某个常数 $c \geq 1$。类似地，我们证明

$$(-h) \leq c\|h\|_{L^\infty(H_1)}\phi \quad \text{in } H_{1/R_0} \tag{3.49}$$

通过考虑函数 $(-h)$ 而非 h。由于 ϕ 非负，结合 (3.48) 和 (3.49) 可得所需的估计。□

现在我们可以证明命题 3.6 了。

命题 3.6 的证明。首先，注意只需在尺度为 1 时证明该结论，即证明任意满足 (3.19) 的弱解 h 都满足

$$\sup_{H_r}\frac{h}{\phi} - \inf_{H_r}\frac{h}{\phi} \leq cr^\alpha\|h\|_{L^\infty(H_1)} \tag{3.50}$$

对任意 $r \le 1/R_0$，其中 c、$R_0 \ge 1$ 由引理 3.10 确定。事实上，取 $h_R(x,v) := h(R^3x, Rv)$ 和 $\phi_R(x,v) := \phi(R^3x, Rv)/R^{\frac{1}{2}}$，以确保 $\phi_R(x,v) = \phi(x,v)$，即可得到 (3.20) 和 (3.25)，其中 h 和 ϕ 分别替换为 h_R 和 ϕ_R。通过缩放回去，即可得到所需的估计。此外，(3.17) 可由对引理 3.10 进行缩放得到。

我们通过基于引理 3.10、引理 3.7 和引理 3.8 的归纳论证，在尺度一上证明估计式 (3.50)。更确切地说，我们找到常数 M_i、m_i、$K \ge 1$ 和 $\alpha \in (0,1)$，使得

$$m_i \le \frac{h}{\phi} \le M_i \quad \text{in } H_{\mathcal{R}_i},$$

and

$$M_i - m_i = K\|h\|_{L^\infty(H_1)}\mathcal{R}_i^\alpha, \tag{3.51}$$

其中 $\mathcal{R}_i := (1/R_0)^{i+1}$。此外，我们可以假设 $R_0 \ge \frac{8}{\theta}$，其中常数 $\theta \in (0,1/2)$ 由引理 3.8 给出。根据引理 3.10，我们有 $|h/\phi| \le c\|h\|_{L^\infty(H_1)}$ 于 $H_{\mathcal{R}_0}$ 中。因此，我们取

$$K := 2c, \quad \text{and} \quad m_0 := \inf_{H_{\mathcal{R}_0}} \frac{h}{\phi}, \quad \text{and} \quad M_0 := \sup_{H_{\mathcal{R}_0}} \frac{h}{\phi} \tag{3.52}$$

从而看出 (3.51) 和 (3.52) 对 $i = 0$ 成立。现在我们假设 (3.51) 和 (3.52) 对 $i = 0$、1、.....、j 成立，其中 $j \ge 0$ 为某个整数。让我们考虑 $H_{\mathcal{R}_j}$ 上的函数 $h_j := h - m_j\phi \ge 0$，从而看出

$$\begin{cases} v\partial_x h_j - \partial_{vv} h_j = 0 & \text{in } (0,\mathcal{R}_j^3)\times(-\mathcal{R}_j,\mathcal{R}_j), \\ h_j = 0 & \text{in } \{x=0\}\times(0,\mathcal{R}_j). \end{cases}$$

通过使用引理 3.8 和引理 3.7 的缩放版本，我们得到

$$\sup_{H_{\mathcal{R}_j^+\theta/4}} [h/\phi - m_j] = \sup_{H_{\mathcal{R}_j^+\theta/4}} h_j/\phi \le c \inf_{H_{\mathcal{R}_j^+\theta/4}} h_j/\phi \le C \inf_{H_{\mathcal{R}_j\theta/8}} h_j/\phi = C \inf_{H_{\mathcal{R}_j\theta/8}} [h/\phi - m_j] \tag{3.53}$$

对于某些常数 c、$C \ge 1$。类似地，沿用证明（3.53）中的相同步骤，并将 h_j 替换为 $H_j :$
$= M_j\phi - h \ge 0$，我们得到

$$\sup_{H_{\mathcal{R}_j^+\theta/4}} [M_j - h/\phi] = \sup_{H_{\mathcal{R}_j^+\theta/4}} H_j/\phi \le c \inf_{H_{\mathcal{R}_j^+\theta/4}} H_j/\phi \le C \inf_{H_{\mathcal{R}_j\theta/8}} H_j/\phi = C \inf_{H_{\mathcal{R}_j\theta/8}} [M_j - h/\phi]. \tag{3.54}$$

现在结合（3.53）和（3.54），可推出

$$\begin{aligned} M_j - m_j &\le \sup_{H_{\mathcal{R}_j^+\theta/4}} \left[M_j - \frac{h}{\phi}\right] + \sup_{H_{\mathcal{R}_j^+\theta/4}} \left[\frac{h}{\phi} - m_j\right] \\ &\le C\left(\inf_{H_{\mathcal{R}_j\theta/8}} \left[M_j - \frac{h}{\phi}\right] + \inf_{H_{\mathcal{R}_j\theta/8}} \left[\frac{h}{\phi} - m_j\right]\right) \\ &= C\left(\inf_{H_{\mathcal{R}_j\theta/8}} \frac{h}{\phi} - \sup_{H_{\mathcal{R}_j\theta/8}} \frac{h}{\phi} - m_j + M_j\right). \end{aligned}$$

根据 $\mathcal{R}_j = (1/R_0)^{j+1}$ 的选取以及归纳假设 (3.51)，我们得到 n

$$\sup_{H_{\mathcal{R}_{j+1}}} \frac{h}{\phi} - \inf_{H_{\mathcal{R}_{j+1}}} \frac{h}{\phi} \le \sup_{H_{\mathcal{R}_j\theta/8}} \frac{h}{\phi} - \inf_{H_{\mathcal{R}_j\theta/8}} \frac{h}{\phi} \le \frac{C-1}{C}(M_j - m_j) \le \frac{C-1}{C} K\|h\|_{L^\infty(H_1)}\mathcal{R}_j^\alpha.$$

现在我们将 $\alpha \in (0,1)$ 取得足够小，使得

$$\sup_{H_{\mathcal{R}_{j+1}}} \frac{h}{\phi} - \inf_{H_{\mathcal{R}_{j+1}}} \frac{h}{\phi} \le K\|h\|_{L^\infty(H_1)}\mathcal{R}_{j+1}^{\alpha}.$$

通过取

$$m_{j+1} \coloneqq \inf_{H_{\mathcal{R}_{j+1}}} \frac{h}{\phi} \quad \text{and} \quad M_{j+1} \coloneqq \sup_{H_{\mathcal{R}_{j+1}}} \frac{h}{\phi},$$

我们得到带有 $i = j+1$ 的 (3.51) 和 (3.52)。因此，通过归纳法，(3.51) 和 (3.52) 对任意 $j \ge 0$ 都成立，由此可得所需结果。□

3.3. 涉及 ϕ_0 的刘维尔定理。本小节中，我们证明一维半空间内带吸收边界条件的一个预备性刘维尔定理。该定理允许解增长至 $3+\frac{1}{2}-\epsilon$ 阶。

引理 3.11. 设 h 是以下方程的一个弱解

$$\begin{cases} v\partial_x h - \partial_{vv} h = 0 & in\ \{x>0\}\times\mathbb{R}, \\ h = 0 & in\ \{x=0\}\times\{v>0\}, \\ |h(x,v)| \le M\left(1+(|x|^{\frac{1}{3}}+|v|)^{\frac{1}{2}+3-\epsilon}\right) & in\ \{x>0\}\times\mathbb{R}, \end{cases} \tag{3.55}$$

其中 $M \ge 1$ 和 $\epsilon \in (0,3)$。那么，对于某个 $c \in \mathbb{R}$，有 $h = c\phi_0$。

注 3.12. 注意，由命题 3.6 可知

$$\frac{h(0)}{\phi_0(0)} = \lim_{(x,v)\to 0} \frac{h(x,v)}{\phi_0(x,v)}$$

是良定义的。因此，我们得到引理 3.11 中给出的常数 c 与 $h(0)/\phi_0(0)$ 一致。

注意，利用引理 3.7 中的展开，可以得到一个阶为 $\frac{1}{2}+\alpha$ 的刘维尔定理，其中 $\alpha > 0$ 与引理 3.7 中的定义相同。通过仔细追踪 $h - {}^{h_{(0)}}\!/_{\phi_0(0)}\phi_0$ 的渐近行为及其 x 阶导数在 $\{0\}\times\mathbb{R}$ 附近以及当 $|(x,v)| \to \infty$ 时的行为，我们能够将阶提升至 $\frac{1}{2}+3-\epsilon$。然后，我们可以将其与 ϕ_0 和 $\partial_x\phi_0$ 的渐近行为进行比较，并通过基于最大值原理的反证论证完成证明。

如前所述，我们的证明基于方程 (3.55) 的解在远离 γ_0 处的边界正则性估计。在 γ_+ 附近，我们使用 [RW25]，中的正则性结果；在 γ_- 附近，我们将适当的内部估计与引理 3.9 中的上界结合起来。

第一个引理讨论解在 γ_-附近的边界行为。指数因子 $e^{-\frac{1}{C}\frac{v_0}{R}}$表明所有导数都以无穷阶消失。

引理 3.13。设 h 是如下方程的弱解

$$v\partial_x h - \partial_{vv} h = 0 \quad in\ H_{2R}(0,v_0)$$

其中 $v_0 > 0$ 且 $H_{2R}(0,v_0) \subset \{x>0\}\times\{v>0\}$。设 k 为非负整数。则存在常数 $c = c(k)$和 $C \ge 1$，使得

$$\|D^k h\|_{L^\infty(H_R(0,v_0))} \le cR^{-k}e^{-\frac{1}{C}\frac{v_0}{R}}\|h\|_{L^\infty(H_{2R}(0,v_0))}. \tag{3.56}$$

证明。通过标准的覆盖论证，只需证明

$$\|D^k h\|_{L^\infty(Q_{R/2^5}(0,v_0))} \le cR^{-k}e^{-\frac{1}{c}\frac{v_0}{R}}\|h\|_{L^\infty(Q_{2R}(0,v_0))} \tag{3.57}$$

对某个常数 $c \geq 1$ 成立。令 $(x_1, v_1) \in Q_{R/2^5}(0, v_0)$ 固定。首先，我们看到

$$x_1 < (R/2^5)^3 \quad \text{and} \quad v_1 > v_0 - R/2^5 > R. \tag{3.58}$$

此外，如同（3.8）中所述，我们找到 r_1 使得

$$x_1 - (2r_1)^2 v_1 = (2r_1)^3 \quad \text{and} \quad \left(\frac{x_1}{16v_1}\right)^{\frac{1}{2}} < r_1 < \left(\frac{x_1}{4v_1}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{R}{8}. \tag{3.59}$$

$\widetilde{\text{值}}$ r_1 是满足以下条件的最大半径： r 对于该半径，有 $\mathcal{Q}_r(0, x_1, v_1) \subset \mathbb{R} \times \{x > 0\} \times \mathbb{R}$。注意， $h(t, x, v) = h(x, v)$ 是以下方程的弱解

$$(\partial_t + v\partial_x - \partial_{vv})\widetilde{h} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \times \{x > 0\} \times \mathbb{R}.$$

因此，根据 $\widetilde{\text{引理 2.4 中的内部估计，并且由于}}$ h 与 t无关，我们有

$$\begin{aligned}\sup_{t \in (-(r_1/2)^2, (r_1/2)^2)} \sup_{x \in B_{(r_1/2)^3}(x_1 + tv_1)} \|D^k h(x, \cdot)\|_{L^\infty(B_{r_1/2}(v_1))} &= \|D^k \widetilde{h}\|_{L^\infty(\mathcal{Q}_{r_1/2}(0, x_1, v_1))} \\ &\leq c r_1^{-k} \|\widetilde{h}\|_{L^\infty(\mathcal{Q}_{r_1}(0, x_1, v_1))} = c r_1^{-k} \sup_{t \in (-r_1^2, r_1^2)} \sup_{x \in B_{r_1^3}(x_1 + tv_1)} \|h(x, \cdot)\|_{L^\infty(B_{r_1}(v_1))}.\end{aligned}$$

鉴于此以及以下事实： $2x_1 > x_1 + r_1^2 v_1 + r_1^3$，而这由（3.59）推出，我们得到

$$\|D^k h\|_{L^\infty(Q_{r_1/2}(x_1, v_1))} \leq c r_1^{-k} \|h\|_{L^\infty\left((0, 2x_1) \times B_{r_1}(v_1)\right)} =: J \tag{3.60}$$

对于某个常数 $c = c(k)$。

现在我们运用引理 3.9，进一步估计项 J。首先，固定 $(x_2, v_2) \in (0, 2x_1) \times B_{r_1}(v_1)$。于是有

$$v_2 > v_1 - r_1 > R - (x_1/(4v_1))^{\frac{1}{2}} > R/2,$$

其中我们用到了 (3.58) 和 (3.59)。现在，我们在引理 3.9 中分别用 v_2 和 $R/2$ 替换 v_0 和 R，可得

$$|h(x, v_2)| \leq 2e^{-\frac{1}{C_1}\frac{v_2 (R/2)^2}{x}} \|h\|_{L^\infty(Q)} \quad \text{for any } x \in \left[0, R^3/2^{13}\right]$$

对于某个常数 $C_1 \geq 1$，其中

$$Q := \left[0, R^3/2^{13}\right] \times \left[v_2 - \frac{\sqrt{2}}{8}\frac{R}{2}, v_2 + \frac{\sqrt{2}}{8}\frac{R}{2}\right].$$

由于 $Q \subset Q_{2R}(0, v_0)$ 和 $v_2 < v_1 < 4v_2$，我们有

$$|h(x, v_2)| \leq 2e^{-\frac{1}{4C_1}\frac{v_1 R^2}{x}} \|h\|_{L^\infty(Q_{2R}(0, v_0))} \quad \text{for any } x \in \left[0, R^3/2^{13}\right].$$

利用 (3.58)，我们得到 $x_2 \leq 2x_1 \leq 2\left(R/2^5\right)^3 \leq R^3/2^{13}$ 和

$$|h(x_2, v_2)| \leq 2e^{-\frac{1}{4C_1}\frac{v_1 R^2}{x_2}} \|h\|_{L^\infty(Q_{2R}(0, v_0))} \leq 2e^{-\frac{1}{8C_1}\frac{v_1 R^2}{x_1}} \|h\|_{L^\infty(Q_{2R}(0, v_0))}. \tag{3.61}$$

由于 (3.61) 对任意 $(x_1, v_1) \in (0, 2x_1) \times B_{r_1}(v_1)$ 均成立，我们进一步将 (3.60) 中给出的 J 估计为

$$\|D^k h\|_{L^\infty(Q_{r_1/2}(x_1, v_1))} \leq c R^{-k} e^{-\frac{1}{8C_1}\frac{v_1 R^2}{x_1}} \|h\|_{L^\infty(Q_{2R}(0, v_0))} \leq c R^{-k} e^{-\frac{1}{32C_1}\frac{v_0 R^2}{R^3}} \|h\|_{L^\infty(Q_{2R}(0, v_0))},$$

对某个常数 $c = c(k)$，其中我们使用了 (3.59) 以及 $x_1 < R^3$ 这一事实，还有 $v_0/2 < v_1$。因此，(3.57) 成立，因为前述估计对任意 $(x_1, v_1) \in H_{R/2^5}(0, v_0)$ 都成立，正如所需。□

接下来，我们证明 γ_+ 附近的梯度估计。注意，因子 $(v_0/R)^{k/2}$ 一般不能改进，因为它来自应用于平稳方程时的基本动力学缩放。

引理 3.14. 设 h 是一个弱解，满足

$$v\partial_x h - \partial_{vv} h = 0 \quad in\ H_{2R}(0, v_0),$$

其中 $v_0 < 0$和 $R > 0$满足 $H_{2R}(0, v_0) \subset \{x > 0\} \times \{v < 0\}$. 设 k是一个非负整数。那么，存在一个常数 $c = c(k)$，使得

$$\|D^k h\|_{L^\infty(H_R(0,v_0))} \le cR^{-k} \left(\frac{v_0}{R}\right)^{\frac{k}{2}} \|h\|_{L^\infty(H_{2R}(0,v_0))}, \tag{3.62}$$

证明. 固定 $v_1 \in (v_0 - R, v_0 + R)$，以便考察 $|v_1| > R$。注意，存在 $r \in (0, R)$，使得

$$-r^2 v_1 + r^3 = R^3, \tag{3.63}$$

当 $\xi \ge 0$ 时， $g(\xi) := -\xi^2 v_1 + \xi^3$ 递增，因此

$$g\left(\frac{R^{\frac{3}{2}}}{2|v_1|^{\frac{1}{2}}}\right) < R^3 < g\left(\frac{R^{\frac{3}{2}}}{|v_1|^{\frac{1}{2}}}\right).$$

因此， r 满足

$$\frac{R^{\frac{3}{2}}}{2|v_1|^{\frac{1}{2}}} < r < \frac{R^{\frac{3}{2}}}{|v_1|^{\frac{1}{2}}} \quad \text{and} \quad -(3r/2)^2 v_1 + (3r/2)^3 < (2R)^3. \tag{3.64}$$

接下来，我们注意到，按照 [RW25引理4.4] 的证明思路，但仅使用 [RW25引理4.1], 中的展开，我们对任意 $\epsilon \in (0,1)$和 $l \ge 3$推出，

$$[D^l h]_{C^\epsilon(\mathcal{H}_r(0,0,v_1))} \le c(k,\epsilon) r^{-l+\epsilon} \|h\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{3r/2}(0,0,v_1))} \tag{3.65}$$

对某个常数 $c = c(l, \epsilon)$成立，其中我们记

$$\mathcal{H}_r(0,0,v_1) := \left\{(t,x,v) : t \in (-r^2, r^2],\, v \in B_r(v_1),\, x \in B_{r^3}(tv_1)\right\} \cap \{x \ge 0\}.$$

这里，与 [RW25引理4.4] 的陈述相比，唯一的差别在于(3.65)中的常数与 $|v_0|$无关。此外，由 [RW25引理2.5] 我们得到

$$[h]_{C^\alpha(\widetilde{\mathcal{H}}_r(0,0,v_1))} \le cr^{-\alpha} \|h\|_{L^\infty(\widetilde{\mathcal{H}}_{3r/2}(0,0,v_1))}, \tag{3.66}$$

对某个 $\alpha \in (0,1)$成立。现在我们使用 [IS21命题2.10] 中所给插值不等式的一个重标度版本，从而得到

$$[r^k D^{k-1} h]_{C^{0,1}(\widetilde{\mathcal{H}}_r(0,0,v_1))} \le c\left([r^{k+2+\alpha} D^{k+2} h]^\theta_{C^\alpha(\widetilde{\mathcal{H}}_r(0,0,v_1))} [r^\alpha h]^{1-\theta}_{C^\alpha(\widetilde{\mathcal{H}}_r(0,0,v_1))} + r^\alpha [h]_{C^\alpha(\widetilde{\mathcal{H}}_r(0,0,v_1))}\right)$$

对某个常数 $c = c(k)$成立，其中 $\theta \in (0, 1)$满足

$$k = \theta(k + 2 + \alpha) + (1 - \theta)\alpha.$$

利用Young不等式，结合取 $\epsilon = \alpha$ 时的(3.65)以及(3.66)，我们推出

$$\|r^k D^k h\|_{L^\infty(\widetilde{\mathcal{H}}_r(0,0,v_1))} = [r^k D^{k-1} h]_{C^{0,1}(\widetilde{\mathcal{H}}_r(0,0,v_1))} \le c\|h\|_{L^\infty(\widetilde{\mathcal{H}}_{3r/2}(0,0,v_1))}.$$

由此，我们得到

$$\begin{aligned}\sup_{x \in (0, -r^2 v_1 + r^3)} \|D^k h(x,\cdot)\|_{L^\infty(B_r(v_1))} &= \|D^k h\|_{L^\infty(\widetilde{\mathcal{H}}_r(0,0,v_1))} \\ &\le cr^{-k} \|h\|_{L^\infty(\widetilde{\mathcal{H}}_{3r/2}(0,0,v_1))}\end{aligned}$$

$$= cr^{-k} \sup_{x\in(0,-(3r/2)^2 v_1+(3r/2)^3)} \|h\|_{L^\infty(B_{3r/2}(v_1))}$$

f或某个常数 $c = c(k)$。结合 (3.63) 和 (3.64)，我们推导 e

$$\|D^k h\|_{L^\infty((0,R^3)\times(v_1-r,v_1+r))} \le cr^{-k}\|h\|_{L^\infty((0,(2R)^3)\times(v_1-2r,v_1+2r))} \le cR^{-k}\left(\frac{v_1}{R}\right)^{\frac{k}{2}} \|h\|_{L^\infty(H_{2R}(0,v_0))}$$

对于某个常数 $c = c(k)$。由于这对任意 $v_1 \in (v_0 - R, v_0 + R)$ 都成立，我们得到

$$\|D^k h\|_{L^\infty(H_R(0,v_0))} \le cR^{-k}\left(\frac{v_0}{R}\right)^{\frac{k}{2}} \|h\|_{L^\infty(H_{2R}(0,v_0))},$$

其中我们用到了 $|v_1| \le 2|v_0|$ 这一事实。证明至此完成。 □

现在我们可以证明引理 3.11。

引理 3.11 的证明。首先，我们注意到

$$\kappa_0 \coloneqq \lim_{(x,v)\to 0} \frac{h(x,v)}{\phi_0(x,v)} \quad \text{satisfies} \quad |\kappa_0| \le c\|h\|_{L^\infty(H_1)} \le c(M), \tag{3.67}$$

其中 κ_0 由注 3.12 定义良好，并且在最后一个不等式中，我们用到了 (3.55) 中的增长条件。接下来，我们定义

$$H \coloneqq \partial_x(h - \kappa_0\phi_0) \quad \text{and} \quad \Phi \coloneqq \phi_0 + \partial_x\phi_0 = \phi_0 + \frac{1}{36}\phi_{-1},$$

最后一个等式由 (C.40) 得出。

注意，一旦我们证明了 $H \equiv 0$，证明便告完成。为此，我们将先证明：对于任意 $c_0 \in \mathbb{R}$，存在一个较大的常数 $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_0(c_0, M, \epsilon) \ge 4$，使得

$$(c_0 H - \Phi)(x_0, v_0) \le \frac{1}{2} \quad \text{if } (x_0, v_0) \notin (A_1 \cup A_2), \tag{3.68}$$

其中记

$$A_1 \cup A_2 \coloneqq \Big(\big[(\mathcal{M}_0/4)^{-3}, (\mathcal{M}_0/4)^3\big] \times [-\mathcal{M}_0 \times \mathcal{M}_0] \Big) \cup \Big(\big[0, (\mathcal{M}_0/4)^{-3}\big] \times \big[-\mathcal{M}_0, -\mathcal{M}_0^{-1}\big] \Big).$$

为此，首先固定 $c_0 \in \mathbb{R}$。现在，我们根据点 (x_0, v_0) 的位置，将 (3.68) 的证明分为几种情形。

- 假设 $4x_0^{\frac{3}{}} \le v_0$。[1] 由于 $h - \kappa_0\phi_0$ 满足 (3.55)，由引理 3.13 可得
$$|H(x_0,v_0)| \le \|\partial_x(h-\kappa_0\phi_0)\|_{L^\infty(H_R(0,v_0))} \le cR^{-3}e^{-\frac{1}{c}\frac{v_0}{R}}\|h-\kappa_0\phi_0\|_{L^\infty(Q_{2R}(0,v_0))},$$

[1] 其中我们令 $R = x_0^{\frac{3}{}}$。若 $x_0,\ v_0 \le 1$，则我们得到

$$\begin{aligned} |H(x_0,v_0)| &\le cR^{-3}e^{-\frac{1}{c}\frac{v_0}{R}}\|\phi_0\|_{L^\infty([0,8x_0]\times[v_0/2,3v_0/2])} \left\| \frac{h}{\phi_0} - \kappa_0 \right\|_{L^\infty(H_{2v_0})} \\ &\le cx_0^{-1}x_0 v_0^{-\frac{5}{2}} e^{-\frac{v_0^3}{9x_0}} \left(v_0^\alpha \|h\|_{L^\infty(H_{2R_0})} \right) \\ &\le c(M) v_0^{-\frac{5}{2}+\alpha} e^{-\frac{v_0^3}{9x_0}}, \end{aligned} \tag{3.69}$$

这里用到了 (C.36) 和 (3.18)，常数 $R_0 \ge 1$ 由引理 3.10 确定。此外，由 (C.38) 可得

$$\Phi(x_0,v_0) \ge c^{-1}x_0^{-1}v_0^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{v_0^3}{9x_0}}. \tag{3.70}$$

[1]利用这一点和 (3.69)，我们得到，若 x_0、$v_0 \le 1$ 和 $v_0 \ge 4x_0^{\frac{3}{3}}$，则

$$c_0H(x_0,v_0)-\Phi(x_0,v_0) \le e^{-\frac{v_0^3}{9x_0}} v_0^{-\frac{5}{2}+\alpha}\left(c_0C - c^{-1}\frac{v_0^{3-\alpha}}{x_0}\right) \le e^{-\frac{v_0^3}{9x_0}} v_0^{-\frac{5}{2}+\alpha}\left(c_0C - c^{-1}x_0^{-\frac{\alpha}{3}}\right). \quad (3.71)$$

现在考虑 $v_0 \ge 1$ 的情形。于是，利用 (3.69) 的第一行以及 (C.36)、(3.18) 和 (3.55) 中的第三个条件，对于任意非负整数 k，我们得到

$$\begin{aligned} |H(x_0,v_0)| &\le cx_0^{-1}e^{-\frac{v_0x_0^{-\frac{1}{3}}}{c}} x_0 v_0^{-\frac{5}{2}} e^{-\frac{v_0^3}{9x_0}} \left(v_0^{-\frac{1}{2}}\|h\|_{L^\infty(H_{2R_0v_0})}\right) \\ &\le c(M,\epsilon)e^{-\frac{v_0x_0^{-\frac{1}{3}}}{c}} v_0^{\frac{1}{2}-\epsilon} e^{-\frac{v_0^3}{9x_0}} \\ &\le c(k,M,\epsilon)\left(v_0x_0^{-\frac{1}{3}}\right)^{-k} v_0^{\frac{1}{2}-\epsilon} e^{-\frac{v_0^3}{9x_0}}, \end{aligned} \quad (3.72)$$

这里还用到了如下事实：对于任意 k,

$$e^{-\frac{v_0x_0^{-\frac{1}{3}}}{c}} \le c(k)\left(v_0x_0^{-\frac{1}{3}}\right)^{-k}. \quad (3.73)$$

在 $x_0 \le 1 \le v_0$ 的情形下，我们将此事实应用于 $k=0$，并结合 (3.70)，得到

$$c_0H(x_0,v_0)-\Phi(x_0,v_0) \le v_0^{\frac{1}{2}-\epsilon} e^{-\frac{v_0^3}{9x}}\left(c_0C - \frac{v_0^\epsilon}{cx_0}\right) \le v_0^{\frac{1}{2}-\epsilon} e^{-\frac{v_0^3}{9x_0}}\left(c_0C - \frac{x_0^{-1+\frac{\epsilon}{3}}}{c}\right).$$

由此以及 (3.71)，我们有

$$c_0H(x_0,v_0)-\Phi(x_0,v_0) \le \frac{1}{2} \quad \text{in } x_0 \in [0,(\mathcal{M}_0/4)^{-3}], \quad (3.74)$$

只要 $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_0(M,\epsilon)$ 足够大。

若 $1 \le x_0$、v_0，则由 (C.36) 和 (C.38) 可得

$$\Phi(x_0,v_0) \eqsim \begin{cases} x_0^{-1}v_0^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{v_0^3}{9x_0}} & \text{if } v_0^3 \ge x_0^2, \\ x_0 v_0^{-\frac{5}{2}} e^{-\frac{v_0^3}{9x_0}} & \text{if } v_0^3 \le x_0^2. \end{cases} \quad (3.75)$$

注意到，由 (3.72) 和 (3.73) 可知，当 $k=3$ 时

$$|H(x_0,v_0)| \le c(M,\epsilon)x_0 v_0^{-\frac{5}{2}-\epsilon} e^{-\frac{v_0^3}{9x_0}}.$$

利用这一点以及 (3.75) 可得

$$(c_0H-\Phi)(x_0,v_0) \le x_0 v_0^{-\frac{5}{2}-\epsilon} e^{-\frac{v_0^3}{9x_0}}\left(c_0C - \frac{v_0^\epsilon}{c}\right) \le \frac{1}{2},$$

若 $v_0 \ge \mathcal{M}_0$，其中当 $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_0(c_0,M,\epsilon) \ge 1$ 足够大时。利用这一点以及 (3.74)，取 $\mathcal{M}_0$ 足够大，可得

$$c_0H(x_0,v_0)-\Phi(x_0,v_0) \le \frac{1}{2} \quad \text{in } \mathcal{A}^-, \quad (3.76)$$

其中

$$\mathcal{A}^- := \{v \ge 4x^{\frac{1}{3}} \,:\, x \in [0,(\mathcal{M}_0/4)^{-3}]\} \cup \{v \ge 4x^{\frac{1}{3}} \,:\, v \in [\mathcal{M}_0,\infty)\}.$$

1</style}这就完成了 $v_0 \ge 4x_0^{\frac{3}{3}}$ 情形下 (3.68) 的证明。

• 假设 $4x_0^{\frac{3}{3}} \geq |v_0|$。由引理 2.4，我们推得

$$|H(x_0,v_0)| \leq cR^{-3}\|h-\kappa_0\phi_0\|_{L^\infty(\mathcal{Q}_{R/4}(0,x_0,v_0))} \leq cR^{-3}\|h-\kappa_0\phi_0\|_{L^\infty(H_R(x_0,v_0))}, \tag{3.77}$$

其中 $R=\frac{2x_0^{\frac{3}{3}}}{3}$。若 $x_0 \leq 1$，则有

$$|H(x_0,v_0)| \leq cx_0^{-1}\|\phi_0\|_{L^\infty([0,8x_0]\times[-5x_0^{\frac{1}{3}},5x_0^{\frac{1}{3}}])}\left\|\frac{h}{\phi_0}-\kappa_0\right\|_{L^\infty(H_{5x_0^{1/3}})} \leq cx_0^{-\frac{5}{6}}\left(x_0^{\frac{\alpha}{3}}\|h\|_{L^\infty(H_{5R_0})}\right)$$
$$\leq c(M)x_0^{-\frac{5}{6}+\frac{\alpha}{3}},$$

这里用到了 (C.36)、(3.18) 以及 (3.55) 中给出的第三个条件。利用 (C.38) 和 (C.36)，可得若 $x_0 \leq 1$，则

$$(c_0H-\Phi)(x_0,v_0) \leq x_0^{-\frac{5}{6}+\frac{\alpha}{3}}\left(c_0C-\frac{x_0^{-\frac{\alpha}{3}}}{c}\right). \tag{3.78}$$

If $1 \leq x_0$，则利用 (3.77)、(C.36)、(3.18) 以及 (3.55) 中的第三个条件，我们 get

$$|H(x_0,v_0)| \leq cx_0^{-1}\|\phi_0\|_{L^\infty([0,8x_0]\times[-5x_0^{\frac{1}{3}},5x_0^{\frac{1}{3}}])}\left\|\frac{h}{\phi_0}-\kappa_0\right\|_{L^\infty(H_{5x_0^{1/3}})} \leq cx_0^{-\frac{5}{6}}x_0^{-\frac{1}{6}}x_0^{1+\frac{1}{6}-\frac{\epsilon}{3}} \leq cx_0^{\frac{1}{6}-\frac{\epsilon}{3}}.$$

利用 (C.38) 和 (C.36)，可得 $\Phi(x_0,v_0) \geq \frac{1}{c}x_0^{\frac{6}{3}}$，从而

$$(c_0H-\Phi)(x_0,v_0) \leq x_0^{\frac{1}{6}-\frac{\epsilon}{3}}\left(c_0C-\frac{x_0^{\frac{\epsilon}{3}}}{c}\right).$$

由此及 (3.78)，当 $\mathcal{M}_0$ 充分大时，有

$$c_0H(x_0,v_0)-\Phi(x_0,v_0) \leq \frac{1}{2} \quad \text{in } \mathcal{A}^0, \tag{3.79}$$

其中

$$\mathcal{A}^0 := \{|v| \leq 4x^{\frac{1}{3}} \,:\, x \in [0,(\mathcal{M}_0/4)^{-3}]\} \cup \{|v| \leq 4x^{\frac{1}{3}} \,:\, x \in [(\mathcal{M}_0/4)^3,\infty)\}.$$

这就完成了在 $|v_0| \leq 4x_0^{\frac{3}{3}}$ 情形下对（3.68）的证明。

• 假设 $-v_0 \geq 4x_{30}^{\frac{1}{3}}$。根据引理 3.14 及 $R=|v_0|/4$，我们有

$$|H(x_0,v_0)| \leq \|H\|_{L^\infty(H_R(0,v_0))} \leq c|v_0|^{-3}\|h-\kappa_0\phi_0\|_{L^\infty(H_{2R}(0,v_0))}. \tag{3.80}$$

如果 $|v_0| \leq 1$，那么我们进一步估计

$$|H(x_0,v_0)| \leq c|v_0|^{-3}\left\|\frac{h}{\phi_0}-\kappa_0\right\|_{L^\infty(H_{2R}(0,v_0))}\|\phi_0\|_{L^\infty([0,|v_0|^3/2]\times[-|v_0|/2,-3|v_0|/2])}$$
$$\leq c|v_0|^{-3}\left\|\frac{h}{\phi_0}-\kappa_0\right\|_{L^\infty(H_{2|v_0|})}|v_0|^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq c(M)|v_0|^{-\frac{5}{2}+\alpha},$$

其中我们使用了 (C.36) 和 (3.18)。利用 (C.38)，可得

$$c_0H(x_0,v_0)-\Phi(x_0,v_0) \leq |v_0|^{-\frac{5}{2}+\alpha}\left(c_0C-\frac{|v_0|^{-\alpha}}{c}\right). \tag{3.81}$$

另一方面，当 $|v_0| \geq 1$ 时，我们得到

$$\begin{aligned}|H(x_0,v_0)| &\leq c|v_0|^{-3}\|\phi_0\|_{L^\infty([|v_0|^3/2]\times[3v_0/2,v_0/2])}\left\|\frac{h}{\phi_0}-\kappa_0\right\|_{L^\infty(H_{4|v_0|})}\\ &\leq c|v_0|^{-\frac{5}{2}}|v_0|^{-\frac{1}{2}}\|h\|_{L^\infty(H_{4R_0|v_0|})}\\ &\leq c|v_0|^{\frac{1}{2}-\epsilon},\end{aligned}$$

这里我们用到了 (C.36) 和 (3.18)。利用这些结果以及 (C.36) 和 (C.38)，我们推导得出

$$c_0H(x_0,v_0)-\Phi(x_0,v_0)\leq|v_0|^{\frac{1}{2}-\epsilon}\left(c_0C-\frac{|v_0|^\epsilon}{c}\right).$$

由此及 (3.81) 可得

$$c_0H(x_0,v_0)-\Phi(x_0,v_0)\leq\frac{1}{2}\quad\text{in }\mathcal{A}^+,\tag{3.82}$$

若 $\mathcal{M}_0$ 足够大，其中

$$\mathcal{A}^+:=\{-v\geq 4x^{\frac{1}{3}}\,:\,v\in[0,\mathcal{M}_0^{-1}]\}\cup\{-v\geq 4x^{\frac{1}{3}}\,:\,v\in[\mathcal{M}_0,\infty)\}.$$

[1]至此，$-v_0\geq 4x_0^{\frac{3}{3}}$ 情形下 (3.68) 的证明完成。

因此，结合 (3.76)、(3.79) 和 (3.82)，即可得到 (3.68)。

现在利用 (3.68)，我们证明 $H\equiv 0$。假设 H 不为零，则存在一点 $H(x_0,v_0)\neq 0$，使得 $(x_0,v_0)\in\{x>0\}\times\mathbb{R}$。因此存在一个常数 $c_0\in\mathbb{R}$，使得 $(c_0H-\Phi)(x_0,v_0)\geq 1$。由 (3.68)，必定存在一个严格极大点 $(x_1,v_1)\in A_1\cup A_2$，使得 $(c_0H-\Phi)(x_1,v_1)\geq 1$，并且对任意 $(x,v)\in\{x>0\}\times\mathbb{R}$，都有 $(c_0H-\Phi)(x_1,v_1)\geq(c_0H-\Phi)(x,v)$。

我们证明这会导致矛盾。事实上，考虑函数

$$F:=(c_0H-\Phi)(x_1,v_1)-(c_0H-\Phi)(x,v)\geq 0,$$

它是下列方程的弱解

$$v\partial_xF-\partial_{vv}F=0\quad\text{in }\mathcal{D},$$

其中记

$$\mathcal{D}:=\Big(\left[(\mathcal{M}_0/2)^{-3},(\mathcal{M}_0/2)^3\right]\times[-2\mathcal{M}_0\times 2\mathcal{M}_0]\Big)\cup\Big(\left[0,(\mathcal{M}_0/2)^{-3}\right]\times\left[-2\mathcal{M}_0,-(2\mathcal{M}_0)^{-1}\right]\Big).$$

- 令 $v_1\geq 0$。事实上，由引理 3.4 中的 (3.5) 可知，若将 x_0、v_0 和 $H_{\mathcal{R}}$ 替换为 $(\mathcal{M}_0/4)^{-3}$、v_1 和 $\left[(\mathcal{M}_0/2)^{-3},(\mathcal{M}_0/2)^3\right]\times[-2\mathcal{M}_0\times 2\mathcal{M}_0]$，则该结论仍然成立（证明相同，只用到内部哈纳克不等式），从而我们得到

$$\frac{1}{2}\leq(c_0H-\Phi)(x_1,v_1)-(c_0H-\Phi)\left((\mathcal{M}_0/4)^{-3},v_1\right)=F\left((\mathcal{M}_0/4)^{-3},v_1\right)\leq cF(x_1,v_1)=0,$$

其中我们也用到了 (3.68)。这构成了矛盾。

- 令 $v_1<0$。类似地，通过在引理 3.4 的 (3.6) 证明中将 x_0、x_1、v_0 和$H_{\mathcal{R}}$ 分别替换为 x_1、$(\mathcal{M}_0/4)^3$、v_1 和 $\left[0,(\mathcal{M}_0/2)^{-3}\right]\times\left[-2\mathcal{M}_0,-(2\mathcal{M}_0)^{-1}\right]$，我们得出以下矛盾

$$\frac{1}{2}\leq(c_0H-\Phi)(x_1,v_1)-(c_0H-\Phi)\left((\mathcal{M}_0/4)^3,v_1\right)=F\left((\mathcal{M}_0/4)^3,v_1\right)\leq cF(x_1,v_1)=0.$$

因此，必有 $H \equiv 0$，由 $vH - \partial_{vv}(h - \kappa_0\phi_0) = 0$ 可得 $\partial_{vv}(h - \kappa_0\phi_0) = 0$。这意味着$h = \kappa_0\phi_0 + c_1 + c_2 v$，其中某些常数为 c_1、c_2。最后，根据 (3.55) 中给出的边界条件，我们得到 $c_1 = c_2 = 0$。因此， $h = \kappa_0\phi_0$，如所求。证明完毕。□

3.4. 带流入条件的刘维尔定理。最后一步，需要利用引理 3.11 推导一维非齐次方程解的刘维尔定理；引理 3.11 对齐次方程的所有解进行了分类。本小节考虑满足流入条件且源项为多项式的解。

定理 3.15. 设 $l \in \{-1, 0\}$ 且设 $p \in \mathcal{P}_{3l+1}$。假设 h 是下列方程的弱解

$$\begin{cases} v\partial_x h - \partial_{vv} h = p & in\ \{x > 0\} \times \mathbb{R}, \\ h = \sum_{i=0}^{3(l+1)} b_i v^i & in\ \{x = 0\} \times \{v > 0\}, \\ |h(x,v)| \le c\left(1 + (|x|^{\frac{1}{3}} + |v|)^{\frac{1}{2}+3(l+1)-\epsilon}\right) & in\ \{x > 0\} \times \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.83}$$

对于某些 $c \ge 1$ 和 $\epsilon \in (0, 1/2)$。那么存在 $P \in \mathcal{P}_{3(l+1)}$、 $\mu_j \in \mathbb{R}$和 $\kappa_i \in \mathbb{R}$，使得

$$h = P + \sum_{j=0}^{l} \mu_j \psi_j + \sum_{i=0}^{l} \kappa_i \phi_i, \tag{3.84}$$

其中，函数 ϕ_i 和 ψ_j 分别定义于 (C.11) 和 (C.50) 中。

为了证明定理 3.15，我们需要找到满足流入边界条件且右端项为齐次多项式的弱解。

引理 3.16. 设 $\lambda \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $p \in \mathcal{P}_{\lambda-2}$ 是次数为 $\lambda - 2$ 的齐次多项式，且 $a \in \mathbb{R}$ 满足 $p \ne 0$ 或 $a \ne 0$。那么存在一个弱解 h 使得

$$\begin{cases} v\partial_x h - \partial_{vv} h &= p \quad in\ (0,\infty) \times \mathbb{R}, \\ h(x,v) &= a v^\lambda \quad on\ \{0\} \times \{v > 0\}. \end{cases}$$

事实上，存在 $P \in \mathcal{P}_\lambda$ 和 $\mu = \mu(\lambda, a, p) \in \mathbb{R}$ 使得

$$h = P + \mu \psi_{[\frac{\lambda}{3}]}.$$

此外，若对于某个非负整数 l， $\lambda = 3l$ 或 $3l + 1$，则 $\mu = 0$。

该引理的证明将在 C 节给出。
利用引理 3.16 和引理 3.11，我们可以证明定理 3.15。

定理 3.15 的证明。首先，我们考虑 $l = 0$的情形。注意到

$$\begin{cases} v\partial_x(h - G) - \partial_{vv}(h - G) = p - \partial_{vv} G =: q & \text{in } \{x > 0\} \times \mathbb{R}, \\ (h - G) = 0 & \text{in } \{x = 0\} \times \{v > 0\}, \\ |(h - G)(x,v)| \le M\left(1 + (|x|^{\frac{1}{3}} + |v|)^{\frac{1}{2}+3-\epsilon}\right) & \text{in } \{x > 0\} \times \mathbb{R}, \end{cases}$$

其中我们记

$$G \coloneqq \sum_{i=0}^{3} b_i v^i \quad \text{and} \quad q = \sum_{i=2}^{3} c_i q_i, \tag{3.85}$$

其中， $c_i \in \mathbb{R}$ 和 q_i 是次数为 $i-2$的齐次多项式。现在利用引理 3.16，存在一个弱解 h_i 满足

$$\begin{cases} v\partial_x h_i - \partial_{vv} h_i = c_i q_i & \text{in } \{x>0\}\times\mathbb{R}, \\ h_i = 0 & \text{in } \{x=0\}\times\{v>0\} \end{cases}$$

其中 h_i 的形式为

$$h_i = p_i + \nu_i \psi_{[i/3]},$$

其中 $p_i \in \mathcal{P}_i$ 和 $\nu_i \in \mathbb{R}$ 满足 $\nu_i = 0$，当 $i = 3l$ 或 $i = 3l+1$ 时，对于某个非负整数 l。因此，我们得到

$$H \coloneqq h - G - \sum_{i=0}^{3} (p_i + \nu_i \psi_{[i/3]}) \tag{3.86}$$

是下列方程的弱解

$$\begin{cases} v\partial_x H - \partial_{vv} H = 0 & \text{in } \{x>0\}\times\mathbb{R}, \\ H = 0 & \text{in } \{x=0\}\times\{v>0\}, \\ |H(x,v)| \le M\left(1 + (|x|^{\frac{1}{3}} + |v|)^{\frac{1}{2}+3-\epsilon}\right) & \text{in } \{x>0\}\times\mathbb{R}, \end{cases} \tag{3.87}$$

其中我们用到了如下事实

$$|p_i(x,v)| + |\nu_i \psi_{[i/3]}(x,v)| \le c\left(1 + (|x|^{\frac{1}{3}} + |v|)^{\frac{1}{2}+3-\epsilon}\right)$$

对于某个常数 c，因为 $i \le 3 < \frac{1}{2} + 3 - \epsilon$。因此，我们可以对 (3.87) 应用引理 3.11，并可知 t

$$H = \kappa_0 \phi_0$$

对某个 $\kappa_0 \in \mathbb{R}$。由此以及 (3.85) 和 (3.86)，我们得到

$$h = \sum_{i=0}^{3} b_i v_i + \sum_{i=0}^{3} (p_i + \nu_i \psi_{[i/3]}) + \kappa_0 \phi_i = P + \mu_0 \psi_0 + \kappa_0 \phi_0$$

对某些 $P \in \mathcal{P}_3$、$\mu_0 \in \mathbb{R}$。这就得到了所需结果。当 $l = -1$ 时，我们注意到， h 也满足 (3.83) 中给出的第三个条件，其中 $l = 0$，因此 h 具有 (3.84) 的形式。根据增长条件，我们得到，对某个常数 c， $h = c$。证明至此完成。□

3.5. 含无界源项的刘维尔定理。本小节中，我们对半空间内满足如下方程且源项无界的解进行分类，例如

$$v\partial_x h - \partial_{vv} h = \partial_{vv} \phi_0.$$

我们实际上将考虑 (3.90) 形式的更一般源项。为了通过爆破论证证明非常数系数动理学方程的展开（见命题 5.1），需要这样的分类结果。

这类方程的解由以下形式的函数构成

$$\mathbf{\Phi}_i = v^i \partial_v^{(i)} \phi_0,\ \mathbf{\Phi}_{j+3} = v^j \partial_v^{(j)} \psi_0,\ \mathbf{\Phi}_5 = \partial_v \phi_1 \tag{3.88}$$

对于 $i \in \{0,1,2\}$ 和 $j \in \{0,1\}$。给定 $\lambda \in \{0,1,2,3\}$ 和 $\epsilon \in (0,1)$，满足 $\lambda + \epsilon < 3 + \frac{1}{2}$，我们定义如下空间，其中包含涉及无界源项的方程的所有解，这些方程具有

形式 (3.90)，并在无穷远处满足适当的增长条件：

$$\overline{\mathcal{T}}_{\lambda,\epsilon} \coloneqq \operatorname{span}\left\{ p, p_i\boldsymbol{\Phi}_i, p_{j+3}\boldsymbol{\Phi}_{j+3}, p_5\boldsymbol{\Phi}_5 \;\middle|\; \begin{array}{l} p\in\mathcal{P}_\lambda\,, p_i\in\mathcal{P}_{[\lambda+\epsilon-\frac{1}{2}]},\, p_{j+3}\in\mathcal{P}_{\lambda-2},\, p_5\in\mathcal{P}_{[\lambda+\epsilon-\frac{5}{2}]} \\ p_1(0)=p_2(0)=Dp_2(0)=p_4(0)=0 \end{array} \right\},$$

其中 $i\in\{0,1,2\}$ 和 $j\in\{0,1\}$。

当 $\lambda+\epsilon<\frac{3}{2}$时，空间 $\overline{\mathcal{T}}_{\lambda,\,\epsilon}$ 会显著简化，因为任意 $P\in\overline{\mathcal{T}}_{\lambda,\,\epsilon}$ 都具有如下形式：$P=p+c\phi_0$，其中 $p\in\mathcal{P}_1$ 和 $c\in\mathbb{R}$。

接下来，我们定义向量空间 $\overline{\mathcal{T}}_{\lambda,\,\epsilon}$ 的子空间 $\mathcal{T}_{\lambda,\,\epsilon}$ 如下：

$$\mathcal{T}_{\lambda,\epsilon} \coloneqq \left\{ P\in\overline{T}_{\lambda,\epsilon} \;\middle|\; P=0 \text{ on } \{x=0\}\times\{v>0\} \right\}. \tag{3.89}$$

注意，$\boldsymbol{\Phi}_0$、$\boldsymbol{\Phi}_1$、$\boldsymbol{\Phi}_2$的齐次次数为 1 2，而 $\boldsymbol{\Phi}_3$、$\boldsymbol{\Phi}_4$的齐次次数为 2，$\boldsymbol{\Phi}_5$的齐次次数为5 2。因此，选择多项式 p_k，恰好是为了使乘积 $p_k\boldsymbol{\Phi}_k$ 对任意 $k\in\{0,\dots,5\}$在无穷远处的增长速度不超过 $|z|^{\lambda+\epsilon}$。此外，假设 $p_1(0)=p_2(0)=Dp_2(0)=p_4(0)=0$（连同 (3.91)）保证空间 $\overline{\mathcal{T}}_{\lambda,\,\epsilon}$ 在“命题 5.1 的放大证明下保持不变”这一意义下仍保持不变：将 $\overline{\mathcal{T}}_{\lambda,\,\epsilon}$ 中的适当缩放元素应用于具有适当正则系数的方程，会得到一个极限方程，而该方程仍由 $\overline{\mathcal{T}}_{\lambda,\,\epsilon}$中的某个元素求解。现在，我们给出允许源项无界的刘维尔定理。

定理 3.17. 设 $\lambda\in\{0,1,2,3\}$, $\epsilon\in(0,1)$ 且满足 $\lambda+\epsilon<3+\frac{1}{2}$，并且 $p\in\mathcal{P}_{\lambda-2}$。设 h 是一个弱解，满足

$$\begin{cases} v\partial_x h-\partial_{vv}h=p+Q & in\ \{x>0\}\times\mathbb{R}, \\ h=0 & in\ \{x=0\}\times\{v>0\}, \\ |h(x,v)|\le c\left(1+(|x|^{\frac{1}{3}}+|v|)^{\lambda+\epsilon}\right) & in\ \{x>0\}\times\mathbb{R}, \end{cases}$$

其中

$$Q\coloneqq\sum_{i=0}^{2}q_{0,i}\boldsymbol{\Phi}_i+\sum_{k=0}^{4}q_{1,k}\partial_v\boldsymbol{\Phi}_k+\sum_{k=0,1,3}q_{2,k}\partial_{vv}\boldsymbol{\Phi}_k, \tag{3.90}$$

并且对于 $i\in\{0,1,2\}$ 和 $j\in\{0,1\}$,

$$\begin{aligned} &q_{0,i}\in\mathcal{P}_{[\lambda+\epsilon-\frac{5}{2}]},\, q_{1,i}\in\mathcal{P}_{[\lambda+\epsilon-\frac{3}{2}]},\, q_{1,j+3}\in\mathcal{P}_{\lambda-3},\, q_{2,i}\in\mathcal{P}_{[\lambda+\epsilon-\frac{1}{2}]},\, q_{2,3}\in\mathcal{P}_{\lambda-2}, \\ &q_{1,2}(0)=q_{2,0}(0)=q_{2,1}(0)=q_{2,3}(0)=Dq_{2,1}(0)=0. \end{aligned} \tag{3.91}$$

那么，$h\in\mathcal{T}_{\lambda,\,\epsilon}$。

*Pro*的。我们声称，对于任意如 (3.90)、(3.91) 中的 Q，均可找到 $H\in\overline{\mathcal{T}}_{\lambda,\,\epsilon}$，使得 t

$$\left\{\begin{array}{ll} v\partial_x H-\partial_{vv}H=Q & \text{in } \{x>0\}\times\mathbb{R}, \\ H=b_0v^2+b_1v^3 & \text{in } \{x=0\}\times\{v>0\}, \\ |H(x,v)|\le c\left(1+(|x|^{\frac{1}{3}}+|v|)^{\lambda+\epsilon}\right) & \text{in } \{x>0\}\times\mathbb{R} \end{array}\right\} \tag{3.92}$$

对于某些常数 $b_0,b_1,c\in\mathbb{R}$。请注意，一旦证明了这一结论，我们就可以将定理 3.15 应用于 $h-H$，从而得到所需结果：

$$h-H=P+c_0\phi_0+c_1\psi_0$$

对于某些常数 $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ 和 $P \in \mathcal{P}_\lambda$。由于 $P, \phi_0, \psi_0 \in \overline{\mathcal{T}}_{\lambda,\,\epsilon}$ 和 $h = H + P + c_0\phi_0 + c_1\psi_0 \equiv 0$ 在 $\{x = 0\} \times \{v > 0\}$ 上，我们得到 $h \in \mathcal{T}_{\lambda,\,\epsilon}$，从而完成证明。

因此，只需证明该断言，即找到 $H \in \mathcal{T}_{\lambda,\,\epsilon}$ 使得 (3.92) 成立。为证明这一点，注意到根据 (C.40) 和 (C.25)，经简单计算可得

$$\begin{aligned}
&(v\partial_x - \partial_{vv})(v\mathbf{\Phi}_0) = -2\partial_v\mathbf{\Phi}_0,\ (v\partial_x - \partial_{vv})(v^2\mathbf{\Phi}_0) = -2\mathbf{\Phi}_0 - 4\mathbf{\Phi}_1,\ (v\partial_x - \partial_{vv})(v^2\mathbf{\Phi}_1) = \mathbf{\Phi}_2,\\
&(v\partial_x - \partial_{vv})(v\mathbf{\Phi}_1) = 3\partial_v\mathbf{\Phi}_0 - 5\partial_v\mathbf{\Phi}_1,\ (v\partial_x - \partial_{vv})(v^2\mathbf{\Phi}_1) = -6\mathbf{\Phi}_1 - 7\mathbf{\Phi}_2,\\
&(v\partial_x - \partial_{vv})(v^2\mathbf{\Phi}_2) = -10\mathbf{\Phi}_2 - 10v\partial_v\mathbf{\Phi}_2,\ (v\partial_x - \partial_{vv})\mathbf{\Phi}_5 = c_0\mathbf{\Phi}_0,\\
&v\partial_v\mathbf{\Phi}_0 = \mathbf{\Phi}_1,\ v\partial_v\mathbf{\Phi}_1 = \mathbf{\Phi}_1 + \mathbf{\Phi}_2,\ v\partial_v^2\mathbf{\Phi}_0 = \partial_v\mathbf{\Phi}_1 - \partial_v\mathbf{\Phi}_0,\ v^2\partial_v^2\mathbf{\Phi}_0 = \mathbf{\Phi}_2,\ v^2\partial_v^2\mathbf{\Phi}_1 = -\mathbf{\Phi}_2 + v\partial_v\mathbf{\Phi}_2.
\end{aligned} \tag{3.93}$$

类似地，根据 (C.61) 和 (C.62)，将 $\mathbf{\Phi}_0$ 和 $\mathbf{\Phi}_1$ 分别替换为 $\mathbf{\Phi}_3$ 和 $\mathbf{\Phi}_4$ 后，(3.93) 中的相同结论仍然成立。利用这些公式 (3.93)，对于任意满足 (3.90)、(3.91) 的 Q，我们可以很容易地构造出 $H \in \overline{\mathcal{T}}_{\lambda,\,\epsilon}$，使得 (3.92) 成立。证明完毕。□

4. Liouville theorem in the half-space for in-flow

在本节中，我们证明半空间中流入情形下的高维刘维尔定理。

4.1. 多项式的刘维尔定理。我们回顾包含所有次数小于或等于 λ 的多项式的空间 $\mathcal{P}_\lambda$。接下来，对于任意 $a > 0$、$\epsilon \in (0, 1)$ 以及 $\lambda \in \{0, 1, 2, 3\}$，我们定义向量空间

$$\mathcal{T}_{\lambda,\epsilon,a} := \left\{ \begin{array}{l} p_0 + p_{0,1}\phi_{0,a} + p_{0,2}\partial_{v_n}\phi_{1,a} + q_{0,1}\psi_{0,a} \text{ with} \\ p_0 \in \mathcal{P}_\lambda,\ p_{0,1} \in \mathcal{P}_{[\lambda+\epsilon-\frac{1}{2}]},\ q_{0,1} \in \mathcal{P}_{\lambda-2},\ p_{0,2} \in \mathcal{P}_{[\lambda+\epsilon-\frac{5}{2}]} \end{array} \right\},$$

其中，函数 $\phi_{m,a}(x_n, v_n) := \phi_m(x_n/a, v_n/a)$ 对于 $m \in \{0, 1\}$ 和 $\psi_{0,a} := \psi_0(x_n/a, v_n/a)$ 满足方程 $(v_n\partial_{x_n,\,x_n} - a^2\partial_{v_n,v_n})f = 0$。

现在，当数据由多项式给出时，我们已经准备好证明半空间中具有流入边界条件的一般刘维尔定理。

定理 **4.1**。设 $\lambda \in \{0, 1, 2, 3\}$, $\epsilon \in (0, 1)$，其中 $\lambda + \epsilon < 3 + \frac{1}{2}$, $p \in \mathcal{P}_{\lambda-2}$，且 $q \in \mathcal{P}_\lambda$。设 f 是下列方程的弱解

$$\begin{cases} (\partial_t + v \cdot \nabla_x)f - a^{i,j}\partial_{v_i,v_j}f = p & in\ \mathbb{R} \times \{x_n > 0\} \times \mathbb{R}^n, \\ f = q & in\ \mathbb{R} \times \{x_n = 0\} \times \{v_n > 0\}, \end{cases} \tag{4.1}$$

其中 $a^{i,\,j}$ 是满足一致椭圆性条件的常数矩阵。假设存在常数 $c \geq 1$，使得对任意 $R > 0$,

$$\|f\|_{L^\infty(\mathcal{H}_R)} \leq c(1 + R)^{\lambda+\epsilon}. \tag{4.2}$$

那么，$f = P$ 对于某个 $P \in \mathcal{T}_{\lambda,\,\epsilon,\,a}$，满足 $a := \sqrt{a^{n,\,n}}$。

证明。我们可以假设 $a^{n,\,n} = 1$。接下来，由于 $f - q$ 满足

$$\begin{cases} (\partial_t + v \cdot \nabla_x)(f - q) - a^{i,j}\partial_{v_i,v_j}(f - q) = p + \widetilde{p} & \text{in } \mathbb{R} \times \{x_n > 0\} \times \mathbb{R}^n, \\ f - q = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times \{x_n = 0\} \times \{v_n > 0\} \end{cases}$$

对于某个 $\widetilde{p} \in \mathcal{P}_{\lambda-2}$，并且满足将 f 替换为 $f - q$后的 (4.2)，我们可以假设 $q = 0$。

现在固定 $h>0$ 和 $y=hy_i$，使得 $i\neq n$，其中 y_i 表示 x坐标中的第 i个单位向量。考虑一个函数

$$\delta_{h,y_i}f(t,x,v) \coloneqq f(t,x+y,v)-f(t,x,v)$$

可知 $\delta_{h,\ y_i}f$ 是.....的解

$$\begin{cases}(\partial_t+v\cdot\nabla_x)\delta_{h,y_i}f-a^{i,j}\partial_{v_i,v_j}\delta_{h,y_i}f=\delta_{h,y_i}p & \text{in } \mathbb{R}\times\{x_n>0\}\times\mathbb{R}^n,\\ \delta_{h,y_i}f=0 & \text{in } \mathbb{R}\times\{x_n=0\}\times\{v_n>0\}.\end{cases}$$

根据 [RW25 中引理 2.25], 给出的流入 C^α-估计，我们有

$$\|\delta^{h,\ y_i}f\|_{L_\infty\ (\mathcal{H}_R)} \le c|h|^\alpha\left[[f]_{C^\alpha}\right]^{(\mathcal{H}_{2R})} \le c|h|^\alpha\left(\|f\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{4R})}+\|R^2\delta^{h,y_i}p\|_{L_\infty}^{(\mathcal{H}_{4R})}\right) \le c|h|^\alpha R^{\lambda+\epsilon-\alpha}$$

，其中我们选取了 $R^3>2|h|$ 并利用了 $p\in\mathcal{P}_{\lambda-2}$这一事实。将该过程迭代 j次，我们推得

$$\|\delta^j_{h,y_i}f\|_{L^\infty(\mathcal{H}_R)}\le c|h|^{j\alpha}R^{\lambda+\epsilon-j\alpha},$$

其中我们记$\delta^j_{h,y_i}f=\delta_{h,y_i}\circ\delta^{j-1}_{h\ ,y_i}f$。取 j充分大且 $R\to\infty$，我们推得，对任意 $i=1,\dots,n-1$，f 关于 x_i 变量是一个多项式。类似地，对$\delta_{h,\tau}f(t,x,v)\coloneqq f(t+\tau,x,v)-f(t,x,v)$应用同样的论证，可得 f关于 t变量也是一个多项式，从而得到

$$f=\sum_{\substack{\beta=(\beta_t,\beta_{x'},0)\in\mathcal{I}\\ |\beta|\le\lambda}} f_\beta(x_n,v)t^{\beta_t}\prod_{j=1}^{n-1}x_j^{\beta_{x_j}}\coloneqq\sum_{\beta\in\mathcal{I}}g_\beta(t,x,v),$$

其中我们用 $\mathcal{I}=(\mathbb{N}\cup\{0\})^{1+2n}$ 表示，$|\beta|=2|\beta_t|+3|\beta_x|+|\beta_v|$ 为多重指标 $\beta\in\mathcal{I}$的动力学次数，并且我们利用(4.2)以确保 $|\beta|\le\lambda$。

步骤 1。我们旨在证明，对于每个 $\beta\in\mathcal{I}$，

$$g_\beta(t,x,v)\coloneqq t^{\beta_t}\prod_{j=1}^{n-1}x_j^{\beta_{x_j}}\sum_{\gamma_\beta\in\mathcal{I}_\beta}h_{\gamma_\beta}(x_n,v_n)v_1^{\gamma_{\beta_1}}\cdots v_{n-1}^{\gamma_{\beta_{n-1}}}. \tag{4.3}$$

令 M_0为 $\mathcal{I}$中满足以下条件的最大值 $|\beta|$：$\delta_h^{\beta_t}\ ,\ {}_\tau\delta_h^{\beta_1}\ ,\ {}_{y_1}\cdots\delta_h^{\beta_{n-1}}\ ,\ {}_{y_{n-1}}f=c_\beta|h|^\beta f_\beta(x_n,v)$ 对某个常数 $c_\beta\in\mathbb{R}$ 成立，并且

$$\begin{cases}v_n\partial_{x_n}f_\beta(x_n,v)-a^{i,j}\partial_{v_i,v_j}f_\beta(x_n,v)=\widetilde{p}_\beta & \text{in } \{x_n>0\}\times\mathbb{R}^n,\\ f_\beta(x_n,v)=0 & \text{in } \{x_n=0\}\times\{v_n>0\}\end{cases} \tag{4.4}$$

对于某个多项式 $\widetilde{p}_\beta\in\mathcal{P}_{\lambda-2-\beta}$。这是将算子 $\delta_h^{\beta_t}\ ,\ {}_\tau\delta_h^{\beta_1}\ ,\ {}_{y_1}\cdots\delta_h^{\beta_{n-1}}\ ,\ {}_{y_{n-1}}$作用于 (4.1) 得出的。由于在 (4.4) 中，对于任意 $i=1,2,\dots,n-1$，我们都可以取 $\delta^j_{h,\ w_i}$，因此可得

$$\begin{cases}v_n\partial_{x_n}\delta^j_{h,w_i}f_\beta(x_n,v)-a^{i,j}\partial_{v_i,v_j}\delta^j_{h,w_i}f_\beta(x_n,v)=\delta^j_{h,w_i}\widetilde{p}_\beta & \text{in } \{x_n>0\}\times\mathbb{R}^n,\\ \delta^j_{h,w_i}f_\beta(x_n,v)=0 & \text{in } \{x_n=0\}\times\{v_n>0\},\end{cases}$$

其中记

$$\delta_{h,w_i}f(t,x,v)\coloneqq f(t,x,v+hw_i)-f(t,x,v)\quad\text{and}\quad\delta^j_{h,w_i}f=\delta^{j-1}_{h,w_i}\circ\delta_{h,w_i}f.$$

由于 $\delta^j_{h\ ,\ w_i}f_\beta$ 也是满足 (4.1) 的弱解，其中 $p=\delta^j_{h\ ,\ w_i}\widetilde{p}_\beta$ 且 $q=0$，通过应用流入的 C^α-估计，我们得到 f_β 关于 v_i 变量是一个多项式。这就得到了 (4.3)。归纳地，

我们假设，对于任意满足 $\beta \in \mathcal{I}$ 使得 $|\beta| \geq M_0 - j$ 的 g_β，其形式均如 (4.3) 所给出。令我们选取 $\beta' \in \mathcal{I}$ 使得 $|\beta'| = M_0 - (j+1)$。于是得到

$$\frac{\delta_{h,\tau}^{\beta_t'} \delta_{h,y_1}^{\beta_1'} \cdots \delta_{h,y_{n-1}}^{\beta_{n-1}'} f}{|h|^{\beta'}} = c_{\beta'} f_{\beta'}(x_n, v) + \underbrace{\sum_{\substack{\beta \in \mathcal{I} \\ |\beta| > |\beta'|}} c_\beta t^{\beta_t - \beta_t'} x_1^{\beta_{x_1} - \beta_{x_1}'} \cdots x_{n-1}^{\beta_{x_{n-1}} - \beta_{x_{n-1}}'} \sum_{\gamma_\beta \in \mathcal{I}_\beta} c_{\gamma\beta} h_{\gamma_\beta}(x_n, v_n) v_1^{\gamma_{\beta_1}} \cdots v_{n-1}^{\gamma_{\beta_{n-1}}}}_{=: \overline{f}(t,x,v)}$$

and

$$v_n \partial_{x_n} f_{\beta'} - a^{i,j} \partial_{v_i, v_j} f_{\beta'} = \widetilde{p}_{\beta'} - \underbrace{(\partial_t + v \cdot \nabla_x - a^{i,j} \partial_{i,j}) \overline{f}}_{=:F} \quad \text{in } \mathbb{R} \times \{x_n > 0\} \times \mathbb{R}^n, \tag{4.5}$$

其中 $\widetilde{p}_{\beta'} \in \mathcal{P}_{\lambda - 2 - \beta'}$。注意，根据归纳假设，对于每个 $i = 1, \ldots, n-1$，F 关于 v_i 变量是一个多项式。因此，对 (4.5) 应用 δ_{h,w_i}^j，当 j 足够大时，我们得到

$$v_n \partial_{x_n} \delta_{h,w_i}^j f_{\beta'} - a^{i,j} \partial_{v_i, v_j} \delta_{h,w_i}^j f_{\beta'} = \delta_{h,w_i}^j \widetilde{p}_{\beta'} \quad \text{in } \{x_n > 0\} \times \mathbb{R}^n.$$

类似地，我们推得，对于任意 $i = 1, \ldots, n-1$，$f_{\beta'}(x_n, v)$ 关于 v_i 变量是多项式。这意味着 $g_{\beta'}$ 也具有 (4.3) 中的形式，并且通过归纳法，对于任意 $\beta \in \mathcal{I}$，我们得到 (4.3)。因此，我们可以写成

$$f(t,x,v) := \sum_{\substack{\beta = (\beta_t, \beta_{x'}, \beta_{v'}) \in \mathcal{I}, \\ |\beta| \leq \lambda}} t^{\beta_t} \prod_{j=1}^{n-1} x_j^{\beta_{x_j}} \prod_{j=1}^{n-1} v_j^{\beta_{v_j}} h_\beta(x_n, v_n) = \sum_\beta F_\beta(t,x,v).$$

步骤 2。接下来，我们要证明，对于每个 $\beta \in \mathcal{I}$，h_β 都具有如下形式

$$h_\beta = \widetilde{p}_\beta + \sum_{i=0}^{2} a_{\beta,i} v_n^i \phi_m + b_\beta \partial_{v_n} \phi_1 + \sum_{i=0}^{1} c_{\beta,i} v_n^i \psi_0, \tag{4.6}$$

其中 $\widetilde{p}_\beta(x_n, v_n) \in \mathcal{P}_\lambda$, $a_{\beta,\ m,\ i}, b_{\beta,\ m,\ i}, c_{\beta,\ l,\ j}, d_{\beta,\ l,\ j} \in \mathbb{R}$，以及由 (4.2) 中给出的增长条件，

$$\begin{cases} a_{\beta,i} = 0 & \text{if } \frac{1}{2} + i > \lambda + \epsilon, \\ b_\beta = 0 & \text{if } \frac{5}{2} + j > \lambda + \epsilon, \\ c_{\beta,i} = 0 & \text{if } 2 + i > \lambda. \end{cases} \tag{4.7}$$

设 M_1 为 $|\beta|$ 的最大值，其中 $\beta \in \mathcal{I}$。于是得到 $\partial_t^{\beta_t} \partial_{x_1}^{\beta_{x_1}} \cdots \partial_{x_{n-1}}^{\beta_{x_{n-1}}} \partial_{v_1}^{\beta_{v_1}} \cdots \partial_{v_{n-1}}^{\beta_{v_{n-1}}} f = c_\beta h_\beta$,

$$\begin{cases} v_n \partial_{x_n} h_\beta - a^{n,n} \partial_{v_n, v_n} h_\beta = \widetilde{p} & \text{in } \{x_n > 0\} \times \mathbb{R}, \\ f_\beta = 0 & \text{in } \{x_n = 0\} \times \{v_n > 0\} \end{cases} \tag{4.8}$$

对于某个多项式 $\widetilde{p} = \widetilde{p}(x_n, v_n) \in \mathcal{P}_\lambda$。这是通过将 $\delta_h^{\beta_t},\ {}_t\delta_h^{\beta_{x_1}},\ {}_{x_1} \cdots \delta_h^{\beta_{x_{n-1}}},\ {}_{x_{n-1}}\delta_h^{\beta_{v_1}},\ {}_{v_1} \cdots \delta_{h\ v_{n-1}}^{\beta_{v_{n-1}}}$ 应用于该方程，然后取 $h \to 0$ 得到的。根据定理 3.15，我们得到

$$h_\beta = \widetilde{p}_\beta + a_{\beta,0} \phi_0 + c_{\beta,0} \psi_0 \tag{4.9}$$

对于某些常数 $a_{\beta,\ j}$、$c_{\beta,\ i} \in \mathbb{R}$ 以及 $\widetilde{p}_\beta(x_n, v_n) \in \mathcal{P}_{\lambda-2}$。这就证明了带有 $|\beta| = M_1$ 的(4.6)。现在我们假设带有 $|\beta| = M_1 - k$ 的(4.6)对于某个非负整数 k 成立，接下来希望证明带有 $|\beta| = M_1 -(k+1)$ 的(4.6)。为此，我们注意到

$$\begin{aligned}
p &= \sum_{\beta\in\mathcal{I}} (\partial_t + v\cdot\nabla_x - a^{i,j}\partial_{v_i,v_j}) F_\beta \\
&= \sum_{\beta\in\mathcal{I}} (\partial_t + v\cdot\nabla_x - a^{i,j}\partial_{v_i,v_j}) \left(t^{\beta_t} \prod_{j=1}^{n-1} x_j^{\beta_{x_j}} \prod_{j=1}^{n-1} v_j^{\beta_{v_j}} h_\beta(x_n, v_n) \right) \\
&= \sum_{\beta\in\mathcal{I}} h_\beta(x_n, v_n) \left(\partial_t + v'\cdot\nabla_{x'} - \sum_{i,j\neq n} a^{i,j}\partial_{v_i,v_j} \right) \left(t^{\beta_t} \prod_{j=1}^{n-1} x_j^{\beta_{x_j}} \prod_{j=1}^{n-1} v_j^{\beta_{v_j}} \right) \\
&\quad - \sum_{\beta\in\mathcal{I}} \left(t^{\beta_t} \prod_{j=1}^{n-1} x_j^{\beta_{x_j}} \right) \sum_{\substack{i=n \text{ or } j=n \\ (i,j)\neq(n,n)}} a^{i,j}\partial_{v_i,v_j} \left(\prod_{j=1}^{n-1} v_j^{\beta_{v_j}} h_\beta \right) \\
&\quad + \sum_{\beta\in\mathcal{I}} \left(t^{\beta_t} \prod_{j=1}^{n-1} x_j^{\beta_{x_j}} \prod_{j=1}^{n-1} v_j^{\beta_{v_j}} \right) (v_n\partial_{x_n} - a^{n,n}\partial_{v_n,v_n}) h_\beta.
\end{aligned}$$

现在固定 $\beta' \in \mathcal{I}$，使得 $|\beta'| = M_1 -(k+1)$。与前面一样，对上一行应用微分算子 $\partial_t^{\beta'_t}\partial_{x_1}^{\beta'_1}\cdots\partial_{x_{n-1}}^{\beta'_{n-1}}\partial_{v_1}^{\gamma_{\beta'_1}}\cdots\partial_{v_{n-1}}^{\gamma_{\beta'_{n-1}}}$，我们可推出存在某个 $\overline{p} \in \mathcal{P}_{\lambda-2}$。

$$\begin{aligned}
\overline{p} = &\sum_{\substack{\beta\in\mathcal{I} \\ |\beta|\geq M_1-k+1}} c_{\beta,1} h_\beta \left(\partial_t + v'\cdot\nabla_{x'} - \sum_{i,j\neq n} a^{i,j}\partial_{v_i,v_j} \right) \left(t^{\beta_t-\beta'_t} \prod_{j=1}^{n-1} x_j^{\beta_{x_j}-\beta'_{x_j}} \prod_{j=1}^{n-1} v_j^{\beta_{v_j}-\beta'_{v_j}} \right) \\
&- \sum_{\substack{\beta\in\mathcal{I} \\ |\beta|\geq M_1-k}} c_{\beta,2} \left(t^{\beta_t-\beta'_t} x_1^{\beta_{x_1}-\beta'_{x_1}} \cdots x_{n-1}^{\beta_{x_{n-1}}-\beta'_{x_{n-1}}} \right) \sum_{\substack{i=n \text{ or } j=n \\ (i,j)\neq(n,n)}} a^{i,j}\partial_{v_i,v_j} \left(v_1^{\beta_{v_1}-\beta'_{v_1}} \cdots v_{n-1}^{\beta_{v_{n-1}}-\beta'_{v_{n-1}}} h_\beta \right) \\
&+ \sum_{\substack{\beta\in\mathcal{I} \\ |\beta|\geq M_1-k}} c_{\beta,3} \left(t^{\beta_t-\beta'_t} x_1^{\beta_{x_1}-\beta'_{x_1}} \cdots x_{n-1}^{\beta_{x_{n-1}}-\beta'_{x_{n-1}}} v_1^{\beta_{v_1}-\beta'_{v_1}} \cdots v_{n-1}^{\beta_{v_{n-1}}-\beta'_{v_{n-1}}} \right) (v_n\partial_{x_n} - \partial_{v_n,v_n}) h_\beta \\
&+ c_4 (v_n\partial_{x_n} - a^{n,n}\partial_{v_n,v_n}) h_{\beta'}.
\end{aligned}$$

此外，我们注意到当 $v_n > 0$ 时，$h_{\beta'}(0, v_n) \equiv 0$。利用这一点以及 $h_{\beta'}$ 与 t、x'、v' 无关这一事实，我们可推出存在某个 $\widetilde{p} = \widetilde{p}(x_n, v_n) \in \mathcal{P}_{\lambda-2}$，

$$(v_n\partial_{x_n} - a^{n,n}\partial_{v_n,v_n}) h_{\beta'} = \widetilde{p} + \sum_{\substack{\beta\in\mathcal{I} \\ |\beta|=M_1-k+1}} c'_{\beta,1} h_\beta + \sum_{\substack{\beta\in\mathcal{I} \\ |\beta|=M_1-k}} c'_{\beta,2} \partial_{v_n} h_\beta. \tag{4.10}$$

在进一步进行之前，如同（3.93）中所述，我们注意到

$$\begin{aligned}
&(v_n\partial_{x_n} - \partial_{v_n,v_n})(c_0 v_n^2\partial_{v_n}\phi_1 + c_1 v_n\phi_1) = v_n^2\phi_0,\ (v_n\partial_{x_n} - \partial_{v_n,v_n})(c_3 v_n\partial_{v_n}\phi_1) = v_n\phi_0, \\
&(v_n\partial_{x_n} - \partial_{v_n,v_n})(c_4 v^3\phi_0 + c_5 v\partial_v\phi_1) = v_n^2\phi_1,\ \partial_{v_n}^2\phi_0 = v_n\partial_{x_n}\phi_1 = c_6 v_n\phi_0.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

根据归纳假设（4.6），以及结合观察（4.11）和（3.93），再利用增长条件（4.2），我们可以推导出

$$\begin{cases}(v_n\partial_{x_n}-a^{n,n}\partial_{v_n,v_n})(h_{\beta'}-g)=\widetilde{p} & \text{in } \{x_n>0\}\times\mathbb{R},\\ (h_{\beta'}-g)=\sum_{j\geq 0}b_j v^j & \text{in } \{x_n=0\}\times\{v_n>0\},\end{cases}$$

其中 $b_j=0$ 当 $j>\lambda+\epsilon$ 且

$$g=\widetilde{p}_\beta+\sum_{i=0}^{2}a_i v_n^i\phi_m+b_0\partial_{v_n}\phi_1+\sum_{i=0}^{1}c_i v_n^i\psi_0.$$

特别地，常数 a_i、b_i、$c_i\in\mathbb{R}$ 满足 (4.7)，其中 $a_{\beta,\,i}$、b_β、$c_{\beta,\,i}$ 分别替换为 a_i、b_0、c_i。应用定理 3.15，可得 $\beta'\in\mathcal{I}$ 时的 (4.6)。归纳论证得出 (4.6)。

结　　合 (4.3) 和 (4.6) 得到所需结果，证明至此完成　　f.　□

4.2. 无界右端项下的刘维尔定理。本小节中，我们在源项由合流超几何函数给出且边界数据为零的假设下证明刘维尔定理。对于 $\lambda\in\{0,1,2,3\}$ 和 $\epsilon\in(0,1)$，其中 $\lambda+\epsilon<3+\frac{1}{2}$，我们定义以下 n 维空间 $\overline{\mathcal{T}}_{\lambda,\,\epsilon}$ 和 $\mathcal{T}_{\lambda,\,\epsilon}$ 的类比空间，它们来自上一节，

$$\overline{\mathcal{T}}_{\lambda,\epsilon}:=\operatorname{span}\left\{p,p_i\mathbf{\Phi}_i,p_{j+3}\mathbf{\Phi}_{j+3},p_5\mathbf{\Phi}_5,\ \middle|\ \begin{array}{l}p\in\mathcal{P}_\lambda\,,p_i\in\mathcal{P}_{[\lambda+\epsilon-\frac{1}{2}]},\,p_{j+3}\in\mathcal{P}_{\lambda-2},\,p_5\in\mathcal{P}_{[\lambda+\epsilon-\frac{5}{2}]}\\ p_1(0)=p_2(0)=Dp_2(0)=p_4(0)=0\end{array}\right\},$$

and

$$\mathcal{T}_{\lambda,\epsilon}:=\left\{P\in\overline{T}_{\lambda,\epsilon}\,\middle|\,P(z)\equiv 0\text{ on }\{x_n=0\}\times\{v_n>0\}\right\},\tag{4.12}$$

其中函数 $\mathbf{\Phi}_k(z)=\mathbf{\Phi}_k(x_n,v_n)$ 在 $k\in\{0,1,2,3,4,5\}$ 的条件下由 (3.88) 定义。

根据定理 4.1 和定理 3.17，我们得到如下结论。

引理 4.2. 设 $\lambda\in\{0,1,2,3\}$ 和 $\epsilon\in(0,1)$ 满足 $\lambda+\epsilon<3+\frac{1}{2}$。设 f 是一个弱解，满足

$$\begin{cases}(\partial_t+v\cdot\nabla_x)f-a^{i,j}\partial_{v_i,v_j}f=p+Q & in\ \mathbb{R}\times\{x_n>0\}\times\mathbb{R}^n,\\ f=0 & in\ \mathbb{R}\times\{x_n=0\}\times\{v_n>0\},\end{cases}$$

其中 $a^{i,\,j}$ 是一个一致椭圆常数矩阵，满足 $a^{n,\,n}=1$，并且

$$Q:=\sum_{i=0}^{2}q_{0,i}\mathbf{\Phi}_i+\sum_{k=0}^{4}q_{1,k}\partial_{v_n}\mathbf{\Phi}_k+\sum_{k=0,1,3}q_{2,k}\partial_{v_n,v_n}\mathbf{\Phi}_k,\tag{4.13}$$

并且对于 $i\in\{0,1,2\}$ 和 $j\in\{0,1\}$，

$$\begin{aligned}&q_{0,i}\in\mathcal{P}_{[\lambda+\epsilon-\frac{5}{2}]},\,q_{1,i}\in\mathcal{P}_{[\lambda+\epsilon-\frac{3}{2}]},\,q_{1,j+3}\in\mathcal{P}_{\lambda-3},\,q_{2,i}\in\mathcal{P}_{[\lambda+\epsilon-\frac{1}{2}]},\,q_{2,3}\in\mathcal{P}_{\lambda-2},\\&q_{1,2}(0)=q_{2,0}(0)=q_{2,1}(0)=q_{2,3}(0)=Dq_{2,1}(0)=0.\end{aligned}\tag{4.14}$$

设存在 $c\geq 1$，使得对于任意 $R>0$，

$$\|f\|_{L^\infty(\mathcal{H}_R)}\leq c(1+R)^{\lambda+\epsilon}.$$

那么，$f\in\mathcal{T}_{\lambda,\,\epsilon}$。

证明。首先，我们断言，对于任意如（4.13）、（4.14）中的 Q ，存在一个函数 $H \in \overline{\mathcal{T}}_{\lambda,\,\epsilon}$ ，使得（$\partial_t + v\cdot\nabla_x)\ H - a^{i,\ j}\partial_{v_i,\ v_j}H = Q$ ，并且在 $\mathbb{R}\times\{x_n=0\}\times\{v_n>0\}$ 上有 $H=q$ ，其中某个 $q\in\mathcal{P}_\lambda$。证明该断言后，对 $f-H$ 应用定理 4.1，即可推得所需结果。

根据定理 3.17，当 $Q = Q(x_n, v_n)$ 时，该结论已得证。由 (4.14) 及方程的线性性，只需在以下情形中求得 $H\in\overline{\mathcal{T}}_{\lambda,\epsilon}$

$Q\in\{v_i\partial_{v_n}\mathbf{\Phi}_0, v_i\partial_{v_n}\mathbf{\Phi}_1, v_i\partial_{v_n}\mathbf{\Phi}_2, v_i\partial_{v_n,v_n}\mathbf{\Phi}_0, v_iv_j\partial_{v_n,v_n}\mathbf{\Phi}_0, t\partial_{v_n,v_n}\mathbf{\Phi}_0, v_iv_j\partial_{v_n,v_n}\mathbf{\Phi}_1, t\partial_{v_n,v_n}\mathbf{\Phi}_1, v_i\partial_{v_n,v_n}\mathbf{\Phi}_3\}$，其中 $i,j\in\{1,\dots,n\}$ 和 $i\neq n$。继续之前，我们像在 (3.93) 中那样观察到

$$\begin{aligned}&(v_n\partial_{x_n}-\partial_{v_n,v_n})(v_n\mathbf{\Phi}_2) = -12\partial_{v_n}\mathbf{\Phi}_0 + 12\partial_{v_n}\mathbf{\Phi}_1 - 8\partial_{v_n}\mathbf{\Phi}_2,\\ &(v_n\partial_{x_n}-\partial_{v_n,v_n})\mathbf{\Phi}_1 = -4\partial_{v_n,v_n}\mathbf{\Phi}_0,\ (v_n\partial_{x_n}-\partial_{v_n,v_n})\mathbf{\Phi}_2 = -24\partial_{v_n,v_n}\mathbf{\Phi}_0 - 6\partial_{v_n,v_n}\mathbf{\Phi}_1.\end{aligned} \tag{4.15}$$

当 $Q\in\{v_i\partial_{v_n}\mathbf{\Phi}_k$ 对于某个 $k\in\{0,1,2\}$，由 (3.93) 和 (4.15) 可推出该结论，因为

$$(\partial_t + v\cdot\nabla_x - a^{i,j}\partial_{v_i,v_j})\left(v_i\sum_{l=0}^{2}c_{k,l}v_n\mathbf{\Phi}_l\right) - v_i\partial_{v_n}\mathbf{\Phi}_k = \left(\sum_{l=0}^{2}a^{i,n}c_{k,l}(\mathbf{\Phi}_l + v_n\partial_{v_n}\mathbf{\Phi}_l)\right). \tag{4.16}$$

此外，由 (4.15) 可得

$$(\partial_t + v\cdot\nabla_x - a^{i,j}\partial_{v_i,v_j})(c_0v_i\mathbf{\Phi}_1) - v_i\partial_{v_n,v_n}\mathbf{\Phi}_0 = c_1\partial_{v_n}\mathbf{\Phi}_1,$$

这就证明了 $Q = v_i\partial_{v_n,v_n}\mathbf{\Phi}_0$ 情形下的结论。为证明 $Q = q_{2,1}\partial_{v_n,v_n}\mathbf{\Phi}_1$（其中 $q_{2,1}\in\{t, v_iv_j\}$）情形下的结论，由 (3.93) 可知

$$\begin{aligned}(\partial_t + v\cdot\nabla_x - a^{i,j}\partial_{v_i,v_j})\left(q_{2,1}\sum_{k=1}^{2}c_{7,k}\mathbf{\Phi}_k\right) - q_{2,1}\partial_{v_n,v_n}\mathbf{\Phi}_1 &= \partial_t q_{2,1}\sum_{k=1}^{2}c_{7,k}\mathbf{\Phi}_k - a^{i,j}\partial_{v_i,v_j}q_{2,1}\left(\sum_{k=1}^{2}c_{7,k}\mathbf{\Phi}_k\right)\\ &\quad - a^{i,n}\partial_{v_i}q_{2,1}\sum_{k=1}^{2}\partial_{v_n}\mathbf{\Phi}_k =: \sum_{l=0}^{2}Q_l.\end{aligned}$$

由于 $\deg(q_{2,1})\le 2$，我们注意到对于 $l\in\{0,1\}$，有 $Q_l = Q_l(x_n, v_n)$。为处理 Q_2，由 (4.16) 可得

$$\begin{aligned}&(\partial_t + v\cdot\nabla_x - a^{i,j}\partial_{v_i,v_j})\left(\partial_{v_m}q_{2,1}\sum_{l=0}^{2}c_{5,k}v_n\mathbf{\Phi}_l\right) - \partial_{v_m}q_{2,1}\sum_{k=1}^{2}\partial_{v_n}\mathbf{\Phi}_k\\ &= -a^{i,n}\partial_{v_i,v_m}q_{2,1}\sum_{l=0}^{2}c_{5,k}(\mathbf{\Phi}_k + v_n\partial_{v_n}\mathbf{\Phi}_k) =: Q_3(x_n, v_n).\end{aligned}$$

由于 $Q_0+Q_1+Q_3$ 具有 (3.90) 中给出的形式，根据定理 3.17，存在一个函数 $H\in\overline{\mathcal{T}}_{\lambda,\epsilon}$，使得 $(\partial_t + v\cdot\nabla_x - a^{i,j}\partial_{v_i,v_j})H = q_{2,1}\partial_{v_nv_n}\mathbf{\Phi}_1$。其余情形下结论的证明 $Q\in\{v_iv_j\partial_{v_n,v_n}\mathbf{\Phi}_0, t\partial_{v_n,v_n}\mathbf{\Phi}_0, v_i\partial_{v_n,v_n}\mathbf{\Phi}_3\}$ 也可类似进行。证明完毕。□

5. Expansion at grazing boundary points

本节中，我们证明掠射集处的展开估计。为此，对于任意 z_0 with $(x_0)_n = (v_0)_n = 0$ and $a>0$，我们引入两个向量空间

$$\overline{\mathcal{T}}_{\lambda,\epsilon,z_0,a} := \operatorname{span}\left\{p, p_i\mathbf{\Phi}_{i,a}, p_{j+3}\mathbf{\Phi}_{j+3,a}, p_5\mathbf{\Phi}_{5,a}\ \middle|\ \begin{array}{l}p\in\mathcal{P}_\lambda, p_i\in\mathcal{P}_{[\lambda+\epsilon-\frac{1}{2}]},\ p_{j+3}\in\mathcal{P}_{\lambda-2},\ p_5\in\mathcal{P}_{[\lambda+\epsilon-\frac{5}{2}]}\\ p_1(z_0)=p_2(z_0)=Dp_2(z_0)=p_4(z_0)=0\end{array}\right\},$$

and

$$\mathcal{T}_{\lambda,\epsilon,z_0,a} \coloneqq \left\{ P \in \overline{\mathcal{T}}_{\lambda,\epsilon,z_0,a} \,\middle|\, P(z) \equiv 0 \text{ on } \{x_n = 0\} \times \{v_n > 0\} \right\}, \tag{5.1}$$

其中 $i \in \{0,1,2\}$, $j \in \{0,1\}$ and $\mathbf{\Phi}_{i,a}(x_n, v_n) \coloneqq \mathbf{\Phi}_i(x_n/a, v_n/a)$ 在 (3.88) 中确定。当$a = 1$时，我们记 $\mathcal{T}_{\lambda,\epsilon,z_0,a} = \mathcal{T}_{\lambda,\epsilon,z_0}$ and $\overline{\mathcal{T}}_{\lambda,\epsilon,z_0,a} = \overline{\mathcal{T}}_{\lambda,\epsilon,z_0}$。考虑这些重标度函数的原因是，它们满足方程 $(v_n\partial_{x_n} - a^2\partial_{v_n,v_n})\mathbf{\Phi}_{0,a} = 0$。

现在我们可以给出本节的主要结果了。

命题 5.1. 设 $\lambda \in \{0,1,2,3\}$ 和 $\epsilon \in (0,1)$，且 $\lambda + \epsilon < 3 + \frac{1}{2}$和 $\lambda + \epsilon - \frac{1}{2} \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$。设$f$ 是以下方程的弱解

$$\begin{cases} (\partial_t + v \cdot \nabla_x) f - \operatorname{div}_v(A \nabla_v f) = B \cdot \nabla_v f + F & \text{in } \mathcal{H}_R(z_0), \\ f = g & \text{in } \gamma_- \cap \mathcal{Q}_R(z_0), \end{cases}$$

其中 $(x_0)_n = (v_0)_n = 0$, $R \le 1$, $A \in C^{\lambda-\frac{1}{2}+\epsilon}(\mathcal{H}_R(z_0))$, $B \in C^{\lambda-\frac{3}{2}+\epsilon}(\mathcal{H}_R(z_0))$, $F \in C^{\lambda-2+\epsilon}(\mathcal{H}_R(z_0))$。那么存在 $P_{z_0,a} \in \overline{\mathcal{T}}_{\lambda,\epsilon,z_0,a}$，使得对于任意 $r \in (0, R/2]$ 且 $z \in \mathcal{H}_r(z_0)$,

$$|f(z) - P_{z_0,a}(z)| \le c \left(\frac{r}{R}\right)^{\lambda+\epsilon} \left(\|f\|_{L^\infty(\mathcal{H}_R(z_0))} + R^{\lambda+\epsilon}[F]_{C^{\lambda-2+\epsilon}(\mathcal{H}_R(z_0))} + R^{\lambda+\epsilon}[g]_{C^{\lambda+\epsilon}(\gamma_- \cap \mathcal{Q}_R(z_0))} \right), \tag{5.2}$$

其中 $a \coloneqq \sqrt{(A(z_0))_{n,\,n}}$且 $c = c(n, \Lambda, \lambda, \epsilon, \|A\|_{C^{\lambda-\frac{1}{2}+\epsilon}(\mathcal{H}_R(z_0))}\ \|B\|_{C^{\lambda-\frac{3}{2}+\epsilon}(\mathcal{H}_R(z_0))}\ |v_0|\chi_{\lambda\ge 2})$。特别地，当 $\lambda \le 1$时,

$$\begin{aligned} |f(z) - P_{z_0,a}(z)| \le c \left(1 + \|B\|_{C^{\lambda-\frac{3}{2}+\epsilon}(\mathcal{H}_R(z_0))}\right)^{\lambda+\epsilon} \left(\frac{r}{R}\right)^{\lambda+\epsilon} \Bigg(& \|f\|_{L^\infty(\mathcal{H}_R(z_0))} + R^2 \|F\|_{L^\infty(\mathcal{H}_R(z_0))} \\ & + R^{\lambda+\epsilon}[g]_{C^{\lambda+\epsilon}(\gamma_- \cap \mathcal{Q}_R(z_0))} \Bigg) \end{aligned} \tag{5.3}$$

对于某个常数 $c = c(n, \Lambda, \epsilon, \|A\|_{C^\epsilon(\mathcal{H}_R(z_0))})$。

我们仅对 $(A(z_0))_{n,\,n} = 1$ 的情形给出证明，因为一般情形的结果可以很容易地通过缩放论证得到。此外，下面我们将解释如何由 (5.2) 推导出 (5.3)。

为说明只需考虑 $(A(z_0))_{n,\,n} = 1$，取 $a \coloneqq \sqrt{(A(z_0))_{n,\,n}} \in [\sqrt{\Lambda^{-1}}, \sqrt{\Lambda}]$ 并定义

$$f_a(z) \coloneqq f(t, x', ax_n, v', av_n) \quad F_a(z) \coloneqq F(t, x', ax_n, v', av_n) \quad g_a(z) \coloneqq g(t, x', ax_n, v', av_n)$$

可见

$$\begin{cases} (\partial_t + v \cdot \nabla_x) f_a - \operatorname{div}_v(\widetilde{A} \nabla_v f_a) = \widetilde{B} \cdot \nabla_v f + F_a & \text{in } \widetilde{H}_{R/a}(z_0), \\ f_a = g_a & \text{in } \gamma_- \cap \widetilde{Q}_{R/a}(z_0), \end{cases}$$

其中

$$\widetilde{Q}_{R/a}(z_0) \coloneqq \{ (t, x', x_n, v', v_n) : t \in I_R(t_0),\ |(v', av_n)| < R,\ |(x' - x_0' - v_0'(t - t_0), ax_n)| < R^3 \},$$

$$\widetilde{H}_{R/a}(z_0) \coloneqq Q_{R/a}(z_0) \cap (\mathbb{R} \times \{x_n > 0\} \times \mathbb{R}^n),$$

$$\widetilde{A}_{i,j}(z) \coloneqq \begin{cases} A_{i,j}(t, x', ax_n, v', av_n) & \text{if } i, j \ne n, \\ A_{i,n}(t, x', ax_n, v', av_n)/a & \text{if } i \ne n, \\ A_{n,n}(t, x', ax_n, v', av_n)/a^2, \end{cases} \qquad \widetilde{B}_i(z) \coloneqq \begin{cases} B(t, x', ax_n, v', av_n) & \text{if } i \ne n, \\ B(t, x', ax_n, v', av_n)/a & \text{if } i = n. \end{cases}$$

现在，我们根据 a 的取值范围考虑两种情况。

- $a \geq 1$。由命题 5.1 中给出的估计，并结合 $(A(z_0))_{n,\ n} = 1$ 以及以下事实：$\mathcal{Q}_{R/a}(z_0) \subset Q_{R/a}(z_0)$ 且 $\mathcal{H}_{R/a}(z_0) \subset H_{R/a}(z_0)$，存在一个函数 $P \in \overline{\mathcal{T}}_{\lambda,\ \epsilon,\ z_0}$，使得对任意 $ra \leq R/(2a)$，

$$\|f_a - P\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{ra}(z_0))} \leq c\left(\frac{2ra^2}{R}\right)^{\lambda+\epsilon}\Bigg(\|f_a\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{R/a}(z_0))} + R^{\lambda+\epsilon}[F_a]_{C^{\lambda-2+\epsilon}(\mathcal{H}_{R/a}(z_0))} + R^{\lambda+\epsilon}[g_a]_{C^{\lambda+\epsilon}(\gamma_-\cap\mathcal{Q}_{R/a}(z_0))}\Bigg),$$

其中 $c = c(n, \Lambda, \epsilon, \|\widetilde{A}\|_{C^{\lambda-\frac{1}{2}+\epsilon}(\mathcal{H}_R(z_0))}\|\widetilde{B}\|_{C^{\lambda-1+\epsilon}(\mathcal{H}_R(z_0))}\ |v_0|\chi_{\lambda\geq 2})$。因此，通过变量替换，对任意 $r \leq R/(2a^2)$，我们有

$$\|f - P_a\|_{L^\infty(\mathcal{H}_r(z_0))} \leq c\left(\frac{r}{R}\right)^{\lambda+\epsilon}\Bigg(\|f\|_{L^\infty(\mathcal{H}_R(z_0))} + R^{\lambda+\epsilon}[F]_{C^{\lambda-2+\epsilon}(\mathcal{H}_R(z_0))} + R^{\lambda+\epsilon}[g]_{C^{\lambda+\epsilon}(\gamma_-\cap\mathcal{Q}_R(z_0))}\Bigg) =: L_1(r),$$

其中 $c = c(n, \Lambda, \epsilon, \|\widetilde{A}\|_{C^{\lambda-\frac{1}{2}+\epsilon}(\mathcal{H}_R(z_0))}\|\widetilde{B}\|_{C^{\lambda-1+\epsilon}(\mathcal{H}_R(z_0))}\ |v_0|\chi_{\lambda\geq 2})$，当 $a \in [\sqrt{\Lambda^{-1}}, \sqrt{\Lambda}]$ 时，并且

$$P_a(t, x', x_n, v', v_n) := P(t, x', x_n/a, v', v_n/a) \in \overline{\mathcal{T}}_{\lambda,\epsilon,z_0,a}.$$

为证明 $r \in (R/(2a^2)\ R/2)$ 的展开，我们注意到，取 $r = R/(2a^2)$，可得

$$\|P_a\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{R/(2a)^2}(z_0))} \leq cL_1(R)$$

对某个常数 $c = c(n, \Lambda, \epsilon, \|\widetilde{A}\|_{C^{\lambda-\frac{1}{2}+\epsilon}(\mathcal{H}_R(z_0))}\|\widetilde{B}\|_{C^{\lambda-1+\epsilon}(\mathcal{H}_R(z_0))}\ |v_0|\chi_{\lambda\geq 2})$。由于向量空间 $\overline{\mathcal{T}}_{\lambda,\epsilon,z_0,a}$ 是有限维的，且 $a \in [\Lambda^{-1}, \Lambda]$，对任意 $r \in (R/(2a^2)\ R/2)$，我们有

$$\|P_a\|_{L^\infty(\mathcal{H}_r(z_0))} \leq c\|P_a\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{R/(2a^2)}(z_0))},$$

其中 $c = c(\Lambda)$。当 $r > R/(2a)^2$ 时，这两个估计推出所需的结果。

- $a < 1$。于是我们有 $\mathcal{Q}_{R/a}(z_0) \subset Q_R(z_0)$ 和 $\mathcal{H}_{R/a}(z_0) \subset H_R(z_0)$。因此，存在一个函数 $P \in \overline{\mathcal{T}}_{\lambda,\ \epsilon,\ z_0}$，使得对于任意 $r/a \leq R/2$，

$$\|f_a - P\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{r/a}(z_0))} \leq c\left(\frac{2r}{R/a}\right)^{\lambda+\epsilon}\Bigg(\|f_a\|_{L^\infty(\mathcal{H}_R(z_0))} + R^{\lambda+\epsilon}[F_a]_{C^{\lambda-2+\epsilon}(\mathcal{H}_R(z_0))} + R^{\lambda+\epsilon}[g_a]_{C^{\lambda+\epsilon}(\gamma_-\cap\mathcal{Q}_R(z_0))}\Bigg),$$

其中 $c = c(n, \Lambda, \epsilon, \|\widetilde{A}\|_{C^{\lambda-\frac{1}{2}+\epsilon}(\mathcal{H}_R(z_0))}\|\widetilde{B}\|_{C^{\lambda-1+\epsilon}(\mathcal{H}_R(z_0))}\ |v_0|\chi_{\lambda\geq 2})$。类似地，当 $r \leq aR/2$ 时，通过变量替换；当 $r > aR/2$ 时，取足够大的常数 c，即可得到所需的估计。

接下来，我们推导 当 $\lambda \leq 1$ 时，由 (5.2) 得到估计 (5.3)。为此，对于任意 $\mathcal{B} > 0$，我们定义

$$\begin{aligned} &f_{\mathcal{B}}(z) := f(S_{\mathcal{B}}z),\ F_{\mathcal{B}}(z) := \mathcal{B}^2F(S_{\mathcal{B}}z),\ g_{\mathcal{B}}(z) := g(S_{\mathcal{B}}z),\\ &\widetilde{A} := A(S_{\mathcal{B}}z),\ \widetilde{B}(z) := \mathcal{B}B(S_{\mathcal{B}}z),\ z_{\mathcal{B}} := S_{\mathcal{B}^{-1}}z_0 \end{aligned} \tag{5.4}$$

可以看出

$$\begin{cases}(\partial_t + v\cdot\nabla_x)f_{\mathcal{B}} - \operatorname{div}_v(\widetilde{A}\nabla_v f_{\mathcal{B}}) = \widetilde{B}\cdot\nabla_v f_{\mathcal{B}} + F_{\mathcal{B}} & \text{in } \mathcal{H}_{R/\mathcal{B}}(z_{\mathcal{B}}),\\ f_{\mathcal{B}} = g_{\mathcal{B}} & \text{in } \gamma_-\cap\mathcal{Q}_{R/\mathcal{B}}(z_{\mathcal{B}})\end{cases}$$

满足 $z_{\mathcal{B}}\in\gamma_0$。由于 $\Lambda^{-1}I\le\widetilde{A}\le\Lambda I$，由 (5.2) 可知，存在函数 $\widetilde{P}_{0,a}\in\overline{\mathcal{T}}_{\lambda,\epsilon,0,a}$ 满足 $a=\sqrt{(\widetilde{A}(z_{\mathcal{B}}))}_{n,n}$，使得对于任意 $\rho\le\min\left\{\frac{R}{\mathcal{B}},1\right\}=:R_0\le 1$ 且 $z\in\mathcal{H}_\rho(z_{\mathcal{B}})$，

$$|f_{\mathcal{B}}(z)-\widetilde{P}_{0,a}(z)|\le c\left(\frac{\rho}{R_0}\right)^{\lambda+\epsilon}\left(\|f_{\mathcal{B}}\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{R_0}(z_{\mathcal{B}}))}+R_0^{\lambda+\epsilon}[F_{\mathcal{B}}]_{C^{\lambda-2+\epsilon}(\mathcal{H}_{R_0}(z_{\mathcal{B}}))}\right.$$
$$\left.+R_0^{\lambda+\epsilon}[g_{\mathcal{B}}]_{C^{\lambda+\epsilon}(\gamma_-\cap\mathcal{Q}_R(z_{\mathcal{B}}))}\right),$$

~ ~其中 $c=c(n,\Lambda,\lambda,\epsilon,\|A\|_{C^{\lambda-\frac12+\epsilon}(\mathcal{H}_{R_0}(z_{\mathcal{B}}))},\|B\|_{C^{\lambda-\frac32+\epsilon}(\mathcal{H}_{R_0}(z_{\mathcal{B}}))})$。通过选择

$$\mathcal{B}:=\left(1+\|B\|_{C^{\lambda-\frac32+\epsilon}(\mathcal{H}_R(z_0))}\right)^{-1}\le 1,$$

我们得到

$$\begin{aligned}\|\widetilde{A}\|_{C^{\lambda-\frac12+\epsilon}(\mathcal{H}_{R_0}(z_{\mathcal{B}}))}&\le\|A\|_{C^{\lambda-\frac12+\epsilon}(\mathcal{H}_{R_0\mathcal{B}}(z_0))}\le\|A\|_{C^{\lambda-\frac12+\epsilon}(\mathcal{H}_R(z_0))},\\ \|\widetilde{B}\|_{C^{\lambda-\frac32+\epsilon}(\mathcal{H}_{R_0}(z_{\mathcal{B}}))}&\le\mathcal{B}\|B\|_{C^{\lambda-\frac32+\epsilon}(\mathcal{H}_{R_0\mathcal{B}}(z_0))}\le\mathcal{B}\|B\|_{C^{\lambda-\frac32+\epsilon}(\mathcal{H}_R(z_0))}\le c_B.\end{aligned}\tag{5.5}$$

~接下来，结合缩放还原以及 $(A(0))_{n,n}=(A(z_0))_{n,n}$ 这一事实，并利用函数 $\mathbf{\Phi}_k$ 的齐次性，存在 $P_{0,a}\in\overline{\mathcal{T}}_{\lambda,\epsilon,0,a}$，使得对于任意 $\rho\le R_0$ 和 $z\in\mathcal{H}_{\rho\mathcal{B}}(z_0)$，有

$$|f(z)-P_{0,a}(z)|\le c\left(\frac{\rho}{R_0}\right)^{\lambda+\epsilon}\left(\|f\|_{L^\infty(\mathcal{H}_R(z_0))}+(R_0\mathcal{B})^{\lambda+\epsilon}[F]_{C^{\lambda-2+\epsilon}(\mathcal{H}_R(z_0))}\right.$$
$$\left.+(R_0\mathcal{B})^{\lambda+\epsilon}[g]_{C^{\lambda+\epsilon}(\gamma_-\cap\mathcal{Q}_R(z_0))}\right),$$

其中，根据（5.5），$c=c(n,\Lambda,\lambda,\epsilon,\|A\|_{C^{\lambda-\frac12+\epsilon}(\mathcal{H}_R(z_0))},c_B)$。因此，对于任意 $z\in\mathcal{H}_\rho(z_0)$，我们有

$$|f(z)-P_{0,a}(z)|\le c\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\lambda+\epsilon}\left(\|f\|_{L^\infty(\mathcal{H}_R(z_0))}+R^{\lambda+\epsilon}[F]_{C^{\lambda-2+\epsilon}(\mathcal{H}_R(z_0))}+R^{\lambda+\epsilon}[g]_{C^{\lambda+\epsilon}(\gamma_-\cap\mathcal{Q}_R(z_0))}\right),\tag{5.6}$$

其中，当 $R\le\mathcal{B}$ 时，$c=c(n,\Lambda,\lambda,\epsilon,\|A\|_{C^{\lambda-\frac12+\epsilon}(\mathcal{H}_R(z_0))},c_B)$。

另一方面，如果 $\frac{R}{\mathcal{B}}\ge 1$，那么对于任意 $\rho\le\mathcal{B}$ 和 $z\in\mathcal{H}_\rho(z_0)$，我们有

$$\begin{aligned}|f(z)-P_{0,a}(z)|\le c\left(\frac{\rho}{\mathcal{B}}\right)^{\lambda+\epsilon}&\left(\|f\|_{L^\infty(\mathcal{H}_R(z_0))}+\mathcal{B}^{\lambda+\epsilon}[F]_{C^{\lambda-2+\epsilon}(\mathcal{H}_R(z_0))}\right.\\ &\left.+\mathcal{B}^{\lambda+\epsilon}[g]_{C^{\lambda+\epsilon}(\gamma_-\cap\mathcal{Q}_R(z_0))}\right)=:L_2(\rho).\end{aligned}\tag{5.7}$$

由于 $P_{0,a}(z)=\sum_{\beta\in\mathcal{I}}p_{0,a,\beta}$，其中 $p_{0,a,\beta}$ 是次数为 β 且满足 $\beta\le 3$ 的齐次函数，因此我们有

$$\|p_{0,a,\beta}(z)\|_{L^\infty(\mathcal{H}_r(z_0))}\le c\left(\frac{r}{\mathcal{B}}\right)^{\beta}L_2(\mathcal{B}),$$

只要 $r \geq \mathcal{B}$ 即成立。因此，利用这一点以及集合 $\mathcal{I}$ 是有限集这一事实，并结合 $\mathcal{B} \leq r$、 $R \leq 1$，我们推得对于 $\mathcal{B} \leq r \leq \frac{R}{2}$，

$$|f(z) - P_{0,a}(z)| \leq \sum_{\beta \in \mathcal{I}, |\beta| \leq 3} c \left(\frac{r}{\mathcal{B}}\right)^{\beta} L_2(\mathcal{B})$$
$$\leq c \left(\frac{\rho}{R}\right)^{\lambda+\epsilon} \frac{1}{\mathcal{B}^{\lambda+\epsilon}} \left(\|f\|_{L^\infty(\mathcal{H}_R(z_0))} + R^{\lambda+\epsilon}[F]_{C^{\lambda-2+\epsilon}(\mathcal{H}_R(z_0))} + R^{\lambda+\epsilon}[g]_{C^{\lambda+\epsilon}(\gamma_- \cap \mathcal{Q}_R(z_0))} \right).$$

因此，利用该结果、(5.7) 和 (5.6)，我们得到 (5.3)。所以，只需证明 $(A(z_0))_{n,\ n} = 1$ 情形下的 (5.2)。

5.1. 基本引理。在证明命题 5.1 之前，我们先证明几个引理。当源项由一个光滑函数的倍数与下列集合中的另一个函数给出时，这些引理为解提供全局一致有界性

$$\mathcal{G} := \{1, \mathbf{\Phi}_k, \partial_{v_n} \mathbf{\Phi}_k, \partial_{v_n, v_n} \mathbf{\Phi}_k \,:\, k \in \{0,1,2,3,4,5\}\}. \tag{5.8}$$

回顾一下，函数 $\mathbf{\Phi}_k$ 定义于 (3.88) 中；这类源项例如在将 ϕ_0 应用于一个具有系数的方程时出现。因此，以下结果对于命题 5.1 的证明至关重要，而该证明基于爆破论证。

下面的引理给出了 H¨older 正则性估计。我们将通过 Campanato 型扰动论证来证明它。我们将关键性地使用：对于任意 $\mathbf{\Phi} \in \mathcal{G}$，都有 $\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}(x_n, v_n) \in L^{2+\epsilon_0}$ 和 $\partial_{v_n} \mathbf{\Phi}_0 \in L^{4+\epsilon_0}(H_R)$，其中任意 $R > 0$ 满足 $\epsilon_0 = \frac{1}{3}$ （见注 C.4）。

引理 5.2. 设 f 是以下方程的一个弱解

$$\begin{cases} (\partial_t + v \cdot \nabla_x) f - \operatorname{div}_v(A \nabla_v f) = B \cdot \nabla_v f + F\mathbf{\Phi} - \operatorname{div}_v(G \partial_{v_n} \mathbf{\Phi}_0) & \text{in } \mathcal{H}_1, \\ f = g & \text{in } \gamma_- \cap \mathcal{Q}_1, \end{cases} \tag{5.9}$$

其中 $B \in L^\infty(\mathcal{H}_1; \mathbb{R}^n)$、 $F \in L^\infty(\mathcal{H}_1)$、 $G \in L^\infty(\mathcal{H}_1; \mathbb{R}^n)$、 $g \in C^\alpha(\gamma_- \cap \mathcal{Q}_1)$，且 $\mathbf{\Phi} \in \mathcal{G}$。那么存在一个小常数 $\beta = \beta(n, \Lambda, \alpha)$，使得

$$[f]_{C^\beta(\mathcal{H}_{1/2})} \leq c \left(\|f\|_{L^2(\mathcal{H}_1)} + [g]_{C^\alpha(\gamma_- \cap \mathcal{Q}_1)} + \|F\|_{L^\infty(\mathcal{H}_1)} + \|G\|_{L^\infty(\mathcal{H}_1)} \right)$$

对于某个常数 $c = c(n, \Lambda, \alpha, \|B\|_{L^\infty(\mathcal{H}_1)})$。

证明. 设 $z_0 \in \gamma$ 和 $r \leq 1/16$。我们要证明

$$⨍_{\mathcal{H}_r(z_0)} |f - (f)_{\mathcal{H}_r(z_0)}| \leq c r^\beta (M_0 + [g]_{C^\alpha(\gamma_- \cap \mathcal{Q}_r(z_0))}) \tag{5.10}$$

对于某个 $\beta = \beta(n, \Lambda)$，其中 $c = c(n, \Lambda, \|B\|_{L^\infty(\mathcal{H}_1)})$ 且 $M_0 := \|f\|_{L^2(\mathcal{H}_1)} + \|F\|_{L^\infty(\mathcal{H}_1)} + \|G\|_{L^\infty(\mathcal{H}_1)}$。令我们假设 $z_0 \in \gamma_0$。首先，根据 [Zhu24，推论 2.9], ，存在唯一弱解 h 满足

$$\begin{cases} (\partial_t + v \cdot \nabla_x) h - \operatorname{div}_v(A \nabla_v h) = B \nabla_v h & \text{in } \mathcal{H}_r(z_0), \\ h = f & \text{in } \partial_{\text{kin}} \mathcal{H}_r(z_0). \end{cases} \tag{5.11}$$

~ ~记 $F := -F\mathbf{\Phi}$ 和 $G := G\mathbf{\Phi}_0$，并记 $x_0 = (x_0', 0)$ 和 $v_0 = (v_0', 0)$，可得

$$\begin{aligned}
&\fint_{\mathcal{H}_r(z_0)} |r^2\widetilde{F}|^2 + |r\widetilde{G}|^2\,dz \\
&\qquad \le r^4\|F\|^2_{L^\infty(\mathcal{H}_1)} \left(\sup_{t\in I_r(t_0)} \fint_{B_{r^3}} \fint_{B_r} |\mathbf{\Phi}|^{2+\epsilon_0}\,dx_n\,dv_n \right)^{\frac{2}{2+\epsilon_0}} \\
&\qquad + r^2\|G\|^2_{L^\infty(\mathcal{H}_1)} \left(\sup_{t\in I_r(t_0)} \fint_{B_{r^3}} \fint_{B_r} |\mathbf{\Phi}_0|^{4+\epsilon_0}\,dx_n\,dv_n \right)^{\frac{2}{4+\epsilon_0}} \\
&\qquad \le cr^{\frac{2\epsilon_0}{4+\epsilon_0}} (M_0)^2,
\end{aligned} \tag{5.12}$$

这里我们用到了 H¨older 不等式，$\|\mathbf{\Phi}\|_{L^{2+\epsilon_0}(H_1)}\ \|\partial_{v_n}\mathbf{\Phi}_0\|_{L^{4+\epsilon_0}(H_1)} \le c$，其中 $\epsilon_0 = \frac{1}{3}$。由于 $f - h$满足以下方程

$$\begin{cases} (\partial_t + v\cdot\nabla_x)(f-h) - \mathrm{div}_v(A\nabla_v(f-h)) = B\nabla_v(f-h) + \widetilde{F} - \mathrm{div}_v(\widetilde{G}) & \text{in } \mathcal{H}_r(z_0), \\ f - h = 0 & \text{in } \partial_{\mathrm{kin}}\mathcal{H}_r(z_0) \end{cases}$$

我们可以用 $f - h$作为测试函数，从而得到

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Lambda}\fint_{\mathcal{H}_r(z_0)} |\nabla_v(f-h)|^2\,dz &\le \|B\|_{L^\infty(\mathcal{H}_r(z_0))} \fint_{\mathcal{H}_r(z_0)} |\nabla_v(f-h)|f-h| \\
&\quad + \fint_{\mathcal{H}_r(z_0)} |\widetilde{F}||f-h|^2 + \fint_{\mathcal{H}_r(z_0)} |\widetilde{G}||\nabla_v(f-h)|.
\end{aligned} \tag{5.13}$$

接下来注意到，对 v 变量应用 Poincaré 不等式，并结合 (5.12)、(5.13) 以及杨氏不等式，可得

$$\fint_{\mathcal{H}_r(z_0)} |f-h|^2\,dz \le c\fint_{\mathcal{H}_r(z_0)} r^2|\nabla_v(f-h)|^2\,dz \le c\left(\|B\|^2_{L^\infty(\mathcal{H}_1)} r^2 \fint_{\mathcal{H}_r(z_0)} |f-h|^2\,dz + cr^{\frac{2\epsilon_0}{8+\epsilon_0}} M_0^2 \right)$$

对于某个常数 $c = c(n,\Lambda)$。因此，存在一个小常数 $r_0 = r_0(n,\Lambda,\|B\|_{L^\infty(\mathcal{H}_1)})$，使得当 $r \le r_0$时，有

$$\fint_{\mathcal{H}_r(z_0)} |f-h|^2\,dz \le cr^{\frac{2\epsilon_0}{8+\epsilon_0}} M_0^2.$$

注意，当 $r > r_0$时，(5.10) 可直接推出。因此，我们假设 $r \le r_0$。接下来，由 RW25 的 [引理 2.25] 结合引理 7.6，可得

$$[h]_{C^\alpha(\mathcal{H}_{r/16}(z_0))} \le c\left(r^{-(2n+1)}\|r^{-\alpha}h\|_{L^2(\mathcal{H}_{r/8}(z_0))} + [g]_{C^\alpha(\gamma_-\cap\mathcal{Q}_{r/8}(z_0))} \right),$$

作为 $f = g$on $\gamma_-\cap\mathcal{Q}_{r/8}(z_0)$。结合 $h-(h)_{\mathcal{H}_{r/8}(z_0)}$满足方程 (5.11)，其中 f由 $f-(h)_{\mathcal{H}_{r/8}(z_0)}$ 替代这一事实可知，对于任意 $\rho\in(0,1/16]$,

$$\fint_{\mathcal{H}_{\rho r}(z_0)} |h-(h)_{\mathcal{H}_{\rho r}(z_0)}|^2 \le c\rho^{2\alpha}\fint_{\mathcal{H}_r(z_0)} |h-(h)_{\mathcal{H}_{r/8}(z_0)}|^2\,dz + cr^{2\alpha}[g]^2_{C^\alpha(\gamma_-\cap\mathcal{Q}_{r/8}(z_0))}.$$

因此，我们有

$$\fint_{\mathcal{H}_{\rho r}(z_0)} |f-(f)_{\mathcal{H}_{\rho r}(z_0)}|^2\,dz \le c\fint_{\mathcal{H}_{\rho r}(z_0)} |h-(h)_{\mathcal{H}_{\rho r}(z_0)}|^2\,dz + c\fint_{\mathcal{H}_{\rho r}(z_0)} |f-h|^2\,dz$$

$$\le c\rho^{2\alpha} \fint_{\mathcal{H}_{r/8}(z_0)} |h-(h)_{\mathcal{H}_{r/8}(z_0)}|^2 + cr^{2\alpha}[g]^2_{C^\alpha(\gamma_-\cap\mathcal{Q}_{r/8}(z_0))}$$
$$+ c\rho^{-(4n+2)} \fint_{\mathcal{H}_{r/8}(z_0)} |f-h|^2\,dz$$
$$\le c\rho^{2\alpha} \fint_{\mathcal{H}_{r/8}(z_0)} |f-(f)_{\mathcal{H}_{r/8}(z_0)}|^2 + cr^{2\alpha}[g]^2_{C^\alpha(\gamma_-\cap\mathcal{Q}_{r/8}(z_0))}$$
$$+ c\rho^{-(4n+2)} r^{\frac{2\epsilon_0}{8+\epsilon_0}} M_0^2$$

对某个常数 $c = c(n,\Lambda)$。现在，取满足 $\beta = \frac{1}{2}\min\left\{\alpha, \frac{\epsilon_0}{8+\epsilon_0}\right\}$ 的 $\rho^{2(\alpha-\beta)} \le \frac{1}{c}$，并按照 [KLN25 中引理 5.6], 的标准迭代，当 $z_0 \in \gamma_0$ 时我们得到 (5.10)。

我们现在假设 $z_0 \in \gamma\setminus\gamma_0$。若 $\mathcal{H}_{2r}(z_0)\cap\gamma_0 \neq \emptyset$，则存在一点 $z_1 \in \gamma_0$ 使得 $\mathcal{H}_{2r}(z_0) \subset \mathcal{H}_{8r}(z_1)$。事实上，我们可以选取 $z_1 = (t_0, x_1', 0, v_1', 0)$，其中 $(t_1, x_1', 0, v_1', 0) \in \mathcal{H}_{2r}(z_0)\cap\gamma_0$。此外，在此情形下，$|v_{0,n}| \le 2r$，并且我们有 $|\mathcal{H}_r(z_0)| \approx r^{4n+2}$。因此，我们得到

$$\fint_{\mathcal{H}_r(z_0)} |f-(f)_{\mathcal{H}_r(z_0)}|^2\,dz \le c \fint_{\mathcal{H}_{8r}(z_1)} |f-(f)_{\mathcal{H}_{8r}(z_1)}|^2\,dz \le cr^\beta, \tag{5.14}$$

其中我们还使用了 (5.10) 以及 $z_1 \in \gamma_0$ 这一事实。我们假设 $\mathcal{H}_{2r}(z_0)\cap\gamma_0 = \emptyset$ 从而 $2r < |v_{0,n}|$。然后由 [RW25，引理 2.25], 我们有，对于 $r_0 := |v_{0,n}|/2$,

$$[f]_{C^\alpha(\mathcal{H}_{r_0}(z_0))} \le c\left(|\mathcal{H}_{r_0}(z_0)|^{-\frac{1}{2}} r_0^{-\alpha} \|f-(f)_{\mathcal{H}_{3r_0/2}(z_0)}\|_{L^2(\mathcal{H}_{3r_0/2}(z_0))} + r_0 v_0^{-\frac{1}{2}} M_0 + [g]_{C^\alpha(\gamma_-\cap\mathcal{Q}_{3r_0/2}(z_0))}\right),$$

[1]其中我们还利用了如下事实：当 $z \in \mathcal{H}_{3r_0/2}(z_0)$ 时有 $|\mathbf{\Phi}(z)|, |\partial_{v_n}\mathbf{\Phi}_0(z)| \le cv_0^{-\frac{2}{}}$，因为 $|v_{0,n}| - 3r_0/2 \ge |v_{0,n}|/4$。因此，我们得到

$$\fint_{\mathcal{H}_r(z_0)} |f-(f)_{\mathcal{H}_r(z_0)}|^2 \le c\left(\frac{r}{r_0}\right)^\beta \fint_{\mathcal{H}_{3r_0/2}(z_0)} |f-(f)_{\mathcal{H}_{3r_0/2}(z_0)}|^2 + cr^\beta(M_0 + [g]_{C^\alpha(\gamma_-\cap\mathcal{Q}_1)}). \tag{5.15}$$

由于 $\mathcal{H}_{3r0(z_0)} \cap \gamma_0 \neq \emptyset$，将 (5.14) 代入 (5.15)，在 $z_0 \in \gamma\setminus\gamma_0$ 时可得 (5.10)。现在，将 (5.10) 与来自 [GIMV19] 的内部正则性结果相结合，即可得到所需估计。□

基于 [RW25 的引理 2.27], ，我们现在用紧性论证将 L^∞-范数替换为 H¨older 半范数。由于我们将仅对不含散度形式源项的方程使用这一结果，因此我们只在此情形下证明该结果。

引理 5.3. 设 f 是如下方程的弱解

$$(\partial_t + v\cdot\nabla_x)f - \operatorname{div}_v(A\nabla_v f) = B\cdot\nabla_v f + F\mathbf{\Phi} \quad in\ \mathcal{H}_1,$$

其中 $A \in C^\alpha(\mathcal{H}_1)$ 且 $B \in C^\alpha(\mathcal{H}_1;\mathbb{R}^n)$，对某些 $\alpha > 0$、 $F \in C^{\lambda,\epsilon}(\mathcal{H}_1)$，对某个非负整数$\lambda \ge 0$ 以及 $\epsilon \in (0,1)$，且 $\mathbf{\Phi} \in \mathcal{G}$。则，

$$\|F\|_{L^\infty(\mathcal{H}_1)} \le c\left(\|f\|_{L^1(\mathcal{H}_1)} + [F]_{C^{\lambda,\epsilon}(\mathcal{H}_1)}\right),$$

其中 c 仅依赖于 n、 Λ、 λ、 ϵ、 α、 $\|A\|_{C^\alpha(\mathcal{H}_1)}$ $\|B\|_{C^\alpha(\mathcal{H}_1)}$。

证明。设 u 固定任意多项式 $p \in \mathcal{P}_\lambda$，并写作 $F = (F-p) + p$。我们想要证明 th at

$$\|p\|_{L^\infty(\mathcal{H}_1)} \le c\|f\|_{L^1(\mathcal{H}_1)} + \|F-p\|_{C^\alpha(\mathcal{H}_1)}. \tag{5.16}$$

现在，沿用 [RW25 引理 2.7]，证明中的论证，我们推得：若（5.16）不成立，则存在序列 $(A_l)_l$、$(B_l)_l$、$(F_l)_l$、$(f_l)_l$、$(p_l)_l$，使得

$$(\partial_t + v\cdot\nabla_x)f_l - \operatorname{div}_v(A_l\nabla_v f_l) = B_l\nabla_v f_l + F_l\mathbf{\Phi} \qquad \text{in } \mathcal{H}_1,$$

其中

$$\|A_l\|_{C^\alpha(\mathcal{H}_1)} + \|B_l\|_{C^\alpha(\mathcal{H}_1)} \le \Lambda \quad \text{and} \quad p_l \in \mathcal{P}_\lambda,$$

以及

$$\|p_l\|_{L^\infty(\mathcal{H}_1)} = 1, \tag{5.17}$$

and

$$\|f_l\|_{L^1(\mathcal{H}_1)} + \|F_l - p_l\|_{C^\alpha(\mathcal{H}_1)} \to 0. \tag{5.18}$$

由 (5.8) 以及附录中给出的 $\mathbf{\Phi}\in\mathcal{G}$ 的显式公式，我们注意到，对于任意 $Q_r(z_0)\Subset\{x_n>0\}\times\mathbb{R}$，对每个 $i=1,\ 2,$ 均有 $[\mathbf{\Phi}]_{C^\alpha(Q_r(z_0))}\le c(\alpha,r,z_0)$。因此，利用 [KLN25 定理1.15],，我们得到

$$\|f_l\|_{C^{1,\alpha}(\mathcal{Q}_r(z_0))} \le c(\alpha,r,z_0)$$

对于任意 $\mathcal{Q}_r(z_0)\Subset\mathcal{H}_1$，其中常数 c 与 l 无关。这意味着存在一个函数f_∞，使得在 $C^{1,\alpha}(\mathcal{Q}_r(z_0))$ 中有 $f_l\to f_\infty$，只要 $\mathcal{Q}_r(z_0)\Subset\mathcal{H}_1$。利用这一点和 (5.18)，我们得到

$$\int_{\mathcal{Q}_r(z_0)} -f_\infty(\partial_t + v\cdot\nabla_x)\psi = -\int_{\mathcal{Q}_r(z_0)} A_\infty\nabla_v f_\infty\nabla_v\psi + \int_{\mathcal{Q}_r(z_0)} B_\infty\cdot\nabla_v\psi\,dz + \int_{\mathcal{Q}_r(z_0)} p_\infty\mathbf{\Phi}\psi$$

对于任意 $\psi\in C_c^\infty(\mathcal{Q}_r(z_0))$。与此同时，由 (5.18) 可知 $f_\infty=0$，但这与 (5.17) 矛盾。

因此，我们证明了 (5.16)。根据通过多项式刻画的动理学 H¨older 空间，我们可得所需结果。□

结合引理 5.2 和引理5.3，并运用缩放论证，我们得到以下引理，该引理将在命题 5.1 的证明中用于获得吹起序列的紧性。回顾一下，函数 $\mathbf{\Phi}_k$ 由 (3.88) 确定。

引理 5.4. 设 f 是以下方程的弱解

$$\begin{cases} (\partial_t + v\cdot\nabla_x)f - \operatorname{div}_v(A\nabla_v f) = B\cdot\nabla_v f + F_0 + \displaystyle\sum_{k=0}^{5}\sum_{j=0}^{2} F_{k,j}\partial_{v_n}^{(j)}\mathbf{\Phi}_k & \text{in } \mathcal{H}_R, \\ f = g & \text{in } \gamma_-\cap\mathcal{Q}_R, \end{cases}$$

其中 $A\in C^\alpha(\mathcal{H}_R)$，$F_0\in C^{\lambda,\alpha}(\mathcal{H}_R)$, $F_{i,j}\in C^{\lambda_{i,j},\alpha}(\mathcal{H}_R)$，$g\in C^\alpha(\gamma_-\cap\mathcal{Q}_R)$ 对某个 $\alpha\in\in(0,1)$ 以及λ, $\lambda_{k,j}\in\mathbb{N}\cup\{0\}$成立。因此，存在一个小常数 $\beta=\beta(n,\Lambda,\alpha)$，使得

$$[f]_{C^\beta(\mathcal{H}_{R/2})} \le c\left(\|f\|_{L^\infty(\mathcal{H}_R)} + [F_0]_{C^{\lambda,\alpha}(\mathcal{H}_R)} + \sum_{k=0}^{5}\sum_{j=0}^{2}[F_{k,j}]_{C^{\lambda_{k,j},\alpha}(\mathcal{H}_R)} + [g]_{C^\alpha(\gamma_-\cap\mathcal{Q}_R)}\right) \tag{5.19}$$

对于某个常数 $c=c(n,\Lambda,\lambda,\lambda_{k,j},\alpha,\|A\|_{C^\alpha(\mathcal{H}_R)}\ \|B\|_{C^\alpha(\mathcal{H}_R)}\,R)$。

注意，可以计算出常数 c 对 R 在 (5.19) 中的精确依赖关系。不过，就我们的目的而言，只需利用 c 仅依赖于 n、Λ、$\|A\|_{C^\alpha(\mathcal{H}_R)}\ \|B\|_{C^\alpha(\mathcal{H}_R)}\,R$ 这一事实即可。

5.2. 展开估计的证明。现在我们将证明当 $(A(z_0))_{n,n}=1$ 时，命题 5.1 成立。

命题 5.1 的证明，其中 $(A(z_0))_{n,n}=1$。我们可以假设 $R=1$ 且

$$\|g\|_{L^\infty(\gamma_-\cap\mathcal{Q}_\rho(z_0))}+\rho^\epsilon[g]_{C^\epsilon(\gamma_-\cap\mathcal{Q}_\rho(z_0))}\le\rho^{\lambda+\epsilon}[g]_{C^{\lambda,\epsilon}(\gamma_-\cap\mathcal{Q}_\rho(z_0))}\quad\text{for any }\rho\le1 \tag{5.20}$$

对某个常数 $c=c(n,\lambda,\epsilon)$，通过将 $(f-P[g]_{z_0,\lambda})$ 视为解而非 f 本身，其中 $P[g]_{z_0,\lambda}$ 是函数 g 在 z_0 处的 λ 阶泰勒展开。当 $\lambda\ge2$ 时，这会使估计中的常数产生显式的 $|v_0|$ 依赖性，因为源项现在依赖于 v_0。

用反证法，我们假设存在序列 $(f_l)_l$、$(z_{0,l})_l$、$(A_l)_l$、(B_l)、$(F_l)_l$ 以及 $(g_l)_l$，满足

$$\begin{cases}(\partial_t+v\cdot\nabla_x)f_l-\operatorname{div}_v(A_l\nabla_v f_l)=B_l\cdot\nabla_v f_l+F_l & \text{in }\mathcal{H}_1(z_{0,l}),\\ f_l=g_l & \text{in }\gamma_-\cap\mathcal{Q}_1(z_{0,l})\end{cases}$$

满足 $(A_l(z_{0,l}))_{n,n}=1$，以及 $(x_{0,l})_n=(v_{0,l})_n=0$，使得

$$\begin{aligned}&\|f_l\|_{L^\infty(\mathcal{H}_1(z_{0,l}))},\quad [F_l]_{C^{\lambda-2,\epsilon}(\mathcal{H}_1(z_{0,l}))}\le1,\quad \|A\|_{C^{\lambda-\frac12+\epsilon}(\mathcal{H}_1(z_{0,l}))},\|B\|_{C^{\lambda-\frac32+\epsilon}(\mathcal{H}_1(z_{0,l}))}\le\Lambda,\\ &\|g_l\|_{L^\infty(\mathcal{H}_\rho(z_{0,\,l}))}+\rho^\epsilon[g_l]_{C^\epsilon(\mathcal{H}_\rho(z_{0,\,l}))}\le\rho^{\lambda+\epsilon}\text{ 对任意 }\rho\le1,\end{aligned} \tag{5.21}$$

but

$$\sup_{l\in\mathbb{N}}\inf_{P\in\mathcal{T}_{\lambda,\epsilon,l}}\sup_{\rho\in(0,1/2]}\rho^{-(\lambda+\epsilon)}\|f_l-P\|_{L^\infty(H_\rho(z_{0,l}))}=\infty,$$

其中，以下记 $\mathcal{T}_{\lambda,\,\epsilon,\,l}:=\mathcal{T}_{\lambda,\,\epsilon,\,z_{0,\,l}}$。

由于 $\mathcal{T}_{\lambda,\,\epsilon,\,l}$ 是一个有限维向量空间，对任意 $l\in\mathbb{N}$ 和 $\rho\in(0,1/2]$，存在唯一的 $P_{l,\,\rho}\in\mathcal{T}_{\lambda,\,\epsilon,\,l}$ 使得

$$\|f_l-P_{l,\rho}\|_{L^2(H_\rho(z_{0,l}))}\le\|f_l-P\|_{L^2(H_\rho(z_{0,l}))}\quad\text{for any }P\in\mathcal{T}_{\lambda,\epsilon,l},$$

and

$$\int_{\mathcal{H}_\rho(z_{0,l})}(f_l-P_{l,\rho})P\,dz=0\quad\text{for any }P\in\mathcal{T}_{\lambda,\epsilon,l}. \tag{5.22}$$

定义

$$\theta(r):=\sup_{l\in\mathbb{N}}\sup_{\rho\in[r,1/2]}\rho^{-(\lambda+\epsilon)}\|f_l-P_{l,\rho}\|_{L^\infty(\mathcal{H}_\rho(z_{0,l}))}.$$

由 RW25 引理 2.14], , 并采用与 RW25 引理 4.1] 的证明相同的论证，可得 $\theta(r)\to\infty$ 如 $r\to0$。由于 $\theta(r)$ 单调不增，存在序列 $(l_m)_m$ 和 $(r_{l_m})_m$，使得 $r_{l_m}\to0$，当 $m\to\infty$ 时，并且

$$\theta(r_{l_m})\ge r_{l_m}^{-(\lambda+\epsilon)}\|f_{l_m}-P_{l_m,r_{l_m}}\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{r_{l_m}}(z_{0,l_m}))}\ge\theta(r_{l_m})/2. \tag{5.23}$$

以下我们记 $l_m=m$。由 RW25 引理 2.15] ，可推出

$$\|f_m-P_{m,r_m}\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{Rr_m}(z_{0,m}))}\le c(Rr_m)^{\lambda+\epsilon}\theta(r_m) \tag{5.24}$$

and

$$\frac{C_m}{\theta(r_m)}:=\frac{(\|p_m\|_{L^\infty(\mathcal{Q}_1(z_{0,m}))}+\|p_{m,k}\|_{L^\infty(\mathcal{Q}_1(z_{0,m}))})}{\theta(r_m)}\to0 \tag{5.25}$$

对每个 $k\in\{0,\dots,5\}$。现在定义

$$\widetilde{f}_m(z):=\frac{f_m(z_{0,m}\circ S_{r_m}z)-P_{m,r_m}(z_{0,m}\circ S_{r_m}z)}{r_m^{\lambda+\epsilon}\theta(r_m)} \tag{5.26}$$

and

$$\widetilde{A}_m(z) \coloneqq A_m(z_{0,m} \circ S_{r_m} z), \quad \widetilde{B}_m(z) \coloneqq r_m B_m(z_{0,m} \circ S_{r_m} z). \tag{5.27}$$

然后，我们回顾一下由 (5.1) 可知，$P_{m,\ r_m}$ 具有如下形式

$$P_{m,r_m}(z) \coloneqq p_m + \sum_{k=0}^{5} p_{m,k} \mathbf{\Phi}_k$$

~可知，f_m 满足

$$\begin{cases} (\partial_t + v \cdot \nabla_x)\widetilde{f}_m - \mathrm{div}_v(\widetilde{A}_m \nabla_v \widetilde{f}_m) = \widetilde{B}_m \cdot \nabla_v \widetilde{f}_m + \widetilde{F}_m + \widetilde{Q}_m & \text{in } \mathcal{H}_{1/r_m}, \\ \widetilde{f}_m = \widetilde{g}_m & \text{in } \gamma_- \cap \mathcal{Q}_{1/r_m}, \end{cases} \tag{5.28}$$

其中

$$\begin{aligned} \widetilde{F}_m(z) &\coloneqq \frac{F_m(z_{0,m} \circ S_{r_m} z) - \widetilde{p}_m(z)}{r_m^{\lambda-2+\epsilon}\theta(r_m)}, \quad \widetilde{g}_m(z) \coloneqq \frac{g_m(z_{0,m} \circ S_{r_m} z)}{r_m^{\lambda+\epsilon}\theta(r_m)}, \\ \widetilde{p}_m(z) &\coloneqq (\partial_t + v \cdot \nabla_x)(\overline{p}_m(z)) + \mathrm{div}_v(\widetilde{A}_m \nabla_v(\overline{p}_m(z))) - \widetilde{B}_m \cdot \nabla_v(\overline{p}_m(z)), \\ P_m(z) &\coloneqq \sum_{k=0}^{5} \frac{(p_{m,k}\mathbf{\Phi}_k)(z_{0,m} \circ S_{r_m} z)}{r_m^{\lambda+\epsilon}\theta(r_m)}, \\ \widetilde{Q}_m(z) &\coloneqq (\partial_t + v \cdot \nabla_x)(P_m)(z) - \mathrm{div}_v(\widetilde{A}_m \nabla_v P_m(z)) - \widetilde{B}_m \cdot \nabla_v P_m(z) \end{aligned}$$

并且 $\overline{p}_m(z) \coloneqq p_m(z_{0,\ m} \circ S_{r_m} z)$。为完成证明，我们的目标是证明

~~序列 (f_m) 的紧性，从而可以将关于 f_m 的方程取极限，得到 $m \to \infty$。随后，我们将应用引理 4.2 中的刘维尔定理，导出与 (5.23) 矛盾的结论。为此，主要工作~是仔细追踪各项 Q_m的结构性质。事实上，我们已经可以观察到，对于 $i \in \{0,1,2\}$和 $j \in \{0,1\}$，有$p_m \in \mathcal{P}_\lambda$、$p_{m,\ i} \in \mathcal{P}_{[\lambda+\epsilon-\frac{1}{2}]}$、$p_{m,\ j+3} \in \mathcal{P}_{\lambda-2}$、$p_{m,\ 5} \in \mathcal{P}_{[\lambda+\epsilon-\frac{5}{2}]}$，其中

$$p_{m,1}(z_0) = p_{m,2}(z_0) = Dp_{m,2}(z_0) = p_{m,4}(z_0) = 0. \tag{5.29}$$

因此，经过一些计算并利用 (5.29)，我们推得

$$\begin{aligned} \widetilde{Q}_m(z) = &\sum_{i=0}^{2} \left(\mathbf{\Phi}_i(r_m X_n) \left[\frac{c_{m,i}}{r_m^{\lambda+\epsilon-2}\theta(r_m)} + \frac{\widetilde{B}_m \cdot \widetilde{P}_{m,i}}{r_m^{\lambda+\epsilon-1}\theta(r_m)} \right] - \frac{\mathrm{div}_v(\widetilde{A}_m \widetilde{P}_{m,i} \mathbf{\Phi}_i(r_m X_n))}{r_m^{\lambda+\epsilon-1}\theta(r_m)} \right) \\ &+ \sum_{j=0}^{1} \left(\mathbf{\Phi}_{j+3}(r_m X_n) \frac{\widetilde{B}_m \cdot \widetilde{P}_{m,j+3}}{r_m^{\lambda+\epsilon-1}\theta(r_m)} - \frac{\mathrm{div}_v(\widetilde{A}_m \widetilde{P}_{m,j+3} \mathbf{\Phi}_{j+3}(r_m X_n))}{r_m^{\lambda+\epsilon-1}\theta(r_m)} \right) \\ &+ \sum_{i=0}^{2} r_m v_n (\partial_{x_n} \mathbf{\Phi}_i)(r_m X_n) \frac{\overline{p}_{m,i}}{r_m^{\lambda+\epsilon-2}\theta(r_m)} + \sum_{j=0}^{1} r_m v_n (\partial_{x_n} \mathbf{\Phi}_{j+3})(r_m X_n) \frac{\overline{p}_{m,i}}{r_m^{\lambda+\epsilon-2}\theta(r_m)} \\ &- \sum_{i=0}^{2} \frac{\mathrm{div}_v(\widetilde{A}_m \overline{p}_{m,i} (\nabla_v \mathbf{\Phi}_i)(r_m X_n))}{r_m^{\lambda+\epsilon-1}\theta(r_m)} - \sum_{j=0}^{1} \frac{\mathrm{div}_v(\widetilde{A}_m \overline{p}_{m,j} (\nabla_v \mathbf{\Phi}_{j+3})(r_m X_n))}{r_m^{\lambda+\epsilon-1}\theta(r_m)} \\ &- \sum_{i=0}^{2} (\partial_{v_n} \mathbf{\Phi}_i)(r_m X_n) \frac{(\widetilde{B}_m)_n \overline{p}_{m,i}}{r_m^{\lambda+\epsilon-1}\theta(r_m)} - \sum_{j=0}^{1} (\partial_{v_n} \mathbf{\Phi}_{j+3})(r_m X_n) \frac{(\widetilde{B}_m)_n \overline{p}_{m,j}}{r_m^{\lambda+\epsilon-1}\theta(r_m)} \\ &+ \overline{p}_{m,5} \left(\frac{r_m v_n (\partial_{x_n} \mathbf{\Phi}_5)(r_m X_n)}{r_m^{\lambda+\epsilon-2}\theta(r_m)} - \frac{\mathrm{div}_v(\widetilde{A}_m (\nabla_v \mathbf{\Phi}_5)(r_m X_n))}{r_m^{\lambda+\epsilon-1}\theta(r_m)} \right) =: \sum_{N=1}^{6} \widetilde{Q}_{m,N}(z), \end{aligned}$$

其中我们记 $X_n = (x_n, v_n)$ 和 $r_m X_n = (r_m^3 x_n, r_m v_n)$，并且

$$c_{m,i} \coloneqq \partial_t p_{m,i}, \quad \widetilde{P}_{m,i}(z) \coloneqq (\nabla_v p_{m,i})(z_{0,m} \circ S_{r_m} z), \quad \overline{p}_{m,i}(z) \coloneqq p_{m,i}(z_{0,m} \circ S_{r_m} z).$$

~在估计项 $Q_{m,N}$ 之前，利用函数 $\mathbf{\Phi}_k$ 的齐次性，我们注意到

$$\begin{aligned}&\mathbf{\Phi}_k(r_m X_n) = r_m^{\alpha_k} \mathbf{\Phi}_k(X_n),\ (\partial_{v_n} \mathbf{\Phi}_k)(r_m X_n) = r_m^{-1+\alpha_k} (\partial_{v_n} \mathbf{\Phi}_k)(X_n),\\ &r_m v_n \partial_{x_n} \mathbf{\Phi}_k(r_m X_n) = r_m^{-2+\alpha_k} v_n \partial_{x_n} \mathbf{\Phi}_k(X_n)\end{aligned}$$

其中 $\alpha_i = \frac{1}{2}$, $\alpha_{j+3} = 2$ 当 $i \in \{0,1,2\}, j \in \{0,1\}$ 且 $\alpha_5 = \frac{5}{2}$。

- 情形 $N = 1,2$。利用 (5.21)、(5.27) 和 (5.25)，我们得到

$$\widetilde{Q}_{m,1} + \widetilde{Q}_{m,2} = \sum_{i=0}^{4} \left(\mathbf{\Phi}_i F_{m,0,i} - \partial_{v_n} \mathbf{\Phi}_i F_{m,1,i} \right),$$

其中对任意 $R > 0$,

$$[F_{m,0,i}]_{C^{\lambda+\epsilon-\frac{5}{2}}(\mathcal{H}_R)} + [F_{m,1,i}]_{C^{\lambda+\epsilon-\frac{3}{2}}(\mathcal{H}_R)} + \|F_{m,0,j+3}\|_{L^\infty(\mathcal{H}_R)} + [F_{m,1,j+3}]_{C^{\lambda+\epsilon-3}(\mathcal{H}_R)} \le \frac{c(R) C_m}{\theta(r_m)},$$

当 $i \in \{0,1,2\}$ 和 $j \in \{0,1\}$ 时，该式趋于 0。特别地，由 (5.29) 可得

$$F_{m,1,2}(0) = 0. \tag{5.30}$$

- 情形 $N = 3,4,5$。利用函数 $\mathbf{\Phi}_k$ 满足一个平移不变方程（见 (4.15)）这一点，以及以下观察

$$\operatorname{div}_v(\widetilde{A}_m \overline{p}_{m,i}(\nabla_v \mathbf{\Phi}_i)(r_m X_n)) = \text{散度}_v((\widetilde{A}_m - I)\overline{p}_{m,i}(\nabla_v \mathbf{\Phi}_i)(r_m X_n)) + \text{散度}_v(\overline{p}_{m,i}(\nabla_v \mathbf{\Phi}_i)(r_m X_n)), \tag{5.31}$$

我们推导出，当 $\lambda + \epsilon < \frac{3}{2}$,

$$\widetilde{Q}_{m,3} + \widetilde{Q}_{m,4} + \widetilde{Q}_{m,5} = -\operatorname{div}_v(G_{m,0,0} \partial_{v_n} \mathbf{\Phi}_0) + F_{m,1,0} \partial_{v_n} \mathbf{\Phi}_0$$

with

$$\|G_{m,0,0}\|_{L^\infty(\mathcal{H}_R)} + \|F_{m,1,0}\|_{L^\infty(\mathcal{H}_R)} \le \frac{c(R) C_m}{\theta(r_m)} \to 0,$$

其中我们利用了 $\overline{p}_{m,0}$ 是常数，且对于该情形下的任意 $k \ge 1$，都有 $\overline{p}_{m,k} = 0$。

此外，当 $\lambda + \epsilon > \frac{3}{2}$ 时，经过若干初等计算，我们可以写出 ite

$$\widetilde{Q}_{m,3} + \widetilde{Q}_{m,4} + \widetilde{Q}_{m,5} = \sum_{k=0}^{4} F_{m,2,k} \partial_{v_n, v_n} \mathbf{\Phi}_k + \sum_{k=0}^{4} F_{m,1,k} \partial_{v_n} \mathbf{\Phi}_k,$$

其中

$$[F_{m,l,i}]_{C^{\lambda+\epsilon-(2-l)-\frac{1}{2}}(\mathcal{H}_R)} + [F_{m,l,j+3}]_{C^{\lambda+\epsilon-(2-l)-2}(\mathcal{H}_R)} \le \frac{c(R) C_m}{C_{v_{0,m}} \theta(r_m)} \to 0 \tag{5.32}$$

对于 $l \in \{1,2\}$、$i \in \{0,1,2\}$ 和 $j \in \{0,1\}$。此外，根据 (5.29) 以及以下事实：每当 $f(0) = g(0) = 0$ 时，$D(fg)(0) = 0$，我们观察到，对于任意 $k \in \{0,1,2,3,4\}$,

$$F_{m,1,2}(0) = F_{m,2,k}(0) = DF_{m,2,1}(0) = DF_{m,2,2}(0) = DF_{m,2,4}(0) = D^2 F_{m,2,2}(0) = 0. \tag{5.33}$$

• 情形 $N=6$。类似地，由 (5.31) 以及以下事实：根据 (C.40)，对于某个常数 c_0，∂_{v_n}，$_{v_n}\phi_1 = v_n\partial_{x_n}\phi_1 = c_0 v_n\phi_0$，我们得到

$$\widetilde{Q}_{m,6} = F_{m,0,5}\mathbf{\Phi}_0(X_n) - F_{m,1,5}\partial_{v_n}\mathbf{\Phi}_1,$$

其中

$$[F_{m,0,5}]_{C^{\lambda+\epsilon-\frac{5}{2}}(\mathcal{H}_R)} + \|F_{m,1,5}\|_{L^\infty(\mathcal{H}_R)} \le \frac{c(R)c_m}{\theta(r_m)} \to 0. \tag{5.34}$$

因此 ~因此，结合对各项 $Q_{m,\ N}$ 的所有估计，以及以下事实

$$[\widetilde{F}_m]_{C^{\lambda-2+\epsilon}(\mathcal{H}_R)} + \|\widetilde{g}_m\|_{L^\infty(\mathcal{H}_R)} \le \frac{c(R)}{\theta(r_m)} \to 0, \tag{5.35}$$

利用 (5.21)，并注意到这可由与 [RW25, 引理 4.1] 中相同的论证得到，当 $\lambda+\epsilon<\frac{3}{2}$ 和 $\lambda+\epsilon>\frac{3}{2}$ 时，分别应用引理 5.2 和引理 5.4，可得

$$\|\widetilde{f}_m\|_{C^\beta_\ell(\mathcal{H}_R)} \le c(R).$$

此外，若 z_0 满足 $\mathcal{Q}_1(z_0) \Subset \mathcal{H}_{1/r_m}$，则根据引理 2.5 给出的内部正则性，结合引理 5.3 的重缩放版本，可推出

$$\|\widetilde{f}_m\|_{C^{1,\epsilon}_\ell(\mathcal{Q}_1(z_0))} \le c(\lambda,\epsilon,z_0),$$

其中常数 c 与 m无关。因此，我们得到

$$\widetilde{f}_m \to \widetilde{f}_\infty \quad \text{in } C^{1,\epsilon}_\ell(\mathcal{Q}_1(z_0)) \tag{5.36}$$

对任意 $\mathcal{Q}_1(z_0) \Subset \{x_n>0\}$。此外，由 [Sil22，引理 5.9], ，我们得到

$$\int_{\mathcal{H}_{R/2}} |\nabla_v(\widetilde{f}_m - \max_{\mathcal{H}_{R/2}}\widetilde{g}_m)_+|^2 + \int_{\mathcal{H}_{R/2}} |\nabla_v(\widetilde{f}_m - \min_{\mathcal{H}_{R/2}}\widetilde{g}_m)_-|^2 \le c(R,\lambda,\epsilon).$$

~ ~由于 $\nabla_v f_m \to \nabla_v f_\infty$ 逐点成立（见 (5.36)），且 $\min_{\mathcal{H}_{R/2}}\widetilde{g}_m \to 0$、$\max_{\mathcal{H}_{R/2}}\widetilde{g}_m \to 0$ （见 (5.35)），由法图引理可得

$$\int_{\mathcal{H}_R} |\nabla_v\widetilde{f}_\infty|^2 = \int_{\mathcal{H}_R} |\nabla_v(\widetilde{f}_\infty)_+|^2 + |\nabla_v(\widetilde{f}_\infty)_-|^2 \le c(R,\lambda,\epsilon). \tag{5.37}$$

~现在我们可以应用引理 D.1，从而推出 f_∞ 是下列方程的弱解

$$\begin{cases} (\partial_t + v\cdot\nabla_x)\widetilde{f}_\infty - \mathrm{div}_v(\widetilde{A}_\infty\nabla_v\widetilde{f}_\infty) = \widetilde{p}_\infty + \widetilde{Q}_\infty & \text{in } \mathbb{R}\times\{x_n>0\}\times\mathbb{R}, \\ \widetilde{f}_\infty = 0 & \text{in } \{x_n=0\}\times\{v_n>0\}, \\ |\widetilde{f}_\infty(z)| \le c(1+|z|)^{\lambda+\epsilon}, \end{cases} \tag{5.38}$$

其中 $\widetilde{p}_\infty \in \mathcal{P}_{\lambda-2}$，并且由 (5.30) 和 (5.33)，我们还知道

$$\widetilde{Q}_\infty \coloneqq \sum_{i=0}^{2} p_{\infty,0,i}\mathbf{\Phi}_i + \sum_{k=0}^{4} p_{\infty,1,k}\partial_{v_n}\mathbf{\Phi}_k + \sum_{k=0,1,3} p_{\infty,2,k}\partial_{v_n,v_n}\mathbf{\Phi}_k,$$

with

$$\begin{aligned} &p_{\infty,0,i} \in \mathcal{P}_{[\lambda+\epsilon-\frac{5}{2}]},\ p_{\infty,1,i} \in \mathcal{P}_{[\lambda+\epsilon-\frac{3}{2}]},\ p_{1,j+3} \in \mathcal{P}_{\lambda-3},\ p_{\infty,2,i} \in \mathcal{P}_{[\lambda+\epsilon-\frac{1}{2}]},\ p_{2,3} \in \mathcal{P}_{\lambda-2}, \\ &p_{\infty,1,2}(0) = p_{\infty,2,0}(0) = p_{\infty,2,1}(0) = p_{\infty,2,3}(0) = Dp_{\infty,2,1}(0) = 0 \end{aligned} \tag{5.39}$$

对于 $i \in \{0,1,2\}$ 和 $j \in \{0,1\}$。这里，我们还使用引理 5.3 证明，对于所有函数$F_{m,\ l,\ k}$，均有 $F_{m,\ l,\ k} \to p_{\infty,\ l,\ k}$ 在局部上一致成立。此外，我们利用了由 (5.32) 和 (5.33) 可得 $F_{m,\ 2,\ 2}$，$F_{m,\ 2,\ 4} \to 0$，以及由 (5.34) 可得 $F_{m,\ 1,\ 5} \to 0$。

~由引理 4.2，我们得到 $f_\infty = P_\infty$，其中某个 $P_\infty \in \mathcal{T}_{\lambda,\epsilon_0}$。然而，经过变量替换后，我们从 (5.22) 观察到

$$\lim_{m\to\infty} \int_{\mathcal{H}_1} |\widetilde{f}_m|^2 = \lim_{m\to\infty} \int_{\mathcal{H}_1} \widetilde{f}_m P_\infty = 0.$$

~这与$\|f_m\|_{L^\infty(\mathcal{H}_1)} \geq 1/2$这一事实矛盾，而该事实可由 (5.23) 和~ f_m的定义直接推出。证明至此完成。□

6. Optimal boundary regularity with in-flow condition

本节中，我们利用命题 5.1，推导出若干关于具有流入条件的动理学方程的精细边界正则性结果。

首先，我们给出 γ_- 和 γ_+ 中远离 γ_0 的边界正则性结果；这一结果实际上已在 [RW25]中得到证明。

引理 6.1. 设 $\lambda \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 和 $\epsilon \in (0,1)$，$z_0 \in \gamma_+ \cup \gamma_-$ 和 $\mathcal{Q}_{2R}(z_0) \cap \gamma_0 = \emptyset$ 且 $R \leq 1$。设 f是下列方程的弱解

$$\begin{cases} (\partial_t + v\cdot\nabla_x)f - \mathrm{div}_v(A\nabla_v f) = B\cdot\nabla_v f + F & \text{in } \mathcal{H}_R(z_0), \\ f = g & \text{in } \gamma_- \cap \mathcal{Q}_R(z_0). \end{cases} \tag{6.1}$$

设 $A \in C^{\lambda-1,\ \epsilon}(\mathcal{H}_R(z_0))$，$B \in C^{\lambda-2,\ \epsilon}(\mathcal{H}_R(z_0);\mathbb{R}^n)$，$F \in C^{\lambda-2,\ \epsilon}(\mathcal{H}_R(z_0))$。则存在一个多项式 $p_{z_0} \in \mathcal{P}_{[\lambda+\epsilon]}$，使得对任意 $r \leq R/2$

$$\|f - p_{z_0}\|_{L^\infty(\mathcal{H}_r(z_0))} \leq c\left(\frac{r}{R}\right)^{\lambda+\epsilon}\left(\|f\|_{L^\infty(\mathcal{H}_R(z_0))} + R^{\lambda+\epsilon}([F]_{C^{\lambda-2,\epsilon}(\mathcal{H}_R(z_0))} + [g]_{C^{\lambda,\epsilon}(\gamma_-\cap\mathcal{Q}_R(z_0))})\right),$$

其中 $c = c(n,\lambda,\epsilon,\Lambda,\|A\|_{C^{\lambda-1,\ \epsilon}(\mathcal{H}_R(z_0))}\ \|B\|_{C^{\lambda-2,\ \epsilon}(\mathcal{H}_R(z_0))})$。

证明。首先注意到，非散度型动理学方程在 γ_+ 和 γ_- 处的正则性已在 [RW25 的引理 4.1 和引理 4.3] 中确立，其方法是采用与命题 5.1 证明中相同的爆破论证。因此，只需对证明稍作修改，即可处理散度算子（见命题 5.1）。□

6.1. 掠射集上的最优正则性。现在我们证明满足流入边界条件的解的最优 $C^{1/2}$ 整体正则性。

定理 6.2。设 f 是以下方程的一个弱解

$$\begin{cases} (\partial_t + v\cdot\nabla_x)f - \mathrm{div}_v(A\nabla_v f) = B\cdot\nabla_v f + F & \text{in } \mathcal{H}_R(z_0), \\ f = g & \text{in } \gamma_- \cap \mathcal{Q}_R(z_0). \end{cases} \tag{6.2}$$

若 $A \in C^\epsilon(\mathcal{H}_R(z_0))$、$F \in L^\infty(\mathcal{H}_R(z_0))$且 $g \in C^{\frac{1}{2}+\epsilon}(\gamma_- \cap \mathcal{Q}_R(z_0))$，其中 $\epsilon > 0$，则有

$$R^{\frac{1}{2}}[f]_{C^{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}_{R/2}(z_0))} \leq c\mathbf{B}(z_0,R)^{\frac{1}{2}}\left(\|f\|_{L^\infty(\mathcal{H}_R(z_0))} + R^2\|F\|_{L^\infty(\mathcal{H}_R(z_0))} + R^{\frac{1}{2}+\epsilon}[g]_{C^{\frac{1}{2}+\epsilon}(\gamma_-\cap\mathcal{Q}_R(z_0))}\right),$$

其中 $c = c(n,\epsilon,\Lambda,\|A\|_{C^\epsilon(\mathcal{H}_R(z_0))})$，并且我们记 $\mathbf{B}(z_0,R) := 1 + \|B\|_{L^\infty(\mathcal{H}_R(z_0))}$。

证明。由相同的 s 缩放论证，如同 (5.4) 中那样，我们可以假设 $\|B\|_{L^\infty(\mathcal{H}_R(z_0))} \le 1$。现在我们假设

$$\|f\|_{L^\infty(\mathcal{H}_R(z_0))} + R^2\|F\|_{L^\infty(\mathcal{H}_R(z_0))} + R^{\frac{1}{2}+\epsilon}[g]_{C^{\frac{1}{2}+\epsilon}(\gamma_-\cap\mathcal{Q}_R(z_0))} \le 1.$$

假设 $\mathcal{Q}_{3R/4}(z_0) \cap \gamma_0 \neq \emptyset$，否则结论可由内部估计与引理 6.1 相结合得到。首先，我们要证明，对于任意 $z_1 \in \mathcal{Q}_{\frac{R}{4}}(z_0)$ 和 $r \le \frac{R}{32}$，存在一个常数 c_{z_1}，使得

$$J := \|f - c_{z_1}\|_{L^\infty(\mathcal{H}_r(z_1))} \le cr^{\frac{1}{2}} \tag{6.3}$$

对于某个常数 $c = c(n, \epsilon, \Lambda, \|A\|_{C^\epsilon(\mathcal{H}_R(z_0))}\ c_B)$。

为此，我们将证明分为三种情况

- 令 $\left(\frac{|v_{1,n}|}{4}\right)^3 \le x_{1,n}$。当 $x_{1,n} = 0$ 时，利用命题 5.1，我们注意到存在常数 c_0, c_1，使得

$$\|f - c_0 - c_1\mathbf{\Phi}_{0,a}\|_{L^\infty(\mathcal{H}_r(z_1))} \le cr^{\frac{1}{2}}$$

对任意 $r \le \frac{1}{2}$，其中 $a := \sqrt{(A(z_1))_{n,\ n}}$ 以及 $c = c(n, \epsilon, \Lambda, \|A\|_{C^\epsilon(\mathcal{H}_R(z_0))}\ \|B\|_{L^\infty(\mathcal{H}_R(z_0))})$。因此，取 $c_{z_1} := c_0$，可得

$$\|f - c_0\|_{L^\infty(\mathcal{H}_r(z_1))} \le \|f - c_0 - c_1\mathbf{\Phi}_{0,a}\|_{L^\infty(\mathcal{H}_r(z_1))} + c_1\|\mathbf{\Phi}_{0,a} - \mathbf{\Phi}_{0,a}(z_1)\|_{L^\infty(\mathcal{H}_r(z_1))} \le cr^{\frac{1}{2}} \tag{6.4}$$

对于某个常数 $c = c(n, \epsilon, \|A\|_{C^\epsilon(\mathcal{H}_1(z_0))}\ c_B)$，其中我们用到了以下事实：$\mathbf{\Phi}_{0,\ a}(z_1) = 0$，$\|\mathbf{\Phi}_{0,\ a}\|_{C^{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}_r(z_1))} = \|\mathbf{\Phi}_{0,\ a}\|_{C^{\frac{1}{2}}(H_r)} \le cr^{\frac{1}{2}}$。

现在假设 $x_{1,\ n} > 0$。则存在常数 $r_1 := \frac{|x_{1,\ n}|^{\frac{1}{3}}}{8}$，$r_2 = 8r_1$ 以及 $\widetilde{z}_1 = (t_1, x_1', 0, v_1', 0) \in \gamma_0 \cap \mathcal{Q}_{\frac{3R}{4}}(z_0)$，使得

$$\mathcal{Q}_{2r_1}(z_1) \cap \gamma = \emptyset, \quad \mathcal{Q}_{2r_1}(z_1) \subset \mathcal{H}_{r_2}(\widetilde{z}_1) \quad \text{and} \quad \mathcal{H}_{2r_2}(\widetilde{z}_1) \subset \mathcal{H}_R(z_0).$$

我们进一步假设 $r \le r_1$，从而可知对于任意 $c_0 \in \mathbb{R}$,

$$\|f - c_0\|_{L^\infty(\mathcal{H}_r(z_1))} \le c\left(\frac{r}{r_1}\right)^{\frac{1}{2}}\|f - c_0\|_{L^\infty(\mathcal{Q}_{2r_1}(z_1))} + cr^{\frac{1}{2}},$$

其中用到了 [KLN25 的引理 5.7] 中给出的内部正则性结果，其中 $G = 0$。现在我们选取 $c_0 := c_{\widetilde{z}_1}$，其由 (6.4) 确定，从而得到

$$\|f - c_0\|_{L^\infty(\mathcal{H}_r(z_1))} \le c\left(\frac{r}{r_1}\right)^{\frac{1}{2}} r_1^{\frac{1}{2}} \le cr^{\frac{1}{2}}. \tag{6.5}$$

另一方面，若 $r \ge r_1$，则有 $\mathcal{H}_r(z_1) \subset \mathcal{H}_{8r}(\widetilde{z}_1)$，并且

$$\|f - c_0\|_{L^\infty(\mathcal{H}_r(z_1))} \le \|f - c_0\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{8r}(\widetilde{z}_1))} \le cr^{\frac{1}{2}}, \tag{6.6}$$

其中 $c_0 := c_{\widetilde{z}_1,\ 4r}$ 由 (6.4) 确定。因此，当 $\left(\frac{|v_{1,n}|}{4}\right)^3 \le x_{1,\ n}$ 时，我们证明了 (6.3)。

- 设 $\left(\frac{v_{1,n}}{4}\right)^3 \ge x_{1,n}$。当 $v_{1,n} = 0$ 时，(6.3) 由前一情形得出，因此我们可以假设 $v_{1,n} > 0$。若 $r \ge \frac{v_{1,n}}{4}$，则

$$\mathcal{H}_r(z_1) \subset \mathcal{H}_{8r}(\widetilde{z}_1),$$

其中 $\widetilde{z}_1 := (t_1, x_1', 0, v_1', 0)$。于是，我们如 (6.6) 那样得到所需估计。现设 $r \le v_{1,n}/4$。当 $r \le \frac{1}{2}\left(\frac{x_{1,n}}{v_{1,n}}\right)^{\frac{1}{2}} =: r_1$ 时，我们注意到

$$\mathcal{H}_{r_1}(z_1) \cap \gamma = \emptyset, \quad \mathcal{H}_{2r_1}(z_1) \subset \mathcal{H}_{8r_1}(\widehat{z}_1) \subset \mathcal{H}_{\frac{v_{1,n}}{4}}(\widehat{z}_1), \quad \mathcal{H}_{\frac{v_{1,n}}{4}}(\widehat{z}_1) \subset \mathcal{H}_{v_{1,n}}(\widetilde{z}_1),$$

其中我们记

$$\widehat{z}_1 := \left(t_1 - \frac{x_{1,n}}{v_{1,n}}, x_1' - \frac{x_{1,n}}{v_{1,n}} v_1', 0, v_1\right) \quad \text{and} \quad \widetilde{z}_1 := \left(t_1 - \frac{x_{1,n}}{v_{1,n}}, x_1' - \frac{x_{1,n}}{v_{1,n}} v_1', 0, v_1', 0\right).$$

注意，$\widehat{z}_1 = z_1 \circ (-\frac{x_{1,n}}{v_{1,n}}, 0, 0)$ 是动力学几何中 z_1 到 γ_- 的自然投影，类似地，$\widetilde{z}_1 = \widehat{z}_1 \circ (0, 0, -v_{1,n})$ 是 $\widehat{z}_1$ 到 γ_0 的投影。

由引理 6.1，存在常数 c_1 使得

$$\|f - c_0 - c_1\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{8r_1}(\widehat{z}_1))} \le c\left(\left(\frac{r_1}{v_{1,n}}\right)^{\frac{1}{2}} \|f - c_0\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{\frac{v_{1,n}}{4}}(\widehat{z}_1))} + r_1^{\frac{1}{2}}\right), \tag{6.7}$$

其中常数 $c_0 = c_{\widetilde{z}_1}$ 按 (6.5) 确定。因此，我们有

$$\|f - c_0 - c_1\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{8r_1}(\widehat{z}_1))} \le c r_1^{\frac{1}{2}}. \tag{6.8}$$

另一方面，由 [KLN25]，存在常数 c_2 使得

$$\|f - c_0 - c_1 - c_2\|_{L^\infty(\mathcal{H}_r(z_1))} \le c\left(\left(\frac{r}{r_1}\right)^{\frac{1}{2}} \|f - c_0 - c_1\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{r_1}(z_1))} + r^{\frac{1}{2}}\right). \tag{6.9}$$

因此，结合估计式 (6.7) 和 (6.9)，当 $r \le r_1$ 时即可得到所需的估计。另一方面，当 $r > r_1$ 时，则有 $\mathcal{H}_r(z_1) \subset \mathcal{H}_{4r}(\widehat{z}_1)$。因此，由 (6.7) 和 (6.8) 并将 r_1 替换为 r，可得

$$\|f - c_0 - c_1\|_{L^\infty(\mathcal{H}_r(z_1))} \le \|f - c_0 - c_1\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{4r}(\widehat{z}_1))} \le c r^{\frac{1}{2}},$$

由此，当 $\left(\frac{v_{1,\,n}}{4}\right)^3 \ge x_{1,\,n}$ 时，便完成了 (6.3) 的证明。

- 令 $\left(\frac{-v_{1,n}}{4}\right)^3 \ge x_{1,\,n}$。同理，我们可以假设 $v_{1,\,n} < 0$ 且 $r \le v_{1,\,n}/4$。现在利用引理 6.1 以及 [KLN25]，的内部正则性结果，我们便可像 (6.7)–(6.9) 那样，在 $\left(\frac{-v_{1,n}}{4}\right)^3 \ge x_{1,\,n}$ 时推出 (6.3)。

因此，我们证明了 (6.3)，从而完成了证明。

□

6.2. $\mathcal{R}^0 \cup \mathcal{R}^+$中的高阶渐近。接下来，我们证明函数$f/\mathbf{\Phi}$的 Lipschitz 估计，其中 $\mathbf{\Phi} \approx \phi_0$。为此，对于任意 $z_0 \in \gamma_0$ with $(x_0)_n = (v_0)_n = 0$ and $M \ge 1$，定义

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^0_{\rho,M}(z_0) &:= \left\{ z = (t, x', x_n, v', v_n) \in \mathcal{H}_\rho(z_0) \,:\, \frac{v_n^3}{x_n} \le M^3 \right\}, \\ \mathcal{H}^+_\rho(z_0) &:= \left\{ z = (t, x', x_n, v', v_n) \in \mathcal{H}_\rho(z_0) \,:\, v_n < 0 \right\}. \end{aligned} \tag{6.10}$$

定理 6.3。设 $M \ge 1$，并设 f 是以下方程的弱解

$$\begin{cases} (\partial_t + v \cdot \nabla_x) f - \operatorname{div}_v(A \nabla_v f) = B \cdot \nabla_v f + F & \text{in } \mathcal{H}_R(z_0), \\ f = 0 & \text{in } \gamma_- \cup \mathcal{Q}_R(z_0), \end{cases} \tag{6.11}$$

其中 $(x_0)_n = (v_0)_n = 0$ 且 $R \le 1$。若 $A \in C^1, {}^{\epsilon}(\mathcal{H}_R(z_0))$, $F \in L^\infty(\mathcal{H}_R(z_0))$, $B \in C^\epsilon(\mathcal{H}_R(z_0))$ 对某个 $\epsilon \in (0,1)$ 成立，则对任意 z, $z' \in \mathcal{H}^0_{\frac{R}{2},\, M}(z_0) \cap \mathcal{H}^+_{\frac{R}{2}}(z_0)$,

$$\left|\frac{f}{\mathbf{\Phi}_{0,a}}(z) - \frac{f}{\mathbf{\Phi}_{0,a'}}(z')\right| \le c\frac{|z-z'|}{R}\left(\|R^{-\frac12} f\|_{L^\infty(\mathcal{H}_R(z_0))} + R^{\frac32}\|F\|_{L^\infty(\mathcal{H}_R(z_0))}\right)$$

对于某个常数 $c = c(n, \epsilon, \Lambda, \|A\|_{C^{1,\epsilon}(\mathcal{H}_R(z_0))}\ \|B\|_{C^\epsilon(\mathcal{H}_R(z_0))}\, M)$，其中 $a := \sqrt{(A(z))_{n,n}}$ 且 $a' := \sqrt{(A(z'))_{n,n_\circ}}$

证明。我们不妨设 $R = 1$ 且

$$\|f\|_{L^\infty(\mathcal{H}_1(z_0))} + \|F\|_{L^\infty(\mathcal{H}_1(z_0))} \le 1.$$

此外，为简化记号，当常数仅依赖于 $n, \epsilon, \Lambda, \|A\|_{C^{1,\epsilon}(\mathcal{H}_1(z_0))}\ \|B\|_{C^\epsilon(\mathcal{H}_1(z_0))}\, M$ 时，我们省略其依赖关系。此外，我们记

$$\overline{\mathcal{H}}_{\frac12}(z_0) := \mathcal{H}^0_{\frac12, M}(z_0) \cap \mathcal{H}^+_{\frac12}(z_0). \tag{6.12}$$

首先，我们证明对于每个 $z_1 \in \overline{\mathcal{H}}_{\frac12}(z_0)$ 和 $\rho \le \frac{1}{16}$，存在一个常数 c_{z_1} 使得

$$J := \fint_{\mathcal{H}_\rho(z_1)\cap\overline{\mathcal{H}}_{\frac12}(z_0)} \left|\frac{f}{\mathbf{\Phi}_{0,a_1}}(z) - c_{z_1}\right| dz \le c\rho, \tag{6.13}$$

其中 $a_1 := \sqrt{(\overline{A(z_1)_{n,n}})_\circ}$ 注意，对于任意 $z_1 \in \gamma_0 \cap \mathcal{Q}_{\frac58}(z_0)$，根据命题 5.1，存在常数$c_0, c_1, c_2$，使得对于任意 $\rho < \frac{1}{32}$,

$$\sup_{\mathcal{H}_\rho(z_1)} |f - (c_0 + \mathbf{c}_1\cdot(v-v_1))\mathbf{\Phi}_{0,a_1} - \mathbf{c}_2\cdot(v-v_1)\mathbf{\Phi}_{1,a_1}| \le c\rho^{\frac32+\epsilon} \tag{6.14}$$

对于某些 $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$，其中 $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 \in \mathbb{R}^n$，并且我们还用到了 $\mathcal{H}_{\frac{1}{32}}(z_1) \subset \mathcal{H}_1(z_0)$。

为此，我们将证明分为三种情况。

- 设 $z_1 \in \gamma_0$，即 $z_1 = (t_1, x_1', 0, v_1', 0)$。取 $z \in \mathcal{H}_\rho(z_1) \cap \overline{\mathcal{H}}_{\frac12}(z_0)$ 和 $c_{z_1} := c_0$，其中常数 c_0由 (6.14) 给出。由 $\mathbf{\Phi}_{0,\ a_1}(z) \ge \frac{1}{c}|x_n|^{\frac16}$ 属于 $\overline{\mathcal{H}}_{\frac12}(z_0)$ 这一事实，以及 (C.36) 和 (6.10)，可得

$$\begin{aligned} J &= \fint_{\mathcal{H}_\rho(z_1)\cap\overline{\mathcal{H}}_{\frac12}(z_0)} |\mathbf{\Phi}_{0,a_1}(z)|^{-1}\, |f(z) - c_0\mathbf{\Phi}_{0,a_1}(z)|\, dz \\ &\le c\fint_{\mathcal{H}_\rho(z_1)\cap\overline{\mathcal{H}}_{\frac12}(z_0)} |x_n|^{-\frac16}\, dz \left(\sup_{\mathcal{H}_\rho(z_1)} |f(z) - c_0\mathbf{\Phi}_{0,a_1}(z)|\right) \\ &\le c\rho^{-\frac12} \sup_{\mathcal{H}_\rho(z_1)} |f(z) - c_0\mathbf{\Phi}_{0,a_1}(z)|\,, \end{aligned} \tag{6.15}$$

其中我们还用到了这一事实:

$$\fint_{\mathcal{H}_\rho(z_1)\cap\overline{\mathcal{H}}_{\frac12}(z_0)} |x_n|^{-\frac16}\, dz \le \fint_{H_\rho} |x_n|^{-\frac16}\, dx_n\, dv_n \le c\rho^{-\frac12}. \tag{6.16}$$

利用 h 借助（6.14）以及事实 $|\mathbf{\Phi}_{i,\ a}| \le c|z|^{\frac{1}{2}}$，我们进一步将项 J 估计为

$$\begin{aligned} J \le c\rho^{-\frac{1}{2}} \sup_{\mathcal{H}_\rho(z_1)} \Big(& |f - (c_0 + \mathbf{c}_1 \cdot (v - v_1))\mathbf{\Phi}_{0,a_1} - \mathbf{c}_2 \cdot (v_j - v_1)\mathbf{\Phi}_{1,a_1}| \\ & + |\mathbf{c}_1 \cdot (v - v_1)\mathbf{\Phi}_{0,a_1} - \mathbf{c}_2 \cdot (v_j - v_1)\mathbf{\Phi}_{1,a_1}| \Big) \le c\rho. \end{aligned} \tag{6.17}$$

因此，当 $\widetilde{z}_1 \in \gamma_0$ 时，我们证明了 (6.13)。

• 设 $z_1 \in (\mathcal{H}_{\frac{1}{2},\ M}^0 \setminus \gamma_0)$ 和 $z_1 = (t_1, x_1', x_{1,\ n}, v_1', v_{1,\ n})$ 满足 $x_{1,\ n} \ne 0$。由 (6.10)，$z_1 \notin \gamma_0 \cup \gamma_{-}$。接下来，对于 $\widetilde{z}_1$，有：$= (t_1, x_1', 0, v_1', 0)$ 和 $r_1 := \frac{(x_{1\ n}^{\ \frac{1}{3},\ })}{8\sqrt{M}}$ 并且 $r_2 = 4(x_{1,\ n})^{\frac{1}{3}} + |v_{1,\ n}|$,

$$\mathcal{Q}_{2r_1}(z_1) \cap \gamma = \emptyset, \quad \mathcal{Q}_{2r_1}(z_1) \subset \mathcal{H}_{r_2}(\widetilde{z}_1) \quad \text{and} \quad \mathcal{H}_{2r_2}(\widetilde{z}_1) \subset \mathcal{H}_1(z_0).$$

由 (6.14)，存在一个常数 c_i，使得

$$\big\| f - (c_0 + \mathbf{c}_1 \cdot (v - \widetilde{v}_1)\mathbf{\Phi}_{0,\widetilde{a}} - \mathbf{c}_2 \cdot (v - \widetilde{v}_1)\mathbf{\Phi}_{1,\widetilde{a}} \big\|_{L^\infty(\mathcal{H}_r(\widetilde{z}_1))} \le c r^{\frac{3}{2}+\epsilon} \tag{6.18}$$

对于任意 $r \le \frac{1}{32}$，其中 $\widetilde{v}_1 = (\widetilde{v}_{1,\ 1} \dots, \widetilde{v}_{1,\ n}) = (v_1', 0)$ 且 $\widetilde{a} := \sqrt{(A(\widetilde{z}_1))_{n,\ n}}$。另一方面，我们利用 $\mathbf{\Phi}_{0,\ a}(x_n, v_n) = \phi_0(x_n/a, v_n/a)$、微积分基本定理 (C.36) 以及 $A \in C^{1+\epsilon}(\mathcal{H}_1(z_0))$，可知对任意 $z \in \mathcal{H}_\rho(\widetilde{z}_1)$,

$$\begin{aligned} |\mathbf{\Phi}_{0,a_1}(z) - \mathbf{\Phi}_{0,\widetilde{a}}(z)| \le & \left| \int_0^1 x_n \partial_{x_n} \phi_0(x_n(\xi/a_1 + (1-\xi)/\widetilde{a}), v_n/a_1)\, d\xi (a_1 - \widetilde{a}) \right| \\ & + c \left| \int_0^1 v_n \partial_v \phi_0(x_n/\widetilde{a}, v_n(\xi/a_1 + (1-\xi)/\widetilde{a}))\, d\xi (a_1 - \widetilde{a}) \right| \\ & \le c \|\phi_0\|_{L^\infty(H_\rho)} |z_1 - \widetilde{z}_1|. \end{aligned} \tag{6.19}$$

为进一步讨论，我们首先考虑情形 $\rho \ge r_1$。在此情形下，我们有 $\mathcal{H}_\rho(z_1) \subset \mathcal{H}_{\rho_0}(\widetilde{z}_1)$，其中 $\rho_0 := 16M^{\frac{3}{2}}\rho$ 以及

$$J := \fint_{\mathcal{H}_\rho(z_1) \cap \overline{\mathcal{H}}_{\frac{1}{2}}(z_0)} \left| \frac{f}{\mathbf{\Phi}_{0,a_1}}(z) - c_{z_1} \right| dz \le c\rho^{-\frac{1}{2}} \sup_{\mathcal{H}_\rho(z_1)} |f(z) - c_{z_1}\mathbf{\Phi}_{0,a_1}(z)|,$$

这里我们用到了 (6.16)。取 $c_{z_1} = c_0$ 并沿用 (6.17) 和 (6.19) 中的推导过程，可得

$$J \le c\rho^{-\frac{1}{2}} \left(\sup_{\mathcal{H}_{\rho_0}(\widetilde{z}_1)} |f(z) - c_0\mathbf{\Phi}_{0,\widetilde{a}}(z)| + \sup_{\mathcal{H}_{\rho_0}(\widetilde{z}_1)} |\mathbf{\Phi}_{0,a_1}(z) - \mathbf{\Phi}_{0,\widetilde{a}}(z)| \right) \le c\rho. \tag{6.20}$$

因此，我们现在假设 $\rho \le r_1$。固定 $c_{z_1} := {}^{f}\!_{(z_1)\ \mathbf{\Phi}_{0,a_1(z_1)}}$，以观察

$$\begin{aligned} J &:= \fint_{\mathcal{H}_\rho(z_1)\cap\overline{\mathcal{H}}_{\frac12}(z_0)} \left| \frac{f}{\mathbf{\Phi}_{0,a_1}}(z) - c_{z_1} \right| dz \\ &= \fint_{\mathcal{H}_\rho(z_1)\cap\overline{\mathcal{H}}_{\frac12}(z_0)} \left| \frac{f(z) - c_0\mathbf{\Phi}_{0,a_1}(z)}{\mathbf{\Phi}_{0,a_1}(z)} - \frac{f(z_1) - c_0\mathbf{\Phi}_{0,a_1}(z_1)}{\mathbf{\Phi}_{0,a_1}(z_1)} \right| dz \\ &\le c\rho \left[\frac{f - c_0\mathbf{\Phi}_{0,a_1}}{\mathbf{\Phi}_{0,a_1}} \right]_{C^{0,1}(\mathcal{H}_\rho(z_1)\cap\overline{\mathcal{H}}_{\frac12}(z_0))} \\ &\le c\rho [f - c_0\mathbf{\Phi}_{0,a_1}]_{C^{0,1}(\mathcal{H}_\rho(z_1)\cap\overline{\mathcal{H}}_{\frac12}(z_0))} \|\mathbf{\Phi}_{0,a_1}^{-1}\|_{L^\infty(\mathcal{H}_\rho(z_1)\cap\overline{\mathcal{H}}_{\frac12}(z_0))} \\ &\quad + c\rho [\mathbf{\Phi}_{0,a_1}^{-1}]_{C^{0,1}(\mathcal{H}_\rho(z_1)\cap\overline{\mathcal{H}}_{\frac12}(z_0))} \|f - c_0\mathbf{\Phi}_{0,a_1}\|_{L^\infty(\mathcal{H}_\rho(z_1)\cap\overline{\mathcal{H}}_{\frac12}(z_0))} =: J_1 + J_2, \end{aligned} \tag{6.21}$$

最后一个不等式用到了 H¨older 空间的乘积法则。接下来我们~注意到，$\mathcal{Q}_{2r_1}(z_1) \cap \gamma_- = \emptyset$ 和 $f(z) := f(z) - c_0\mathbf{\Phi}_{0,a_1}(z)$ 满足

$$(\partial_t + v\cdot\nabla_x)\widetilde{f} - \mathrm{div}_v(A\nabla_v\widetilde{f}) = B\cdot\nabla_v\widetilde{f} + \widetilde{F} \quad \text{in } \mathcal{Q}_{r_1}(z_1),$$

其中

$$\begin{aligned} \widetilde{F} &= F + c_0\left(v_n\partial_{x_n}\mathbf{\Phi}_{0,a_1} - \partial_{v_i}A_{i,n}\partial_{v_n}\mathbf{\Phi}_{0,a_1} - B_n\partial_{v_n}\mathbf{\Phi}_{0,a_1} + A_{n,n}\partial_{v_n,v_n}\partial_{v_n,v_n}\mathbf{\Phi}_{0,a_1}\right) \\ &= F - c_0\left(\partial_{v_i}A_{i,n}\partial_{v_n}\mathbf{\Phi}_{0,a_1} + B_n\partial_{v_n}\mathbf{\Phi}_{0,a_1} + (A_{n,n}(z_1) - A_{n,n}(z))\partial_{v_n,v_n}\mathbf{\Phi}_{0,a_1}\right), \end{aligned}$$

这由以下事实可得：$\mathbf{\Phi}_{0,a_1}$ 满足方程

$$(v_n\partial_{x_n} - a_1^2\partial_{v_n,v_n})f = 0.$$

因此，由引理 2.5 可得

$$\begin{aligned} [\widetilde{f}]_{C^{0,1}(\mathcal{Q}_\rho(z_1))} &\le cr_1^{-1}(\|\widetilde{f}\|_{L^\infty(\mathcal{Q}_{r_1}(z_1))} + r_1^2\|\widetilde{F}\|_{L^\infty(\mathcal{Q}_{r_1}(z_1))}) \\ &\le cr_1^{-1}(\|\widetilde{f}\|_{L^\infty(\mathcal{Q}_{r_1}(z_1))} + r_1^{\frac32}), \end{aligned} \tag{6.22}$$

其中用到了以下事实：对任意 $z \in \mathcal{Q}_{r_1}(z_1)$,

$$\partial_{v_n}\mathbf{\Phi}_{0,a_1}(z) \le c|X_n|^{-\frac12} \le cr_1^{-\frac12}, \quad |A_{n,n}(z_1) - A_{n,n}(z)||\partial_{v_n,v_n}\mathbf{\Phi}_{0,a_1}| \le c|z_1 - z||X_n|^{-\frac32} \le cr_1^{-\frac12} \tag{6.23}$$

with $X_n = (x_n, v_n)$. .which follows from (C 36)

因此，利用将 ρ 替换为 $2r_2$ 的(6.19)，以及 $\mathcal{Q}_{r_1}(z_1) \subset \mathcal{H}_{2,r2}(\widetilde{z}_1)$且$|v_{1,n}|^3 \le Mx_{1,n}$这一事实，我们得到

$$\begin{aligned} \|\widetilde{f}\|_{L^\infty(\mathcal{Q}_{r_1}(z_1))} &\le c\left(\|f - c_0\mathbf{\Phi}_{0,\widetilde{a}}\|_{L^\infty(\mathcal{Q}_{r_1}(z_1))} + \|\mathbf{\Phi}_{0,a_1} - \mathbf{\Phi}_{0,\widetilde{a}}\|_{L^\infty(\mathcal{Q}_{r_1}(z_1))}\right) \\ &\le c\left(\|f - c_0\mathbf{\Phi}_{0,\widetilde{a}}\|_{L^\infty(\mathcal{Q}_{r_1}(z_1))} + r_1^{\frac32}\right). \end{aligned} \tag{6.24}$$

现在，由 (6.18) 以及 $\mathcal{Q}_{2r_1}(z_1) \subset \mathcal{H}_{r_2}(\widetilde{z}_1)$ 和 $|v_{1,n}|^3 \le Mx_{1,n}$ 这一事实可得

$$\begin{aligned} &\|f - c_0\mathbf{\Phi}_{0,\widetilde{a}}\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{r_1}(z_1))} \\ &\le \|f - (c_0 + \mathbf{c}_2\cdot(v - \widetilde{v}_1))\mathbf{\Phi}_{0,\widetilde{a}} - \mathbf{c}_3\cdot(v - \widetilde{v}_1)\mathbf{\Phi}_{1,\widetilde{a}}\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{r_2}(\widetilde{z}_1))} \\ &\quad + \|\mathbf{c}_2\cdot(v - \widetilde{v}_1))\mathbf{\Phi}_{0,\widetilde{a}} - \mathbf{c}_3\cdot(v - \widetilde{v}_1)\mathbf{\Phi}_{1,\widetilde{a}}\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{r_2}(\widetilde{z}_1))} \le cr_1^{\frac32}. \end{aligned} \tag{6.25}$$

结合 (6.22)、(6.24)、(6.25) 和

$$\|\mathbf{\Phi}_{0,a_1}\|_{L^\infty(\mathcal{H}_\rho(z_1)\cap\overline{\mathcal{H}}_{\frac{1}{2}}(z_0))} \geq \|\mathbf{\Phi}_{0,a_1}\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{r_1}(z_1)\cap\overline{\mathcal{H}}_{\frac{1}{2}}(z_0))} \geq c^{-1} r_1^{\frac{1}{2}} \tag{6.26}$$

这就得到

$$J_1 \leq c\rho.$$

另一方面，根据 (C.36)、(6.19) 和 (6.25)，对于 J_2 的估计，我们可推得

$$J_2 \leq \frac{c\rho}{r_1} \sup_{z,z'\in\mathcal{H}_\rho(z_1)\cap\overline{\mathcal{H}}_{\frac{1}{2}}(z_0)} \frac{|\mathbf{\Phi}_{0,a_1}(z)-\mathbf{\Phi}_{0,a_1}(z')|}{|z-z'|} \left(\|f-c_0\mathbf{\Phi}_{0,\widetilde{a}}\|_{L^\infty(\mathcal{H}_\rho(z_1))} + \|\mathbf{\Phi}_{0,a_1}-\mathbf{\Phi}_{0,\widetilde{a}}\|_{L^\infty(\mathcal{H}_\rho(z_1))}\right)$$

$$\leq c\rho r_1^{-\frac{3}{2}} \left(\|f-c_0\mathbf{\Phi}_{0,\widetilde{a}}\|_{L^\infty(\mathcal{H}_\rho(z_1))} + r_1^{\frac{3}{2}}\right) \leq c\rho.$$

特别地，我们用到了以下事实：

$$\sup_{z,z'\in\mathcal{H}_\rho(z_1)\cap\overline{\mathcal{H}}_{\frac{1}{2}}(z_0)} \frac{|\mathbf{\Phi}_{0,a_1}(z)-\mathbf{\Phi}_{0,a_1}(z')|}{|z-z'|} \leq c \sup_{|X_n|,|X_n'|\geq\frac{r_1}{16c_M}} \frac{|\mathbf{\Phi}_0(X_n)-\mathbf{\Phi}_0(X_n')|}{|X_n-X_n'|} \leq c r_n^{-\frac{1}{2}} \tag{6.27}$$

由于我们已证明 $J_1+J_2\leq c\rho$，这就推出了 (6.13)。

- 设 $z_1\in\mathcal{H}^+_{\frac{1}{2}}(z_0)$ 和 $z_1=(t_1,x_1',x_{1,n},v_1',v_{1,n})$ 满足 $v_{1,n}<0$ 且 $x_{1,n}\leq\left(\frac{|v_{1,n}|}{4}\right)^3$。那么对于 $\widetilde{z_1}$，有：$=(t_1,x_1',0,v_1',0)$, $r_1=|v_{1,n}|/2$ 且 $r_2:=2|v_{1,n}|$,

$$\mathcal{H}_{r_1}(z_1)\subset\mathcal{H}_{2r_2}(\widetilde{z_1})\subset\mathcal{H}_1(z_0).$$

由 (6.14)，存在一个常数 c_i，使得

$$\left\|f-(c_0+\mathbf{c}_1\cdot(v-\widetilde{v}_1)\mathbf{\Phi}_{0,\widetilde{a}}-\mathbf{c}_2\cdot(v-\widetilde{v}_1)\mathbf{\Phi}_{1,\widetilde{a}}\right\|_{L^\infty(\mathcal{H}_r(\widetilde{z_1}))} \leq c r^{\frac{3}{2}+\epsilon} \tag{6.28}$$

对任意 $r\leq\frac{1}{32}$，其中 $\widetilde{v_1}=(\widetilde{v}_{1,\ 1}\ldots,\widetilde{v}_{1,\ n})$ 且 $\widetilde{a}:=\sqrt{(A(\widetilde{z_1}))_{n,\ n}}$ 与 (6.20) 中一样，当 $\rho\geq r_1$ 时，我们得到所需的估计 (6.13)，因此假设 $\rho\leq r_1$。结合引理 2.5 和引理 6.1 给出的内部正则性结果以及标准的覆盖论证，我们有

$$[\widetilde{f}]_{C^{0,1}(\mathcal{Q}_\rho(z_1))} \leq c r_1^{-1}(\|\widetilde{f}\|_{L^\infty(\mathcal{Q}_{r_1}(z_1))} + r_1^{\frac{3}{2}}),$$

其中我们还用到了 (6.23) 和 $f:=f-c_0\mathbf{\Phi}_{0,\ a_1}$。类似地，我们得到 (6.26) 和 (6.27)，因为对任意 $z\in\mathcal{H}_{r_1}(z_1)$，$|v_n|\geq\frac{|v_{1,\ n}|}{2}$，且 $|\phi_0(z)|\eqsim|X_n|^{\frac{1}{2}}$ 在 $\overline{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}(z_0)$ 上。因此，我们可以沿用估计 J_1 和 J_2 中相同的论证，推出当 $z_1\in\mathcal{H}^+_{\frac{1}{2}}(z_0)$ 时所需的估计 (6.13)。

在完成证明之前，我们注意到，对于任意的 $z_1,z_2\in\overline{\mathcal{H}}_{\frac{1}{2}}(z_0)$,

$$\left|\frac{f}{\Phi_{a_1}}(z_2)-\frac{f}{\Phi_{a_2}}(z_2)\right| \leq c|f(z_2)||X_2|^{-1}|\Phi_{a_1}(z_2)-\Phi_{a_2}(z_2)| \leq c|f(z_2)||X_2|^{-\frac{1}{2}}|z_1-z_2|, \tag{6.29}$$

其中，我们使用了带有 $r_1=|X_2|$ 的 (6.26) 以及带有 $\rho=|X_2|$ 的 (6.19)。另一方面，由定理 6.2 可得

$$|f(z_2)|=|f(z_2)-f(\widetilde{z}_2)|\leq c|z_2-\widetilde{z}_2|\leq c|X_2|^{\frac{1}{2}}, \tag{6.30}$$

其中 $\widetilde{z}_2 = (t_2, x_2', 0, v_2', 0)$，并且在最后一个不等式中，我们还用到了如下事实： $z_2 \in \overline{\mathcal{H}}_{\frac{1}{2}}(z_0)$。因此，将 z_2 替换为 z 后，结合 (6.29) 和 (6.30) 可得

$$\fint_{\mathcal{H}_r(z_1)\cap\overline{\mathcal{H}}_{\frac{1}{2}}(z_0)} \left| \frac{f}{\Phi_a}(z) - \frac{f}{\Phi_{a_1}}(z) \right| dz \le c \fint_{\mathcal{H}_r(z_1)\cap\overline{\mathcal{H}}_{\frac{1}{2}}(z_0)} |z - z_1|\, dz \le cr,$$

其中 $a = \sqrt{A_{n,\ n}(z)}$。因此，利用这一点和 (6.13) 可得

$$\fint_{\mathcal{H}_r(z_1)\cap\overline{\mathcal{H}}_{\frac{1}{2}}(z_0)} \left| \frac{f}{\Phi_a}(z) - c_{z_1} \right| dz \le cr. \tag{6.31}$$

现在，根据 Campanato 空间的经典理论，由 (6.31) 可推出所需的估计。证明完毕。□

为讨论我们结果的尖锐性，我们简要说明当右端由散度型数据给出时，如何推导 $C^{0,\ 1}$ 阶的 $f/\mathbf{\Phi}_{0,\ a}$估计。为此，我们考虑如下弱解：

$$\begin{cases} (\partial_t + v\cdot\nabla_x)f - \operatorname{div}_v(A\nabla_v f) = B\cdot\nabla_v f + F - \operatorname{div}_v(G) & \text{in } \mathcal{H}_1(z_0), \\ f = 0 & \text{in } \gamma_- \cap \mathcal{Q}_1(z_0), \end{cases} \tag{6.32}$$

其中 $(x_0)_n = (v_0)_n = 0$, $A \in C^{\frac{1}{2}+\epsilon}(\mathcal{H}_1(z_0))$, $B \in C^{\epsilon}(\mathcal{H}_1(z_0))$, $F \in L^{\infty}(\mathcal{H}_1(z_0))$, $G \in C^{\frac{1}{2}+\epsilon}(\mathcal{H}_1(z_0))$。我们可以假设

$$\|f\|_{L^{\infty}(\mathcal{H}_1(z_0))} + \|F\|_{L^{\infty}(\mathcal{H}_1(z_0))} + [G]_{C^{\frac{1}{2}+\epsilon}(\mathcal{H}_1(z_0))} \le 1.$$

接着，沿用命题 5.1 证明中的相同步骤，并利用$-\operatorname{div}_v(G) = -\operatorname{div}_v(G - G(z_0))$这一事实，从而可以使用 $\|G - G(z_0)\|_{L^{\infty}(\mathcal{H}_r(z_0))} \le cr^{\frac{1}{2}+\epsilon}[G]_{C^{\frac{1}{2}+\epsilon}(\mathcal{H}_1(z_0))}$，由此可得将 z_1 替换为 z_0后的 (6.17)，因为展开阶数小于 2，所以我们只需使用引理 5.2。此外，我们知道方程 (6.32) 的解满足内部 $C^{1,\ \epsilon}$ 估计（见引理 2.5）。因此，重复定理 6.3 中所用的论证，可得方程 (6.32) 的弱解 f 对任意 $z, z' \in \overline{\mathcal{H}}_{\frac{1}{2}}(z_0)$ 满足：

$$\left| \frac{f}{\mathbf{\Phi}_{0,a}}(z) - \frac{f}{\mathbf{\Phi}_{0,a'}}(z') \right| \le c|z - z'|.$$

例 6.4. 这里，我们解释定理 1.7 的尖锐性。考虑 $n = 1$ 和 $f := \phi_0 + v^2\partial_v\phi_0$。于是由 (3.93)，可知 f 是下列方程的解

$$\begin{cases} (\partial_t + v\partial_x)f - \partial_{vv}f = -\partial_v(-3\phi_0 + 5v\partial_v\phi_0) & \text{in } \mathcal{H}_1, \\ f = 0 & \text{in } \gamma_- \cap \mathcal{Q}_1, \end{cases}$$

也就是说，它是 (6.32) 在 $G = -3\phi_0 + 5v\partial_v\phi_0$ 和 $B = F = 0$下的解。此外，由 (C.19) 和 (C.23)，可知 $\varphi := \frac{f}{\phi_0} = 1 + \frac{v^2\partial_v\phi_0}{\phi_0} = 1 + \frac{v^4}{3x}\,{}^{U(-\frac{5}{6},\frac{5}{3},-\frac{v^3}{9x})U(\frac{1}{6},\frac{2}{3},-\frac{v^3}{9x})}$。利用 RW25 命题 3.4], 证明中的齐次性，我们推得 $\varphi \in C^{0,1}\setminus C^1$。因此，为了获得 $\overline{C}^{0,1}$ 正则性，我们必须假设对 (6.32) 中任意 $\epsilon \ge 0$，都有 $G \in C^{\frac{1}{2}+\epsilon}$。从这个意义上说，我们的结果是尖锐的。

注 6.5. 现在我们论证，当 (6.11) 中的 $A \equiv 1$ 和 $B \equiv 0$ 满足条件时， f/ϕ_0 的正则性优于 $C^{0,1}$。设 f 是下列方程的一个解：

$$\begin{cases} (\partial_t + v\cdot\nabla_x)f - \Delta_v f = F & \text{in } \mathcal{H}_1(z_0), \\ f = 0 & \text{in } \gamma_- \cap \mathcal{Q}_1(z_0), \end{cases}$$

其中 $x_{0,n} = v_{0,n} = 0$ 和 $F \in C^\epsilon(\mathcal{H}_1(z_0))$。为证明这一点，首先注意到，根据定理 1.10，我们只需要两个元素 ϕ_0 和 ψ_0，即可证明命题 5.1 中给出的 $2 + \frac{1}{2} - \epsilon$ 阶展开估计。因此，重复命题 5.1 证明中的相同论证，我们得到

$$\|f - (c_0 + \mathbf{c}_1 \cdot (v - v_0) + (v - v_0)^T \mathbf{C}_2 (v - v_j))\phi_0 - c_3\psi_0\|_{L^\infty(\mathcal{H}_\rho(z_0))} \le c\rho^{2+\frac{1}{2}-\epsilon}$$

对某些常数 $\mathbf{c}_1 \in \mathbb{R}^n$、$\mathbf{C}_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$、$c \in \mathbb{R}$，其中我们已假定 $\|f\|_{L^\infty(\mathcal{H}_1(z_0))} + [F]_{C^\epsilon(\mathcal{H}_1(z_0))} \le 1$。因此，如同命题 5.1 的证明，只需稍作修改，并且由于ψ_0具有齐次性 2，即可证明 $f/\phi_0 \in C^{\frac{3}{2}}(\overline{\mathcal{H}}_{\frac{1}{2}}(z_0))$（关于集合$\overline{\mathcal{H}}_{\frac{1}{2}}(z_0)$的定义见 (6.12)）。显然，该结果是最优的，因为 $f = \psi_0$是一个解。

另一方面，当 $F = 0$ 时，展开中没有 ψ_0，因此我们可以推出

$$\|f - (c_0 + \mathbf{c}_1 \cdot (v - v_0) + (v - v_0)^T \mathbf{C}_2 (v - v_j))\phi_0 - c_3\partial_{v_n}\phi_1\|_{L^\infty(\mathcal{H}_\rho(z_0))} \le c\rho^{2+\frac{1}{2}+\epsilon}.$$

由于$\partial_{v_n}\phi_1$具有齐次性 [52]，可以证明 $f/\phi_0 \in C^{1,1}(\overline{\mathcal{H}}_{\frac{1}{2}}(z_0))$。显然，该结果同样是最优的，因为对某些 $c \in \mathbb{R}$，$f = cv_1^2\phi_0 - \partial_{v_n}\phi_1$ 是一个解。

6.3. $\mathcal{R}^-$ 中的更高正则性。现在我们证明 $\gamma_0 \cup \gamma_-$ 附近的最优正则性。更精确地说，对任意 $\epsilon \in (0, 1/3)$ 以及满足 $(\bar{x}_0)_n = (v_0)_n = 0$ 的 z_0，我们如下定义集合 $\mathcal{H}^-_{\rho,\epsilon}(z_0)$

$$\mathcal{H}^-_{\rho,\epsilon}(z_0) := \left\{(t, x', x_n, v', v_n) \in \mathcal{H}_\rho(z_0) : v_n^{\frac{1}{\epsilon}} \ge x_n\right\},$$

并且我们证明该集合中如下精细正则性结果。这里的要点在于，命题 5.1 中的展开得到了改进，其意义是 $\overline{\mathcal{T}}_{\lambda,\epsilon,z_0,a}$ 中的复杂函数可以被一个多项式替换，因为展开中的所有元素本身都足够光滑，在 $\mathcal{H}^-_{\rho,\epsilon}(z_0)$ 中。

定理 6.6。设 f 是如下方程的弱解

$$\begin{cases} (\partial_t + v \cdot \nabla_x)f - \operatorname{div}_v(A\nabla_v f) = B \cdot \nabla_v f + F & \text{in } \mathcal{H}_R(z_0), \\ f = g & \text{in } \gamma_- \cap \mathcal{Q}_R(z_0) \end{cases}$$

其中 $(x_0)_n = (v_0)_n = 0$。设 $A \in C^{2,\frac{1}{2}}(\mathcal{H}_R(z_0))$、$F \in C^{1,\frac{1}{2}}(\mathcal{H}_R(z_0))$、$B \in C^{1,\frac{1}{2}}(\mathcal{H}_R(z_0))$ 以及 $g \in C^{2,1}(\gamma_- \cap \mathcal{Q}_R(z_0))$。对任意 $\epsilon \in (0,1)$ 和 $z_1 \in \mathcal{H}^-_{\frac{R}{2},\epsilon}(z_0)$，只要 $\mathcal{H}_\rho(z_1) \subset \mathcal{H}^-_{\frac{R}{2},\epsilon}(z_0)$，则存在多项式 p_{z_1} 使得

$$\|f - p_{z_1}\|_{L^\infty(\mathcal{H}_\rho(z_1))} \le c\left(\frac{\rho}{R}\right)^{3(1-\epsilon)} \left(\|f\|_{L^\infty(\mathcal{H}_R(z_0))} + R^3[F]_{C^{2,\frac{1}{2}}(\mathcal{H}_R(z_0))} + R^3[g]_{C^{2,1}(\gamma_-\cap\mathcal{Q}_R(z_0))}\right),$$

对于某个常数 $c = c(n, \epsilon, \Lambda, \|A\|_{C^{2,1/2}(\mathcal{H}_R(z_0))}, \|B\|_{C^{1,1/2}(\mathcal{H}_R(z_0))}, |v_0|)$。

证明。我们不妨假设 $R = 1$ 且

$$\|f\|_{L^\infty(\mathcal{H}_1(z_0))} + [F]_{C^{2,\frac{1}{2}}(\mathcal{H}_1(z_0))} + [g]_{C^3(\gamma_-\cap\mathcal{Q}_1(z_0))} \le 1.$$

为简化记号，当常数仅依赖于诸如 $n, \epsilon, \Lambda, \|A\|_{C^{2,1/2}(\mathcal{H}_1(z_0))}, \|B\|_{C^{1,1/2}(\mathcal{H}_1(z_0))}$ 等数据时，我们省略对该常数的依赖关系。

[1]我们固定 $z_1 = (t_1, x_1', x_{1,n}, v_1', v_{1,n}) \in \mathcal{H}^-_{\frac{1}{2},\epsilon}(z_0)$，这意味着 $x_{1,n} \le v_{1,n}^\epsilon$，并假设 $\mathcal{H}_\rho(z_1) \subset \mathcal{H}^-_{\frac{1}{2},\epsilon}(z_0)$。

首先，写出 $r_1 := \frac{1}{2}\left(\frac{x_{1,n}}{v_{1,n}}\right)^{\frac{1}{2}}$，注意到

$$\mathcal{H}_{r_1}(z_1)\cap\gamma=\emptyset,\quad \mathcal{H}_{2r_1}(z_1)\subset\mathcal{H}_{8r_1}(\widehat{z}_1)\subset\mathcal{H}_{\frac{v_{1,n}}{4}}(\widehat{z}_1),\quad \mathcal{H}_{\frac{v_{1,n}}{4}}(\widehat{z}_1)\subset\mathcal{H}_{v_{1,n}}(\widetilde{z}_1),$$

其中我们记

$$\widehat{z}_1 := \left(t_1-\frac{x_{1,n}}{v_{1,n}},x_1'-\frac{x_{1,n}}{v_{1,n}}v_1',0,v_1\right)\quad\text{and}\quad \widetilde{z}_1 := \left(t_1-\frac{x_{1,n}}{v_{1,n}},x_1'-\frac{x_{1,n}}{v_{1,n}}v_1',0,v_1',0\right).$$

根据命题 5.1，存在 $P_{\widetilde{z}_1}\in\overline{\mathcal{T}}_{2,(1-\frac{3\epsilon}{2})\,\widetilde{z}_1,\widetilde{a}_1}$，满足 $\widetilde{a}_1 := \sqrt{(A(\widetilde{z}_1))_{n,n}}$，使得对任意 $r\le\frac{1}{32}$

$$\|f-P_{\widetilde{z}_1}\|_{L^\infty(\mathcal{H}_r(\widetilde{z}_1))}\le cr^{3(1-\frac{\epsilon}{2})}. \tag{6.33}$$

事实上，$P_{\widetilde{z}_1}$ 具有如下形式

$$P_{\widetilde{z}_1} := p_{\widetilde{z}_1}+\sum_{i=0}^{2}p_i\mathbf{\Phi}_{\widetilde{a}_1,i}+b_3\mathbf{\Phi}_{\widetilde{a}_1,3}+b_5\mathbf{\Phi}_{\widetilde{a}_1,5},$$

其中 $p_{\widetilde{z}_1}$、$p_i\in\mathcal{P}_2$ 和 $p_1(\widetilde{z}_1)=p_2(\widetilde{z}_1)=Dp_2(\widetilde{z}_1)=0$。

接下来，我们取一个常数 $\delta\in(\frac{\epsilon}{3},1)$，其值稍后确定（见 (6.42)）。于是我们注意到，对于 $\widehat{r}_1 := \frac{1}{2}(v_{1,n})^{\frac{1}{2}(\frac{3}{\delta}-1)}$，存在一个较小的常数 $c_\delta=c_\delta(\delta)$，使得当 $v_{1,n}\le c_\delta$ 时，

$$v_{1,n}-4\widehat{r}_1>\frac{v_{1,n}}{2}. \tag{6.34}$$

我们现在假设 (6.34)，从而有

$$(4\widehat{r}_1)^2v_{1,n}+(4\widehat{r}_1)^3\le(16(v_{1,n}-\widehat{r}_1))^{\frac{3}{\delta}}\quad\text{and}\quad \mathcal{H}_{4\widehat{r}_1}(\widehat{z}_1)\subset\{z\in\mathcal{R}^-:x_n\le(16v_n)^{\frac{3}{\delta}}\}. \tag{6.35}$$

然后，由 (C.39) 并结合 (6.35)，我们得到

$$\|D^2(\mathbf{\Phi}_{\widetilde{a}_1,i})\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{4\widehat{r}_1}(\widehat{z}_1))}\le c \tag{6.36}$$

对任意 $i\in\{0,1,2,5\}$。接下来还需估计$\mathbf{\Phi}_{\widetilde{a}_1,\,i}$。为此，我们利用 ψ_0 是一个解 t o

$$\begin{cases}(\partial_t+v\cdot\nabla_x)\psi_0-\Delta_v\psi_0=0 & \text{in }\mathbb{R}\times\{x_n>0\}\times\mathbb{R}^n,\\ \psi_0=c_0v_n^2 & \text{in }\mathbb{R}\times\{x_n=0\}\times\{v_n>0\},\end{cases}$$

由引理 6.1，对 $\delta' := 1-3\epsilon$，我们得到

$$[\psi_0]_{C^{2,\delta'}(\mathcal{H}_{8\widehat{r}_1}(\widehat{z}_1))}\le[\psi_0]_{C^{2,\delta'}(\mathcal{H}_{\frac{v_{1,n}}{4}}(\widehat{z}_1))}\le c(v_{1,n})^{-(2+\delta')}\|\psi_0\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{\frac{v_{1,n}}{2}}(\widehat{z}_1))}.$$

由于$\mathcal{H}_{v_{1,\,\underline{2}^n}}(\widehat{z}_1)\subset\{x_n\le(2v_n)^3\}$，利用 (C.84)，我们有$\|\psi_0\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{v_{1,\,\underline{2}^n}(\widehat{z}_1))}}\le cv_{1,\,n}^2$。因此我们推出

$$[\psi_0]_{C^{2,\delta'}(\mathcal{H}_{4\widehat{r}_1}(\widetilde{z}_1))}\le c(v_{1,n})^{-\delta'},$$

这意味着

$$[\mathbf{\Phi}_{\widetilde{a}_1,3}]_{C^{2,\delta'}(\mathcal{H}_{4\widehat{r}_1}(\widetilde{z}_1))}\le c(v_{1,n})^{-\delta'}, \tag{6.37}$$

此外，我们注意到

$$\begin{aligned}&(\partial_t+v\cdot\nabla_x)\mathbf{\Phi}_{\widetilde{a}_1,3}-\operatorname{div}_v(A\nabla_v\mathbf{\Phi}_{\widetilde{a}_1,3})-B\nabla_v\mathbf{\Phi}_{\widetilde{a}_1,3}\\&=\partial_{v_n}(A_{n,n}(z)-A_{n,n}(\widetilde{z}_1))\partial_{v_n}\mathbf{\Phi}_{\widetilde{a}_1,3}+(A_{n,n}(z)-A_{n,n}(\widetilde{z}_1))\partial_{v_n}^2\mathbf{\Phi}_{\widetilde{a}_1,3}-B\partial_{v_n}\mathbf{\Phi}_{\widetilde{a}_1,3},\end{aligned}$$

and

$$\|A_{n,n}(z)-A_{n,n}(\widetilde{z}_1)\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{\widehat{r}_1}(4\widehat{z}_1))}\le\|A_{n,n}(z)-A_{n,n}(\widetilde{z}_1)\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{v_{1,n}}(\widetilde{z}_1))}\le cv_{1,n},$$

其中我们使用了 A和 $\mathcal{H}_{v_{1的}n}(\widetilde{z}_1) \supset \mathcal{H}_{8r_1}(\widehat{z}_1)$ Lipschitz 正则性。因此，结合这些结果与（6.37），我们得到

$$[(\partial_t + v\cdot\nabla_x)\mathbf{\Phi}_{\widetilde{a}_1,3} - \operatorname{div}_v(A\nabla_v\mathbf{\Phi}_{\widetilde{a}_1,3}) - B\nabla_v\mathbf{\Phi}_{\widetilde{a}_1,3}]_{C^{1-3\epsilon}(\mathcal{H}_{4\widehat{r}_1}(\widehat{z}_1))} \le c(\epsilon),$$

因此，据此，由 (6.36) 和 $\|p_{\widetilde{z}_1}\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{\frac{1}{32}}(\widetilde{z}_1))} \le c$ 根据 (6.33)，我们有

$$[(\partial_t + v\cdot\nabla_x)P_{\widetilde{z}_1} - \operatorname{div}_v(A\nabla_v P_{\widetilde{z}_1}) - B\nabla_v P_{\widetilde{z}_1}]_{C^{1-3\epsilon}(\mathcal{H}_{4\widehat{r}_1}(\widehat{z}_1))} \le c(\epsilon). \tag{6.38}$$

$\widetilde{}$由于 $f := f - P_{\widetilde{z}_1}$ 满足

$$(\partial_t + v\cdot\nabla_x)\widetilde{f} - \operatorname{div}_v(A\nabla_v\widetilde{f}) = B\cdot\nabla_v\widetilde{f} + F + \widetilde{F} \quad \text{in } \mathcal{H}_{4\widehat{r}_1}(\widehat{z}_1)$$

$\widetilde{}$ $\widetilde{}$其中 $F := (\partial_t + v\cdot\nabla_x)P_{\widetilde{z}_1} - \operatorname{div}_v(A\nabla_v P_{\widetilde{z}_1}) - B\nabla_v P_{\widetilde{z}_1}$ 且 $f = g - \widetilde{p}$ 在 $\gamma_- \cap \mathcal{Q}_{4\widehat{r}_1}(\widehat{z}_1)$ 上对某个 $\widetilde{p} \in \mathcal{P}_2$成立，应用引理 6.1，存在多项式 $p_{\widehat{z}_1} \in \mathcal{P}_2$，使得对任意 $r \le 4\widehat{r}_1$,

$$\|f - P_{\widetilde{z}_1} - p_{\widehat{z}_1}\|_{L^\infty(\mathcal{H}_r(\widehat{z}_1))} \le c\left(\left(\frac{r}{\widehat{r}_1}\right)^{3-3\epsilon}\|f - P_{\widetilde{z}_1}\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{4\widehat{r}_1}(\widetilde{z}_1))} + r^{3-3\epsilon}\right), \tag{6.39}$$

其中我们还用到了 (6.38)。由此得到

$$\|p_{\widehat{z}_1}\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{4\widehat{r}_1}(\widehat{z}_1))} \le c(\|f - P_{\widetilde{z}_1}\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{4\widehat{r}_1}(\widetilde{z}_1))} + r_1^{3-3\epsilon}),$$

由此推出

$$[p_{\widehat{z}_1}]_{C^{k,\epsilon}(\mathcal{H}_{4\widehat{r}_1}(\widetilde{z}_1))} \le \frac{c}{(\widehat{r}_1)^{k+\epsilon}}(\|f - P_{\widetilde{z}_1}\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{4\widehat{r}_1}(\widetilde{z}_1))} + \widehat{r}_1{}^{3-3\epsilon}).$$

$\widehat{}$另一方面，我们注意到 $f = f - P_{\widetilde{z}_1} - p_{\widehat{z}_1}$ 满足

$$(\partial_t + v\cdot\nabla_x)\widehat{f} - \operatorname{div}_v(A\nabla_v\widehat{f}) = B\cdot\nabla_v\widehat{f} + F + \widetilde{F} + \widehat{G},$$

$\widehat{}$其中 $G = -\partial_t p_{\widehat{z}_1} + \operatorname{div}_v(A\nabla_v p_{\widehat{z}_1}) + B\cdot\nabla_v p_{\widehat{z}_1}$。因此，由引理 6.1，我们得 到对任意 $\rho \le r_1$,

$$\begin{aligned}\|f - P_{\widetilde{z}_1} - p_{\widehat{z}_1} - p_{z_1}\|_{L^\infty(\mathcal{H}_\rho(z_1))} \le{}& c\left(\frac{\rho}{r_1}\right)^{3-3\epsilon}\|f - P_{\widetilde{z}_1} - p_{\widehat{z}_1}\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{r_1}(z_1))} \\ &+ \rho^{3-3\epsilon}\left[1 + \frac{c}{(\widehat{r}_1)^{3-3\epsilon}}\|f - P_{\widetilde{z}_1}\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{4\widehat{r}_1}(z_1))}\right],\end{aligned} \tag{6.40}$$

$\widehat{}$ $\widehat{}$其中我们还用到了 (6.38) 和 $[G]_{C^{1-3\epsilon}(\mathcal{H}_{r_1}(z_1))} \le [G]_{C^{1-3\epsilon}(\mathcal{H}_{4\widehat{r}_1}(\widehat{z}_1))} \le \|p_{\widehat{z}_1}\|_{C^{2,1-3\epsilon}(\mathcal{H}_{4\widehat{r}_1}(\widehat{z}_1))}$。因此，结合 (6.39) 与 $r = 4r_1$，由 (6.40) 得

$$\|f - P_{\widetilde{z}_1} - p_{\widehat{z}_1} - p_{z_1}\|_{L^\infty(\mathcal{H}_\rho(z_1))} \le c\left(\left(\frac{\rho}{\widehat{r}_1}\right)^{3-3\epsilon}\|f - P_{\widetilde{z}_1}\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{4\widehat{r}_1}(z_1))} + \rho^{3-3\epsilon}\right), \tag{6.41}$$

其中我们还用到了这一事实：$\mathcal{H}_{r_1}(z_1) \subset \mathcal{H}_{4r_1}(\widehat{z}_1)$。最后，结合此式、(6.33) 与 $r = v_{1,n}$，以及这一事实：$\mathcal{H}_{4\widehat{r}_1}(\widehat{z}_1) \subset \mathcal{H}_{4v_{1,n}}(\widetilde{z}_1)$，可得

$$\|f - P_{\widetilde{z}_1} - p_{\widehat{z}_1} - p_{z_1}\|_{L^\infty(\mathcal{H}_\varrho(z_1))} \le c\left(\left(\frac{\rho}{\widehat{r}_1}\right)^{3(1-\epsilon)} v_{1,n}^{3(1-\frac{\epsilon}{2})} + \rho^{3(1-\epsilon)}\right),$$

其中 $c = c(\delta)$。现在令 $\delta = \delta(\epsilon)$ 非常接近 1，使得

$$-\frac{1}{2}(\frac{3}{\delta} - 1)(3 - 3\epsilon) + (3 - \frac{3}{2}\epsilon) \ge 0, \tag{6.42}$$

我们有 $\widehat{r}_1^{-3(1-\epsilon)} v_1^{3-\frac{3}{2}\epsilon}{}_{,n} \leq c$，当 $\widehat{r}_1 = \frac{1}{2}(v_{1,n})^{\frac{1}{2}(\frac{3}{\delta}-1)}$ 时。这意味着

$$\|f - P_{\widetilde{z}_1} - p_{\widehat{z}_1} - p_{z_1}\|_{L^\infty(\mathcal{H}_\varrho(z_1))} \leq c\rho^{3(1-\epsilon)}.$$

现在结合 (C.39) 和 (C.88)，并利用 $\mathcal{H}_\rho(z_1) \subset \mathcal{H}_{1,\epsilon}^-(z_0)$ 这一事实，存在 $P_{\widetilde{z}_1}, \widetilde{p}_{\widetilde{z}_1}$ 的二阶泰勒多项式，使得

$$\|P_{\widetilde{z}_1} - \widetilde{p}_{\widetilde{z}_1}\|_{L^\infty(\mathcal{H}_\rho(z_1))} \leq c\rho^{3-3\epsilon}.$$

因此，我们有

$$\|f - \widetilde{p}_{\widetilde{z}_1} - p_{\widehat{z}_1} - p_{z_1}\|_{L^\infty(\mathcal{H}_\rho(z_1))} \leq c\rho^{3(1-\epsilon)},$$

当 $v_{1,n} \leq c_\delta$ 时，由 (6.34) 得。然而，若 $v_{1,n} > c_\delta$，则由引理 6.1，结合内部正则性估计和 γ_- 处的边界估计，即可得到所需估计，因为 z_1 远离 γ_0，且 $c_\delta > 0$ 仅依赖于常数 ϵ。更确切地说，如同在 (6.39) 和 (6.40) 中，取 $P_{\widetilde{z}_1} = 0$ 和 $\widehat{r}_1 = {v_{1,8}}^n$，可得到 $P_{\widetilde{z}_1} = 0$ 和 $\widehat{r}_1 = {v_{1,8}}^n$ 时的 (6.41)。于是，由 $v_{1,n} \geq c_\delta$ 这一事实可得所需估计。证明完毕。□

我们以一个验证定理 6.6（从而也是定理 1.6）最优性的具体例子结束本节。

例 6.7. 设 $n = 1$ 和 $f := \psi_0$。则有

$$\begin{cases} (\partial_t + v\partial_x)f - \partial_{vv}f = 0 & \text{in } \mathcal{H}_1, \\ f = c_0 v^2 & \text{in } \gamma_- \cap \mathcal{Q}_1. \end{cases}$$

根据 (C.89)，为证明 $f \in C^{3-3\epsilon}(D)$，我们必须假设 $D \subset \{x \leq v^{\frac{1}{\epsilon}}\}$。这意味着定理 6.6 中给出的结果是最优的。

7. Optimal boundary regularity with diffuse reflection condition

本节中，我们将在半空间 $\Omega = \{x_n > 0\}$内证明满足漫反射条件的整体正则性。在本节始终记

$$\mathcal{N}f(t,x,v) := \mathcal{M}(z)g(t,x') := \mathcal{M}(z)\int_{\mathbb{R}^n \cap \{w_n < 0\}} f(t,x',0,w',w_n)(w_n)_- \, dw \tag{7.1}$$

并假设 $\mathcal{M}(z)$ 具有快速衰减性质，且足够光滑。随后，通过边界展平和覆盖论证，我们可以为一般区域推导出全局估计。此外，例 7.7 表明，$C^{\frac{1}{2}}$ 正则性是最优的。

以下是本节的主要结果，也是我们关于漫反射的最一般结果，并由此得到定理 1.1。我们定义

$$\mathcal{H}_{R,\infty} = (-R^2, R^2) \times \left(B'_{R^3} \times (0, R^3)\right) \times \mathbb{R}^n.$$

定理 7.1。设 f 是下列方程的弱解

$$\begin{cases} (\partial_t + v \cdot \nabla_x)f - \operatorname{div}_v(A\nabla_v f) = B \cdot \nabla_v f + F & in\ \mathcal{H}_{2,\infty}, \\ f = \mathcal{N}f & in\ \gamma_- \cap \overline{\mathcal{H}_{2,\infty}}, \end{cases} \tag{7.2}$$

其中，$\mathcal{N}f$的定义与 (7.1) 中相同。固定 $p \geq \frac{1}{2}$，并对任意 $v_0 \in \mathbb{R}, r_0$，记为: $= \frac{\langle v_0 \rangle^{-p}}{64}$。设 $\epsilon \in (0, 1), \lambda \in \mathbb{N}$，且 $M > 0$。于是有如下结论。

- 固定 $\epsilon \in (0,1)$，并假设存在某个 $c_B, M > 0$，使得

$$\sup_{z_0 \in \mathcal{H}_{2,\infty}} \left(\langle v_0 \rangle^M \|\mathcal{M}\|_{C^{\frac{1}{2}+\epsilon}(\mathcal{H}_{r_0}(z_0))} + \|A\|_{C^\epsilon(\mathcal{H}_{r_0}(z_0))} + \langle v_0 \rangle^{-2} \|B\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{r_0}(z_0))} \right) \le c_B. \tag{7.3}$$

那么 存在 $M_0 = M_0(n,p) > 0$，使得若 $M > M_0$，则对任意 $z_0 \in \mathcal{H}_{1,\infty}$，我们有 e

$$\begin{aligned} \|f\|_{C^{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}_{r_0}(z_0))} &\le c\langle v_0 \rangle (\|f\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{2r_0}(z_0))} + r_0^2 \|F\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{2r_0}(z_0))}) \\ &\quad + c\langle v_0 \rangle \|\mathcal{M}\|_{C^{\frac{1}{2}+\epsilon}(\mathcal{H}_{r_0}(z_0))} \left(\|\langle \cdot \rangle^q f(t,x,\cdot)\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{2,\infty})} + \|\langle \cdot \rangle^q F(t,x,\cdot)\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{2,\infty})} \right), \end{aligned}$$

对于某个常数 $c = c(n, \Lambda, c_B, p)$ 和 $q = q(n,p)$。

- 令我们固定 $\lambda \in \mathbb{N}$, $\epsilon \in (0,1)$，并假设对于某个 $c_B, M > 0$,

$$\sup_{z_0 \in \mathcal{H}_{2,\infty}} \left(\langle v_0 \rangle^M \|\mathcal{M}\|_{C^{6\lambda+\frac{7}{6}}(\mathcal{H}_{r_0}(z_0))} + \|A\|_{C^{6\lambda+1}(\mathcal{H}_{r_0}(z_0))} + \langle v_0 \rangle^{-2} \|B\|_{C^{6\lambda}(\mathcal{H}_{r_0}(v_0))} \right) \le c_B. \tag{7.4}$$

那么，存在 $M_1 = M_1(n, \lambda, \epsilon, p)$，使得若 $M > M_1$，则对任意 $z_0 \in \mathcal{H}_{1,\infty}$ 和 $\mathcal{H}_{r_0}(z_0) \cap \gamma_0 = \emptyset$，我们有

$$\|f\|_{C^{\lambda,\epsilon}(\mathcal{H}_{r_0}(z_0))} \le c \left(\|\langle \cdot \rangle^q f(t,x,\cdot)\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{2,\infty})} + \|\langle \cdot \rangle^q F(t,x,\cdot)\|_{C^{6\lambda}(\mathcal{H}_{2,\infty})} \right),$$

对于某个常数 $c = c(n, \Lambda, \lambda, \epsilon, c_B, p)$ 和 $q = q(n, \lambda, \epsilon, p)$，其中我们记

$$\|\langle \cdot \rangle^q F(t,x,\cdot)\|_{C^{6\lambda}(\mathcal{H}_{2,\infty})} := \sup_{z_0 \in \mathcal{H}_{2,\infty}} \langle v_0 \rangle^q \|F\|_{C^{6\lambda}(\mathcal{H}_1(z_0) \cap \mathcal{H}_{2,\infty})}. \tag{7.5}$$

注意，我们假设 $p \ge \frac{1}{2}$，以确保对于任意 $z_0 \in \mathcal{H}_{1,\infty}$，$\mathcal{H}_{4r_0}(z_0) \subset \mathcal{H}_{2,\infty}$。此外，我们将在第 8 节给出的定理 1.1 的证明中选取常数 $p \ge \frac{1}{2}$，使其在扁平化论证后满足诸如 (7.3) 和 (7.4) 之类的假设（更多细节见定理 1.1 的证明）。

证明的关键困难在于获得边界数据 $\mathcal{N}f$ 的正则性，从而使我们能够应用关于流入的已知正则性结果（见 [RW25]）。以下是这方面的主要结果。

命题 7.2. 固定 $p \ge \frac{1}{2}$，并记 $r_0 := \frac{\langle v_0 \rangle^{-p}}{64}$，其中任意 $v_0 \in \mathcal{H}_{1,\infty}$。设 f 是 (7.2) 的一个弱解。那么我们有以下结论：

- 存在 $M_0 = M_0(n,p) > 0$，使得如果对于某个 $\epsilon \in (\frac{1}{2}, 1)$ 和 $M > M_0$，(7.3) 成立，则对于任意 $z_0 \in \mathcal{H}_{1,\infty}$,

$$[\mathcal{N}f]_{C^\epsilon(\gamma_- \cap \mathcal{Q}_{r_0}(z_0))} \le c \left(\|\langle \cdot \rangle^q f(t,x,\cdot)\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{2,\infty})} + \|\langle \cdot \rangle^q F(t,x,\cdot)\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{2,\infty})} \right), \tag{7.6}$$

其中 $c = c(n, \Lambda, \epsilon, c_B, p, \mathcal{M})$，且 q 仅依赖于 n 和 ϵ。

- 存在 $M_1 = M_1(n, \lambda, \epsilon, p) > 0$，使得如果对于某个 $\lambda \ge 1$、$\epsilon \in (0,1)$ 和 $M \ge M_1$，(7.4) 成立，则对于任意 $z_0 \in \mathcal{H}_{1,\infty}$,

$$[\mathcal{N}f]_{C^{\lambda,\epsilon}(\gamma_- \cap \mathcal{Q}_{r_0}(z_0))} \le c \left(\|\langle \cdot \rangle^q f(t,x,\cdot)\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{2,\infty})} + \|\langle \cdot \rangle^q F(t,x,\cdot)\|_{C^{6\lambda}(\mathcal{H}_{2,\infty})} \right), \tag{7.7}$$

其中 $c = c(n, \Lambda, \lambda, \epsilon, c_B, p, \mathcal{M})$，且 q 仅依赖于 n、λ 和 ϵ。

(7.7) 中对数据 A、B、F 和 $\mathcal{M}$ 的正则性假设并非最优。本文着重证明给定数据光滑时，远离 γ_0 的 C^∞-正则性。因此，我们不进一步探究解的正则性与数据正则性之间的最优关系。

由于证明涉及许多步骤，我们在此简要说明证明策略。我们将使用差商技巧和自举论证来推导 H¨older 估计

$$\widehat{g}_k := \frac{\delta_{h,k}\mathcal{N}f}{|h|^k} \quad \text{and} \quad \widehat{f}_k := \frac{\delta_{h,k}f}{|h|^k}.$$

参见 (7.20) 对 $\delta_{h,k}$ 的定义。首先，我们可以观察到，L^∞ 对 $\widehat{f}_k$ 和 $C^{1,\epsilon}$ 对 $\widehat{f}_k$ 在 γ_+ 附近的估计，足以在任意 $\delta > 0$ 下获得 $\widehat{g}_k$ 在 H¨older 空间 $C^{\frac{4}{3}-\epsilon}$ 中的一致有界性（见下文 (7.25)）。接下来，我们根据 $\widehat{f}_k$ 的上确界范数，证明 $\widehat{f}_k$ 在 γ_+ 之外的 $C^{1,\epsilon}$ 估计（见 (7.30)）。基于这些观察，我们将通过归纳法证明 $\widehat{f}_k$ 的 $C^{\frac{1}{2}-\epsilon}$ 估计（见下文 (7.31)）。

从 $\widehat{f}_k$ 的估计推出 $\widehat{f}_{k+1}$ 的一致 $C^{\frac{1}{2}-\epsilon}$ 估计，分为三个步骤。

1. 利用 (A.2)，我们得到 $\frac{\delta_{h,k+1}f}{|h|^{k+\alpha}}$ 对任意 $\alpha < \frac{1}{6}$ 都有界。因此，结合这一点和 $C^{2-\epsilon}$ 估计，我们可以推出 $\delta_{h,k+1}\mathcal{N}f \in C^{\frac{7}{6}}$。2. 注意到 $\frac{\delta_{h,k+1}f}{|h|^{k+\alpha}}$ 满足一个右端项无界的方程，例如 $-\mathrm{div}_v\left(\frac{\delta_h A}{|h|^\alpha}\nabla_v \widehat{f}_k\right)$，这使我们无法应用整体 $C^{\frac{1}{2}}$ 正则性估计。相反，我们通过获得 f_k 在 γ_0 之外的梯度估计，并将其与 $\widehat{f}_k$ 在 γ_0 处的 $C^{\frac{1}{2}-\epsilon}$ 估计结合，证明对于足够大的 q，有 $\nabla_v f_k \in L^q$。3. 现在，我们结合扰动论证和关于 $\nabla_v f_k$ 的高可积性结果，推出 $\frac{\delta_{h,k+1}f}{|h|^{k+\alpha}} \in C^{\frac{1}{2}-\epsilon}$，这意味着 $\frac{\delta_{h,k+1}f}{|h|^{k+\alpha}}$ 对任意 $\alpha < \frac{2}{6}$ 都有界。现在我们将这一过程迭代 7 次，使 α 变为 1，从而得到 $\widehat{f}_{k+1}$ 的一致 $C^{\frac{1}{2}-\epsilon}$ 估计。

因此，由 (7.25)，我们证明了 $\widehat{g}_k \in C^{\frac{4}{3}-\epsilon}$，从而得到 $\partial^k g \in C^{\frac{4}{3}-\epsilon}$。现在利用 (A.1)，我们可以找到一个数 k，使得 $g \in C^{\lambda,\,\delta}$。如前所述，我们只需找到一个较大的数 k；它并非最优，但足以证明 $g \in C^{\lambda,\,\delta}$。

7.1. 预备结果：带流入的边界估计。在证明命题 7.2 之前，我们需要给出若干关于远离 γ_0 处的正则性估计结果。这些结果基本上已在 [RW25] 中给出（内部情形可参见 [KLN25]），但为了将其应用于漫反射，我们需要追踪常数对漂移的显式依赖，并将形如 $\mathrm{div}_v(G)$ 的散度形式源项纳入研究。此外，在引理 7.5 中，我们证明了针对无界源项、一直到 γ_0 的 $C^{\frac{1}{2}-\delta}$ 估计，从而改进了定理 6.2。

引理 7.3. 设 f 是.....的弱解

$$\begin{cases} (\partial_t + v\cdot\nabla_x)f - \mathrm{div}_v(A\nabla_v f) = B\cdot\nabla_v f - \mathrm{div}_v(G) + F & \text{in } \mathcal{H}_R(z_0), \\ f = g & \text{in } \gamma_- \cap \mathcal{Q}_R(z_0). \end{cases} \tag{7.8}$$

设 $\mathcal{H}_{2R}(z_0) \cap \gamma_0 = \emptyset$。对于任意 $\epsilon \in (0,1)$，我们有

$$\begin{aligned} &R\|\nabla_v f\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{R/2}(z_0))} + R^{1+\epsilon}[\nabla_v f]_{C^\epsilon(\mathcal{H}_{R/2}(z_0))} + R^{1+\epsilon}[f]_{C^{1,\epsilon}(\mathcal{H}_{R/2}(z_0))} \\ &\le c\mathbf{B}(z_0,R)^{1+\epsilon}\Bigg(\|f\|_{L^\infty(\mathcal{H}_R(z_0))} + R^{1+\epsilon}[G]_{C^\epsilon(\mathcal{H}_R(z_0))} \\ &\qquad + R^2\|F\|_{L^\infty(\mathcal{H}_R(z_0))} + R^{1+\epsilon}[g]_{C^{1,\epsilon}(\gamma_-\cap\mathcal{Q}_R(z_0))}\Bigg), \end{aligned} \tag{7.9}$$

其中 $\mathbf{B}(z_0,R) := (1+\|B\|_{L^\infty(\mathcal{H}_R(z_0))})$，且 $c = c(n,\Lambda,\epsilon,\|A\|_{C^\epsilon(\mathcal{H}_R(z_0))})$。

证明。常数对 B 的显式依赖性可通过与式 (5.3) 的证明中相同的缩放论证得到。因此，只需在 $\|B\|_{L^\infty(\mathcal{H}_R(z_0))} \le 1$ 时证明式 (7.9)。
当 $G = 0$ 时，[KLN25] 中已得到了内部估计和边界展开；当 $G = 0$ 时，见引理 6.1。为处理散度形式源项，首先由引理 2.5 可得

$$R^{1+\epsilon}[f]_{C^{1,\epsilon}(\mathcal{H}_{R/2}(z_0))} \le c\left(\|f\|_{L^\infty(\mathcal{H}_R(z_0))} + R^\epsilon[G]_{C^\epsilon(\mathcal{H}_R(z_0))}\right) + cR^2\|F\|_{L^\infty(\mathcal{H}_R(z_0))}\Big), \tag{7.10}$$

其中，当 $\mathcal{H}_{2R}(z_0) \cap \gamma = \emptyset$ 时，$c = c(n,\Lambda,\epsilon,\|A\|_{C^\epsilon(\mathcal{H}_R(z_0))})$。此外，对任意满足 $z_1 \in \mathcal{H}_{2R}(z_0) \cap \gamma$ 的情形，沿用引理 5.2 证明中的相同步骤，并结合以下观察–$\operatorname{div} v(G) = \operatorname{div} v(G - G(z_0))$，这使我们能够估计 $\|G - G(z_1)\|_{L^\infty(\mathcal{H}_r(z_1))} \lesssim r^\epsilon[G]_{C^\epsilon(\mathcal{H}_r(z_1))}$，从而可得存在一个小常数 $\alpha = \alpha(n,\Lambda)$，使得

$$r^\alpha[f]_{C^\alpha(\mathcal{H}_{r/2}(z_1))} \le c(\|f\|_{L^\infty(\mathcal{H}_r(z_1))} + r^\epsilon[G]_{C^\epsilon(\mathcal{H}_r(z_1))} + r^2\|F\|_{L^\infty(\mathcal{H}_r(z_1))} + r^\alpha[g]_{C^\alpha(\gamma_-\cap\mathcal{H}_r(z_1))}), \tag{7.11}$$

对于某个常数 $c = c(n,\Lambda,\epsilon,\|A\|_{C^\epsilon(\mathcal{H}_r(z_1))})$，只要 $\mathcal{H}_r(z_1) \subset \mathcal{H}_R(z_0)$，结论即成立。为了证明边界点处的展开，当 $\mathcal{H}_R(z_0) \cap \gamma_0 \neq \emptyset$ 时，我们采用与 RW25 的引理 4.1 和引理 4.4] 的证明（另见命题 5.1）相同的论证，并结合内部 $C^{1,\epsilon}$ 估计 (7.10) 和边界 C^α 估计 (7.11)，以保证吹起序列如 (5.36) 所示收敛。容易看出，关于 G 的假设具有正确的尺度，因此保证吹起序列收敛到一个适当的极限。综上，我们得到

$$\|f - p_{z_0}\|_{L^\infty(\mathcal{H}_r(z_0))} \le c\left(\frac{r}{R}\right)^{1+\epsilon}\Bigg(\|f\|_{L^\infty(\mathcal{H}_R(z_0))} + R^{1+\epsilon}[G]_{C^\epsilon(\mathcal{H}_R(z_0))} + R^2\|F\|_{L^\infty(\mathcal{H}_R(z_0))} + R^{1+\epsilon}[g]_{C^{1,\epsilon}(\gamma_-\cap\mathcal{Q}_R(z_0))}\Bigg)$$

对于某些多项式 $p_{z_0} \in \mathcal{P}_1$，结合 (7.10) 中的内部估计可得以下估计

$$R^{1+\epsilon}[f]_{C^{1+\epsilon}(\mathcal{H}_{R/2}(z_0))} \le c\Bigg(\|f\|_{L^\infty(\mathcal{H}_R(z_0))} + R^\epsilon[G]_{C^\epsilon(\mathcal{H}_R(z_0))} + R^2\|F\|_{L^\infty(\mathcal{H}_R(z_0))} + R^{1+\epsilon}[g]_{C^{1,\epsilon}(\gamma_-\cap\mathcal{Q}_R(z_0))}\Bigg),$$

对于某个常数 $c = c(n,\Lambda,\epsilon,\|A\|_{C^\epsilon(\mathcal{H}_R(z_0))})$。证明完毕。 □

注 7.4. 注意，重复引理 7.3 证明中的相同论证可得，每当 $\mathcal{H}_R(z_0) \cap \gamma_0 = \emptyset$ 时，

$$R^{\frac12}[f]_{C^{\frac12}(\mathcal{H}_{R/2}(z_0))} \le c\mathbf{B}(z_0,R)^{\frac12}\Bigg(\|f\|_{L^\infty(\mathcal{H}_R(z_0))} + R\|G\|_{L^\infty(\mathcal{H}_R(z_0))} + R^2\|F\|_{L^\infty(\mathcal{H}_R(z_0))} + R^{\frac12}[g]_{C^{\frac12}(\gamma_-\cap\mathcal{Q}_R(z_0))}\Bigg),$$

对于某个常数 $c = c(n,\Lambda,\|A\|_{C^\epsilon(\mathcal{H}_R(z_0))})$。

接下来，我们证明边界附近直至 γ_0的$\frac12 - \delta$ 阶H¨older估计。

Lemma 7.5. 设 $R \le 1$、 $z_0 \in \gamma_0$ 满足$x_{0,\ n} = v_{0,\ n} = 0$ ，并设 f 是如下问题的弱解

$$\begin{cases} (\partial_t + v\cdot\nabla_x)f - \mathrm{div}_v(A\nabla_v f) = B\cdot\nabla_v f - \mathrm{div}_v(G) + F & in\ \mathcal{H}_R(z_0), \\ f = g & in\ \gamma_- \cap \mathcal{Q}_R(z_0), \end{cases} \tag{7.12}$$

其中 $A \in C^\epsilon(\mathcal{H}_R(z_0))$，其中某个 $\epsilon > 0$。固定 $p \ge \frac{1}{2}$、 $C_1 \ge 1$ ，并记 $r_1 := \frac{\langle v_1\rangle^{-p}}{64}$，以及对任意 z_1，记 $\widehat{r}_1 := \frac{\langle v_1\rangle^{-p}}{C_1}$。现在固定 $\delta < \frac{1}{2}$。假设

$$\begin{aligned} &\|B\|_{L^\infty(\mathcal{H}_R(z_0))} \le c_B\langle v_0\rangle^2 \\ &\sup_{z_1\in\gamma_0\cap\mathcal{Q}_R(z_0)}\ \sup_{(t,x',v')\in\mathcal{H}'_{\widehat{r}_1}(z_1')} \|G(t,x',\cdot,v',\cdot)\|_{L^{8-\delta_0}(H_{\widehat{r}_1})} + \|F(t,x',\cdot,v',\cdot)\|_{L^{8-\delta_0}(H_{\widehat{r}_1})} \le C_0, \\ &\sup_{z_2\in\mathcal{Q}_R(z_0)}\ \sup_{\substack{\mathcal{Q}_\rho(z_2)\cap\gamma_0=\emptyset,\\ \rho\le r_2}} \rho^{-\frac{1}{2}-\delta}(\|G\|_{L^\infty(\mathcal{H}_\rho(z_2))} + \|F\|_{L^\infty(\mathcal{H}_\rho(z_2))}) \le C_0 \end{aligned} \tag{7.13}$$

其中某些常数 c_B 和 C_0，其中 $\delta_0 := \frac{16\delta}{1+2\delta}$ ，并将 $\mathcal{H}'_r(z_1')$记为 $\mathbb{R}^{2(n-1)+1}$ 中定义的动力学圆柱，将 H_r 记为 (3.1) 中确定的定常圆柱。若 $2r_0 = R$，则有

$$[f]_{C^{\frac{1}{2}-\delta}(\mathcal{H}_{r_0}(z_0))} \le c\langle v_0\rangle^{c_p}(\|f\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{2r_0}(z_0))} + [g]_{C^{\frac{3}{4}}(\gamma_-\cap\mathcal{Q}_{2r_0}(z_0))} + C_0), \tag{7.14}$$

其中 $c_p = c(p)$，且 $c = c(n,\Lambda,\epsilon,\|A\|_{C^\epsilon(\mathcal{H}_R(z_0))}\ c_B,\delta,C_1,p)$。

为证明这一点，我们首先给出以下引理，说明边界数据的 L^∞-范数可由其 H¨older 半范数估计。

引理 7.6. 设 f 是以下方程的一个弱解

$$\begin{cases} (\partial_t + v\cdot\nabla_x)f - \mathrm{div}_v(A\nabla_v f) = B\cdot\nabla_v f - \mathrm{div}_v(G) + F & in\ \mathcal{H}_R(z_0), \\ f = g & in\ \gamma_- \cap \mathcal{Q}_R(z_0) \end{cases} \tag{7.15}$$

且 $z_0 \in \gamma_-\cup\gamma_0$。若对某个 $\epsilon > 0$，有 $g \in C^\epsilon(\gamma_-\cap\mathcal{Q}_R(z_0))$，则有

$$\begin{aligned} \|g\|_{L^\infty(\gamma_-\cap\mathcal{Q}_R(z_0))} \le c(&R^{-(4n+2)}\|f\|_{L^1(\mathcal{H}_R(z_0))} + \|RG\|_{L^\infty(\mathcal{H}_R(z_0))} + \|R^2F\|_{L^\infty(\mathcal{H}_R(z_0))}) \\ &+ cR^\epsilon[g]_{C^\epsilon(\gamma_-\cap\mathcal{Q}_R(z_0))}, \end{aligned}$$

其中 $c = c(n,\Lambda,\epsilon,\|B\|_{L^\infty(\mathcal{H}_R(z_0))})$。

证明。首先，由于 [Sil22], f 在边界上连续，这意味着 $f(z_0) = g(z_0)$。因此，只需证明

$$|f(z_0)| \le c(R^{-(4n+2)}\|f\|_{L^1(\mathcal{H}_R(z_0))} + \|RG\|_{L^\infty(\mathcal{H}_R(z_0))} + \|R^2F\|_{L^\infty(\mathcal{H}_R(z_0))} + R^\epsilon[g]_{C^\epsilon(\gamma_-\cap\mathcal{Q}_R(z_0))}),$$

其中 $c(n,\Lambda,\epsilon,\|B\|_{L^\infty(\mathcal{H}_R(z_0))})$，因为

$$\|g - f(z_0)\|_{L^\infty(\gamma_-\cap\mathcal{Q}_R(z_0))} = \|g - g(z_0)\|_{L^\infty(\gamma_-\cap\mathcal{Q}_R(z_0))} \le cR^\epsilon[g]_{C^\epsilon(\gamma_-\cap\mathcal{Q}_R(z_0))}.$$

反设不成立，则 存在序列 $(f_k)_k$、$(A_k)_k$、$(B_k)_k$、(G_k)、(F_k)、$(R_k)_k$、$(z_k)_k$ 和 $(g_k)_k$ wit h

$$\begin{cases} (\partial_t + v\cdot\nabla_x)f_k - \mathrm{div}_v(A_k\nabla_v f_k) = B_k\cdot\nabla_v f_k - \mathrm{div}_v(G_k) + F_k & \text{in } \mathcal{H}_{R_k}(z_k), \\ f_k = g_k & \text{in } \gamma_-\cap\mathcal{Q}_{R_k}(z_k), \end{cases} \tag{7.16}$$

以及 $\Lambda^{-1}I \le A_k \le \Lambda I$ 以及$\|B_k\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{R_k}(z_k))} \le \Lambda$，但 $|f_k(z_k)| = 1$ 以及

$$R_k^{-(4n+2)}\|f_k\|_{L^1(\mathcal{H}_{R_k}(z_k))} + \|R_kG_k\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{R_k}(z_k))} + \|R_k^2F_k\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{R_k}(z_k))} + [R_k^\epsilon g_k]_{C^\epsilon(\gamma_-\cap\mathcal{Q}_{R_k}(z_k))} \to 0.$$

对 [RW25 中引理 2.25]（另见引理 5.2）给出的证明稍作修改，以处理右端项 $-\operatorname{div}_v(G_k)$ 后，我们可得

$$R_k^\epsilon [f_k]_{C^\epsilon(\overline{\mathcal{H}_{R_k/2}(z_k)})} \le c.$$

现在考虑函数 $\widehat{f_k} := f_k(z_k \circ S_{R_k} z)$，以证明

$$[\widehat{f_k}]_{C^\epsilon(\mathcal{H}_{1,k})} \le c \quad \text{and} \quad \|\widehat{f_k}\|_{L^2(\mathcal{H}_{1,k})} \to 0,$$

其中

$$\mathcal{H}_{1,k} := \{z : z_k \circ S_{R_k} z \in \mathcal{H}_{R_k}(z_k)\} \supset [0,1) \times B_1' \times [0,1] \times B_1.$$

事实上，我们用到了这一事实：

$$|\mathcal{H}_{R_k}(z_k)| \eqsim R_k^{-(4n+2)} \quad \text{and} \quad |\mathcal{H}_{1,k}| \eqsim 1.$$

根据阿尔泽拉-阿斯科利定理，$\widehat{f_k}$ 在 $[0,1) \times (B_1' \times [0,1]) \times B_1$ 中一致收敛于 f_∞，并且

$$\|\widehat{f_\infty}\|_{L^2([0,1)\times(B_1'\times[0,1])\times B_1)} = 0.$$

这就产生了矛盾 $0 = |f_\infty(0)| = \lim_{k\to\infty} |f_k(0)| = \lim_{k\to\infty} |f_k(z_k)| = 1$，从而完成证明。 □

现在我们准备证明引理 7.5。

引理 7.5 的证明。证明过程与引理 5.2 类似，不过这里我们希望得到最优的 H¨older 指数。我们不妨假设 $z_0 = 0$。固定 $\delta < \frac{1}{2}$。
首先，我们要证明对任意 $\widetilde{z}_0 \in \gamma_0 \cap \mathcal{Q}_{r_0}(z_0)$ 和 $r \le r_0$，

$$\fint_{\mathcal{H}_r(\widetilde{z}_0)} |f - (f)_{\mathcal{H}_r(\widetilde{z}_0)}|\, dz \le c\langle v_0\rangle^{c_p} r^{\frac{1}{2}-\delta}\big(\|f\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{2r_0}(z_0))} + [g]_{C^{\frac{3}{4}}(\gamma_-\cap\mathcal{Q}_{2r_0}(z_0))} + C_0\big), \tag{7.17}$$

其中 $c = c(n, \Lambda, \epsilon, \|A\|_{C^\epsilon(\mathcal{H}_{2r_0}(z_0))}\ c_B, \delta, C_1, p)$。固定 $M_0 = M_0(n, \Lambda, c_B)$，其值将在稍后确定（见 (7.18)）。注意，当 $r > \frac{\langle v_0\rangle^{-(2+p)}}{M_0}$ 时，我们观察到

$$\fint_{\mathcal{H}_r(\widetilde{z}_0)} |f - (f)_{\mathcal{H}_r(\widetilde{z}_0)}|\, dz \le c r^{-(4n+2)-\frac{1}{2}+\delta} r^{\frac{1}{2}-\delta} \|f\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{2r_0}(z_0))} \le c\langle v_0\rangle^{-(4n+3)(2+p)} \|f\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{2r_0}(z_0))},$$

由此得到满足 $c_p > (4n+3)(2+p)$ 和 $c = c(n, M_0)$ 的 (7.17)。因此，只需证明满足$r \le \frac{\langle v_0\rangle^{-(2+p)}}{M_0}$ 的 (7.17)。
现在，设 h 是以下方程的唯一弱解

$$\begin{cases} (\partial_t + v\cdot\nabla_x)h - \operatorname{div}_v(A\nabla_v h) = B\cdot\nabla_v f & \text{in } \mathcal{H}_r(\widetilde{z}_0), \\ h = f & \text{in } \partial_{\mathrm{kin}}\mathcal{Q}_R(\widetilde{z}_0). \end{cases}$$

沿用引理 5.2 证明中的相同步骤，并结合 (7.13) 中给出的第二个条件，我们可推得

$$\fint_{\mathcal{H}_r(\widetilde{z}_0)} |f-h|^2\, dz \le c\Big(\|B\|^2_{L^\infty(\mathcal{H}_r(\widetilde{z}_0)} r^2 \fint_{\mathcal{H}_r(\widetilde{z}_0)} |f-h|^2\, dz + C_0^2 r^{2-2\delta}\Big).$$

取 $M_0 = M_0(n, \Lambda, c_B)$ 足够大，我们得到

$$r(1 + \|B\|_{L^\infty(\mathcal{H}_r(\widetilde{z}_0))}) \le \frac{\langle v_0\rangle^{-2}}{M_0}(c_B\langle v_0\rangle^2 + 1) \le \frac{1}{2c}, \tag{7.18}$$

这意味着

$$\fint_{\mathcal{H}_r(\widetilde{z}_0)} |f-h|^2\,dz \le cC_0^2 r^{2-2\delta}.$$

结合定理 6.2、[RW25 中的 (2.33) 的第二组估计、引理 2.25] 和引理 7.6，以及 (5.4) 中的缩放论证，我们得到

$$r^{\frac12}[h]_{C^{\frac12-\frac{\delta}{2}}(\mathcal{H}_{\frac{r}{2}}(\widetilde{z}_0))} \le c\big(r^{-(2n+1)}\|h\|_{L^2(\mathcal{H}_r(\widetilde{z}_0))} + [r^{\frac34}g]_{C^{\frac34}(\gamma_-\cap\mathcal{Q}_r(\widetilde{z}_0))}\big),$$

其中 $c = c(n,\Lambda,\epsilon,\|A\|_{C^\epsilon(\mathcal{H}_{r_0}(z_0))})$。特别是，对于缩放论证，我们利用了由 (7.18) 得到的 (5.6)。因此，如同引理 5.2 的证明，我们推得

$$\fint_{\mathcal{H}_{\rho r}(\widetilde{z}_0)} |f-(f)_{\mathcal{H}_{\rho r}(\widetilde{z}_0)}|^2\,dz \le c\rho^{1-\delta}\fint_{\mathcal{H}_r(\widetilde{z}_0)} |f-(f)_{\mathcal{H}_r(\widetilde{z}_0)}|^2\,dz + cr^{\frac34}[g]_{C^{\frac34}(\gamma_-\cap\mathcal{Q}_r(\widetilde{z}_0))} + cr^{1-2\delta}C_0,$$

其中 $c = c(n,\Lambda,\epsilon,\|A\|_{C^\epsilon(\mathcal{H}_{r_0}(z_0))}\,\delta)$。现在取 ρ 充分小，使得 $\rho^\delta \le \frac{1}{16c}$，并按照 [KLN25 中引理 5.6], 的标准迭代论证，我们得到 (7.17)。

现在我们证明将 $\widetilde{z}_0$ 替换为 $z_1 \in \mathcal{H}_{r_0}(z_0)$ 后的 (7.17)。同样地，假设 $r \le \frac{\langle v_0\rangle^{-2-p}}{M_0}$。首先，设 $\mathcal{H}_{2r}(z_1) \cap \gamma_0 \ne \emptyset$。则存在一点 $\widetilde{z}_1 \in \mathcal{H}_{2r}(z_1)\cap\gamma_0$，使得 $\mathcal{H}_{2r}(z_1) \subset \mathcal{H}_{8r}(\widetilde{z}_1)$。因此，利用这一点，我们也得到 (7.17)。现在假设 $\mathcal{H}_{2r}(z_1)\cap\gamma_0 = \emptyset$。那么对于 ρ_1，我们有：$=164$最大值$\{(x_{1,n})^{\frac13}, |v_{1,n}|\}$, $r \le 64\rho_1$且 $\mathcal{H}_{\rho_1}(z_1)$ $\cap\gamma_0 = \emptyset$。由注 7.4，结合 (7.18) 对 (5.6) 中缩放论证的应用（这使我们能够消除对 $\|B\|_{L^\infty}$的依赖），可得

$$J := \fint_{\mathcal{H}_r(z_1)} |f-(f)_{\mathcal{H}_r(z_1)}|^2\,dz \le c\left(\frac{r}{\rho_1}\right)^{1-2\delta}\left(\fint_{\mathcal{H}_{\rho_1}(z_1)} |f-(f)_{\mathcal{H}_{\rho_1}(z_1)}|^2\,dz + \rho_1^2\|G\|^2_{L^\infty(\mathcal{H}_{\rho_1}(z_1)} + \rho_1^4\|F\|^2_{L^\infty(\mathcal{H}_{\rho_1}(z_1)} + \rho_1[g]^2_{C^{\frac12}(\gamma_-\cap\mathcal{H}_{\rho_1}(z_1))}\right),$$

其中 $c = c(n,\Lambda,\epsilon,\|A\|_{C^\epsilon(\mathcal{H}_{r_0}(z_0))})$，只要 $r \le \rho_1/2$ 成立。现在结合 (7.13) 中给出的第三个条件与 $\mathcal{H}_{\rho_1}(z_1)\cap\gamma_0 = \emptyset$，我们进一步估计 J，得到

$$J \le c\left(\left(\frac{r}{\rho_1}\right)^{1-2\delta}\fint_{\mathcal{H}_{\rho_1}(z_1)} |f-(f)_{\mathcal{H}_{\rho_1}(z_1)}|^2\,dz + r^{1-2\delta}(C_0 + [g]^2_{C^{\frac12}(\gamma_-\cap\mathcal{H}_{r_0}(z_0))})\right).$$

当 $r \in [\rho_1/2, 64\rho_1]$ 时，我们有 $J \le c\fint_{\mathcal{H}_{64\rho_1}(z_1)} |f-(f)_{\mathcal{H}_{64\rho_1}(z_1)}|^2\,dz$，由此可得

$$J \le c\left(\left(\frac{r}{\rho_1}\right)^{1-2\delta}\fint_{\mathcal{H}_{64\rho_1}(z_1)} |f-(f)_{\mathcal{H}_{64\rho_1}(z_1)}|^2\,dz + r^{1-2\delta}((C_0)^2 + [g]^2_{C^{\frac12}(\gamma_-\cap\mathcal{H}_{r_0}(z_0))})\right).$$

由于 $\mathcal{H}_{64\rho_1}(z_1)\cap\gamma_0 \ne \emptyset$，存在一点 $\widetilde{z}_1 \in \gamma_0$，使得 $\mathcal{H}_{64\rho_1}(z_1) \subset \mathcal{H}_{2^9\rho_1}(\widetilde{z}_1)$。现在将 (7.17) 中的 $\widetilde{z}_0$ 和 r 分别替换为 $\widetilde{z}_1$ 和 $64\rho_1$，并代入对 J 的估计中，从而得到

$$J \le c\langle v_0\rangle^{2c_p} r^{1-2\delta}(\|f\|^2_{L^\infty(\mathcal{H}_{2r_0}(z_0))} + [g]^2_{C^{\frac34}(\gamma_-\cap\mathcal{Q}_{2r_0}(z_0))} + (C_0)^2).$$

因此，我们证明了对于任意 $z \in \gamma_0\cap\mathcal{Q}_{r_0}(z_0)$，(7.17) 都成立，这就得到了所需的 $C^{\frac12}$-估计。 □

7.2. 漫反射边界数据的正则性。本小节中，我们证明命题 7.2。首先，我们引入一些将频繁使用的记号。

$$\langle v_0\rangle \coloneqq 1+|v_0|, \quad r_0 \coloneqq \frac{\langle v_0\rangle^{-p}}{64}, \quad \rho_0 \coloneqq \max\left\{\frac{|v_{0,n}|}{2}, \left(\frac{|x_{0,n}|}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right\}, \tag{7.19}$$

其中，命题 7.2 中的常数 $p \geq \frac{1}{2}$ 是固定的。

命题 7.2 的证明。首先，我们证明 $\mathcal{N}f$ 的时间导数的正则性。回顾 (7.1) 中 $g = g(t,x')$ 的定义。对于任意的 $h \in \mathbb{R}$ 和 $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$，我们记

$$\begin{aligned} &\delta_{h,1}f(z) \coloneqq \delta_h f(z) \coloneqq f_h(z) - f(z), \quad f_h(z) \coloneqq f((h,0,0)\circ z) = f(t+h,x,v), \\ &\delta_{h,k}f \coloneqq \delta_{h,k-1}\circ\delta_h f, \qquad\qquad \widehat{g}_k \coloneqq \frac{\delta_{h,k}g}{|h|^k}. \end{aligned} \tag{7.20}$$

容易验证， f_h 也是一个弱解。我们假设

$$\sup_{z_0\in\mathcal{H}_{1,\infty}} \langle v_0\rangle^M \sum_{i=0}^{k} \left\|\partial_t^i \mathcal{M}\right\|_{C^{\frac{7}{6}}(\gamma_-\cap\mathcal{Q}_{32r_0}(z_0))} \leq 1 \tag{7.21}$$

对于某个充分大的常数 M。现在固定 $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$。我们将证明，对于任意的 $z_0 \in \mathcal{H}_{1,\infty}$，$r \in (0, r_0]$，$\epsilon \in (0,1)$，以及 $|h| \leq 2^{-100k} =: h_0$，若 M 充分大，则有

$$\|\widehat{g}_k - a_r\|_{L^\infty(\gamma_-\cap\mathcal{Q}_r(z_0))} \leq c r^{\frac{7}{6}} \langle v_0\rangle^{c_k} D_k, \tag{7.22}$$

其中 $c_k = c_k(n,k,p)$ 和 $c = c(n,\Lambda,k,C_k)$，

$$\begin{aligned} a_r &\coloneqq \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{w_n<-16r-r_{w'}} \frac{\delta_{h,k}f}{|h|^k}(t_0,x_0',0,w',w_n)(w_n)_-\,dw_n\,dw', \\ C_k &\coloneqq \sup_{z_0\in\mathcal{H}_{\frac{3}{2},\infty}} \|A\|_{C^{3k+1}(\mathcal{H}_{32r_0}(z_0))} + \frac{1}{\langle v_0\rangle^2}\|B\|_{C^{3k}(\mathcal{H}_{32r_0}(z_0))}, \\ D_k &\coloneqq \|\langle\cdot\rangle^{c_k} f(t,x,\cdot)\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{2,\infty})} + \|\langle\cdot\rangle^{c_k} F(t,x,\cdot)\|_{C^{3k}(\mathcal{H}_{2,\infty})} \end{aligned} \tag{7.23}$$

其中 $r_{w'} \coloneqq 16(r^2|w'-v_0'|)^{\frac{1}{3}}$，，空间 $\|\langle\cdot\rangle^{c_k}F(t,x,\cdot)\|_{C^{3k}}$定义见 (7.5)。为得到 (7.26)，需要选取 $r_{w'}$；并且注意，对任意 $j \leq k$ 和 $\epsilon \in [0,1]$，

$$\|\partial_t^j f\|_{C^\epsilon(\mathcal{H}_r(z_0))} \leq c(k,j,\epsilon)\|f\|_{C^{3k+\epsilon}(\mathcal{H}_r(z_0))}. \tag{7.24}$$

请注意，一旦证明了 (7.22)，便可轻松完成证明（见步骤 4）。现在我们将 (7.22) 的证明分为三个步骤。

步骤 1. 边界数据的高阶差商估计。首先，我们将证明

$$
\begin{aligned}
&|h|^k\|\widehat{g}_k - a_r\|_{L^\infty(\gamma_-\cap\mathcal{Q}_r(z_0))}\\
&\le cr^{\frac{4}{3}}\langle v_0\rangle\|\langle\cdot\rangle^4\delta_{h,k}f(t,x',0,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\\
&\quad + cr^{\frac{2(2-\epsilon)}{3}}\langle v_0\rangle \sup_{(t,x')\in\mathbf{B}_{\frac{3}{2}}} \underbrace{\int_{\frac{1}{\langle w\rangle^p}\le|w_n|}\int_{w_n<-64r}\langle w\rangle^5[\delta_{h,k}f]_{C^{2-\epsilon}(\mathcal{H}_{\frac{1}{64\langle w\rangle^p}}(t,x',0,w))}(w_n)_-\,dw}_{=:L_1}\\
&\quad + cr^{\frac{2(2-\epsilon)}{3}}\langle v_0\rangle \sup_{(t,x')\in\mathbf{B}_{\frac{3}{2}}} \underbrace{\int_{\frac{1}{\langle w\rangle^p}\ge|w_n|}\int_{w_n<-64r}\langle w\rangle^5[\delta_{h,k}f]_{C^{2-\epsilon}(\mathcal{H}_{\frac{|w_n|}{64}}(t,x',0,w))}(w_n)_-\,dw}_{=:L_2},
\end{aligned}
\tag{7.25}
$$

其中 $\mathbf{B}_{3\,2}\underline{:}=I_{(\frac{3}{2})^2}\times B'_{\underline{(3\,2)^3}}$ 以及 $c=c(n,\epsilon,p)$。令 $(t,x',0,v)\in\gamma_-\cap\mathcal{H}_r(z_0)\subset\mathcal{H}_{1,\,\infty}$ 以观察 ve

$$
\begin{aligned}
|h|^k|\widehat{g}_k(t,x',0,v)-a_r| &\le \left|\int_{w_n<-64r-r_{w'}}\left(\delta_{h,k}f(t,x',0,w',w_n)-\delta_{h,k}f(t_0,x_0',0,w',w_n)\right)(w_n)_-\,dw\right|\\
&\quad+\left|\int_{0>w_n>-64r-r_{w'}}\delta_{h,k}f(t,x',0,w',w_n)(w_n)_-\,dw\right| =: J_1+J_2.
\end{aligned}
$$

为了估计 J_1，我们考察由以下公式定义的项 J

$$
J := |\delta_{h,k}f(t,x',0,w',w_n)-\delta_{h,k}f(t_0,x_0',0,w',w_n)|.
$$

现在分两种情况讨论：当 $\mathcal{H}_{\frac{|w_n|}{2}}(t_0,x_0',0,w)\not\subset\mathcal{H}_{\frac{3}{2},\,\infty}$ 且 $|w_n|\ge\frac{1}{\sqrt{\langle w\rangle}}$ 时，我们希望在圆柱体 $\mathcal{H}_r(z_1)$ 上得到 H¨older 估计，其中 $r\lesssim\langle v_1\rangle^{-p}$。

- 假设 $\frac{1}{\langle w\rangle^p}\ge|w_n|$，并注意到

$$
\begin{aligned}
J &\le |\delta_{h,k}f(t,x',0,w',w_n)-\delta_{h,k}f(t_0,x'+(t_0-t)w',(t_0-t)w_n,w',w_n)|\\
&\quad+|\delta_{h,k}f(t_0,x'+(t_0-t)w',(t_0-t)w_n,w',w_n)-\delta_{h,k}f(t_0,x_0',0,w',w_n)|.
\end{aligned}
$$

根据 $r_{w'}=16(r^2|w'-v_0'|)^{\frac{1}{3}}$ 和 $\frac{1}{\langle w\rangle^p}\ge|w_n|$ 的选取，我们有

$$
\begin{aligned}
&(t_0,x'+(t_0-t)w',(t_0-t)w_n,w)\in\mathcal{H}_{R_0}(t,x',0,w)\subset\mathcal{H}_{\frac{3}{2},\infty},\\
&(t_0,x'+(t_0-t)w',(t_0-t)w_n,w)\in\mathcal{H}_{R_0}(t_0,x_0',0,w)\subset\mathcal{H}_{\frac{3}{2},\infty},
\end{aligned}
\tag{7.26}
$$

其中 $R_0:=\frac{|w_n|}{64}$。因此，我们估计 J 为

$$
\begin{aligned}
J &\le c(r^{2-\epsilon}+|x'-x_0'+(t_0-t)w'|^{\frac{2-\epsilon}{3}}+|(t_0-t)w_n|^{\frac{2-\epsilon}{3}})\sup_{(t,x')\in\mathbf{B}_{\frac{3}{2}}}[\delta_{h,k}f]_{C^{2-\epsilon}(\mathcal{H}_{R_0}(t,x',0,w))}\\
&\le cr^{\frac{2(2-\epsilon)}{3}}\langle v_0\rangle\langle w\rangle\sup_{(t,x')\in\mathbf{B}_{\frac{3}{2}}}[\delta_{h,k}f]_{C^{2-\epsilon}(\mathcal{H}_{R_0}(t,x',0,w))},
\end{aligned}
\tag{7.27}
$$

其中我们还利用了 $(t,x',0,v)\in\mathcal{H}_r(z_0)$ 这一事实，从而推出

$$
\begin{aligned}
|x'-(x_0'+(t_0-t)w')| &\le |x'-x_0'+(t_0-t)v_0'|+|(t_0-t)(v_0'-w')| \le r^3+r^2(\langle v_0\rangle+\langle w\rangle)\\
&\le cr^2\langle v_0\rangle\langle w\rangle,
\end{aligned}
$$

- 假设$\frac{1}{\langle w\rangle^p} \le |w_n|$。于是我们写出

$$J \le |\delta_{h,\ k} f(t, x', 0, w', w_n) - \delta_{h,\ k} f(t_0, x', 0, w', w_n)| + |\delta_{h,\ k} f(t_0, x', 0, w', w_n) - \delta_{h,\ k} f(t_0, x'_0, 0, w', w_n)| =: J_{1,\ 1} + J_{1,\ 2}。$$

我们可以假设 $t_0 < t$。现在令我们选择 $R_0 := \frac{1}{64\langle w\rangle^p}$ 并定义一个序列 $t_i := t_0 + (16)^2 (i-1)(R_0)^5$，以便证明

$$(R_0)^3 > (16)^2 (R_0)^5 \langle w\rangle \quad \text{and} \quad R_0^2 \langle w\rangle \le \frac{1}{64}.$$

因此，存在一个正整数 m，使得 $t \in (t_{m-1}, t_m]$ 并且

$$(t_{i-1}, x', 0, w', w_n) \in \mathcal{H}_{R_0}(t_i, x', 0, w) \subset \mathcal{H}_{\frac{3}{2},\infty}, \quad (16)^2 (m-1)(R_0)^5 < |t - t_0|.$$

利用这些结果，我们可以估计 $J_{1,\ 1}$ 如下

$$\begin{aligned}
J_{1,1} &\le \sum_{i=1}^{m} |\delta_{h,k} f(t_i, x', 0, w) - \delta_{h,k} f(t_{i-1}, x', 0, w)| \\
&\le c \sum_{i=1}^{m} \left(|t_i - t_{i-1}|^{\frac{2-\epsilon}{2}} + |(t_i - t_{i-1}) w|^{\frac{2-\epsilon}{3}} \right) [\delta_{h,k} f]_{C^{2-\epsilon}(\mathcal{H}_{R_0}(t_i, x', 0, w))} \\
&\le c \sum_{i=1}^{m} |r^2 \langle w\rangle|^{\frac{2(1-\epsilon)}{3}} [\delta_{h,k} f]_{C^{2-\epsilon}(\mathcal{H}_{R_0}(t_i, x', 0, w))} \\
&\le cm \sup_{i \in [1,m]} r^{\frac{2(2-\epsilon)}{3}} \langle w\rangle^{\frac{2}{3}} [\delta_{h,k} f]_{C^{2-\epsilon}(\mathcal{H}_{R_0}(t_i, x', 0, w))} \\
&\le c \sup_{(t,x') \in \mathbf{B}_{\frac{3}{2}}} r^{\frac{2(2-\epsilon)}{3}} \langle w\rangle^{1+5p} [\delta_{h,k} f]_{C^{2-\epsilon}(\mathcal{H}_{R_0}(t, x', 0, w))}.
\end{aligned}$$

类似地，通过选择 $x'_{0,\ i} = x'_0 + (i-1)(R_0)^3$,，我们估计 $J_{2,\ 2}$ 如下

$$\begin{aligned}
J_{1,2} &\le \sum_{i=1}^{m} |\delta_{h,k} f(t_0, x'_i, 0, w) - \delta_{h,k} f(t_0, x'_{i-1}, 0, w)| \\
&\le c \sum_{i=1}^{m} |x' - x'_0|^{\frac{2(1-\epsilon)}{3}} [\delta_{h,k} f]_{C^{2-\epsilon}(\mathcal{H}_{R_0}(t_0, x'_{i-1}, 0, w))} \\
&\le c r^{\frac{2(2-\epsilon)}{3}} \langle v_0\rangle^{\frac{2}{3}} \langle w\rangle^{3p} \sup_{(t,x') \in \mathbf{B}_{\frac{3}{2}}} [\delta_{h,k} f]_{C^{2-\epsilon}(\mathcal{H}_{R_0}(t, x', 0, w))},
\end{aligned}$$

其中，m 是满足 $x' \in [x'_{m-1}, x'_m]$ 的正整数，并且我们利用了如下事实：$|x' - x'_0| \le r^3 + |(t - t_0) v'_0|$ 由 $(t,\ x',\ 0,\ v) \in \mathcal{H}_r(z_0)$。结合估计式$J_{1,\ 1}$和$J_{1,\ 2}$可得

$$J \le c r^{\frac{2(2-\epsilon)}{3}} \langle v_0\rangle \langle w\rangle^{10p} \sup_{(t,x') \in \mathbf{B}_{\frac{3}{2}}} [\delta_{h,k} f]_{C^{2-\epsilon}(\mathcal{H}_{R_0}(t, x', 0, w))}. \tag{7.28}$$

接下来，我们估计 J_1，得到

$$\begin{aligned}
J_2 &\le \int \int_{-16r - r_{w'}}^{0} \sup_{w_n < 0} \left| \delta_{h,k} f(t, x', 0, w', w_n) \right| |w_n| \, dw_n \, dw' \\
&\le c r^{\frac{4}{3}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \sup_{w_n < 0} \left| \delta_{h,k} f(t, x', 0, w', w_n) \right| (1 + |w' - v'_0|^{\frac{2}{3}}) \, dw'
\end{aligned}$$

$$\le cr^{\frac{4}{3}}\langle v_0'\rangle^{\frac{2}{3}}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\sup_{w_n<0}\left|\delta_{h,k}f(t,x',0,w',w_n)\right|\langle w'\rangle^4\langle w'\rangle^{-\frac{10}{3}}\,dw'$$
$$\le cr^{\frac{4}{3}}\langle v_0\rangle\|\langle\cdot\rangle^4\delta_{h,k}f(t,x',0,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

将前面的估计与 (7.27) 和 (7.28) 结合，即得所需的 (7.25)。

步骤 2. 解的高阶差商的正则性。对 (7.2) 应用差商算子后，我们对任意 $l\le k$ 得到:

$$\begin{cases}(\partial_t+v\cdot\nabla_x)\delta_{h,l}f-\operatorname{div}_v(A_{lh}\nabla_v\delta_{h,l}f)=B_{lh}\cdot\nabla_v\delta_{h,l}f+\delta_{h,l}F+G_l & \text{in } \{x_n>0\}\cap\mathcal{H}_{\frac{7}{4},\infty},\\ \delta_{h,l}f=\delta_{h,l}\mathcal{N}f & \text{in } \gamma_-,\end{cases}\tag{7.29}$$

其中

$$G_l:=\sum_{i=0}^{l}\operatorname{div}_v(\delta_{h,l-i}A_{ih}\nabla_v\delta_{h,l}f)+\delta_{h,l-i}B_{ih}\cdot\nabla_v\delta_{h,i}f.$$

于是，由引理 7.3，对任意 $\mathcal{H}_{2\rho}(z_1)\cap\gamma_0=\emptyset$，若 $\rho\le r_1=\frac{\langle v_1\rangle^p}{16}$, $x_{1,n}=0$，且 $v_{1,n}<0$，以及 $l\in\{0,\dots,k\}$，我们有:

$$\begin{aligned}&\rho^{\epsilon-1}\|\nabla_v\delta_{h,l}f\|_{L^\infty(\mathcal{H}_\rho(z_1))}+[\delta_{h,l}f]_{C^{2-\epsilon}(\mathcal{H}_\rho(z_1))}\\&\le c\langle v_1\rangle^2(\rho^{-2+\epsilon}\|\delta_{h,l}f\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{2\rho}(z_1))}+\|\delta_{h,l}F\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{2\rho}(z_1))})\\&\quad+c\langle v_1\rangle^2\sum_{i=0}^{l-1}(\|\delta_{h,l-i}A_{ih}\|_{C^1(\mathcal{H}_{2\rho}(z_1))}+\|\delta_{h,l-i}B_{ih}\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{2\rho}(z_1))})\|\nabla_v\delta_{h,i}f\|_{C^{1-\epsilon}(\mathcal{H}_{2\rho}(z_1))},\end{aligned}$$

其中 $c=c(n,\epsilon,\|A_{lh}\|_{C^{1-\epsilon}(\mathcal{H}_{2\rho}(z_1))}\ c_B)$。因此，将此估计迭代 $l-1$ 次，我们可推出

$$\left[\frac{\delta_{h,l}f}{|h|^l}\right]_{C^{2-\epsilon}(\mathcal{H}_\rho(z_1))}\le c\langle v_1\rangle^{4(l+1)}\sum_{i=0}^{l}\left(\rho^{-2+\epsilon}\left\|\frac{\delta_{h,i}f}{|h|^i}\right\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{2\rho}(z_1))}+\left\|\frac{\delta_{h,i}F}{|h|^i}\right\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{2\rho}(z_1))}\right),\tag{7.30}$$

其中 $c=c(n,l,\epsilon,c_B,C_l)$，常数 C_l 由 (7.23) 确定。我们将在 (7.25) 中对项 L_1,L_2 使用这一估计。

步骤 3. 归纳法。现在，基于归纳论证，我们将证明：对于任意 $j\in\{0,1,\dots,k\}$和 $\delta\in(0,\frac{1}{2})$，存在常数 $N_j=N_j(n,j,p)$，使得对于任意 $z_2\in\mathcal{H}_{\frac{3}{2},\infty}$和 $\rho\le r_2=\frac{1}{64\langle v_2\rangle^p}$，

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\delta_{h,j}f}{|h|^j}\right]_{C^{\frac{1}{2}-\delta}(\mathcal{H}_{2\rho}(z_2))}+\left\|\frac{\delta_{h,j}f}{|h|^j}\right\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{2\rho}(z_2))}\\&\le c\langle v_2\rangle^{N_j}\left(\|f\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{4r_2}(t,x_2,v_2))}+\|F\|_{C^{3j}(\mathcal{H}_{4r_2}(t,x_2,v_2))}+D_j\left\|\mathcal{M}\right\|_{C^{3_j+\frac{7}{6}}(\gamma_-\cap\mathcal{Q}_{4r_2}(t,x_2,v_2))}\right),\end{aligned}\tag{7.31}$$

其中 $c=c(n,\delta,j,C_j,p)$，且 C_j,D_j 由 (7.23) 确定，前提是 (7.21) 中给出的常数 M 足够大；该条件将在 (7.34) 和 (7.35) 中使用。注意，为方便起见，我们只取 $\frac{7}{6}\in(1,\frac{4}{3})$。一旦证明了 (7.31)，我们就可以用它来估计 – (7.25) 中的第一项。

显然，对于 $j=0$，结合 (7.30) 和 (7.25)，当 $A\in C^{2(\epsilon-\frac{1}{2})}$对于$\epsilon>\frac{1}{2}$时，我们有$g\in C^{\frac{4\epsilon}{3}-\delta}$对于任意 $\delta>0$。因此，我们得到 (7.6)，然后应用定理 6.2 得到满足 $j=0$ 的 (7.31)。现在，在假设对任意 $j=0,\dots,l$，(7.31) 均成立的情况下，我们将证明满足 $j=l+1$ 的 (7.31)。

步骤 3-1。对于远离 γ_0 的 $\frac{\delta_{h,\ l+1}f}{|h|^{l+\alpha}}$，其更高正则性适用于 $\alpha<\frac{1}{6}$。固定 $\alpha<\frac{1}{6}$。然后，利用 (7.31)、(A.2) 和 (A.3)，我们推导出对任意 $z_2\in\mathcal{H}_{1,\infty}$

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\delta_{h,l+1}f}{|h|^{l+\alpha}}\right\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{2r_2}(z_2))}&\le c\langle v_2\rangle^{c_l}\left(\|f\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{4r_2}(t,x_2,v_2))}+\|F\|_{C^{3l}(\mathcal{H}_{4r_2}(t,x_2,v_2))}\right)\\&\quad+cD_l\langle v_2\rangle^{c_l}\|\mathcal{M}\|_{C^{3l+\frac{7}{6}}(\gamma_-\cap\mathcal{Q}_{4r_2}(t,x_2,v_2))},\end{aligned}\tag{7.32}$$

其中 $c=c(n,\alpha,l,C_l,p)$，$c_l=c_l(n,l,p)$。

利用这一点以及将 $\frac{\delta_{h,\ l}f}{|h|^l}$ 替换为 $\frac{\delta_{h,\ l+1}f}{|h|^{l+\alpha}}$ 后的 (7.30)，我们得到，对于任意 $z_1\in\mathcal{H}_{1,\infty}$，若 $\mathcal{H}_{2\rho}(z_1)\cap\gamma_0=\emptyset$ 且 $\rho\le r_1$, $x_{1,n}=0$ 且 $v_{1,n}<0$,

$$\begin{aligned}\left[\frac{\delta_{h,l+1}f}{|h|^{l+\alpha}}\right]_{C^{2-\epsilon}(\mathcal{H}_\rho(z_1))}&\le c\rho^{-2+\epsilon}\langle v_1\rangle^{c_l}\left(\|f\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{4r_1}(t,x_1,v_1))}+\|F\|_{C^{3(l+1)}(\mathcal{H}_{4r_1}(t,x_1,v_1))}\right)\\&\quad+c\rho^{-2+\epsilon}D_l\langle v_1\rangle^{c_l}\|\mathcal{M}\|_{C^{3l+\frac{7}{6}}(\gamma_-\cap\mathcal{Q}_{4r_1}(t,x_1,v_1))},\end{aligned}\tag{7.33}$$

其中 $c=c(n,\alpha,l,\epsilon,c_B,C_l,p)$ 且 $r_1=\frac{\langle v_1\rangle^{-p}}{64}$。事实上，我们还使用了一些覆盖论证，得到了 (7.33) 右端项中所给圆柱的半径 $4r_1$。现在将 z_1和 ρ 分别替换为 $(t,x',0,w)$ 和 $\frac{1}{64\langle w\rangle^p}=:\widetilde{r}$，并代入 L_1（其中 $k=l+1$ 由 (7.25) 给出），得到

$$\begin{aligned}\frac{L_1}{|h|^{l+\alpha}}&\le\int_{\frac{1}{\sqrt{w}}\le|w_n|}\int_{w_n<-64r}\langle w\rangle^{c_l+12p}\left(\|f\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{4\widetilde{r}}(\widetilde{z}))}+\|F\|_{C^{3(l+1)}(\mathcal{H}_{4\widetilde{r}}(\widetilde{z}))}\right)dw\\&\quad+cD_l\int_{\frac{1}{\sqrt{w}}\le|w_n|}\int_{w_n<-64r}\langle w\rangle^{c_l+12p}\|\mathcal{M}\|_{C^{3l+\frac{7}{6}}(\gamma_-\cap\mathcal{Q}_{4\widetilde{r}}(\widetilde{z}))}dw\\&\le cD_{l+1},\end{aligned}\tag{7.34}$$

其中 $\widetilde{z}=(t,x',0,w)$，我们选取足够大的 $M=M(n,l,p)$，回顾 (7.21) 中给出的 D_l 的定义，并使用 (7.23)。类似地，将 (7.33) 中的 ρ 和 z_1 分别替换为 $\frac{|w_n|}{64}$ 和 $\widetilde{z}:=(t,x',0,w)$，我们估计 $\frac{L_2}{|h|^{l+\alpha}}$ 得

$$\begin{aligned}\frac{L_2}{|h|^{l+\alpha}}&\le\int_{\frac{1}{\sqrt{w}}\ge|w_n|}\int_{w_n<-64r}\langle w\rangle^{10p+c_l}\left(\|f\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{4\widetilde{r}}(\widetilde{z}))}+\|F\|_{C^{3(l+1)}(\mathcal{H}_{4\widetilde{r}}(\widetilde{z}))}\right)(w_n)_-^{-1+\epsilon}dw\\&\quad+cD_l\int_{\frac{1}{\sqrt{w}}\ge|w_n|}\int_{w_n<-64r}\langle w\rangle^{10p+c_l}\|\mathcal{M}\|_{C^{3l+\frac{7}{6}}(\gamma_-\cap\mathcal{Q}_{4\widetilde{r}}(\widetilde{z}))}(w_n)_-^{-1+\epsilon}dw\\&\le cD_{l+1}\int_{w_n<-64r}\langle w'\rangle^{-2}(w_n)_-^{-1-\epsilon}\,dw_n\,dw'\\&\le cD_{l+1}r^{-\epsilon},\end{aligned}\tag{7.35}$$

其中 $c=c(n,\alpha,l,\epsilon,c_B,C_l,p,\epsilon)$。由于 (7.34) 和 (7.35) 对任意 $(t,x')\in\mathrm{B}_2^3$，均成立，结合这些估计以及带有 $k=l+1$ 和 $\epsilon=\frac{1}{10}$ 的 (7.32) 与 (7.25)，得到

$$\left\|\frac{\delta_{h,l+1}g}{|h|^{l+\alpha}}\right\|_{C^{\frac{7}{6}}(\gamma_-\cap\mathcal{Q}_{r_0}(z_0))}\le cD_{l+1},\tag{7.36}$$

其中 $c=c(n,\alpha,l,\epsilon,c_B,C_l,p)$。注意，通过归纳，我们还可得到

$$\left\|\frac{\delta_{h,j}g}{|h|^j}\right\|_{C^{\frac{7}{6}}(\gamma_-\cap\mathcal{Q}_{r_0}(z_0))}\le D_j\tag{7.37}$$

对于任意 $j \in \{0, \dots, l\}$。

步骤 3-2。$\frac{\delta_{h,\ \iota} f}{|h|^l}$ 在 γ_0附近的梯度爆炸。本步骤的结果是处理 (7.29) 中以散度形式表示的源项 G_l 所必需的。我们结合 γ_0 附近的 $C^{1/2-\delta}$ 估计与远离 γ_0处的高阶估计。首先，利用引理 7.3，将 $\mathcal{H}_{2\rho}(z_1) \cap \gamma_0 = \emptyset$ 与 $\rho \le 1$结合，并沿用 (7.30) 中的相同迭代论证，将$\delta_{h,l} f$ 替换为$\delta_{h,l} f - \delta_{h,l} f(z_1)$，可得

$$
\begin{aligned}
&\rho^{-\frac{1}{6}} \left\| \frac{\nabla_v \delta_{h,l} f}{|h|^l} \right\|_{L^\infty(\mathcal{H}_\rho(z_1))} + \left[\frac{\nabla_v \delta_{h,l} f}{|h|^l} \right]_{C^{\frac{1}{6}}(\mathcal{H}_\rho(z_1))} \\
&\le c\langle v_1 \rangle^{4(l+1)} \sum_{i=0}^{l} \rho^{-\frac{7}{6}} \left\| \frac{\delta_{h,i} f - \delta_{h,i} f(z_1)}{|h|^i} \right\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{2\rho}(z_1))} \\
&\quad + c\langle v_1 \rangle^{4(l+1)} \sum_{i=0}^{l} \left(\left\| \frac{\delta_{h,i} F}{|h|^i} \right\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{2\rho}(z_1))} + \left[\frac{\delta_{h,i} \mathcal{N} f}{|h|^i} \right]_{C^{\frac{7}{6}}(\mathcal{H}_{2\rho}(z_1))} \right),
\end{aligned}
$$

其中 $c = c(n, l, c_B, C_l)$。现在代入 (7.31) 中给出的$\frac{\delta_{h,i} f_{(l-i)h}}{|h|^i}$的 $C^{\frac{1}{2}-\delta}$估计，并将$j \in \{0, \dots, l\}$ 和 z_2 替换为 z_1，再利用 (7.37)，可对任意 $\delta > 0$推出：

$$
\begin{aligned}
\left\| \frac{\delta_{h,l} \nabla_v f}{|h|^l} \right\|_{L^\infty(\mathcal{H}_\rho(z_1))} &\le c\langle v_1 \rangle^{c_l} \rho^{-\frac{1}{2}-\delta} \left(\|f\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{4r_1}(t,x_1,v_1))} + \|F\|_{C^{3l}(\mathcal{H}_{4r_1}(t,x_1,v_1))} \right) \\
&\quad + cD_l \langle v_1 \rangle^{c_l} \rho^{-\frac{1}{2}-\delta} \|\mathcal{M}\|_{C^{3l+\frac{7}{6}}(\gamma_- \cap \mathcal{Q}_{4r_1}(t,x_1,v_1))},
\end{aligned} \tag{7.38}
$$

其中 $c_l = c_l(n, l, p)$ 和 $c = c(n, \alpha, \delta, l, c_B, C_l, p)$。

步骤 3-3. $C^{\frac{1}{2}-\delta}$ 的 $\frac{\delta_{h,\ l+1} f}{|h|^{l+\alpha}}$ 估计直到 γ_0。现在我们固定 $z_2 \in \gamma_0$ 和 $\widehat{r}_2 := \frac{\langle v_2 \rangle^{-p}}{64}(1 - 2^{-\frac{1}{p}})$，以证明对于任意 $z_1 \in \mathcal{H}_{\widehat{r}_2}(z_2)$，$r_1 = \frac{\langle v_1 \rangle^{-p}}{64} \le 2r_2 = \frac{\langle v_2 \rangle^{-p}}{32}$，这意味着 $\mathcal{H}_{4r_1}(z_1) \subset \mathcal{H}_{32r_2}(z_2)$。首先，我们写出 $\widetilde{G} := \sum_{i=0}^{l} \left(\frac{\delta_{h,l-i+1} A}{|h|^{l-i+\alpha}} \frac{\delta_{h,i} \nabla_v f_{(l+1-i)h}}{|h|^i} \right)$，以便看到

$$
\begin{aligned}
\sup_{(t,x',v') \in \mathcal{H}'_{\widehat{r}_2}(z_2')} \|\widetilde{G}\|_{L^{8-\delta_0}(H_{\widehat{r}_2})} &\le c \int_{H_{\widehat{r}_2}} \sup_{z_1 \in \mathcal{H}_{\widehat{r}_2}(z_2)} \sum_{i=0}^{l} \left\| \frac{\delta_{h,l} \nabla_v f}{|h|^l} \right\|_{L^\infty(\mathcal{H}_\rho(z_1))} dx_{1,n}\, dv_{1,n} \\
&\le c \int_{H_r} \max\{|x_{1,n}|^{\frac{1}{3}}, |v_{1,n}|\}^{(-\frac{1}{2}-\sigma)(8-\delta_0)} \\
&\quad \times \Bigg(\langle v_2 \rangle^{c_l} \left(\|f\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{32r_2}(z_2))} + \|F\|_{C^{3l}(\mathcal{H}_{32r_2}(z_2))} \right) \\
&\qquad + cD_l \langle v_2 \rangle^{c_l} \|\mathcal{M}\|_{C^{3l+\frac{7}{6}}(\gamma_- \cap \mathcal{Q}_{32r_2}(z_2))} \Bigg) dx_n dv_n,
\end{aligned}
$$

其中 $c_l = c_l(n, l, p)$、 $c = c(n, \alpha, \sigma, l, c_B, C_l, p, \delta_0)$，并且我们使用了 (7.38)，其中 $\delta = \sigma$和 $\rho = 1 \wedge \max\{|x_{2,n}|^{\frac{1}{3}}, |v_{2,n}|\}$。接着注意，对于任意小的 δ_0，存在一个小常数 $\sigma = \sigma(\delta_0)$，使得 $(\frac{1}{2} + \sigma)(8 - \delta_0) < 4$，因此我们有

$$
\begin{aligned}
\sup_{(t,x',v') \in \mathcal{H}'_{\widehat{r}_2}(z_2')} \|\widetilde{G}\|_{L^{8-\delta_0}(H_{\widehat{r}_2})} &\le c\langle v_2 \rangle^{c_l} \left(\|f\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{32r_2}(z_2))} + \|F\|_{C^{3l}(\mathcal{H}_{32r_2}(z_2))} \right) \\
&\quad + D_l \langle v_1 \rangle^{c_l} \|\mathcal{M}\|_{C^{3l+\frac{7}{6}}(\gamma_- \cap \mathcal{Q}_{32r_2}(z_2))},
\end{aligned}
$$

~其中 $c_l = c_l(n,l,p)$、 $c = c(n,\alpha,\sigma,l,c_B,C_l,p,\delta_0)$。类似地，对于 $F := \delta_{h,} \frac{l+1F}{|h|^{l+\alpha}} + \sum_{i=0}^{l} \delta_{h,} \frac{l-i+1B}{|h|^{l-i+\alpha}} \cdot \delta_{h,} \overline{{}_i\nabla_v f_{(k-i)h}}$ ，我们得到相同的估计。因此，我们可以结合 (7.38) 和 (7.36)，对 $f = \frac{\delta_{h,} l+1f}{|h|^{l+\alpha}}$、 $G = \widetilde{G}$ 以及 $\sim F = F$ 应用引理 7.5，从而推出对于任意 $z_2 \in \gamma_0$ 和 $\rho \le r_2$，我们有

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\delta_{h,l+1}f}{|h|^{l+\alpha}}\right]_{C^{\frac{1}{2}-\delta}(\mathcal{H}_{2\rho}(z_2))} + \left\|\frac{\delta_{h,l+1}f}{|h|^{l+\alpha}}\right\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{2\rho}(z_2))} \\ &\le c\langle v_2\rangle^{c_l}\left(\|f\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{32r_2}(z_2))} + \|F\|_{C^{3(l+1)}(\mathcal{H}_{32r_2}(z_2))} + D_{l+1}\|\mathcal{M}\|_{C^{3(l+1)+\frac{7}{6}}(\gamma_-\cap\mathcal{Q}_{32r_2}(t,x_2,v_2))}\right), \end{aligned} \tag{7.39}$$

其中 $c_l = c_l(n,l,p)$ 和 $c = c(n,\alpha,\sigma,l,\|A\|_{C^1(\mathcal{H}_{2\rho}(z_1))}\ c_B,C_l)$，只要 (7.21) 中给出的 $M = M(n,l,p)$ 足够大即可（这是 (7.34) 和 (7.35) 所需要的）。此外，当 z_2 远离 γ_0时，由 (7.38) 取 $\rho = r_2$，我们注意到 F 和 G 有界。现在根据注 7.4，我们得到与 (7.39) 相同的估计。因此，我们证明了对任意 $z_2 \in \mathcal{H}_{2,\ \infty}$，(7.39) 均成立。

因此，取 $\delta = \frac{1}{2} - 3\alpha$ 并使用一些覆盖论证来缩小右端项中给出的圆柱的半径，对于任意 $z_2 \in \mathcal{H}_{1,\ \infty}$，

$$\begin{aligned} \left\|\frac{\delta_{h,l+1}f}{|h|^{l+2\alpha}}\right\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{2\rho}(z_2))} &\le c\langle v_1\rangle^{c_l}\left(\|f\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{4r_2}(t,x_2,v_2))} + \|F\|_{C^{3(l+1)}(\mathcal{H}_{4r_2}(t,x_2,v_2))}\right) \\ &\quad + cD_{l+1}\langle v_2\rangle^{c_l}\|\mathcal{M}\|_{C^{3(l+1)+\frac{7}{6}}(\gamma_-\cap\mathcal{Q}_{4r_2}(t,x_2,v_2))}. \end{aligned}$$

该估计是 (7.32) 的高阶版本。由于 $\alpha \in (0, \frac{1}{6})$ 是任意的，我们可以从将 α 替换为 2α 后的 (7.32) 出发，重复前面的过程六次，最终推导出带有 $j = l+1$ 的 (7.31)，这通过归纳法意味着任意 $j \in \{0,\dots,k\}$ 都满足 (7.31)。

步骤 4。结论。将 (7.31) 与 $j = k$、(7.30) 和 (7.25) 结合，立即得到 (7.22)。然后，根据 (7.22)，我们有

$$\|\partial_t^k g\|_{C^{\frac{7}{6}}(\gamma_-\cap\mathcal{Q}_{r_0}(z_0))} \le c\langle v_0\rangle^{c_k} D_k,$$

其中 $c = c(n,\Lambda,k,C_k)$ 且 $c_k = c_k(n,k,p)$。另一方面，考虑用 $i \in \{1,\dots,k-1\}$ 替代 $\delta_h g(z) = g(t+h,x,v) - g(z)$ 后的 $\delta_h^{x_i} g(z) = g(t,x+he_i,v) - g(z)$，并注意到将 ∂_t 替换为 ∂_{x_i} 后的 (7.24) 成立，我们也可以推导出将 δ_h 替换为 $\delta_h^{x_i}$ 后的 (7.22)，因为 $\delta_h^{x_i} f$ 满足将 $\delta_{h、k}$ 分别替换为 $\delta_h^{x_i}$、$_k$ 后的方程 (7.29)。因此，对于任意满足 $i+j \le k$ 的 i、 j，我们有

$$\begin{aligned} \|\partial_x^i\partial_t^j\mathcal{N}f\|_{C^{\frac{7}{6}}(\gamma_-\cap\mathcal{Q}_{r_0}(z_0))} &\le c\|\mathcal{M}\|_{C^{3k+\frac{7}{6}}(\gamma_-\cap\mathcal{Q}_{r_0}(z_0))}\langle v_0\rangle^{c_k}\Big(\|\langle\cdot\rangle^{c_k} f(t,x,\cdot)\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{2,\infty})} \\ &\quad + \|\langle\cdot\rangle^{c_k} F(t,x,\cdot)\|_{C^{3k}(\mathcal{H}_{2,\infty})}\Big), \end{aligned} \tag{7.40}$$

其中 $c = c(n,\Lambda,k,c_B)$ 和 $c_k = c_k(n,k,p)$，只要 $\langle v_0\rangle^M\|\mathcal{M}\|_{C^{3k}(\gamma_-\cap\mathcal{Q}_{r_0}(z_0))} \le 1$ 对足够大的 $M = M(n,k,p)$ 以及 $\|B\|_{C^{3k}(\mathcal{H}_{r_0}(z_0))} \le c_B\langle v_0\rangle^2$ 成立。因此，由 (A.1) 可直接验证，当 $k = 2\lambda$ 时，

$$[\mathcal{N}f]_{C^{\lambda,\epsilon}(\gamma_-\cap\mathcal{Q}_{r_0}(z_0))} \le c\sum_{i+j\le 2\lambda}\|\partial_x^i\partial_t^j\mathcal{N}f\|_{C^{\frac{7}{6}}(\gamma_-\cap\mathcal{Q}_{r_0}(z_0))}. \tag{7.41}$$

因此，结合 (7.40) 和 (7.41) 得到 (7.7)，证明至此完成。请注意，我们可以稍微改进这里的 k 取值，但为了使证明更易读，我们决定采用一个次优框架。□

定理 7.1 的证明。由于我们已经证明了带有 $\mathcal{N}f$ 流入的边界数据的正则性，我们应用定理 6.2 和 [RW25 引理 4.4]，并结合命题 7.2，推得所需结果。□

本节最后，我们将证明定理 7.1 中得到的 $C^{\frac{1}{2}}$ 正则性是最优的。对于规范选择 $\mathcal{M}(v) = 2e^{-|v|^2}$（即适当归一化的边界麦克斯韦分布）[5]，，我们在一维情形下给出一个反例；不过，我们的构造也适用于更一般的 $\mathcal{M}$ 选择。

例 7.7. 设 $n = 1$。取一个截断函数 $\psi = \psi(v) \in C_c^\infty(B_4)$，使得 $\psi \equiv 1$ 属于 $(-2, 2)$。那么， $f := \phi_0\psi$ 是下列方程的一个弱解

$$v\partial_x f - \partial_{vv} f = -2\partial_v\phi_0\partial_v\psi - \phi_0\partial_{vv}\psi =: F \quad \text{in } \{x > 0\}$$

由于 $\phi_0 \in C_{loc}^\infty([0,\infty) \times \{|v| \geq 2\})$，我们有 $F \in C_{loc}^\infty([0,\infty) \times \mathbb{R})$。接下来，我们选取一个截断函数$\xi \in C^\infty(\mathbb{R})$，使得 $\xi(v) \equiv 2$ 在 $v \geq -1$ 上成立，且 $\xi(v) \equiv 0$ 在 $v \leq -2$上成立，并且 $\int_{\mathbb{R}}(\xi(w)e^{-|w|^2})w_-\,\mathrm{d}w \neq 1$。现在，我们选择 $a \neq 0$ 使得

$$a = \left(\int_{\mathbb{R}} f(0,w)w_-\,dw\right)^{-1}\left(1 - \int_{\mathbb{R}}(\xi(w)e^{-|w|^2})w_-\,\mathrm{d}w\right),$$

并定义 $\widetilde{f} = af + \xi(v)e^{-|v|^2}$。于是，令 $\mathcal{M}(v) = 2e^{-|v|^2}$，根据构造可得

$$\mathcal{N}\widetilde{f}(0,v) = \mathcal{M}(v)\int_{\mathbb{R}}(af(0,w) + \xi(w)e^{-|w|^2})w_-\,dw = \mathcal{M}(v) = \xi(v)e^{-|v|^2} \quad \text{for } v \in (0,\infty),$$

因此

$$\begin{cases} v\partial_x\widetilde{f} - \partial_{vv}\widetilde{f} = \widetilde{F} & \text{in } \{x > 0\}, \\ \widetilde{f} = \mathcal{N}\widetilde{f} & \text{in } \{0\} \times \{v > 0\}, \end{cases}$$

其中 $\widetilde{F} = F - \partial_{vv}(\xi(v)e^{-|v|^2}) \in C_{loc}^\infty([0,\infty) \times \mathbb{R})$，并且我们利用了对 $v > 0$， $\phi_0(0, v) = 0$。然而，~ 1(C.37) 意味着解的最优正则性为 $f \in C_{loc}^2([0,\infty) \times \mathbb{R})$ 是最优的。

8. Proof of main results in general domains

本节中，我们将通过扁平化论证（类似于 [DGY22、GHJO20、Sil22、RW25]）把先前的结果推广到一般区域，并证明定理 1.1、定理 1.3、定理 1.7 和定理 1.6。请注意，我们还证明了定理 8.1、定理 8.2、定理 8.4 和定理 8.6；它们分别是定理 1.1、定理 1.3、定理 1.6 和定理 1.7 针对具有足够光滑系数的动力学 Fokker-Planck 方程的推广和强化版本。由于扁平化论证已相当成熟，我们将省略大部分内容，转而给出适当的参考文献。

假设区域 Ω 属于 C^β 类，且具有 $\beta \geq 2$。现在我们回顾几个有用的事实，这些事实已在 [RW25，第 2 节 4] 以及 [Sil22，第 3] 章中得到证明。

- 存在仅取决于 Ω 的常数 R_0、 $R_1 \leq 1$，使得对于任意 $x_1 \in \partial\Omega$，都存在一个$C^{\beta-2}$ 微分同胚

$$\Psi_{x_1}^{-1}(t,y,w) \equiv \Psi^{-1}(t,y,w) = (t, \varphi^{-1}(y), \nabla\varphi^{-1}(y)w), \tag{8.1}$$

[5]注意，$\int_{\mathbb{R}}\mathcal{M}(w)w_-\,\mathrm{d}w = 1$

其中 φ^{-1} 是一个 C^β 微分同胚，并且

$$\begin{aligned}(I\times(B_{R_0}(x_0',0))\times\mathbb{R}^n)\cap\{x_n>0\}&\subset\Psi(I\times(\Omega\cap B_{R_1}(x_1))\times\mathbb{R}^n)\\&\subset(I\times(B_{2R_0}(x_0',0))\times\mathbb{R}^n)\cap\{x_n>0\},\\(I\times B_{R_0}(x_0',0)\times\mathbb{R}^n)\cap\Gamma_-&\subset\Psi((I\times(\Omega\cap B_{R_1}(x_1))\times\mathbb{R}^n)\cap\gamma_-)\\&\subset(I\times B_{2R_0}(x_0',0)\times\mathbb{R}^n)\cap\Gamma_-\end{aligned}\tag{8.2}$$

其中 I是时间区间 (a,b)，且 $x_0=(x_0',0)=\Psi(x_1)$。为避免流入部分的记号产生混淆，我们记作 $\Gamma_-=\{x_n=0\}\times\{v_n>0\}$。

- 若 f 是 (1.2) 的弱解，则 $\widetilde{f}=f\circ\Psi^{-1}(t,y,w)$ 是下列方程的弱解：

$$\begin{cases}(\partial_t+w\cdot\nabla_y)\widetilde{f}-\operatorname{div}_w(\widetilde{A}\nabla_w\widetilde{f})=\widetilde{B}\cdot\nabla_w\widetilde{f}+\widetilde{F} & \text{in } I\times(B_{R_0}(x_0',0)\cap\{x_n>0\})\times\mathbb{R}^n,\\ \widetilde{f}=\widetilde{g} & \text{in } (I\times B_{R_0}(x_0',0)\times\mathbb{R}^n)\cap\Gamma_-,\end{cases}\tag{8.3}$$

这里我们记 $\Gamma_-:=(\{x_n=0\}\times\{v_n>0\})$，并且

$$\begin{aligned}&\widetilde{A}_{i,j}(t,y,w):=\widehat{A}_{i,l}(y)A_{l,k}(\Psi^{-1}(t,y,w))\widehat{A}_{j,k}(y)\quad\text{with}\quad\widehat{A}:=D\varphi(\varphi^{-1}(y)),\\&\widetilde{B}_i:=\widehat{A}_{i,j}(y)B_j(\Psi^{-1}(t,y,w))+\widehat{A}^{-1}_{j,s}(y)w_s\widehat{A}^{-1}_{l,k}w_k\partial_{x_j,x_l}\varphi(x),\\&\widetilde{F}(t,y,w):=F(\Psi^{-1}(t,y,w)),\quad\widetilde{g}(t,y,w):=g(\Psi^{-1}(t,y,w)).\end{aligned}$$

注意，当区域是光滑的，距离函数 $d_\Omega(x)=:\operatorname{dist}(x,\partial\Omega)\in C^\infty(\Omega)$。这使我们能够沿用 [RW25, 第 2 节4] 中的所有论证，只需将正则化距离替换为距离函数。特别地，使用 [RW25, 第 2 节4],中的相同记号，我们得到 $\psi^{-1}(x):=(x',d_\Omega(x))$ 和 $\varphi^{-1}(y):=\psi(y',0)+y_n(\nabla d_\Omega)(\psi(y))$，其中函数 φ 由 (8.1) 给出。因此，我们有以下结论。

$$\begin{aligned}&y_n=(\varphi(x))_n=\big(\varphi\big(\psi(y',0)+d_\Omega(x)\nabla d_\Omega(\psi(y))\big)\big)_n=d_\Omega(x),\\&w_n=(\nabla\varphi^{-1}(y))^{-1}v)_n=(\nabla\varphi(x)v)_n=\nabla d_\Omega(x)\cdot v=n_x\cdot v,\\&\widetilde{A}_{n,n}(t,y,w)=(\nabla\varphi(x))_{n,k}A_{k,l}(z)(\nabla\varphi(x))_{n,l},\end{aligned}\tag{8.4}$$

其中 $n_x:=\nabla d_\Omega(x)$，并且我们用到了这样的事实：对于任意 $x\in\Omega$，都存在边界点$\psi(y',0)\in\partial\Omega$，使得 $\psi(y',d_\Omega(x))=x$ 且 $x=\psi(y',0)+d_\Omega(x)\nabla d_\Omega(\psi(y))$，其中 $y=(y',d_\Omega(x))$。
更详细的讨论请参见 [RW25，第 2 节。4]
由于我们将处理一般区域，因此经常使用以下记号：

$$\mathbf{H}_r(z_1):=\{z:t\in I_{r^2}(t_1),\,v\in B_r(v_1),\,x\in B_{r^3}(x_1+(t-t_1)v_1)\cap\Omega\}.$$

8.1. 流入条件下的最优正则性及定理 1.3 的证明。现在我们给出一般区域上满足流入条件时的全局 H¨older 正则性。

定理 8.1. 设 Ω 为 $C^{2,\epsilon}$ 类的有界区域，其中 $\epsilon>0$。设 f 为一个弱解，满足

$$\begin{cases}(\partial_t+v\cdot\nabla_x)f-\operatorname{div}_v(A\nabla_v f)=B\cdot\nabla_v f+F & in\ (-1,1)\times\Omega\times\mathbb{R}^n,\\ f=g & in\ \gamma_-,\end{cases}$$

其中

$$\sup_{z_1\in(-1,1)\times\Omega\times\mathbb{R}^n}\|A\|_{C^\epsilon(\mathbf{H}_1(z_1))}+\|B\|_{L^\infty(\mathbf{H}_1(z_1))})\le 1.$$

那么我们有

$$\|f\|_{C^{\frac{1}{2}}([-1/8,1/8]\times\Omega\times\mathbb{R}^n)} \le c\left(\|\langle v\rangle^q f\|_{L^1((-1,1)\times\Omega\times\mathbb{R}^n)} + \|\langle v\rangle^q G\|_{L^\infty((-1,1)\times\Omega\times\mathbb{R}^n)} + [g]_{C_q^{\frac{1}{2}+\epsilon}(\gamma_-)}\right)$$

对于某些常数 $c = c(n,\Lambda,\epsilon)$ 和 $q = q(n)$，其中我们记

$$[g]_{C_q^{\frac{1}{2}+\epsilon}(\gamma_-)} := \sup_{z_0\in\gamma_-}\langle v_0\rangle^q [g]_{C^{\frac{1}{2}+\epsilon}(\gamma_-\cap\mathcal{Q}_1(z_0))}.$$

证明。首先，固定 $z_1 \in \gamma_-$。由 (8.2) 和 (8.3)，可知 $\widetilde{f} = f\circ\Psi_{x_1}^{-1}$ 是 (8.3) 的一个解，其中某些 R_1、$R_2 \le 1$ 满足条件。根据 RW25 的引理 2.17] ，且由于区域属于 $C^{2,\epsilon}$ 类，我们有

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{A}\|_{C^{\frac{\epsilon}{2}}(\mathcal{H}_r(z_0))} &\le c\|A\|_{C^\epsilon(\Psi^{-1}(\mathcal{H}_r(z_0)))},\\
\|\widetilde{B}\|_{L^\infty(\mathcal{H}_r(z_0))} &\le c(\|B\|_{L^\infty(\Psi^{-1}(\mathcal{H}_r(z_0)))} + \langle v_0\rangle^2),\\
\|F\|_{L^\infty(\mathcal{H}_r(z_0))} &\le c\|F\|_{L^\infty(\Psi^{-1}(\mathcal{H}_r(z_0)))}\\
[\widetilde{g}]_{C^{\frac{1}{2}+\frac{\epsilon}{2}}(\gamma_-\cap\mathcal{Q}_r(z_0))} &\le c[g]_{C^{\frac{1}{2}+\epsilon}(\Psi^{-1}((\gamma_-\cap\mathcal{Q}_r(z_0))))},
\end{aligned} \tag{8.5}$$

其中 $\Psi \equiv \Psi_{x_1}$、$z_0 := \Psi(z_1)$ 且 $c = c(n,\epsilon,\Lambda)$，当 $r \le \langle v_0\rangle^{-N}$ 对某个足够大的常数 $N = N(n,\epsilon)$ 成立时。特别地，我们取足够大的 N，使得 $N \ge \frac{2}{\epsilon}$。因此，结合定理 6.2、RW25 的引理 2.25] 和引理 7.6，通过 f 的 L^1-范数估计其 L^∞-范数，可得

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{f}\|_{C^{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}_{\rho_0}(z_0))} &\le c\rho_0^{-\frac{1}{2}}\langle v_0\rangle\left(\rho_0^{-(4n+2)}\|\widetilde{f}\|_{L^1(\mathcal{H}_{2\rho_0}(z_0))} + \rho_0^2\|\widetilde{F}\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{2\rho_0}(z_0))} + \rho_0^{\frac{1}{2}+\frac{\epsilon}{2}}[\widetilde{g}]_{C^{\frac{1}{2}+\frac{\epsilon}{2}}(\gamma_-\cap\mathcal{Q}_{2\rho_0}(z_0))}\right)\\
&\le c\left(\langle v_0\rangle^p\|\widetilde{f}\|_{L^1(\mathcal{H}_{2\rho_0}(z_0))} + \|\widetilde{F}\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{2\rho_0}(z_0))} + [\widetilde{g}]_{C^{\frac{1}{2}+\frac{\epsilon}{2}}(\gamma_-\cap\mathcal{Q}_{2\rho_0}(z_0))}\right),
\end{aligned}$$

其中 $\rho_0 = \frac{R_1}{2}\langle v_0\rangle^{-N}$和 $c = c(n,\epsilon,\Lambda)$。现在，结合缩放还原以及 [RW25，引理 2.17]和 (8.2)，可得存在常数 $r_1 = \frac{\langle v_1\rangle^{-N}}{c_1}$，其中某个常数 $c_1 = c_1(\Omega)$ 满足

$$\|f\|_{C^{\frac{1}{2}}(\mathbf{H}_{r_1}(z_1))} \le c\langle v_1\rangle^q\left(\|f\|_{L^1(\mathbf{H}_{2r_1}(z_1)} + \|F\|_{L^\infty(\mathbf{H}_{2r_1}(z_1))} + [g]_{C^{\frac{1}{2}+\epsilon}(\gamma_-\cap Q_{2r_1}(z_1))}\right),$$

其中 $c = c(n,\epsilon,\Lambda)$ 且 $q = q(n,\epsilon)$。因此，通过采用 [RW25，定理 5.4], 中的覆盖论证，我们得到了所需的估计。□

定理 1.3 的证明。该结论可直接由定理 8.1 以及如下事实推出：在掠射集之外，解的光滑性已在 [RW25，定理 5.6]中得到证明。□

8.2. 漫反射下的最优正则性及定理 1.1 的证明。接下来，我们给出一般区域中满足漫反射条件的全局 Hölder 正则性的证明。

定理 8.2. 设 Ω 是一个属于 $C^{2,\epsilon}$ 类的有界区域，其中 $\epsilon > 0$。设 f 是以下方程的弱解

$$\begin{cases}(\partial_t + v\cdot\nabla_x)f - \operatorname{div}_v(A\nabla_v f) = B\cdot\nabla_v f + F & in\ (-1,1)\times\Omega\times\mathbb{R}^n,\\ f = \mathcal{N}f & in\ \gamma_-,\end{cases}$$

其中

$$\mathcal{N}f(t,x,v) := \mathcal{M}(t,x,v)\int_{\mathbb{R}^n} f(t,x,w)(w\cdot n_x)_-\,dw.$$

假设

$$\sup_{z_1\in(-1,1)\times\Omega\times\mathbb{R}^n}\left(\langle v_1\rangle^M\|\mathcal{M}\|_{C^{\frac{1}{2}+\epsilon}(\gamma_-\cap\mathcal{Q}_1(z_1))} + \|A\|_{C^\epsilon(\mathbf{H}_1(z_1))} + \|B\|_{L^\infty(\mathbf{H}_1(z_1))}\right) \le 1 \tag{8.6}$$

对某个 $M > 0$。存在 $M_0 = M_0(n, \epsilon)$，使得若 $M > M_0$，则我们有

$$\|f\|_{C^{\frac{1}{2}}([-1/8,1/8]\times\Omega\times\mathbb{R}^n)} \le c\left(\|\langle v\rangle^q f\|_{L^1((-1,1)\times\Omega\times\mathbb{R}^n)} + \|\langle v\rangle^q G\|_{L^\infty((-1,1)\times\Omega\times\mathbb{R}^n)}\right)$$

对某些常数 $c = c(n, \Lambda, \epsilon)$ 和 $q = q(n)$。

~证明。首先，我们固定 $z_1 \in \gamma$。然后由 (8.3)，可知 f 是如下方程的弱解

$$\begin{cases} (\partial_t + w\cdot\nabla_y)\widetilde{f} - \mathrm{div}_w(\widetilde{A}\nabla_w\widetilde{f}) = \widetilde{B}\cdot\nabla_w\widetilde{f} + \widetilde{F} & \text{in } I\times(B_{\frac{R_0}{2}}(x_0',0)\cap\{x_n>0\})\times\mathbb{R}^n, \\ \widetilde{f} = \widetilde{\mathcal{N}}\widetilde{f} & \text{in } \Gamma_-\cap(I\times B_{\frac{R_0}{2}}(\overline{x}_0',0)\times\mathbb{R}^n), \end{cases} \tag{8.7}$$

其中 $I = (t_0 - (R_0/2)^2, t_0 + (R_0/2)^2)$，且 $t_0 \in I_{\frac{1}{2}}$, $\Gamma_- = (\{x_n = 0\}\times\{v_n > 0\})$，以及

$$\widetilde{\mathcal{N}}\widetilde{f}(t,y,w) := \mathcal{M}(t,\varphi^{-1}(y),\nabla\varphi^{-1}(y)w)|\nabla\varphi^{-1}(y)|\int_{\mathbb{R}^n}\widetilde{f}(t,y',0,\xi)(\xi_n)_-\,d\xi,$$

这由变量替换和 (8.4) 可得。接下来，如同 (8.5)，存在一个足够大的常数 $p = p(n,\epsilon)$，使得只要 $r \le \langle v_0\rangle^{-p}$ 且 $z_0 := \Psi(z_1)$，(8.5) 中的前三个条件便成立。此外，取 $M = M(n,\epsilon) \ge 1$ 足够大，从而由 (8.6) 我们观察到

$$\langle v_2\rangle^M\|\widetilde{\mathcal{M}}\|_{C^{\frac{1}{2}+\epsilon}(\gamma_-\cap\mathcal{Q}_1(z_0))} \le c(\epsilon,\Omega), \tag{8.8}$$

其中我们记

$$\widetilde{\mathcal{M}}(t,y,w) := \mathcal{M}(t,\varphi^{-1}(y),\nabla\varphi^{-1}(y)w)|\nabla\varphi^{-1}(y)|. \tag{8.9}$$

结合 (8.5) 和 (8.6)，我们可以应用定理 7.1。因此，我们有

$$\begin{aligned} \|\widetilde{f}\|_{C^{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}_{r_0}(z_0))} &\le c r_0^{-\frac{1}{2}}\langle v_0\rangle(\|\widetilde{f}\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{2r_0}(z_0))} + r_0^2\|\widetilde{F}\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{2r_0}(z_0))}) \\ &\quad + c\langle v_0\rangle\|\widetilde{\mathcal{M}}\|_{C^{\frac{1}{2}+\epsilon}(\mathcal{H}_{r_0}(z_0))}\left(\|\langle\cdot\rangle^q\widetilde{f}(t,x,\cdot)\|_{L^\infty(\widetilde{\mathcal{H}}_\infty)} + \left\|\langle\cdot\rangle^q\widetilde{F}(t,x,\cdot)\right\|_{L^\infty(\widetilde{\mathcal{H}}_\infty)}\right), \end{aligned} \tag{8.10}$$

~其中 $c = c(n,\epsilon,\Omega)$，$q = q(n,\epsilon)$，并记 $\mathcal{H}_\infty := I\times(B_{\underline{R_1}}(x_1',0)\cap\{x_n>0\})\times\mathbb{R}^n$。利用2变量替换以及 [RW25，引理 2.17]，，我们可以将 (8.10) 改写为

$$\begin{aligned} \|f\|_{C^{\frac{1}{2}}(\mathbf{H}_{\rho_1}(z_1))} &\le c\langle v_1\rangle(\|f\|_{L^\infty(\mathbf{H}_{2\rho_1}(z_1))} + \|F\|_{L^\infty(\mathbf{H}_{2\rho_1}(z_1))}) \\ &\quad + c\langle v_1\rangle\|\mathcal{M}\|_{C^{\frac{1}{2}+\epsilon}(\gamma_-\cap\mathcal{Q}_{2\rho_1}(z_1))}\left(\|\langle\cdot\rangle^q f(t,x,\cdot)\|_{L^\infty(I\times\Omega\times\mathbb{R}^n)} + \|\langle\cdot\rangle^q F(t,x,\cdot)\|_{L^\infty(I\times\Omega\times\mathbb{R}^n)}\right) \end{aligned} \tag{8.11}$$

对于某些常数 $c = c(n,\epsilon,\Omega)$ 和 $q = q(n,\epsilon)$，其中 $\rho_1 = \frac{\langle v_1\rangle^{-p}}{c_1}$对于某个常数 $c_1 = c_1(\Omega) \ge 1$。现在，仿照 [RW25，定理 5.4] 中的覆盖论证，结合 (8.8)，我们由 (8.11) 得到所需的整体 $C^{\frac{1}{2}}$ 估计。证明至此完成。□

注 8.3. 注意，利用相同的证明方法，只要 (7.4) 和 (7.5) 对 A、B、F、$\mathcal{M}$ 成立，我们就可以结合定理 7.1 的第二个结论和扁平化论证，建立漫反射在 γ 附近（但远离 γ_0）的 $C^{\lambda,\,\epsilon}$ 估计。下面我们仅给出光滑系数情形的证明。

我们现在给出定理 1.1 的证明。

定理 1.1 的证明。由于 $C^{\frac{1}{2}}$-正则性由定理 8.2得出，我们仅给出解在远离 γ_0处的光滑性的证明。对任意 $z_1 \in \gamma_-$，我们得到 $\widetilde{f} = f \circ \Psi^{-1}$ 是(8.7)的弱解。现在利用定义(8.9)，我们看到对任意 $M > 0$、$k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$、$\epsilon \in (0, 1)$，以及$\mathcal{H}_{r_2}(z_2) \subset I \times (B_{\underline{R_1}}(x_1', 0) \cap \{x_n > 0\}) \times \mathbb{R}^n$，

$$\langle v_2 \rangle^M \|\widetilde{\mathcal{M}}\|_{C^{k,\epsilon}(\gamma_- \cap \mathcal{Q}_{r_2}(z_2))} \leq c(p, k, \epsilon, \Omega, M), \tag{8.12}$$

当 $\mathcal{M}$ 时具有关于 $|v| \to \infty$的快速衰减。接下来，对于任意 $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 和 $\epsilon \in (0, 1)$，存在一个较大的常数$p = p(n, k, \epsilon, \Omega)$，使得如果对于某个常数 $c_2 = c_2(n, k, \epsilon, \Omega)$有 $r_2 \leq \frac{\langle v_2 \rangle^{-p}}{c_2}$，那么

$$\|\widetilde{A}\|_{C^{k,\epsilon}(\mathcal{H}_{r_2}(z_2))} + \frac{1}{\langle v_2 \rangle^2} \|\widetilde{B}\|_{C^{k,\epsilon}(\mathcal{H}_{r_2}(z_2))} \leq c(k, \epsilon, \Omega),$$

这里我们用到了 [RW25，引理 2.17]。现在利用这一点、(8.12) 和定理 7.1，我们得到 $f \in C^{k,\epsilon}(\mathcal{H}_{r_2}(z_2))$，只要 $\mathcal{H}_{r_2}(z_2) \subset \widetilde{H}_\infty$。这说明 f 在掠射集之外是光滑的，从而完成证明。□

8.3. γ_0 附近的高阶估计以及定理 1.6 和定理 1.7 的证明。现在我们准备证明剩下的两个主定理。

~定理 1.6 和定理 1.7 的证明。固定 $z_1 \in \gamma_0$。由 (8.2) 可知，f 是满足 $A = I_n$、$B = 0$ 和 $z_0 = \Psi(z_1)$ 的 (8.3) 的弱解。此外，由 (8.2) 和 (8.4) 可得

$$\Psi^{-1}(\mathcal{H}_{\frac{R_0}{2}}(z_0) \cap \{y_n \leq w_n^{\frac{3}{\epsilon}}\}) \subset \mathbf{H}_{R_1}(z_1) \cap \mathcal{R}_-^\epsilon$$

其中常数 R_0、$R_1 \leq 1$ 依赖于 n、$|z_0|$和 Ω。因此，为证明定理 1.6，只需证明

$$\|\widetilde{f}\|_{C^{3-\epsilon}(\mathcal{H}_{\frac{R_0}{2}}(z_0) \cap \{y_n \leq w_n^{\frac{3}{\epsilon}}\})} \leq c \left(\|\widetilde{f}\|_{L^1(\mathcal{H}_{R_0}(z_0))} + [\widetilde{F}]_{C^{\frac{5}{2}}(\mathcal{H}_{R_0}(z_0))} + [\widetilde{g}]_{C^{3-\epsilon}(\mathcal{H}_{R_0}(z_0))} \right) \tag{8.13}$$

其中常数 $c = c(n、\epsilon、|z_0|、\Omega)$，因为结合[RW25，引理 2.17] 进行缩放还原后，即可得到所需估计。根据定理 6.6，对于任意 $\mathcal{H}_r(z_2) \subset \mathcal{H}_{\underline{R_0}}(z_0) \cap \{y_n \leq w_n^{\frac{\epsilon}{}}\}$，

$$\begin{aligned} \|\widetilde{f}\|_{C^{3-\epsilon}(\mathcal{H}_r(z_2))} &\leq c \left(\|\widetilde{f}\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{\frac{3}{4}R_0}(z_0))} + [\widetilde{F}]_{C^{\frac{5}{2}}(\mathcal{H}_{\frac{3}{4}R_0}(z_0))} + [\widetilde{g}]_{C^{3-\epsilon}(\mathcal{H}_{\frac{3}{4}R_0}(z_0))} \right) \\ &\leq c \left(\|\widetilde{f}\|_{L^1(\mathcal{H}_{R_0}(z_0))} + [\widetilde{F}]_{C^{\frac{5}{2}}(\mathcal{H}_{R_0}(z_0))} + [\widetilde{g}]_{C^{3-\epsilon}(\mathcal{H}_{R_0}(z_0))} \right), \end{aligned} \tag{8.14}$$

~ ~其中 $c = c(n, \epsilon, |z_0|, \Omega)$，因为 $\|A\|_{C^{\frac{5}{2}}}$, $\|B\|_{C^{\frac{3}{2}}}$和 R_1 仅依赖于 $n, |z_0|$ 和 Ω。特别地，在最后一个不等式中，我们还用到了 [RW25, 引理 2.25] 和引理 7.6。现在，利用 [RW25, 引理 2.9], 中给出的覆盖论证，我们推导出 (8.13)，从而完成定理 1.6 的证明。

~现在我们将证明定理 1.7。由 (8.4) 可知 $A_{n,\,n} = (\nabla\varphi(x))_{n,\,k}(\nabla\varphi(x))_{n,\,k} = |\nabla\varphi(x)|^2 \equiv 1$。因此，利用定理 6.3 并采用与 (8.14) 相同的论证（该论证允许我们将 $\widetilde{f}$ 的 L^∞-范数替换为其 L^1-范数），可得

$$\left\| \frac{\widetilde{f}}{\phi_0} \right\|_{C^{0,1}(\mathcal{H}_{\frac{R_0}{2}}(z_0) \setminus \{(v_n)^3 \geq x_n\})} \leq c \left(\|\widetilde{f}\|_{L^1(\mathcal{H}_{R_0}(z_0))} + \|\widetilde{F}\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{R_0}(z_0))} \right) \tag{8.15}$$

对于某个常数 $c = c(n, \Lambda, \Omega\ |z_0|)$。另一方面，由 (8.4) 可知 $\varphi(y_n, w_n) = \varphi(d_\Omega(x), (n_x \cdot v))$。因此，结合这一点与 (8.15)，再进行变量替换，即可得到所需的估计。证明至此完成。□

8.4. 定理 1.6 和定理 1.7 对带系数方程的推广。我们以给出定理 1.6 和定理 1.7 的一般版本作为本节的结尾。我们考虑如 (1.2) 所示、系数足够光滑的广义动理学福克-普朗克方程类。

首先，我们陈述定理 1.6 的一个完整版本。该结论可由定理 6.6 直接推出，只需重复定理 1.6 证明中的相同论证，因此我们略去细节。

定理 8.4. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个有界光滑区域，且 $z_1 \in \gamma_0$。设 $F \in C^{0,1}(\mathbf{H}_1(z_1)), A \in C^{\frac{5}{2}}(\mathbf{H}_1(z_1))$, $B \in C^{\frac{3}{2}}(\mathbf{H}_1(z_1))$ 和 $g \in C^{2,1}(\gamma_- \cap \mathcal{Q}_1(z_1))$。设 f 是一个解，满足

$$\begin{cases} (\partial_t + v \cdot \nabla_x) f - \operatorname{div}_v(A \nabla_v f) = B \cdot \nabla_v f + F & \text{in } \mathbf{H}_1(z_1), \\ f = g & \text{in } \gamma_- \cap \mathcal{Q}_1(z_1). \end{cases}$$

那么对于任意 $\epsilon > 0$，我们有

$$[f]_{C^{3-\epsilon}(\mathcal{H}_{1/2}(z_1) \cap \mathcal{R}^\epsilon_-)} \le c(\|f\|_{L^1(\mathbf{H}_1(z_1))} + \|F\|_{C^{0,1}(\mathbf{H}_1(z_1))} + [g]_{C^{2,1}(\mathcal{Q}_1(z_1) \cap \gamma_-)})$$

对于某个常数 $c = c(n, \epsilon, \|A\|_{C^{\frac{5}{2}}(\mathbf{H}_1(z_1))}\ \|B\|_{C^{\frac{3}{2}}(\mathbf{H}_1(z_1))}\ |z_1|, \Omega)$，其中 $\mathcal{R}^\epsilon_- := \{d_\Omega(x)^\epsilon \le (n_x \cdot v)^3\}$。

接下来，我们给出定理 1.7 的一个一般形式。为此，对于任意 $z \in I_2 \times \Omega$，我们记 $\times \mathbb{R}^n$

$$\operatorname{dist}_{\mathrm{kin}}(z_1) := \max\{r : \mathbf{H}_r(z_1) \cap \gamma_0 = \emptyset\} \eqsim \min\{\operatorname{dist}(z_1, z) : z \in \gamma_0\}. \tag{8.16}$$

回顾一下，我们已经假设在 $\mathbf{H}_1(z_0)$ 中，投影到边界 Ω 的点是唯一的。若不然，我们只需缩小半径。因此，我们可以将 n_x 记为 $x \in \Omega$ 在 $\overline{x} \in \partial\Omega$ 上的投影处的外单位法向量。

首先，我们给出 一个引理，用来描述动力学距离函数在 γ_0 附近的行为。

引理 8.5. 设 Ω 是一个 C^2 类的有界凸区域。我们固定 $z_0 \in (I_1 \times \Omega \times \mathbb{R}^n) \cap \gamma_0$。那么，对于任意 $z \in \mathbf{H}_1(z_0)$，有

$$\frac{1}{c} \max\{d_\Omega(x)^{\frac{1}{3}}, \langle v_0 \rangle^{-2} |n_x \cdot v|\} \le \operatorname{dist}_{kin}(z) \le c \max\{d_\Omega(x)^{\frac{1}{3}}, |n_x \cdot v|\}$$

其中某个常数为 $c = c(n, \Omega)$。

证明. 首先注意，对于任意 $z_1 \in \mathbf{H}_1(z_0)$,

$$\overline{z}_1 := (t_1, x_1 - (n_{x_1} \cdot x_1) n_{x_1}, v_1 - (n_{x_1} \cdot v_1) n_{x_1}) \in \gamma_0, \operatorname{dist}(z_1, \overline{z}_1) \eqsim \max\{d_\Omega(x_1)^{\frac{1}{3}}, |n_{x_1} \cdot v_1|\}, \tag{8.17}$$

这里我们用到了如下事实： $n_{x_1} \cdot x_1 = d_\Omega(x_1)$。这意味着

$$\operatorname{dist}_{\mathrm{kin}}(z_1) \lesssim \max\{d_\Omega(x_1)^{\frac{1}{3}}, |n_{x_1} \cdot v_1|\}.$$

对于下界，首先利用区域的凸性条件。具体而言，我们将证明，对于任意 $z_2 \in \gamma_0$，当 $z_1 \in \mathbf{H}_r(z_2)$ 时，有 $d_\Omega(x_1) \le r^3$。为此，我们注意到

$$r^3 > |x_1 - (x_2 + (t_1 - t_2) v_2)| > d_\Omega(x_1),$$

根据 $n_{x_2} \cdot v_2 = 0$，有 $x_2 + (t_1 - t_2) v_2 \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$，且由于区域是凸的。因此，若 $r < \frac{d_\Omega(x_1)^{\frac{1}{3}}}{16}$，则 $\mathcal{H}_r(z_1) \cap \gamma_0 = \emptyset$，这意味着 $\operatorname{dist}_{\mathrm{kin}}(z_1) \gtrsim d_\Omega(x_1)^{\frac{1}{3}}$。

另一方面，由于区域 Ω 是光滑的，存在一个万有常数 $c_0 = c_0(\Omega) \geq 1$，使得 $|n_{x_1} - n_{x_2}| \leq c_0|x_1 - x_2|$。利用这一点，我们可以证明对任意 $r = \frac{|n_{x_1}\cdot v_1|}{100c_0\langle v_0\rangle^2}$,

$$\mathcal{H}_r(z_1) \cap \gamma_0 = \emptyset. \tag{8.18}$$

为证明 证这一点，我们反设存在 $z_2 \in \mathcal{H}_r(z_1) \cap \gamma_0$。现在注意到 t

$$n_{x_2}\cdot v_2 = (n_{x_2} - n_{x_1})\cdot v_2 + n_{x_1}\cdot(v_2 - v_1) + n_{x_1}\cdot v_1.$$

接下来我们估计

$$\begin{aligned}|(n_{x_2} - n_{x_1})\cdot v_2 + n_{x_1}\cdot(v_2 - v_1)| &\leq c_0|x_2 - x_1||v_2| + r\\ &\leq c_0|x_2 - (x_1 + (t_1 - t_2)v_1)||v_2| + |(t_1 - t_2)v_1||v_2| + r\\ &\leq c_0(r^3\langle v_2\rangle + r^2\langle v_1\rangle^2 + r),\end{aligned}$$

其中我们用到了对每个 $i = 1,\ \frac{\langle v_0\rangle}{2} \leq \langle v_i\rangle \leq 2\langle v_0\rangle$ 2 这一事实。因此，利用这一点以及 $r \leq 1$ 和 $r\langle v_1\rangle \leq \frac{|n_{x_1}\cdot v_1|}{50c_0\langle v_0\rangle} \leq 1$ 这一事实，我们得到

$$|n_{x_2}\cdot v_2| \geq |n_{x_1}\cdot v_1| - c(r^3\langle v_2\rangle + r^2\langle v_1\rangle^2 + r) \geq |n_{x_1}\cdot v_1| - \frac{1}{2}\frac{|n_{x_1}\cdot v_1|}{\langle v_1\rangle} > 0,$$

这证明了 (8.18)，从而 $\mathrm{dist}_{\mathrm{kin}}(z_1) \gtrsim \frac{|n_{x_1}\cdot v_1|}{\langle v_0\rangle^2}$。因此，我们得出

$$\mathrm{dist}_{\mathrm{kin}}(z_1) \gtrsim \max\left\{d_\Omega(x_1)^{\frac{1}{3}}, \frac{|n_{x_1}\cdot v_1|}{\langle v_0\rangle^2}\right\},$$

至此，证明完成。 □

现在，我们可以陈述并证明本节的主要结果。该结果表明，对于带有系数的方程，定理 1.7 的一个变体仍然成立。在这种情况下，函数 Φ 没有优雅的显式公式；然而，当 Ω 是凸区域时，我们可以证明它在高阶意义下表现得如同 $\mathrm{dist}^{1/2}_{\mathrm{kin}}$。

定理 8.6. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个有界的光滑凸区域，并且 $z_1 \in \gamma_0$。设 $F \in L^\infty(\mathbf{H}_1(z_1))$、$A \in C^{k+\epsilon}(\mathbf{H}_1(z_1))$ 和 $B \in C^\epsilon(\mathbf{H}_1(z_1))$，其中 $k \in \mathbb{N}$ 和 $\epsilon > 0$。设 f 是下列方程的一个解

$$\begin{cases}(\partial_t + v\cdot\nabla_x)f - \mathrm{div}_v(A\nabla_v f) = B\cdot\nabla_v f + F & \text{in } \mathbf{H}_1(z_1),\\ f = 0 & \text{in } \gamma_- \cap \mathcal{Q}_1(z_1).\end{cases}$$

那么，存在一个函数 $\Phi \in C^{1/2}(\mathbf{H}_1(z_1))$，使得

$$\Phi \asymp_{\langle v_1\rangle} \mathrm{dist}^{1/2}_{kin}, \qquad D^\beta\Phi \lesssim_{|v_1|} \mathrm{dist}^{1/2-|\beta|}_{kin} \quad \text{in } \mathbf{H}_1(z_1)\setminus\mathcal{R}^1_- \tag{8.19}$$

对于任意满足 $|\beta| \leq k$ 的 $\beta \in \mathbb{N}$，均有

$$\frac{f}{\Phi} \in C^{0,1}(\mathbf{H}_{1/2}(z_1)\setminus\mathcal{R}^1_-)),$$

其中 $\mathcal{R}^1_- := \{d_\Omega(x) \leq (n_x\cdot v)^3\}$。此外，我们有如下估计

$$\|f/\Phi\|_{C^{0,1}(\mathbf{H}_{1/2}(z_1)\setminus\mathcal{R}^1_-)} \leq C\big(\|f\|_{L^1(\mathbf{H}_1(z_1))} + \|F\|_{L^\infty(\mathbf{H}_1(z_1))}\big),$$

其中 C 仅依赖于 $n, |z_1|, \Omega\ \epsilon, \|A\|_{C^{1,\ \epsilon}(\mathbf{H}_1(z_1))}\ \|B\|_{C^\epsilon(\mathbf{H}_1(z_1))}$。

证明。与 (8.15) 的证明相同，我们对 $z_0 = \Psi(z_1)$ 有：

$$\left\| \frac{\widetilde{f}}{\Phi} \right\|_{C^{0,1}(\mathcal{H}_{\frac{R_0}{2}}(z_0)\setminus\{(v_n)^3\geq x_n\})} \leq c\left(\|\widetilde{f}\|_{L^1(\mathcal{H}_{R_0}(z_0))} + \|\widetilde{F}\|_{L^\infty(\mathcal{H}_{R_0}(z_0))} \right),$$

对于某些常数 $c = c(n, |z_1|, \epsilon, \|A\|_{C^{1+\epsilon}(\mathcal{H}_{R_0}(z_0))}\ \|B\|_{C^\epsilon(\mathcal{H}_{R_0}(z_0))})$ 和 $R_0 = R_0(|z_1|, \Omega)$，其中记 $\Phi(t,y,w)$: $= \phi_0\left(y_n/\sqrt{\widetilde{A}_{n,n}(t,y,w)}\ w_n/\sqrt{\widetilde{A}_{n,n}(t,y,w)} \right)$。因此，利用观察 $\widetilde{A}_{n,n}(t,y,w) = (\nabla\varphi(x))_{n,k} A_{k,l}(z)(\nabla\varphi(x))_{n,l}$，并结合（8.4）中的变量替换，我们得到

$$\|f/\Phi\|_{C^{0,1}(\mathbf{H}_{1/2}(z_1)\setminus\mathcal{R}^1_-)} \leq C\big(\|f\|_{L^1(\mathbf{H}_1(z_1))} + \|F\|_{L^\infty(\mathbf{H}_1(z_1))}\big),$$

对于某些常数 $c = c(n, |z_1|, \|A\|_{C^{1,\ \epsilon}(\mathbf{H}_1(z_1))}\ \|B\|_{C^\epsilon(\mathbf{H}_1(z_1))}), \Omega$。为了研究 Φ 的行为，我们将 Φ改写为

$$\Phi(t,x,v) = \phi_0\left(d_\Omega(x)G(z), (n_x\cdot v)G(z)\right) \quad \text{with} \quad G(z) := \frac{1}{\sqrt{(\nabla\varphi(x))_{n,k}A_{k,l}(z)(\nabla\varphi(x))_{n,l}}}.$$

注意到 $G(z) \in C^\infty(\mathbf{H}_1(z_1))$，其中

$$c(k,\Omega,\Lambda,\|A\|_{C^k(\mathcal{H}_1(z_1))})^{-1} \leq \|G\|_{C^k(\mathbf{H}_1(z_1))} \leq c(k,\Omega,\Lambda,\|A\|_{C^k(\mathcal{H}_1(z_1))}), \tag{8.20}$$

由于 A 为正定对称矩阵，且对于某个常数 $c = c(\Omega)$，有 $|\nabla\varphi|^2 \geq \frac{1}{c}$。首先，由 (C.37) 及 $m = 0$ 和引理 8.5，我们推得

$$\Phi(z) \asymp \max\{d_\Omega(x)^{\frac{1}{3}}, |n_x\cdot v|\}^{\frac{1}{2}} \asymp_{\langle v_1\rangle} \operatorname{dist}^{\frac{1}{2}}_{\text{kin}}(z) \quad \text{for any } z \in \mathbf{H}_1(z_1)\setminus\mathcal{R}^1_-.$$

对于 (8.19) 中给出的第二个关系，我们注意到，由于 ϕ_0 是 $(\partial_t + v_n\partial_{x_n})\phi_0 - \Delta_{v_n}\phi_0 = 0$ 的一个弱解，根据引理 2.4，对于任意 $|v_{1,\ n}| \leq 2(x_{1,\ n})_{1\,3}$，

$$|D^\beta\phi_0(x_{1,n}, v_{1,n})| \leq c\rho^{-\beta}\|\phi_0\|_{L^\infty(\mathcal{H}_\rho(0,x_{1,n},v_{1,n}))},$$

其中 $c = c(\beta)$ 且 $\rho := \frac{(x_{1,\ n}\ \frac{1}{3})_\circ}{64}$。由 (C.36)，我们有

$$|D^\beta\phi_0(x_{1,n}, v_{1,n})| \leq c(x_{1,n})^{-\frac{\beta}{3}+\frac{1}{6}}. \tag{8.21}$$

接下来，对于任意 $(-v_{1,\ n}) \geq 2(x_{1,\ n})^{\frac{1}{3}},$，将引理 3.14 中的 v_0 和 R 分别替换为 $v_{1,\ n}$ 和 $R = \frac{v_1}{2^n}$，可得

$$|D^\beta\phi_0(x_{1,n}, v_{1,n})| \leq \|D^\beta\phi_0\|_{L^\infty(H_R(0,v_{1,n}))} \leq c|v_{1,n}|^{-\beta+\frac{1}{2}}, \tag{8.22}$$

这里用到了 (C.36)。由 (8.21) 和 (8.22)，可得

$$|D^\beta\phi_0(x_{1,n}, v_{1,n})| \leq c\max\{(x_{1,n})^{\frac{1}{3}}, |v_{1,n}|\}^{-\beta+\frac{1}{2}}$$

其中某个常数为 $c = c(\beta)$。现在结合这一点、(8.20) 以及 $d_\Omega(x)$ 和 $n_x\cdot v$ 光滑这一事实，可得

$$|D^\beta\Phi(z)| \leq c\max\{d_\Omega(x)^{\frac{1}{3}}, |(n_x\cdot v)|\}^{-\beta+\frac{1}{2}},$$

其中 $c = c(n,\beta,A,\Omega)$。结合这一点和引理 8.5，即可得到所需估计

$$D^\beta\mathbf{\Phi} \leq c\operatorname{dist}^{\frac{1}{2}-\beta}_{kin} \quad \text{in } \mathbf{H}_1(z_1)\setminus\mathcal{R}^1_-$$

对于某个常数 $c = c(\beta, n, \Omega\ A, \langle v_1\rangle)$，至此证明完成。 □

Appendix A. Functions depending only on time and spatial variables

这里，我们给出关于函数 $g = g(t,x')$ 的一些基本事实，即这些函数仅依赖于 t,x'（当 $\Omega = \{x_n > 0\}$ 时），并讨论其在动理学 H¨older 空间中的性质。这些结果是证明命题 7.2 所必需的。

- 对于任意 $\lambda \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ 和 $\epsilon \in (0,1)$,

$$[g]_{C^{\lambda,\epsilon}(\gamma_-\cap\mathcal{Q}_r(z_0))} \le c\left([\partial_x^l g]_{C_x^{\frac{\lambda+\epsilon-3l}{3}}(\gamma_-\cap\mathcal{Q}_r(z_0))} + \sum_{j=0}^{l-1}[\partial_x^j\mathcal{D}_t^{k_j} g]_{C^{\lambda+\epsilon-(2k_j+3j)}(\gamma_-\cap\mathcal{Q}_r(z_0))}\right), \tag{A.1}$$

其中 $\mathcal{D} := \partial_t + v'\cdot\nabla_{x'}$, $c = c(n,\lambda,\epsilon)$, $\lambda - 3 < 3l \le \lambda$ 和 $\lambda - 2 < 2k_j + 3j \le \lambda$。

- 对于任意 $\epsilon \in (0,1)$ 和 $r \le 1$,

$$[g]_{C_t^{\frac{\epsilon}{3}}(\mathcal{H}_r(z_0))} + [g]_{C_x^{\frac{\epsilon}{3}}(\mathcal{H}_r(z_0))} \le c\langle v_0\rangle^{\frac{\epsilon}{3}}[g]_{C^\epsilon(\mathcal{H}_r(z_0))}, \tag{A.2}$$

其中 $c = c(n,\epsilon)$ 且

$$[g]_{C_t^{\frac{\epsilon}{3}}(\mathcal{H}_r(z_0))} = \sup_{(t,x,v),(\widehat{t},x,v)\in\mathcal{H}_r(z_0)} \frac{|g(t,x',v)-g(\widehat{t},x',v)|}{|t-\widehat{t}|^{\frac{\epsilon}{3}}},$$

$$[g]_{C_x^{\frac{\epsilon}{3}}(\mathcal{H}_r(z_0))} = \sup_{(t,x',v),(t,\widehat{x},v)\in\mathcal{H}_r(z_0)} \frac{|g(t,x',v)-g(t',x',v)|}{|x-\widehat{x}|^{\frac{\epsilon}{3}}}.$$

- 对于任意 $\epsilon \in (0,1)$，有

$$\sup_{0<|h|<\frac{r}{2}}\left\|\frac{g(t+h,x',v)-g(t,x',v)}{|h|^{\frac{\epsilon}{3}}}\right\|_{L^\infty(\mathcal{H}_r(z_0))} \le c[g]_{C_t^{\frac{\epsilon}{3}}(\mathcal{H}_{2r}(z_0))}. \tag{A.3}$$

证明。为证明 (A.1)，对于 $v_1' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $X' = (t,x',v_1')$ 和 $X_1' = (t_1,x_1',v_1')$，我们注意到

$$|(g-p_{X_1'})(X')| \le |(g-p_{X_1'})(X') - (g-p_{\overline{X}_1'})(X')| + |(g-p_{\overline{X}_1'})(X')| =: J_1 + J_2, \tag{A.4}$$

其中，$\overline{X}_1' = (t,\overline{x}_1',v_1')$，且 $\overline{x}_1' := x_1' + (t-t_1)v_1'$；$p_{X_1'}$ 和 $p_{\overline{X}_1'}$ 分别是 k阶 g在 X_1' 和 $\overline{X}_1'$处的泰勒多项式。由 [IS21、定义 2.3] 中的 (2.3) 可知

$$p_{(t,x',v')}((t,x',v')\circ(t_2,x_2',0)) = \sum_{2i+3j\le k}\mathcal{D}^i\nabla_{x'}^j g(t,x',v')(t_2)^i\cdot(x_2')^j,$$

其中，$p_{(t,x',v')}$ 是 g 在 (t',x',v') 处的 k阶泰勒多项式。利用这一点以及以下观察结果$X' = X_1'\circ(t-t_1,$ $x'-\overline{x}_1',0)$ 和 $X' = \overline{X}_1'\circ(0,x'-\overline{x}_1',0)$，可得

$$\begin{aligned} J_1 &\le \sum_{j=0}^{l}|x'-\overline{x}_1'|^j|\partial_x^j g(t_1,x_1') - \partial_x^j g(t,\overline{x}_1') - (\sum_{i=1}^{k_j}\partial_x^j\mathcal{D}^i g(t_1,x_1')(t-t_1)^i|,\\ J_2 &\le |g(t,x') - g(t,\overline{x}_1') - \sum_{j=1}^{m}\partial_x^j g(t,\overline{x}_1')(x-\overline{x}_1')^j|, \end{aligned} \tag{A.5}$$

其中 $k-2 < 2k_j + 3j \le k$ 和 $k-3 < 3m \le k$。根据微积分基本定理，我们有 e

$$J_1 + J_2 \le \sum_{j=0}^{l-1}|t-t_1|^{k_j}|x'-x_1'-(t-t_1')v_1'|^{j+\frac{(k+\epsilon)-(2k_j+3l)}{2}}[\mathcal{D}^{k_j}\partial_x^j g]_{C^{(k+\epsilon)-(2k_j+3j)}(\gamma_-\cap\mathcal{Q}_r(z_0))},$$

$$+|x'-x_1'-(t-t_1')v_1'|^{\frac{k+\epsilon}{3}}[\partial_x^l g]_{C_x^{\frac{k+\epsilon-3m}{3}}(\gamma_-\cap\mathcal{Q}_r(z_0))},$$

这意味着 (A.1)。

另一方面，(A.2) 可由下式推出

$$\frac{\left(|t-t'|^{\frac12}+|x-x'-(t-t')v|^{\frac13}\right)^\epsilon}{|t-t'|^{\frac{\epsilon}{3}}+|x-x'|^{\frac{\epsilon}{3}}}\le c\langle v\rangle^{\frac{\epsilon}{3}}.$$

至此，证明完毕。 □

Appendix B. Perturbation argument with unbounded right-hand side

这里，我们通过基于 [KLN25] 的扰动论证给出引理 2.5 的证明。

引理 2.5 的证明。我们假设 $\mathcal{Q}_1$ 是一个单侧柱体，因为关于双侧柱体的估计可如 [RW25, 引理 2.23] 中那样直接推出。固定 $r\le\frac14$。令 f_1 为一个弱解，满足

$$\begin{cases}(\partial_t+v\cdot\nabla_x)f_1-\operatorname{div}_v(A\nabla_v f_1)=0 & \text{in } \mathcal{Q}_r,\\ f_1=f & \text{in } \partial_{\mathrm{kin}}\mathcal{Q}_r,\end{cases}$$

并且令 f_2 为下列方程的弱解

$$\begin{cases}(\partial_t+v\cdot\nabla_x)f_2-\operatorname{div}_v(A(0)\nabla_v f_2)=0 & \text{in } \mathcal{Q}_{\frac r2},\\ f_2=f_1 & \text{in } \partial_{\mathrm{kin}}\mathcal{Q}_{\frac r2}.\end{cases}$$

注意到 $f-f_1$ 满足

$$(\partial_t+v\cdot\nabla_x)(f-f_1)-\operatorname{div}_v(A\nabla_v(f-f_1))=B\nabla_v f+F-\operatorname{div}_v(G)\quad\text{in } \mathcal{Q}_r,$$

并且在 $\partial_{\mathrm{kin}}\mathcal{Q}_r$上满足 $f-f_1=0$。因此，通过用 $f-f_1$自身测试关于 $f-f_1$ 的方程，我们得到

$$\fint_{\mathcal{Q}_r}|\nabla_v(f-f_1)|^2\,dz\le c\left(r^2\|B\|_{L^\infty(\mathcal{Q}_r)}^2\int_{\mathcal{Q}_r}|\nabla_v f|^2\,dz+r^4\|F\|_{L^\infty(\mathcal{Q}_r)}+r^{2+2\epsilon}[G]_{C^\epsilon(\mathcal{Q}_r)}\right),\tag{B.1}$$

其中我们使用了 $-\operatorname{div}_v(G)=-\operatorname{div}_v(G-G(0))$，以及 Poincaré 不等式，从而得到

$$\fint_{\mathcal{Q}_r}|f-f_1|^2\,dz\le cr^2\fint_{\mathcal{Q}_r}|\nabla_v(f-f_1)|^2\,dz$$

这使得可以将 (B.1) 右端项中的该项吸收到左端中。接下来由 [KLN25，引理 4.6] 以及 (B.1)，我们有

$$\begin{aligned}\fint_{\mathcal{Q}_{\frac r2}}|\nabla_v(f_1-f_2)|^2\,dz\le cr^{2\epsilon}\fint_{\mathcal{Q}_r}|\nabla_v f_1|^2\,dz&\le c(r^{2\epsilon}+r^2\|B\|_{L^\infty(\mathcal{Q}_r)})\fint_{\mathcal{Q}_r}|\nabla_v f|^2\,dz\\&\quad+c\left(r^4\|F\|_{L^\infty(\mathcal{Q}_r)}+r^{2+2\epsilon}[G]_{C^\epsilon(\mathcal{Q}_r)}\right),\end{aligned}\tag{B.2}$$

其中 $c=c(n,\Lambda,\epsilon,\|A\|_{C^\epsilon(\mathcal{Q}_1)})$。现在利用 (B.1) 和 (B.2)，并按照 [KLN25 中引理 5.7] 的证明思路，取 $w=f_1$、$g=f_2$ 和 $\alpha=\beta=\epsilon$，即可推出

$$\begin{aligned}\fint_{\mathcal{Q}_\rho}|\nabla_v f-(\nabla_v f)_{\mathcal{Q}_\rho}|^2\,dz\le c(\rho/r)^{4n+2+2\epsilon}\fint_{\mathcal{Q}_r}|\nabla_v f-(\nabla_v f)_{\mathcal{Q}_r}|^2\,dz+c(r^{2\epsilon}+r^2\|B\|_{L^\infty(\mathcal{Q}_r)})\fint_{\mathcal{Q}_r}|\nabla_v f|^2\,dz\\+c\left(r^{4n+2+2\epsilon}[G]_{C^\epsilon(\mathcal{Q}_r)}+r^{4n+2+2}\|F\|_{L^\infty(\mathcal{Q}_r)}\right)\end{aligned}$$

对于某个常数 $c = c(n, \Lambda, \epsilon, \|A\|_{C^\epsilon(\mathcal{Q}_1)})$。现在应用 [KLN25 中引理 5.7]，所用的技术迭代引理，可得

$$\|\nabla_v f\|_{L^\infty(\mathcal{H}_r)} \le c(\|\nabla_v f\|_{L^2(\mathcal{Q}_{\frac{1}{2}})} + \|F\|_{L^\infty(\mathcal{Q}_{\frac{1}{2}})} + [G]_{C^\epsilon(\mathcal{Q}_{\frac{1}{2}})}). \tag{B.3}$$

另一方面，由引理 2.4 和 [GIMV19], , 对于任意 $\delta \in (0, 1)$ 以及任意仿射函数$l = a + b \cdot v$，我们有

$$[f_2]_{C^{1+\delta}_\ell(\mathcal{Q}_{\frac{r}{4}})} \le cr^{-(1+\delta)} \|f_2 - l\|_{L^\infty(\mathcal{Q}_{\frac{3r}{8}})} \le cr^{-(1+\delta)} \fint_{\mathcal{Q}_{\frac{r}{2}}} |(f_2 - l)|^2 \, dz,$$

其中 $c = c(n, \Lambda, \delta)$，因为 $f_2 - l$ 也是一个弱解。因此，取 $l = f_2(0) + \nabla_v f_2(0) \cdot v$ 并利用动理学 Hölder 空间 $C^{1+\delta}$的定义，我们对任意 $\rho \in (0, 1/2)$ 推得

$$\fint_{\mathcal{Q}_{\rho r}} |f_2 - l|^2 \, dz \le c\rho^{2(1+\delta)} \fint_{\mathcal{Q}_{\frac{r}{2}}} |f_2 - l|^2 \, dz. \tag{B.4}$$

现在我们要估计以下各项。

$$\fint_{\mathcal{Q}_{\rho r}} |f - l|^2 \, dz \le c \fint_{\mathcal{Q}_{\rho r}} |f - f_1|^2 \, dz + c \fint_{\mathcal{Q}_{\rho r}} |f_1 - f_2|^2 \, dz + c \fint_{\mathcal{Q}_{\rho r}} |f_2 - l|^2 \, dz =: \sum_{i=1}^{3} J_i.$$

利用庞加莱不等式和 (B.1)，我们估计 J_1 如下

$$\begin{aligned} J_1 &\le \rho^{-(4n+2)} \fint_{\mathcal{Q}_r} |f - f_1|^2 \, dz \\ &\le \rho^{-(4n+2)} r^2 \fint_{\mathcal{Q}_r} |\nabla_v (f - f_1)|^2 \, dz \\ &\le c\rho^{-(4n+2)} r^2 \left(r^2 \|B\|^2_{L^\infty(\mathcal{Q}_r)} \int_{\mathcal{Q}_r} |\nabla_v f|^2 \, dz + r^4 \|F\|_{L^\infty(\mathcal{Q}_r)} + r^{2+2\epsilon} [G]_{C^\epsilon(\mathcal{Q}_r)} \right). \end{aligned}$$

J_2 的估计可直接由 (B.2) 得出。对于项 J_3，由 (B.4) 可知

$$J_3 \le c\rho^{2(1+\delta)} \fint_{\mathcal{Q}_r} |f_2 - l|^2 \, dz \le c\rho^{2(1+\delta)} \left(J_1 + J_2 + \fint_{\mathcal{Q}_r} |f - l|^2 \, dz \right).$$

综上所述，我们推出

$$\begin{aligned} \fint_{\mathcal{Q}_{\rho r}} |f - l|^2 \, dz \le c\rho^{2(1+\delta)} \fint_{\mathcal{Q}_r} |f - l|^2 \, dz + c\rho^{-(4n+2)} (r^4 \|B\|^2_{L^\infty(\mathcal{Q}_r)} + r^{2+2\epsilon}) \|\nabla_v f\|_{L^\infty(\mathcal{Q}_r)} \\ + c\rho^{-(4n+2)} r^4 \|F\|_{L^\infty(\mathcal{Q}_r)} + r^{2+2\epsilon} [G]_{C^\epsilon(\mathcal{Q}_r)}. \end{aligned}$$

现在我们选取$\delta = \frac{1+\epsilon}{2}$和 $\rho = \rho(n, \Lambda, \epsilon)$，使得

$$\rho^{2+2\delta-(2+2\epsilon)} = \rho^{\frac{1-\epsilon}{2}} \le \frac{1}{4c}. \tag{B.5}$$

于是，如同 [KLN25的证明中那样，由引理5.6] 并结合(B.3)，对任意 $r \le \frac{1}{4}$ 我们得到

$$\fint_{\mathcal{Q}_r} \frac{|f - l|^2}{r^{2(1+\epsilon)}} \, dz \le c(\|\nabla_v f\|_{L^2(\mathcal{Q}_{\frac{1}{2}})} + \|F\|_{L^\infty(\mathcal{Q}_{\frac{1}{2}})} + [G]_{C^\epsilon(\mathcal{Q}_{\frac{1}{2}})}), \tag{B.6}$$

其中 $c = c(n, \Lambda, \epsilon, \|A\|_{C^\epsilon(\mathcal{Q}_1)}\ \|B\|_{L^\infty(\mathcal{Q}_1)})$。最后，注意到 $\widetilde{f} := f - l$ 求解

$$(\partial_t + v \cdot \nabla_v)\widetilde{f} - \mathrm{div}_v(A\nabla_v \widetilde{f}) = B \cdot \nabla_v \widetilde{f} + \widetilde{F} - \mathrm{div}_v(\widetilde{G}),$$

~ ~其中 $F := F + B \cdot \nabla_v f(0)$，且 $G := G - A\nabla_v f(0)$。因此，利用 [GIMV19],，我们推导得

$$\|\widetilde{f}\|^2_{L^\infty(\mathcal{Q}_{\frac{r}{2}})} \le c\Big(\fint_{\mathcal{Q}_r} |\widetilde{f}|^2 \, dz + r^4 \|\widetilde{F}\|_{L^\infty(\mathcal{Q}_r)} + r^{2+2\epsilon} [\widetilde{G}]_{C^\epsilon(\mathcal{Q}_r)} \Big).$$

现在结合这一点、(B.3) 和 (B.6)，再利用能量估计可知，对任意 $r \le \frac{1}{4}$，

$$\|f - l\|_{L^\infty(\mathcal{Q}_{\frac{r}{2}})} \le c r^{1+\epsilon} \big(\|f\|_{L^1(\mathcal{Q}_{\frac{1}{2}})} + \|F\|_{L^\infty(\mathcal{Q}_{\frac{1}{2}})} + [G]_{C^\epsilon(\mathcal{Q}_{\frac{1}{2}})} \big).$$

由此得到所需的估计。 □

Appendix C. Properties of 1D solutions with in-flow condition

本节的目标是，在具有吸收边界条件和流入边界条件的半空间中，求得一维 Kolmogorov 方程的一个无限可数齐次解族，并建立这些解的一些精细性质。对于我们的主定理，我们只需在 ϕ_0、$\phi_{\pm 1}$、ψ_0 中使用这些结果。尽管其中一些结果可能已在文献中得到证明，我们仍决定尽可能给出自洽的证明，因为我们相信这样的阐述本身也具有独立价值。

我们的分析基于用特里科米合流超几何函数 $U(a,b,z)$ 表示解。首先，让我们回顾 $U(a,b,z)$ 的若干基本性质，这些性质可见于[DLMF] 和 [AS64]:

$$U'(a,b,z) = -aU(a+1,b+1,z), \tag{C.1}$$

$$z(a+1)U(a+2,b+2,z) + (z-b)U(a+1,b+1,z) - U(a,b,z) = 0, \tag{C.2}$$

$$zU'(a,b,z) = a\big[(1+a-b)U(a+1,b,z) - U(a,b,z)\big], \tag{C.3}$$

$$a(a-b+1)U(a+1,b,z) + (b-2a-z)U(a,b,z) + U(a-1,b,z) = 0, \tag{C.4}$$

$$U(a,b,z) = \frac{\Gamma(1-b)}{\Gamma(a-b+1)} + O(z^{1-b}) \quad \text{as } z \to 0, \quad \text{if } 0 < b < 1, \tag{C.5}$$

$$U(a,b,z) = \frac{\Gamma(b-1)}{\Gamma(a)} z^{1-b} + \frac{\Gamma(1-b)}{\Gamma(a-b+1)} + O(z^{2-b}), \quad \text{as } z \to 0, \quad \text{if } 1 < b < 2, \tag{C.6}$$

$$U(a,b,z) = \frac{\Gamma(b-1)}{\Gamma(a)} z^{1-b} + O(z^{2-b}), \quad \text{as } z \to 0, \quad \text{if } 2 < b, \tag{C.7}$$

$$U(a,b,z) \le c(a,b) z^{-a} \quad \text{when } z \gg 1, \tag{C.8}$$

$$U(a,b,z) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-z\xi} \xi^{a-1} (1+\xi)^{b-a-1} \, d\xi \quad \text{for any } a > 0, \quad z > 0, \tag{C.9}$$

$$U(a,b,z) = z^{1-b} U(a-b+1, 2-b, z), \tag{C.10}$$

此外，注意到 $U(a,b,z)$ 在沿 $(-\infty, 0]$ 切开的复平面上是解析的。

C.1. 具有吸收边界条件的一维解。利用这些公式，我们找到了一族满足一维吸收边界条件的柯尔莫哥洛夫方程的解。注意，函数ϕ_0 已在文献中出现；例如参见 [GJW99]。

引理 C.1. 对任意整数 $m \geq -1$，定义

$$\phi_m(x,v) \coloneqq \begin{cases} c_m x^{\lambda_m} U\left(-\frac{1}{6}-m, \frac{2}{3}, -\frac{v^3}{9x}\right) & \text{若 } v<0, \\ c_m M_m x^{\lambda_m} e^{-\frac{v^3}{9x}} U\left(\frac{5}{6}+m, \frac{2}{3}, \frac{v^3}{9x}\right) & \text{若 } v \geq 0, \end{cases} \tag{C.11}$$

其中记

$$c_m \coloneqq \begin{cases} 1 & \text{if } m=-1, \\ (-1)^m & \text{if } m \geq 0, \end{cases} \tag{C.12}$$

and

$$\lambda_m \coloneqq 1/6+m \quad \text{and} \quad M_m = \frac{\Gamma(7/6+m)}{\Gamma(1/6-m)}.$$

则 ϕ_m 是一个经典解，满足

$$\begin{cases} v\partial_x \phi_m - \partial_{vv}\phi_m = 0 & \text{in } \{x>0\}\times\mathbb{R}, \\ \phi_m = 0 & \text{in } \{x=0\}\times\{v>0\}. \end{cases} \tag{C.13}$$

此外，对任意 $m \geq 0$， ϕ_m 是(C.13)的弱解，且 ϕ_{-1} 是

$$v\partial_x\phi_{-1} - \partial_{vv}\phi_{-1} = 0 \quad \text{in } ((1/R^3,\infty)\times\mathbb{R}) \cup ((0,\infty)\times(-\infty,-1/R)) \tag{C.14}$$

对任意 $R>0$。

Re注记 C.2。注意，由于常数 c_m，当 $v \geq 0$时成立 $\phi_m \geq 0$.

注记 C.3。读者可能会想，是否能够找到(C.13)的、具有不同于 $\lambda_m = \frac{1}{6}+m$的齐次性的解。我们在引理 3.11中证明这是不可能的。然而，请注意，若将值 λ_m 替换为 a，并将(C.11)中的$-\frac{1}{6}-m$ 和 $\frac{5}{6}+m$ 分别替换为 $-a<0$ 和 $\frac{2}{3}+a$，则相应的函数 ϕ 除 $\{v=0\}$外仍将求解(C.13)。然而，不可能找到 M，使得 ϕ 在穿过 $\{v=0\}$时为 C^1。更确切地说，若我们考虑一个函数

$$\phi(x,v) \coloneqq \begin{cases} x^a U\left(-a, \frac{2}{3}, -\frac{v^3}{9x}\right) & \text{if } v \leq 0, \\ M x^a e^{-\frac{v^3}{9x}} U\left(\frac{2}{3}+a, \frac{2}{3}, \frac{v^3}{9x}\right) & \text{if } v>0 \end{cases} \tag{C.15}$$

对某个常数 $M>0$，则 ϕ 满足 (C.13)，但 $\{v=0\}$ 除外。不过，为确保 $\phi \in C^1$ 在 $\{v=0\}$ 处成立，常数 M 必须满足

$$\lim_{v\nearrow 0}\phi(x,v) = \lim_{v\nearrow 0} x^a \frac{\Gamma(1/3)}{\Gamma(-a+1/3)} = \lim_{v\searrow 0} M x^a \frac{\Gamma(1/3)}{\Gamma(a+1)} = \lim_{v\searrow 0}\phi(x,v),$$

and

$$\begin{aligned} \lim_{v\nearrow 0}\partial_v\phi(x,v) &= \lim_{v\nearrow 0} a x^a \left(-\frac{v^2}{3x}\right)\left(\frac{(-v)^3}{9x}\right)^{-\frac{2}{3}} \frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(-a+1)} \\ &= \lim_{v\searrow 0} -M x^a \left(\frac{2}{3}+a\right)\left(\frac{v^2}{3x}\right)\left(\frac{v^3}{9x}\right)^{-\frac{2}{3}} \frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(a+5/3)} = \lim_{v\searrow 0}\partial_v\phi(x,v), \end{aligned}$$

这里我们使用了 (C.5) 和 (C.6)。这等价于

$$\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(-a+1/3)} = \frac{a}{\frac{2}{3}+a}\frac{\Gamma(a+5/3)}{\Gamma(-a+1)} = -\frac{\Gamma(a+2/3)}{\Gamma(-a)}. \tag{C.16}$$

现在我们考虑以下三种情况。

- $a, a+\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$。由

$$\Gamma(\xi)\Gamma(1-\xi) = \tfrac{\pi}{\sin(\pi\xi)} \text{ when } \xi \notin \mathbb{Z}, \tag{C.17}$$

  我们有

$$-\Gamma(1-(-a))\Gamma(-a) = -\frac{\pi}{\sin(\pi(-a))} \quad \text{and} \quad \Gamma(1-(a+2/3))\Gamma(a+2/3) = \frac{\pi}{\sin(\pi(a+2/3))}.$$

  为了得到（C.1 6），应有 $(a+a+2/3) = 1+2k$，对任意 $k \geq 0$ 均成立，由此可得 $a = k+1/6$。

- $a \in \mathbb{Z}$ 和 $a+\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$。于是我们得到

$$\Gamma(1-(-a))\Gamma(-a) \in \mathbb{Z} \quad \text{and} \quad \Gamma(1-(a+2/3))\Gamma(a+2/3) = \frac{\pi}{\sin(\pi(a+2/3))} = \frac{\pi}{\pm\sqrt{3}/2} \notin \mathbb{Z},$$

  这意味着 (C.16) 永远不会发生。

- $a \notin \mathbb{Z}$ 和 $a+\frac{2}{3} \in \mathbb{Z}$。类似地，我们得到 (C.16) 不可能成立。

因此，我们发现，对于所有形如 (C.15) 的 (C.13) 的解，必有 $a = \frac{1}{6}+m$。

由于 U 在 $(-\infty, 0]$ 中存在支割，证明引理 C.1 时需要特别谨慎。

引理 C.1 的证明。首先，我们断言，对于任意 $m \geq -1$，函数

$$U\left(-\frac{1}{6}-m, \frac{2}{3}, z\right) \quad \text{and} \quad e^z U\left(\frac{5}{6}+m, \frac{2}{3}, -z\right)$$

求解库默尔方程

$$\left(\frac{1}{6}+m\right)\Psi_m(z) + \left(\frac{2}{3}-z\right)\Psi_m'(z) + z\Psi_m''(z) = 0. \tag{C.18}$$

分别在 $z>0$ 和 $z<0$ 中。对于第一个函数而言，这似乎是一个标准事实（参见 [DLMF, 13.2.6]），但对于第二个函数则不那么常见。因此，我们手动计算。首先，由 (C.1) 可知

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\left(e^z U\left(a,b,-z\right)\right) &= e^z U\left(a,b,-z\right) - e^z U'\left(a,b,-z\right) \\ &= e^z\big(U\left(a,b,-z\right) + aU\left(a+1,b+1,-z\right)\big),\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dz^2}\big(e^z U\left(a,b,-z\right)\big) &= e^z\big(U\left(a,b,-z\right) + 2aU\left(a+1,b+1,-z\right) - aU'(a+1,b+1,-z)\big) \\ &= e^z\big(U\left(a,b,-z\right) + 2aU\left(a+1,b+1,-z\right) + a(a+1)U(a+2,b+2,-z)\big).\end{aligned}$$

现在令 $a_m = \frac{5}{6}+m$ 和 $b = \frac{2}{3}$，并将 $\Psi_m(z) = e^z U(a_m, b, -z)$ 代入，计算 (C.18) 中的左端。由此得到，

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{6}+m\right)e^z U\left(a_m,b,-z\right) + \left(\frac{2}{3}-z\right)\left(e^z U\left(a_m,b,-z\right)\right)' + z\left(e^z U\left(a_m,b,-z\right)\right)'' \\ &= e^z\left[\left(\frac{1}{6}+m\right)U\left(a_m,b,-z\right) + \left(\frac{2}{3}-z\right)\left(U\left(a_m,b,-z\right) + a_m U\left(a_{m+1},b+1,-z\right)\right)\right] \\ &\quad + ze^z\left[U\left(a_m,b,-z\right) + 2a_m U\left(a_{m+1},b+1,-z\right) + a_m a_{m+1} U\left(a_{m+2},b+2,-z\right)\right] \\ &= e^z\left(a_m U\left(a_m,b,-z\right) + a_m\left(\frac{2}{3}+z\right)U\left(a_{m+1},b+1,-z\right) + za_m a_{m+1} U\left(a_{m+2},b+2,-z\right)\right)\end{aligned}$$

$$= -a_m e^{-z}\left(-U\left(a_m, b, -z\right) + \left(-z - \frac{2}{3}\right) U\left(a_m + 1, b + 1, -z\right) + (-z)(a_m + 1) U\left(a_m + 2, b + 2, -z\right)\right)$$
$$= 0,$$

最后一行中我们应用了 (C.2)。这意味着，对于 $z \in (-\infty, 0)$，$e^z U(a_m, b, -z)$ 是 (C.18) 的一个解。类似地，可以证明，对于 $z \in (0, \infty)$，$U(-\frac{1}{6} - m, \frac{2}{3}, z)$ 也是 (C.18) 的一个解。
通过简单计算可知（例如见 [RW25]），只要 Ψ_m 满足 (C.18)，$x^{\frac{1}{6}+m}\Psi_m(-v^3/(9x))$ 就是 $v\partial_x g - \partial_{vv} g = 0$ 的一个解。因此，我们得到

$$g_{m,1}(x, v) \coloneqq x^{\frac{1}{6}+m} U\left(-\frac{1}{6} - m, \frac{2}{3}, -\frac{v^3}{9x}\right) \quad \text{for } (x, v) \in D_1 := \{x > 0\} \times \{v < 0\}, \tag{C.19}$$

and

$$g_{m,2}(x, v) \coloneqq M_m x^{\frac{1}{6}+m} e^{-\frac{v^3}{9x}} U\left(\frac{5}{6} + m, \frac{2}{3}, \frac{v^3}{9x}\right) \quad \text{for } (x, v) \in D_2 := \{x > 0\} \times \{v > 0\} \tag{C.20}$$

是.....的解

$$v\partial_x g_{m,i} - \partial_{vv} g_{m,i} = 0 \quad \text{in } D_i$$

对每个 $i \in \{1, 2\}$ 均成立。

为了得出 (C.11) 中定义的 ϕ_m 是经典解，还需验证

$$g_{m,1}(x, 0) = g_{m,2}(x, 0), \quad \partial_x g_{m,1}(x, 0) = \partial_x g_{m,2}(x, 0), \quad \partial_v g_{m,1}(x, 0) = \partial_v g_{m,2}(x, 0), \tag{C.21}$$

and

$$\partial_{vv} g_{m,1}(x, 0) = \partial_{vv} g_{m,2}(x, 0) = 0. \tag{C.22}$$

- 对于 (C.21) 中的第一个结论，我们回顾 $\lambda_m = 1/6 + m$ 和 $M_m = \Gamma(7/6 + m)/\Gamma(1/6 - m)$。由 (C.5) 和 $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$,

$$g_{m,1}(x, 0) = x^{\lambda_m} \frac{\Gamma(1/3)}{\Gamma(1/6 - m)} = x^{\lambda_m} \frac{\Gamma(1/3)}{\Gamma(7/6 + m)} M_m = g_{m,2}(x, 0).$$

- 对于（C.21）中的第二个结论，我们回顾 $a_m = 5/6 + m$ 和 $b = 2/3$。接下来，利用（C.5）、（C.6）和（C.1），我们推导出

$$\begin{aligned}\partial_x g_{m,1}(x, v) &= \lambda_m x^{\lambda_m - 1} U\left(-\lambda_m, b, -\frac{v^3}{9x}\right) + x^{\lambda_m} \frac{v^3}{9x^2} U'\left(-\lambda_m, b, -\frac{v^3}{9x}\right) \\ &= \lambda_m x^{\lambda_m - 1} \frac{\Gamma(1/3)}{\Gamma(-\lambda_m - b + 1)} + O(v).\end{aligned}$$

同样地，我们得到

$$\partial_x g_{m,2}(x, v) = M_m \lambda_m x^{\lambda_m - 1} e^{-\frac{v^3}{9x}} U\left(a_m, b, -z\right) + O(v),$$

这意味着

$$\partial_x g_{m,1}(x, 0) = \frac{\Gamma(1/3)}{\Gamma(1/6 - m)} \lambda_m x^{\lambda_m - 1} = \partial_x g_{m,2}(x, 0).$$

• 对于 (C.21) 中的第三个断言，由 (C.5)、(C.6) 和 (C.1) 可知,

$$\begin{aligned}\partial_v g_{m,1}(x,v) &= -x^{\lambda_m}\frac{v^2}{3x}U'\left(-\lambda_m, b, -\frac{v^3}{9x}\right) = \underbrace{-\lambda_m x^{\lambda_m}\frac{v^2}{3x}U\left(-\lambda_m+1, b+1, -\frac{v^3}{9x}\right)}_{J_1} \\ &= -\lambda_m\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(-\lambda_m+1)}x^{\lambda_m}\frac{v^2}{3x}\left(-\frac{v^3}{9x}\right)^{-\frac{2}{3}} + O(v),\end{aligned} \tag{C.23}$$

and

$$\begin{aligned}\partial_v g_{m,2}(x,v) &= \underbrace{M_m x^{\lambda_m}\left[\left(-\frac{v^2}{3x}\right)e^{-\frac{v^3}{9x}}U\left(a_m, b, \frac{v^3}{9x}\right) + e^{-\frac{v^3}{9x}}\frac{v^2}{3x}U'\left(a_m, b, \frac{v^3}{9x}\right)\right]}_{J_2} \\ &= (-a_m)M_m x^{\lambda_m}\frac{v^2}{3x}e^{-\frac{v^3}{9x}}U\left(a_m+1, b+1, \frac{v^3}{9x}\right) + O(v) \\ &= -M_m a_m\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a_m+1)}x^{\lambda_m}\frac{v^2}{3x}\left(\frac{v^3}{9x}\right)^{-\frac{2}{3}}e^{-\frac{v^3}{9x}} + O(v).\end{aligned} \tag{C.24}$$

在比较 $\partial_v g_{m,\ 1}(x,0)$ 和 $\partial_v g_{m,\ 2}(x,0)$ 之前，我们注意到

$$-a_l = (-5/6 - l) = (1/6 - (l+1)) = \lambda_{-(l+1)} \quad \text{for any integer } l.$$

此外，我们观察到

$$\Gamma(a_m+1) = a_m\Gamma(a_m) = \cdots = \prod_{i=-m}^{m} a_i\Gamma(a_{-m}) = \prod_{i=-m}^{m} a_i\Gamma(-\lambda_{m-1}) = \prod_{i=-m}^{m} a_i\Gamma(-\lambda_m+1),$$

and

$$\Gamma(7/6+m) = \Gamma(\lambda_{m+1}) = \prod_{i=-m}^{m}\lambda_i\Gamma(\lambda_{-m}) = \prod_{i=-m}^{m}\lambda_i\Gamma(1/6-m),$$

这意味着

$$\lambda_m\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(-\lambda_m+1)} = \left(\prod_{i=-m}^{m}\lambda_i\right)a_m\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(-\lambda_m+1)}\left(\prod_{i=-m}^{m}a_i\right)^{-1} = M_m a_m\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a_m+1)}.$$

因此，我们推断

$$\partial_v g_{m,1}(x,0) = -\lambda_m x^{\lambda_m-\frac{1}{3}}3^{\frac{1}{3}}\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(-\lambda_m+1)} = -M_m a_m x^{\lambda_m-\frac{1}{3}}3^{\frac{1}{3}}\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a_m+1)} = \partial_v g_{m,2}(x,0).$$

• 为证明 (C.22)，我们使用 (C.5)、(C.6) 和 (C.1)。对于 $v<0$，回顾 J_2 并注意到

$$\begin{aligned}\partial_{vv} g_{m,1}(x,v) &= -\lambda_m x^{\lambda_m}\frac{2v}{3x}U\left(-\lambda_m+1, b+1, -\frac{v^3}{9x}\right) + \lambda_m x^{\lambda_m}\frac{v^2}{3x}\frac{v^2}{3x}U'\left(-\lambda_m+1, b+1, -\frac{v^3}{9x}\right) \\ &= -\lambda_m x^{\lambda_m}\frac{2v}{3x}\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(-\lambda_m+1)}\left(-\frac{v^3}{9x}\right)^{-\frac{2}{3}} + O(v) \\ &\quad + \lambda_m(\lambda_m-1)x^{\lambda_m}\frac{v^4}{(3x)^2}U\left(-\lambda_m+2, b+2, -\frac{v^3}{9x}\right) \\ &= -\lambda_m x^{\lambda_m}\frac{2v}{3x}\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(-\lambda_m+1)}\left(-\frac{v^3}{9x}\right)^{-\frac{2}{3}} + O(v)\end{aligned}$$

$$+\lambda_m(\lambda_m-1)x^{\lambda_m}\frac{v^4}{(3x)^2}\frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(-\lambda_m+2)}\left(-\frac{v^3}{9x}\right)^{-\frac{5}{3}}$$
$$=O(v).$$

对于 $v>0$，利用 J_1 并采用类似的论证，

$$\begin{aligned}\partial_{vv}g_{m,2}(x,v)&=O(v)+M_mx^{\lambda_m}e^{-\frac{v^3}{9x}}\left[\frac{2v}{3x}U'\left(a_m,b,\frac{v^3}{9x}\right)+\frac{v^2}{3x}\frac{v^2}{3x}U''\left(a_m,b,\frac{v^3}{9x}\right)\right]\\&=O(v)-M_mx^{\lambda_m}e^{-\frac{v^3}{9x}}a_m\frac{2v}{3x}U\left(a_m+1,b+1,\frac{v^3}{9x}\right)+\\&\quad+M_mx^{\lambda_m}e^{-\frac{v^3}{9x}}a_m(a_m+1)\frac{v^4}{9x^2}U\left(a_m+2,b+2,\frac{v^3}{9x}\right)\\&=O(v)+M_mx^{\lambda_m}e^{-\frac{v^3}{9x}}a_m\left[-\frac{2v}{3x}\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a_m+1)}\left(\frac{v^3}{9x}\right)^{-\frac{2}{3}}+a_{m+1}\frac{v^4}{9x^2}\frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(a_m+2)}\left(\frac{v^3}{9x}\right)^{-1-\frac{2}{3}}\right]\\&=O(v).\end{aligned}$$

因此，我们验证了 (C.22)。

因此，我们得出结论，函数 ϕ_m 是下列方程的经典解

$$v\partial_x\phi_m-\partial_{vv}\phi_m=0\quad\text{in }\{x>0\}\times\mathbb{R}.\tag{C.25}$$

此外，我们还 能证明 ϕ_m 满足吸收边界条件，即我们证明了 e

$$\phi_m(0,v)=0\quad\text{if }v>0.\tag{C.26}$$

为此，首先注意到，根据 (C.9)，对于 $m\geq 0$

$$\phi_m(x,v)=(-1)^m\frac{M_m}{\Gamma(a_m)}x^{\lambda_m}e^{-\frac{v^3}{9x}}\int_0^\infty e^{-\frac{v^3}{9x}\xi}\xi^{a_m-1}(1+\xi)^{b-a_m-1}\,d\xi\quad\text{if }v\geq 0.$$

经过变量替换，我们推得

$$\phi_m(x,v)=(-1)^m\frac{M_m}{\Gamma(a_m)}x^{\lambda_m}e^{-\frac{v^3}{9x}}\left(\frac{v^3}{9x}\right)^{\frac{1}{3}}\int_0^\infty e^{-\xi}\xi^{a_m-1}\left(\frac{v^3}{9x}+\xi\right)^{b-a_m-1}d\xi.\tag{C.27}$$

因此，当 $v^3\geq x$ 时，由于 $b-a_m-1<0$，对任意 $m\geq 0$，我们得到

$$|\phi_m(x,v)|\leq cx^{\lambda_m}e^{-\frac{v^3}{9x}}\left(\frac{v^3}{9x}\right)^{\frac{1}{3}+b-a_m-1}\int_0^\infty e^{-\xi}\xi^{a_m-1}\,d\xi\leq cx^{\lambda_m}\left(\frac{v^3}{x}\right)^{-a_m}e^{-\frac{v^3}{9x}}.\tag{C.28}$$

类似地，对于 $m=-1$，由 (C.11)、(C.9) 和 (C.10) 可推得

$$\begin{aligned}\phi_{-1}(x,v)&=M_{-1}x^{-\frac{5}{6}}e^{-\frac{v^3}{9x}}\left(\frac{v^3}{9x}\right)^{\frac{1}{3}}U\left(\frac{1}{6},\frac{4}{3},\frac{v^3}{9x}\right)\\&=\frac{M_{-1}}{\Gamma(1/6)}x^{-\frac{5}{6}}e^{-\frac{v^3}{9x}}\int_0^\infty e^{-\xi}\xi^{-\frac{5}{6}}\left(\frac{v^3}{9x}+\xi\right)^{\frac{1}{6}}d\xi\quad\text{if }v>0.\end{aligned}$$

对于 $v^3\geq x$，我们得到

$$\phi_{-1}(x,v)\leq cx^{-\frac{5}{6}}e^{-\frac{v^3}{9x}}\left[\left(\frac{v^3}{x}\right)^{\frac{1}{6}}\int_0^{\frac{v^3}{9x}}e^{-\xi}\xi^{-\frac{5}{6}}\,d\xi+\int_{\frac{v^3}{9x}}^\infty e^{-\xi}\xi^{-\frac{4}{6}}\right]\leq cx^{-\frac{5}{6}}e^{-\frac{v^3}{9x}}\left(\frac{v^3}{x}\right)^{\frac{1}{6}}.\tag{C.29}$$

因此，对于任意 $v > 0$，我们有 $\phi(x, v) \to 0$ as $x \to 0$。故由 (C.25) 和 (C.26) 可知，对于任意 $m \geq -1$, 函数 ϕ_m是 (C.13) 的经典解。
最后，我们想证明，对于任意 $m \geq 0$， ϕ_m 分别在弱意义下满足 (C.13)，而 ϕ_{-1} 满足 (C.14)。

- 假设 $m \geq 0$。首先，我们证明

$$\partial_v^k \phi_m \in L^2(H_R) \tag{C.30}$$

对于任意 $R > 0$ 和 $k = 1, 2$。为此，对公式 (C.19) 和 (C.20) 应用算子 ∂_v^2，并利用 (C.1)，我们推出

$$\begin{aligned} |\partial_v^2 g_{m,1}| &\leq c x^{\lambda_m} \left(\frac{|v|}{x} \left| U'\left(-\lambda_m, \frac{2}{3}, -\frac{v^3}{9x}\right) \right| + \frac{|v|^4}{x^2} \left| U''\left(-\lambda_m, \frac{2}{3}, -\frac{v^3}{9x}\right) \right| \right) \\ &\leq c x^{\lambda_m} \left(\frac{|v|}{x} U\left(-\lambda_{m-1}, \frac{5}{3}, -\frac{v^3}{9x}\right) + \frac{|v|^4}{x^2} U\left(-\lambda_{m-2}, \frac{8}{3}, -\frac{v^3}{9x}\right) \right), \end{aligned} \tag{C.31}$$

and

$$\begin{aligned} |\partial_v^2 g_{m,2}| &\leq c x^{\lambda_m} e^{-\frac{v^3}{18x}} \frac{v}{x} \left(\left| U\left(a_m, \frac{2}{3}, \frac{v^3}{9x}\right) \right| + \left| U'\left(a_m, \frac{2}{3}, \frac{v^3}{9x}\right) \right| + \left| U''\left(a_m, \frac{2}{3}, \frac{v^3}{9x}\right) \right| \right) \\ &\leq c x^{\lambda_m} e^{-\frac{v^3}{18x}} \frac{v}{x} \left(U\left(a_m, \frac{2}{3}, \frac{v^3}{9x}\right) + U\left(a_{m+1}, \frac{5}{3}, \frac{v^3}{9x}\right) + U\left(a_{m+2}, \frac{8}{3}, \frac{v^3}{9x}\right) \right), \end{aligned}$$

其中我们用到了 $(v^2/x)^2 e^{-\frac{v^3}{9x}} \leq c\frac{v}{x} e^{-\frac{v^3}{18x}}$ 这一事实。注意

$$U(a, b, \pm v^3/9x) \leq \begin{cases} c & \text{if } \pm v^3 \leq x, \\ c(|v|^3/9x)^{-a} & \text{if } \pm v^3 \geq x \end{cases} \tag{C.32}$$

对于某个常数 $c = c(a, b)$，其中我们用到了 $U(a, b, z)$ 关于 z 变量是解析的这一事实，以及 (C.8)。利用这些性质，我们得到

$$\begin{aligned} &\int_{H_R \cap \{x \leq -v^3\}} |\partial_v^2 \phi_m|^2 + \int_{H_R \cap \{x \geq |v|^3\}} |\partial_v^2 \phi_m|^2 + \int_{H_R \cap \{x \leq v^3\}} |\partial_v^2 \phi_m|^2 \\ &\leq c \left(\int_{-R}^0 \int_{x \leq |v|^3} |v|^{-4+6\lambda_m} \, dx \, dv + \int_0^{R^3} \int_{|v|^3 \leq x} x^{2(\lambda_m - 1)} v^2 \, dv \, dx + \int_0^R \int_{x \leq v^3} |v|^{-4+6\lambda_m} \, dx \, dv \right) \\ &\leq c \left(\int_{-R}^0 |v|^{-1+6\lambda_m} \, dv + \int_0^{R^3} x^{2\lambda_m - 1} \, dx + \int_0^R |v|^{-1+6\lambda_m} \, dx \, dv \right) \leq c, \end{aligned} \tag{C.33}$$

其中我们还用到了这样一个事实：$(v^3/x)^k e^{-\frac{v^3}{18x}} \leq c(k)$。类似地，我们可以证明 $\partial_v \phi_m \in L^{2+}(H_R)$。然后，由方程可得 $v\partial_x \phi_m = \partial_{vv} \phi_m$，从而得到 $v\partial_x \phi_m \in L^2(H_R)$。因此，根据注2.2， ϕ_m 是方程(C.13)的一个弱解。

- 假设 $m = -1$。类似地，我们证明

$$\partial_v^k \phi_{-1} \in L^2(D_R)$$

对任意 $R>1$和 $k=1$，2，其中我们记 $D_R:=(0,R^3)\times(-R,-1/R)$。为证明 $k=2$ 的情形，我们使用 (C.31) 和 $\lambda_m=\lambda_{-1}$，得到

$$\int_{D_R\cap\mathcal{R}^+}|\partial_v^2\phi_{-1}|^2+\int_{(1/R)^3}^{R^3}\int_{-R}^{R}|\partial_v^2\phi_{-1}|^2\le c\left(\int_{-R}^{-1/R}\int_{x<|v|^3}|v|^{-4+6\lambda_{-1}}\,dx\,dv+1\right)\le c,$$

其中我们还利用了 ϕ_{-1} 在远离边界处光滑这一事实。类似地，我们可以证明 $\partial_v\phi_m\in L^2(D_R)$。此外，$\phi_{-1}$ 是(C.13)的经典解，$v\partial_x\phi_{-1}=\partial_{vv}\phi_{-1}\in L^2(D_R)$，由此可知它是(C.14)的弱解。

至此证明完毕。 □

注 C.4. 这里我们指出，如同(C.30)中那样，我们可以得到更一般的结果，这些结果用于引理 5.2。对任意 $\epsilon>0$和 $k=0$，1、2，我们有

$$v^k\partial_v^{k+1}\phi_0\in L^{8-\epsilon}(H_R)\quad\text{and}\quad v^k\partial_v^{k+2}\phi_0\in L^{\frac{8}{3}-\epsilon}(H_R).\tag{C.34}$$

对于 $k=0$，利用(C.23)、(C.24)和(C.32)，我们有

$$\begin{aligned}&\int_{H_R\cap\{x\le-v^3\}}|\partial_v\phi_0|^{8-\epsilon}+\int_{H_R\cap\{x\ge|v|^3\}}|\partial_v\phi_0|^{8-\epsilon}+\int_{H_R\cap\{x\le v^3\}}|\partial_v\phi_0|^{8-\epsilon}\\&\le c\left(\int_{-R}^{0}\int_{x\le|v|^3}|v|^{\frac{-8+\epsilon}{2}}\,dx\,dv+\int_0^{R^3}\int_{|v|^3\le x}(x^{-\frac{5}{6}}v^2)^{8-\epsilon}\,dv\,dx+\int_0^R\int_{x\le v^3}|v|^{\frac{-8+\epsilon}{2}}\,dx\,dv\right)\\&\le c(R).\end{aligned}$$

类似地，我们可以证明 $v^2\phi_{-1}$、$v^3\partial_v\phi_{-1}\in L^{8-\epsilon}(H_R)$。因此，我们证明了(C.34)中的第一个断言，因为由(C.40)，$v^k\partial_v^{k+1}\phi_0$ 是 $\partial_v\phi_0$、$v^2\phi_{-1}$、$v^3\partial_v\phi_{-1}$ 之和。
另一方面，在 (C.33) 中考虑 $|\partial_v^2\phi_m|^{\frac{8}{3}-\epsilon}$而非$|\partial_v^2\phi_m|^2$，我们可直接推出 $\partial_v^2\phi_0\in L^{\frac{8}{3}-\epsilon}(H_R)$。接下来，我们得到

$$\begin{aligned}&\int_{H_R\cap\{x\le-v^3\}}|v^3\partial_v^2\phi_{-1}|^{\frac{8}{3}-\epsilon}+\int_{H_R\cap\{x\ge|v|^3\}}|v^3\partial_v^2\phi_{-1}|^{\frac{8}{3}-\epsilon}+\int_{H_R\cap\{x\le v^3\}}|v^3\partial_v^2\phi_{-1}|^{\frac{8}{3}-\epsilon}\\&\le c\left(\int_{-R}^{0}\int_{x\le|v|^3}|v|^{-\frac{3}{2}(\frac{8}{3}-\epsilon)}\,dx\,dv+\int_0^{R^3}\int_{|v|^3\le x}(x^{-\frac{11}{6}}v^4)^{\frac{8}{3}-\epsilon}\,dv\,dx+\int_0^R\int_{x\le v^3}|v|^{-\frac{3}{2}(\frac{8}{3}-\epsilon)}\,dx\,dv\right)\\&\le c(R).\end{aligned}$$

同样，我们还可以推出 $v^2\partial_v\phi_{-1}\in L^{\frac{8}{3}-\epsilon}(H_R)$ 和 $v^k\partial_v^{k+2}$可表示为这类函数之和。因此，我们可以得出 (C.34) 中的第二个结论。

现在我们讨论函数 ϕ_m 的若干性质，例如 ϕ_m在掠射点 (0, 0) 附近及无穷远处的精确渐近行为、ϕ_m 的正则性，以及 ϕ_m 与ϕ_{m-1}之间的关系。为此，将其拆分为以下几部分较为方便

$$(0,\infty)\times\mathbb{R}=\mathcal{R}^-\cup\mathcal{R}^0\cup\mathcal{R}^+$$

分为以下三个特征区域:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^-&:=\{(x,v)\,:\,0<x\le v^3\quad\text{with } v\ge0\},\\\mathcal{R}^0&:=\{(x,v)\,:\,x\ge v^3\ge-x\quad\text{with } x>0\},\\\mathcal{R}^+&:=\{(x,v)\,:\,0<x\le-v^3\quad\text{with } v\le0\}.\end{aligned}\tag{C.35}$$

我们称 $f_1(x,v)$ 在集合 $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ 上 $\approx f_2(x,v)$，如果存在 $C > 0$，使得对所有 $x, v \in \mathcal{A}$，都有 $C^{-1} f_2(x,v) \leq f_1(x,v) \leq C f_2(x,v)$。

引理 C.5. 设 函数 ϕ_m 按照 (C.11) 为 $m \geq -1$ 定义。则有以下结论 :

- ϕ_0 满足

$$\phi_0(x,v) \approx \begin{cases} x^{\frac{1}{6}} \left(\frac{v^3}{x}\right)^{-\frac{5}{6}} e^{-\frac{v^3}{9x}} & \text{if } (x,v) \in \mathcal{R}^-, \\ x^{\frac{1}{6}} & \text{if } (x,v) \in \mathcal{R}^0, \\ |v|^{\frac{1}{2}} & \text{if } (x,v) \in \mathcal{R}^+. \end{cases} \tag{C.36}$$

- 对任意 $m \geq 1$， ϕ_m 满足

$$\phi_m(x,v) \approx \begin{cases} x^{\frac{1}{6}+m} \left(\frac{v^3}{x}\right)^{-\frac{5}{6}-m} e^{-\frac{v^3}{9x}} & \text{if } (x,v) \in \mathcal{R}^-, \\ x^{\frac{1}{6}+m} & \text{if } (x,v) \in \mathcal{R}^0 \cap (\{x>0\} \times \{v \geq 0\}). \end{cases} \tag{C.37}$$

- ϕ_{-1} 满足

$$\phi_{-1}(x,v) \approx \begin{cases} x^{-\frac{5}{6}} \left(\frac{v^3}{x}\right)^{\frac{1}{6}} e^{-\frac{v^3}{9x}} & \text{if } (x,v) \in \mathcal{R}^-, \\ x^{-\frac{5}{6}} & \text{if } (x,v) \in \mathcal{R}^0, \\ |v|^{-\frac{5}{2}} & \text{if } (x,v) \in \mathcal{R}^+. \end{cases} \tag{C.38}$$

- 函数 ϕ_m 在 $H_1 \cap \mathcal{R}^-$ 上是光滑的，具体而言，对于满足 $x \leq v^{3+\epsilon}$ 的某个 $\epsilon > 0$，有 $(x,v) \in H_1 \cap \mathcal{R}^-$，

$$|D^k \phi_m(x,v)| \leq c(k,m,\epsilon). \tag{C.39}$$

- 对于任意 $m \geq 0$,

$$c_m \partial_x \phi_m(x,v) = c_{m-1} \left(\frac{1}{36} - m^2\right) \phi_{m-1}(x,v), \tag{C.40}$$

其中常数 c_m 由 (C.12) 给出。

我们首先确定函数 ϕ_m的渐近行为。为此，我们关键地使用 (C.9) 中 U 的积分表示公式。注意，公式 (C.37) 并不适用于所有点 $(x,v) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}$，因为函数 ϕ_m 在 $m \geq 1$时会改变符号。这由 (C.36) 和 (C.40) 可知。

(C.36)-(C.38) 的证明。回顾一下 $b = \frac{2}{3}$、 $a_m = \frac{5}{6} + m$和 $\lambda_m = \frac{1}{6} + m$。我们分别考虑两种情况$m \geq 0$ 和 $m = -1$ 。

首先，我们假设 $m \geq 0$。我们将证明分为四个部分。

- 假设 $(x,v) \in \mathcal{R}^-$。利用当 $v > 0$ 时由 (C.27) 给出的 ϕ_m 的显式公式，我们推得，因为 $b - a_m - 1 < 0$

$$\begin{aligned} \phi_m(x,v) &\geq \frac{1}{c} x^{\lambda_m} e^{-\frac{v^3}{9x}} \left(\frac{v^3}{x}\right)^{\frac{1}{3}+b-a_m-1} \int_0^{\frac{v^3}{9x}} e^{-\xi} \xi^{a_m-1} \, d\xi \\ &\geq \frac{1}{c} x^{\lambda_m} e^{-\frac{v^3}{9x}} \left(\frac{v^3}{x}\right)^{-a_m} \int_0^{\frac{1}{9}} e^{-\xi} \xi^{a_m-1} \, d\xi \geq \frac{1}{c} x^{\lambda_m} \left(\frac{v^3}{x}\right)^{-a_m} e^{-\frac{v^3}{9x}} \end{aligned}$$

对某个常数 $c = c(m)$，这里我们用到了 $v^3/x \geq 1$ 这一事实。利用这一点和 (C.28),

$$\phi_m(x,v) \approx x^{\lambda_m} \left(\frac{v^3}{x}\right)^{-a_m} e^{-\frac{v^3}{x}} \quad \text{in } \mathcal{R}^0 \cap (\{x>0\} \times \{v \geq 0\}). \tag{C.41}$$

• 假设 $(x,v) \in \mathcal{R}^0 \cap (\{x>0\}\times\{v\geq 0\})$。如前所述继续推导，并利用$v^3 \leq x$ 以及 $a_m > 0$ 对于 $m \geq 0$ 这一事实，我们观察到

$$\phi_m(x,v) \geq \frac{1}{c}x^{\lambda_m}e^{-\frac{v^3}{9x}}\left(\frac{v^3}{x}\right)^{-a_m}\int_0^{\frac{v^3}{9x}} e^{-\xi}\xi^{a_m-1}\,d\xi \geq \frac{x^{\lambda_m}}{c}\left(\frac{v^3}{x}\right)^{-a_m}\int_0^{\frac{v^3}{9x}}\xi^{a_m-1}\,d\xi \geq cx^{\lambda_m}.$$

此外　　，

$$\begin{aligned}\phi_m(x,v) &\leq cx^{\lambda_m}\left(\frac{v^3}{x}\right)^{\frac{1}{3}}\int_0^{\infty} e^{-\xi}\xi^{a_m-1}\left(\frac{v^3}{9x}+\xi\right)^{b-a_m-1}\,d\xi\\ &\leq cx^{\lambda_m}\left(\frac{v^3}{x}\right)^{\frac{1}{3}}\left[\int_0^{\frac{v^3}{9x}}\xi^{a_m-1}\left(\frac{v^3}{x}\right)^{b-a_m-1}\,d\xi+\int_{\frac{v^3}{9x}}^{\infty}\xi^{b-2}\,d\xi\right]\leq cx^{\lambda_m},\end{aligned}$$

此外，我们还利用了以下事实： $b-2=-5/3<-1$ 和 $a_m>0$。因此，我们得到

$$\phi_m(x,v) \eqsim x^{\lambda_m} \quad \text{in } \mathcal{R}^0\cap(\{x>0\}\times\{v\geq 0\}). \tag{C.42}$$

对于其余区域，即当 $v<0$时，我们只考虑 $m=0$的情形。利用 (C.11)、(C.10)、(C.9) 以及变量替换，我们推导出关于 $v<0$的以下公式，

$$\begin{aligned}\phi_0(x,v) &= x^{\frac{1}{6}}\left(-\frac{v^3}{9x}\right)^{\frac{1}{3}}U\left(\frac{1}{6},\frac{4}{3},-\frac{v^3}{9x}\right)\\ &= \frac{1}{\Gamma(1/6)}x^{\frac{1}{6}}\left(-\frac{v^3}{9x}\right)^{\frac{1}{3}}\int_0^{\infty}e^{\frac{v^3}{9x}\xi}\xi^{-\frac{5}{6}}(1+\xi)^{\frac{1}{6}}\,d\xi = \frac{1}{\Gamma(1/6)}x^{\frac{1}{6}}\int_0^{\infty}e^{-\xi}\xi^{-\frac{5}{6}}\left(-\frac{v^3}{9x}+\xi\right)^{\frac{1}{6}}\,d\xi.\end{aligned}$$

我们强调，该公式对 $m\geq 1$ 无效，因为它要求 $-\frac{1}{6}-m-b+1=\frac{1}{6}-m>0$。

• 假设 $(x,v) \in \mathcal{R}^0\cap(\{x>0\}\times\{v<0\})$。则我们得到

$$\phi_0(x,v) \geq \frac{1}{c}x^{\frac{1}{6}}\int_0^1\xi^{-\frac{5}{6}}\,d\xi \geq \frac{1}{c}x^{\frac{1}{6}}$$

and

$$\phi_0(x,v) \leq cx^{\frac{1}{6}}\left[\int_0^1 e^{-\xi}\xi^{-\frac{5}{6}}\,d\xi+\int_1^{\infty}e^{-\xi}\xi^{-\frac{4}{6}}\,d\xi\right]\leq cx^{\frac{1}{6}},$$

其中我们利用了 $|v|^3\leq x$ 这一事实。综上，我们已证明

$$\phi_0(x,v) \eqsim x^{\frac{1}{6}} \quad \text{in } \mathcal{R}^0\cap(\{x>0\}\times\{v<0\}). \tag{C.43}$$

• 假设 $(x,v) \in \mathcal{R}^+$。注意到

$$\phi_0(x,v) \geq \frac{1}{c}x^{\frac{1}{6}}\left(-\frac{v^3}{x}\right)^{\frac{1}{6}}\int_0^{-\frac{v^3}{9x}}e^{-\xi}\xi^{-\frac{5}{6}}\,d\xi \geq \frac{1}{c}|v|^{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{1}{9}}e^{-\xi}\xi^{-\frac{5}{6}}\,d\xi \geq \frac{1}{c}|v|^{\frac{1}{2}}$$

and

$$\phi_0(x,v) \leq cx^{\frac{1}{6}}\left[\left(-\frac{v^3}{x}\right)^{\frac{1}{6}}\int_0^{-\frac{v^3}{9x}}e^{-\xi}\xi^{-\frac{5}{6}}\,d\xi+\int_{-\frac{v^3}{9x}}^{\infty}e^{-\xi}\xi^{-\frac{4}{6}}\,d\xi\right]\leq cx^{\frac{1}{6}}\left(\left(-\frac{v^3}{x}\right)^{\frac{1}{6}}+1\right)\leq c|v|^{\frac{1}{2}},$$

其中我们用到了这一事实： $x\leq|v|^3$。由此可得

$$\phi_0(x,v) \eqsim |v|^{\frac{1}{2}} \quad \text{in } \mathcal{R}^-. \tag{C.44}$$

由 (C.41)、(C.42)、(C.43) 和 (C.44)，我们得到 (C.36) 和 (C.37)。至此，关于$m \geq 0$的证明完成。

最后，我们考虑 $m = -1$ 的情形。由 (C.11)、(C.9) 和 (C.10)，可得

$$\phi_{-1}(x,v) = \begin{cases} x^{-\frac{5}{6}} U\left(\frac{5}{6}, \frac{2}{3}, -\frac{v^3}{9x}\right) = \frac{1}{\Gamma(5/6)} x^{-\frac{5}{6}} \left(-\frac{v^3}{9x}\right)^{\frac{1}{3}} \int_0^\infty e^{-\xi} \xi^{-\frac{1}{6}} \left(-\frac{v^3}{9x} + \xi\right)^{-\frac{7}{6}} d\xi & \text{if } v < 0, \\ M_{-1} x^{-\frac{5}{6}} e^{-\frac{v^3}{9x}} \left(\frac{v^3}{9x}\right)^{\frac{1}{3}} U\left(\frac{1}{6}, \frac{4}{3}, \frac{v^3}{9x}\right) = \frac{M_{-1}}{\Gamma(1/6)} x^{-\frac{5}{6}} e^{-\frac{v^3}{9x}} \int_0^\infty e^{-\xi} \xi^{-\frac{5}{6}} \left(\frac{v^3}{9x} + \xi\right)^{\frac{1}{6}} d\xi & \text{if } v \geq 0. \end{cases}$$

我们采用与 $m \geq 0$ 的证明类似的论证。

- 假设 $(x,v) \in \mathcal{R}^-$。那么有

$$\phi_{-1}(x,v) \geq \frac{x^{-\frac{5}{6}}}{c} e^{-\frac{v^3}{9x}} \left(\frac{v^3}{x}\right)^{\frac{1}{6}} \int_0^{\frac{v^3}{9x}} e^{-\xi} \xi^{-\frac{5}{6}} d\xi \geq \frac{x^{-\frac{5}{6}}}{c} e^{-\frac{v^3}{9x}} \left(\frac{v^3}{x}\right)^{\frac{1}{6}} \int_0^{\frac{1}{9}} e^{-\xi} \xi^{-\frac{5}{6}} d\xi \geq \frac{x^{-\frac{5}{6}}}{c} e^{-\frac{v^3}{9x}} \left(\frac{v^3}{x}\right)^{\frac{1}{6}},$$

  相应的上界已在 (C.29) 中推出。
- 假设 $(x,v) \in \mathcal{R}^0 \cap (\{x > 0\} \times \{v \geq 0\})$。那么可得

$$\phi_{-1}(x,v) \geq \frac{x^{-\frac{5}{6}}}{c} e^{-\frac{v^3}{9x}} \left(\frac{v^3}{x}\right)^{\frac{1}{6}} \int_0^{\frac{9x}{v^3}} e^{-\xi} \xi^{-\frac{5}{6}} d\xi \geq \frac{x^{-\frac{5}{6}}}{c} \left(\frac{v^3}{x}\right)^{\frac{1}{6}} \int_0^{\frac{9x}{v^3}} \xi^{-\frac{5}{6}} d\xi \geq \frac{x^{-\frac{5}{6}}}{c},$$

  and

$$\phi_{-1}(x,v) \leq c x^{-\frac{5}{6}} e^{-\frac{v^3}{9x}} \left[\left(\frac{v^3}{x}\right)^{\frac{1}{6}} \int_0^{\frac{9x}{v^3}} e^{-\xi} \xi^{-\frac{5}{6}} d\xi + \int_{\frac{9x}{v^3}}^\infty e^{-\xi} \xi^{-\frac{4}{6}} d\xi\right] \leq c x^{-\frac{5}{6}}.$$

- 假设 $(x,v) \in \mathcal{R}^0 \cap (\{x > 0\} \times \{v < 0\})$。则我们有

$$\phi_{-1}(x,v) \geq \frac{x^{-\frac{5}{6}}}{c} \left(-\frac{v^3}{9x}\right)^{\frac{1}{3}-\frac{7}{6}} \int_0^{-\frac{v^3}{9x}} e^{-\xi} \xi^{-\frac{1}{6}} d\xi \geq \frac{x^{-\frac{5}{6}}}{c} \left(-\frac{v^3}{9x}\right)^{-\frac{5}{6}} \int_0^{-\frac{v^3}{9x}} \xi^{-\frac{1}{6}} d\xi \geq \frac{x^{-\frac{5}{6}}}{c},$$

  and

$$\phi_{-1}(x,v) \leq c x^{-\frac{5}{6}} \left(-\frac{v^3}{9x}\right)^{\frac{1}{3}} \left[\left(-\frac{v^3}{9x}\right)^{-\frac{7}{6}} \int_0^{-\frac{v^3}{9x}} e^{-\xi} \xi^{-\frac{1}{6}} d\xi + \int_{-\frac{v^3}{9x}}^\infty e^{-\xi} \xi^{-\frac{4}{3}} d\xi\right] \leq c x^{-\frac{5}{6}}.$$

- 假设 $(x,v) \in \mathcal{R}^+$。则我们得到

$$\phi_{-1}(x,v) \geq \frac{x^{-\frac{5}{6}}}{c} \left(-\frac{v^3}{9x}\right)^{\frac{1}{3}-\frac{7}{6}} \int_0^{-\frac{v^3}{9x}} e^{-\xi} \xi^{-\frac{1}{6}} d\xi \geq \frac{x^{-\frac{5}{6}}}{c} \left(-\frac{v^3}{9x}\right)^{\frac{1}{3}-\frac{7}{6}} \int_0^{\frac{1}{9}} e^{-\xi} \xi^{-\frac{1}{6}} d\xi \geq \frac{|v|^{-\frac{5}{2}}}{c},$$

  and

$$\phi_{-1}(x,v) \leq c x^{-\frac{5}{6}} \left(-\frac{v^3}{9x}\right)^{\frac{1}{3}} \left[\left(-\frac{v^3}{9x}\right)^{-\frac{7}{6}} \int_0^{-\frac{v^3}{9x}} e^{-\xi} \xi^{-\frac{1}{6}} d\xi + \int_{-\frac{v^3}{9x}}^\infty e^{-\xi} \xi^{-\frac{4}{3}} d\xi\right] \leq c|v|^{-\frac{5}{2}}.$$

□

(C.39) 的证明。固定两点 $(x,v) \in H_1 \cap \mathcal{R}^-$，使得 $v^{3+\epsilon} \geq x$ 对某个 $\epsilon > 0$ 成立。利用 (C.11) 及 $v \geq 0$，可知对某个常数 $c \in \mathbb{R}$,

$$\phi_m(x,v) = c x^{\lambda_m} \widetilde{U}\left(a_m, \frac{2}{3}, \frac{v^3}{9x}\right),$$

其中我们记 $\lambda_m := \frac{1}{6} + m$, $a_m := \frac{5}{6} + m$, 以及 $\widetilde{U}(a,b,z) := e^{-z}U(a,b,z)$。由于根据 [DLMF, 13.3.27],

$$\widetilde{U}^{(j)}(a,b,z) = (-1)^j \widetilde{U}(a,b+j,z),$$

我们观察到

$$\begin{aligned} D^k\phi_m(x,v) &= \sum_{\substack{j\in J,\\ 3|A_j|+|B_j|\le 3(\lambda_m+2k)}} C_j x^{A_j} v^{B_j} \widetilde{U}^{(j)}\left(a_m, \frac{2}{3}, \frac{v^3}{9x}\right) \\ &= \sum_{\substack{j\in J,\\ 3|A_j|+|B_j|\le 3(\lambda_m+2k)}} C'_j x^{A_j} v^{B_j} e^{-\frac{v^3}{9x}} U\left(a_m, \frac{2}{3}+j, \frac{v^3}{9x}\right) \end{aligned}$$

对某些常数 C_j、$C'_j \in \mathbb{R}$, 其中 $J = \{0,1,\dots,k\}$。

结合这一点以及对任意 $K>0$、$v^3/x \ge v^{-\epsilon}$, $|z|^K e^{-|z|} \le c(K)e^{-|z|/2}$ 这一事实，并利用 (C.8)，我们推得

$$\begin{aligned} |D^k\phi_m(x,v)| \le cx^{-(\lambda_m+2k)}v^{-3(\lambda_m+2k-a_m)}e^{-\frac{v^3}{9x}} &\le c(k,m)v^{-6(\lambda_m+2k)-a_m}e^{-\frac{v^3}{18x}} \\ &\le c(k,m)v^{-6(\lambda_m+2k)-a_m}e^{-\frac{1}{18v^\epsilon}} \\ &\le c(k,m,\epsilon). \end{aligned} \tag{C.45}$$

这就完成了 (C.39) 的证明。 □

(C.40) 的证明。首先，给定 $\lambda > 0$ 和 $c \in \mathbb{R}$，由 (C.3) 和链式法则可得，

$$\partial_x U(a,b,c/x) = -x^{-1}(c/x)U'(a,b,c/x) = -x^{-1}a\big[(1+a-b)U(a+1,b,c/x) - U(a,b,c/x)\big].$$

因此，我们得到以下公式：

$$\begin{aligned} \partial_x[x^\lambda U(a,b,c/x)] &= \lambda x^{\lambda-1}U(a,b,c/x) + x^\lambda \partial_x U(a,b,c/x) \\ &= x^{\lambda-1}\big[(\lambda+a)U(a,b,c/x) - a(1+a-b)U(a+1,b,c/x)\big]. \end{aligned} \tag{C.46}$$

同样地，我们推导出

$$\begin{aligned} \partial_x[x^\lambda e^{c/x}U(a,b,-c/x)] &= \lambda x^{\lambda-1}e^{c/x}U(a,b,-c/x) + x^{\lambda-1}(-c/x)e^{c/x}U(a,b,-c/x) \\ &\quad + x^\lambda e^{c/x}\partial_x U(a,b,-c/x) \\ &= \lambda x^{\lambda-1}e^{c/x}U(a,b,-c/x) + x^{\lambda-1}(-c/x)e^{c/x}U(a,b,-c/x) \\ &\quad - x^{\lambda-1}e^{c/x}a\big[(1+a-b)U(a+1,b,-c/x) - U(a,b,-c/x)\big] \\ &= x^{\lambda-1}e^{c/x}\big[-a(a-b+1)U(a+1,b,-c/x) + (a+\lambda-c/x)U(a,b,-c/x)\big]. \end{aligned} \tag{C.47}$$

回顾（C.11），有

$$\phi_m(x,v) = \begin{cases} c_m x^{\frac{1}{6}+m}U\left(-\frac{1}{6}-m, \frac{2}{3}, -\frac{v^3}{9x}\right) & \text{if } v<0, \\ c_m M_m x^{\frac{1}{6}+m}e^{-\frac{v^3}{9x}}U\left(\frac{5}{6}+m, \frac{2}{3}, \frac{v^3}{9x}\right) & \text{if } v \ge 0. \end{cases}$$

让我们取 $m \ge 0$，并应用公式(C.46)，其中

$$a = -\frac{1}{6} - m, \quad \lambda = \frac{1}{6} + m, \quad b = \frac{2}{3}, \quad c = -\frac{v^3}{9}.$$

于是，我们对 $v<0$可推出，

$$\begin{aligned} c_m\partial_x\phi_m(x,v) &= x^{\frac{1}{6}+(m-1)}\left(\frac{1}{6}+m\right)\left(\frac{1}{6}-m\right)U\left(-\frac{1}{6}-(m-1),\frac{2}{3},-\frac{v^3}{9x}\right) \\ &= c_{m-1}\left(\frac{1}{36}-m^2\right)\phi_{m-1}(x,v). \end{aligned}$$

另一方面，当 $v\geq 0$ 时，利用公式 (C.47) 以及

$$a=\frac{5}{6}+m,\quad \lambda=\frac{1}{6}+m,\quad b=\frac{2}{3},\quad c=-\frac{v^3}{9}$$

和 (C.4)，可得

$$\begin{aligned} c_m\partial_x\phi_m(x,v) &= M_m x^{\frac{1}{6}+m-1}e^{-\frac{v^3}{9x}}\Bigg[\left(-\frac{5}{6}-m\right)\left(\frac{7}{6}+m\right)U\left(\frac{11}{6}+m,\frac{2}{3},\frac{v^3}{9x}\right) \\ &\qquad +(1+2m+v^3/(9x))U\left(\frac{5}{6}+m,\frac{2}{3},\frac{v^3}{9x}\right)\Bigg] \\ &= M_m x^{\frac{1}{6}+m-1}e^{-\frac{v^3}{9x}}U\left(\frac{5}{6}+m-1,\frac{2}{3},\frac{v^3}{9x}\right)=c_{m-1}\left(\frac{1}{36}-m^2\right)\phi_{m-1}(x,v), \end{aligned}$$

其中还用到了这一事实:

$$M_m=\left(\frac{1}{36}-m^2\right)M_{m-1}.$$

□

C.2. 入流边界条件下的一维解。现在我们对源项和数据均为齐次多项式的动力学 Fokker-Planck 方程的所有 λ-齐次解进行分类。显然，只需考虑 $\lambda\in\mathbb{N}\cup\{0\}$。

引理 C.6. 设 $\lambda\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ 和 h 是一个 λ-齐次解，满足

$$\begin{cases} v\partial_x h-\partial_{vv}h &= p \quad in\ (0,\infty)\times\mathbb{R}, \\ h(x,v) &= av^\lambda \quad on\ \{0\}\times\{v>0\}, \end{cases} \tag{C.48}$$

其中，$p\in\mathcal{P}_{\lambda-2}$ 是次数为 $\lambda-2$ 的齐次多项式，且 $a\in\mathbb{R}$。此外，我们假设 $p\neq 0$ 或 $a\neq 0$成立，并且 h 在 $|(x,v)|\to\infty$时不会指数级地增长。于是，存在一个多项式 $P\in\mathcal{P}_\lambda$ 和唯一的 $\mu\in\mathbb{R}$，使得

$$h=P+\mu\psi_{[\lambda/3]}, \tag{C.49}$$

其中，ψ_l 定义为

$$\psi_l(x,v):=x^{\frac{3l+2}{3}}\left(M\left(-\frac{3l+2}{3},\frac{2}{3},-\frac{v^3}{9x}\right)+\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(-\frac{3l+2}{3}\right)}\frac{\Gamma\left(-\frac{3l+1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}\frac{v}{(9x)^{1/3}}M\left(-\frac{3l+1}{3},\frac{4}{3},-\frac{v^3}{9x}\right)\right), \tag{C.50}$$

其中，M 表示第一类超几何函数。此外，当 $\lambda=3l$ 或 $3l+1$ 对某个非负整数 l成立时，有 $\mu=0$。

注 C.7. 由 (C.62) 可知，ψ_0 满足方程 (C.48)，其中包含 $p=0$ 和 $\lambda=2$。然而，在 (1.13) 中，我们将函数 $\psi_0(x,v)$ 记为 $\psi_0(x,v)-av^2$，以确保它满足右端项为常数且具有零边界数据的方程。

注 C.8. 注意，根据 [DLMF, 13.2.42] ，我们有

$$\psi_l(x,v) = c(l)x^{\frac{3l+2}{3}}U\left(-\frac{3l+2}{3},\frac{2}{3},-\frac{v^3}{9x}\right), \qquad \text{where} \qquad c(l) = 3\frac{\Gamma(\frac{4}{3})}{\Gamma(-\frac{3l+1}{3})} \tag{C.51}$$

对于 $v<0$。对于 $v>0$ ，通过采用函数 U 在 $z\in(-\infty,0)$ 处的主值分支，它可由同一表达式解析延拓。

引理 C.6 的证明。若 $a\neq 0$，我们考虑 $\tilde{h}=h-av^\lambda$，它满足

$$\begin{cases} v\partial_x\tilde{h}-\partial_{vv}\tilde{h} &= p+a\lambda(\lambda-1)v^{\lambda-2} \quad \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R},\\ \tilde{h}(x,v) &= 0 \quad \text{on } \{0\}\times\{v>0\}. \end{cases}$$

因此，只需考虑 $a=0$ 的情形。

根据 [RW25，引理 3.7]，的证明中的步骤 2，我们知道，对于任意 $p\in\mathcal{P}_{\lambda-2}$，存在 $P\in\mathcal{P}_\lambda$ 使得

$$v\partial_x P-\partial_{vv}P=p \quad \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}.$$

此外，必定存在 $b\in\mathbb{R}$ 使得

$$P(0,v)=bv^\lambda \quad \text{on } \{0\}\times\{v>0\}. \tag{C.52}$$

因此，只需找出所有 λ-齐次解 g ，使得

$$\begin{cases} v\partial_x g-\partial_{vv}g &= 0 \quad \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R},\\ g(x,v) &= bv^\lambda \quad \text{on } \{0\}\times\{v>0\}, \end{cases} \tag{C.53}$$

因为这样一来，我们问题的所有解都具有 $h=g+P$ 的形式。

根据 [RW25], ，我们知道，所有次数为 $\lambda\geq 0$ 的齐次函数 $g\colon [0,\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ，若其满足齐次方程

$$v\partial_x g-\partial_{vv}g=0 \quad \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R} \tag{C.54}$$

都具有如下形式

$$g(x,v)=x^{\frac{\lambda}{3}}\Psi(\tau), \qquad \tau:=\frac{-v^3}{9x},$$

其中 Ψ 满足所谓的库默尔方程

$$\frac{\lambda}{3}\Psi(\tau)+\left(\frac{2}{3}-\tau\right)\Psi'(\tau)+\tau\Psi''(\tau)=0.$$

通过求解 明确地写出该方程后，我们得到 (C.54) 的任意解 g 都具有如下形式

$$g(x,v)=C_1x^{\frac{\lambda}{3}}M\left(-\frac{\lambda}{3},\frac{2}{3},-\frac{v^3}{9x}\right)-C_2 9^{-\frac{1}{3}}vx^{\frac{\lambda-1}{3}}M\left(-\frac{\lambda-1}{3},\frac{4}{3},-\frac{v^3}{9x}\right) \tag{C.55}$$

其中 C_1、$C_2\in\mathbb{R}$ 为某些值。回想一下，若 $-a\in\mathbb{N}$，则 $M(a,b,z)$ 是关于 z 的 $-a$ 次多项式。否则，

$$M(a;b;z)\asymp\begin{cases}\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)}e^z z^{a-b} & \text{as } z\to+\infty,\\ \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)}(-z)^{-a} & \text{as } z\to-\infty.\end{cases} \tag{C.56}$$

现在，我们考虑 $\lambda\in 3(\mathbb{N}\cup\{0\})$ 的情形。此时，必有 $C_2=0$，否则根据 (C.56)， $g(1,v)$ 会随着 $v\to-\infty$ 指数级地增长，因为此时 $\tau=-\frac{v^3}{9x}=-\frac{v^3}{9}\to+\infty$。因此，在这种情况下，

$M\left(-\frac{\lambda}{3}, 23, \tau\right)$ 是关于 $\tau = -\frac{v^3}{9x}$ 的多项式，其次数为 $\frac{\lambda}{3}$。通过类似论证，我们得到 $C_1 = 0$，且当 $\lambda - 1 \in 3(\mathbb{N} \cup \{0\})$ 时，$23, \tau)$ 是多项式。因此 $h \in \mathcal{P}_\lambda$，证毕。

因此，我们可以排除情形 $\lambda \in 3(\mathbb{N} \cup \{0\})$ 和 $\lambda - 1 \in 3(\mathbb{N} \cup \{0\})$。于是，将 (C.56) 应用于 h，并令 $\tau = -\frac{v^3}{9x}$，可得

$$g(x,v) \asymp C_1 x^{\frac{\lambda}{3}} \frac{\Gamma(\frac{2}{3})}{\Gamma(-\frac{\lambda}{3})} e^\tau \tau^{-\frac{\lambda+2}{3}} + C_2 x^{\frac{\lambda}{3}} \frac{\Gamma(\frac{4}{3})}{\Gamma(\frac{1-\lambda}{3})} e^\tau \tau^{-\frac{\lambda+2}{3}} \qquad \text{as } \tau \to +\infty, \tag{C.57}$$

$$g(x,v) \asymp C_1 x^{\frac{\lambda}{3}} \frac{\Gamma(\frac{2}{3})}{\Gamma(\frac{\lambda+2}{3})} (-\tau)^{\frac{\lambda}{3}} - C_2 x^{\frac{\lambda}{3}} \frac{\Gamma(\frac{4}{3})}{\Gamma(\frac{\lambda+3}{3})} (-\tau)^{\frac{\lambda}{3}} \qquad \text{as } \tau \to -\infty. \tag{C.58}$$

因此，参数 C_1、C_2 必须满足

$$C_1 \frac{\Gamma(\frac{2}{3})}{\Gamma(-\frac{\lambda}{3})} + C_2 \frac{\Gamma(\frac{4}{3})}{\Gamma(\frac{1-\lambda}{3})} = 0, \tag{C.59}$$

否则，(C.57) 将再次推出 $h(1,v)$ 随 $v \to -\infty$ 指数级地增长。保证 (C.59) 的一个等价方法是取 $m \in \mathbb{R}$ 并选择

$$C_1 = m, \qquad C_2 = -\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{3}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{1-\lambda}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} m.$$

此外，对于任意 $v > 0$，利用 (C.58) 以及令 $x \to 0$ 趋于 τ 时有：$= -\frac{v^3}{9x} \to -\infty$，可知当 $\lambda = 3l + 2$ 时，

$$g(0,v) = m 9^{-\frac{\lambda}{3}} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{1}{\Gamma(\frac{\lambda+2}{3})} + \frac{\Gamma(\frac{1-\lambda}{3})}{\Gamma(-\frac{\lambda}{3})\Gamma(\frac{\lambda+3}{3})} \right) v^\lambda = m 9^{-\frac{\lambda}{3}} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \Gamma\left(\frac{1-\lambda}{3}\right) (-1)^{l+1} \frac{4\pi}{\sqrt{3}} v^\lambda, \tag{C.60}$$

其中，我们使用了伽马函数的基本性质（如 (C.17) 中所示）来证明第二个等式。显然，现在可以找到唯一的 $m = m(\lambda, b) \in \mathbb{R}$，使得对于任意 $v > 0$，$g(0,v) = bv^\lambda$，因为对某个 $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$，有 $\lambda = 3l + 2$。此外，这样选择常数 m，可使相应的函数g 成为 (C.53) 的一个解。

因此，综上所述，我们证明了所有满足 (C.54) 的齐次解 h 都具有如下形式

$$g(x,v) = \mu_1 P + \mu_2 x^{\frac{\lambda}{3}} \left(M\left(-\frac{\lambda}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{v^3}{9x}\right) + \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{3}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{1-\lambda}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} \frac{v}{(9x)^{1/3}} M\left(-\frac{\lambda-1}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{v^3}{9x}\right) \right)$$

其中 $P \in \mathcal{P}_\lambda$ 和 μ_1、$\mu_2 \in \mathbb{R}$ 可任意取值；当 $\lambda - 2 \in 3(\mathbb{N} \cup \{0\})$ 时，$\mu_1 = 0$；当$\lambda - 2 \notin 3(\mathbb{N} \cup \{0\})$ 时，$\mu_2 = 0$。因此，将这一结果与 (C.50) 结合，即得所需结论。

□

现在我们证明函数 ψ_λ 的若干性质。注意，(C.61) 是对应于 ϕ_m (C.40) 的关系的平行形式。值得注意的是，函数 ψ_λ 关于 $\mathcal{R}^-$ 并不光滑，这与函数 ϕ_m 的行为形成鲜明对比（见 (C.39)）。

引理 C.9. 设 ψ_l 如 (C.50) 中定义，其中 l 为非负整数。则有以下结论。

对于任意 $l \geq 1$,

$$\partial_x \psi_l = c_l \psi_{l-1}. \tag{C.61}$$

- ψ_l 是.....的弱解

$$\begin{cases} v\partial_x\psi_l - \partial_{vv}\psi_l = 0 & in\ \{x>0\}\times\mathbb{R}, \\ \psi_l = c_\lambda v^{3l+2} & in\ \{x=0\}\times\{v>0\}. \end{cases} \tag{C.62}$$

对于某个常数 $c_\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$。

- 对于任意 $k\in\mathbb{N}$,

$$|\partial_v^k\psi_l(x,v)| \le c(k,j) \quad for\ any\ (x,v)\in H_1\cap\mathcal{R}^-\ with\ x\le v^{k+3-(3l+2)}. \tag{C.63}$$

- 对于任意 $\epsilon\in(0,1)$,

$$\frac{|\psi_l(x_1,v)-\psi_l(x_2,v)|}{|x_1-x_2|^{1-\epsilon}} \le c(\epsilon,j) \quad for\ any\ (x_1,v),(x_2,v)\in H_1\cap\mathcal{R}^-\ with\ x_1,x_2\le v^{\frac{1}{\epsilon}}. \tag{C.64}$$

特别地，我们有 $\psi_0\in C^{3-3\epsilon}(\mathcal{H}_1\cap\{x\le v^{\frac{1}{\epsilon}}\})$，但若 $\epsilon'>\epsilon$，则有 $\psi_0\notin C^{3-3\epsilon}(\mathcal{H}_1\cap\{x\le v^{\frac{1}{\epsilon'}}\})$，其中 $\mathcal{H}_1$ 是第 2 节中定义的一维双侧动理学柱体。

证明。首先，我们旨在证明 (C.61)。其证明与 (C.40) 非常相似。根据 [AS64, 13.4.10], ，我们观察到

$$zM'(a,b,z) = aM(a+1,b,z) - aM(a,b,z).$$

由此可得

$$\partial_x(M(a,b,c/x)) = -x^{-1}(c/x)M'(a,b,c/x) = -x^{-1}\left(aM(a+1,b,c/x) - aM(a,b,c/x)\right).$$

由此，我们推导出

$$\begin{aligned} \partial_x\left(x^{-a}M(a,b,c/x)\right) &= -ax^{-a-1}M(a,b,-c/x) - x^{-a-1}\left(aM(a+1,b,c/x) - aM(a,b,c/x)\right) \\ &= -ax^{-a-1}M(a+1,b,c/x). \end{aligned} \tag{C.65}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned} \partial_x\psi_l &= \partial_x\left(x^{-a}M(a,b,c/x) + Cv9^{-\frac{1}{3}}x^{-a-\frac{1}{3}}M\left(a+\frac{1}{3},b+\frac{2}{3},c/x\right)\right) \\ &= -ax^{-a-1}M(a+1,b,c/x) - Cv9^{-\frac{1}{3}}\left(a+\frac{1}{3}\right)x^{-a-\frac{1}{3}-1}M\left(a+\frac{1}{3}+1,b+\frac{2}{3},c/x\right) \\ &= \frac{3l+2}{3}x^{\frac{3l-1}{3}}\left(M\left(\frac{1-3l}{3},\frac{2}{3},-\frac{v^3}{9x}\right) + C\frac{\frac{3l+1}{3}}{\frac{3l+2}{3}}\frac{v}{(9x)^{\frac{1}{3}}}M\left(\frac{2-3l}{3},\frac{4}{3},-\frac{v^3}{9x}\right)\right) \\ &= \frac{3l+2}{3}x^{\frac{3l-1}{3}}\left(M\left(\frac{1-3l}{3},\frac{2}{3},-\frac{v^3}{9x}\right) + \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-3l}{3}\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{2-3l}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}\frac{v}{(9x)^{\frac{1}{3}}}M\left(\frac{2-3l}{3},\frac{4}{3},-\frac{v^3}{9x}\right)\right) \\ &= \frac{3l+2}{3}\psi_{j-1} \end{aligned}$$

其中 $a=-\frac{3l+2}{3}$、$b=\frac{2}{3}$、$c=-v^3$ 和 $C=\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(-\frac{3l+2}{3}\right)}{\Gamma\left(-\frac{3l+1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}$。特别地，我们使用了

$$\Gamma\left(-\frac{3l+2}{3}\right)\frac{-(3l+2)}{3} = \Gamma\left(\frac{1-3l}{3}\right) \quad \text{and} \quad \Gamma\left(-\frac{3l+1}{3}\right)\frac{-(3l+1)}{3} = \Gamma\left(\frac{2-3l}{3}\right).$$

因此，我们证明了（C.61）。

为了证明 ψ_l 是一个弱解，我们首先证明

$$\partial_{vv}\psi_l \in L^\infty(H_R) \quad \text{for any } R>0. \tag{C.66}$$

为此，我们写出

$$\widetilde{M}(a,b,z) \coloneqq z^{b-1}M\left(a,b,-z\right), \quad \lambda = 3l+2 \quad \text{and} \quad C \coloneqq \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{1-\lambda}{3}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{3}\right)} \tag{C.67}$$

可知

$$\psi_l(x,v) = x^{\frac{\lambda}{3}}\left(M\left(-\frac{\lambda}{3},\frac{2}{3},-\frac{v^3}{9x}\right) + C\widetilde{M}\left(-\frac{\lambda-1}{3},\frac{4}{3},\frac{v^3}{9x}\right)\right), \tag{C.68}$$

回顾 (C.50) 即得。在对函数 ψ_l 求导之前，基于 [AS64, 13.4.13]（将 z 替换为 $-z$），我们声称，对于任意 $z>0$,

$$\frac{d^j}{dz^j}\widetilde{M}(a,b,z) = \frac{d^j}{dz^j}\left(z^{b-1}M(a,b,-z)\right) = (b-j)_j z^{b-j-1}M(a,b-j,-z), \tag{C.69}$$

其中我们记

$$(a)_0 = 1 \quad \text{and} \quad (a)_j \coloneqq \prod_{k=0}^{j-1}(a+k) \text{ for any } j \geq 1.$$

当 $j=1$ 时,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\left(z^{b-1}M(a,b,-z)\right) &= (b-1)z^{b-2}M(a,b,-z) - z^{b-1}M'(a,b,-z)\\ &= z^{b-2}((b-1)M(a,b,-z) + (-z)M'(a,b,-z))\\ &= z^{b-2}(b-1)M(a,b-1,-z),\end{aligned}$$

最后一个等式用到了 [AS64, 13.4.13]（将 z 替换为 $-z$）。假设 (C.69) 对 $j=m-1$ 成立。同理可得

$$\begin{aligned}\frac{d^m}{dz^m}\left(z^{b-1}M(a,b,-z)\right) &= \frac{d}{dz}\left((b-m+1)_{m-1}z^{b-m}M(a,b-m+1,-z)\right)\\ &= (b-m+1)_{m-1}(b-m)z^{b-m-1}M(a,b-m+1,-z)\\ &\quad - (b-m+1)_{m-1}z^{b-m}M'(a,b-m+1,-z)\\ &= (b-m)_m z^{b-m-1}M(a,b-m,-z).\end{aligned}$$

由归纳法可得 (C.69)。

- 当 $v<0$ 时，我们回顾公式 (C.51)。接着，对函数 ψ_l 关于 v 变量求导，并利用 (C.1)，可得

$$\begin{aligned}|\partial_v^2\psi_l(x,v)| &\leq c\left(x^{\frac{\lambda}{3}-1}|v|\left|U'\left(-\frac{\lambda}{3},\frac{2}{3},-\frac{v^3}{9x}\right)\right| + x^{\frac{\lambda}{3}-2}|v|^4\left|U''\left(-\frac{\lambda}{3},\frac{2}{3},-\frac{v^3}{9x}\right)\right|\right)\\ &\leq c\left(x^{\frac{\lambda}{3}-1}vU\left(-\frac{\lambda}{3}+1,\frac{5}{3},-\frac{v^3}{9x}\right) + x^{\frac{\lambda}{3}-2}v^4U\left(-\frac{\lambda}{3}+2,\frac{8}{3},-\frac{v^3}{9x}\right)\right).\end{aligned}$$

因此我们不我们利用 (C.8) 以及 $U(a,b,z)$ 是解析的这一事实，进一步估计

$$|\partial_v^2\psi_l(x,v)| \leq \begin{cases} cv^{\lambda-2} \leq cv^{3j} \leq c & \text{if } -v^3 \geq x,\\ cx^{\frac{\lambda}{3}-\frac{2}{3}} \leq cx^j \leq c & \text{if } -v^3 \leq x.\end{cases}$$

- 当 $v \geq 0$ 时，我们对 (C.68) 中给出的方程求导，得到

$$\begin{aligned}\partial_v^2\psi_l(x,v) &= x^{\frac{\lambda}{3}}\frac{2v}{3x}\left[(-1)M'\left(-\frac{\lambda}{3},\frac{2}{3},-\frac{v^3}{9x}\right)+C\widetilde{M}'\left(-\frac{\lambda-1}{3},\frac{4}{3},\frac{v^3}{9x}\right)\right]\\ &\quad + x^{\frac{\lambda}{3}}\frac{v^4}{9x^2}\left[(-1)^2M''\left(-\frac{\lambda}{3},\frac{2}{3},-\frac{v^3}{9x}\right)+C\widetilde{M}''\left(\frac{\lambda-1}{3},\frac{4}{3},-\frac{v^3}{9x}\right)\right]\\ &= -cx^{\frac{\lambda}{3}}\frac{v}{x}M\left(-\frac{\lambda}{3}+1,\frac{5}{3},-\frac{v^3}{9x}\right)+cx^{\frac{\lambda}{3}}\frac{v^4}{x^2}M\left(-\frac{\lambda}{3}+2,\frac{8}{3},-\frac{v^3}{9x}\right)\\ &\quad + Cx^{\frac{\lambda}{3}}\left(\frac{v^3}{9x}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{2v}{3x}M'\left(-\frac{\lambda-1}{3},\frac{1}{3},-\frac{v^3}{9x}\right),\end{aligned} \tag{C.70}$$

这里还用到了 [DLMF, 13.3.16], (C.69) 和 [AS64, 13.4.13]。再次使用 [DLMF, 13.3.16]，可得

$$\begin{aligned}|\partial_v^2\psi_l(x,v)| &\leq c\left(x^{\frac{\lambda-3}{3}}|v|M\left(-\frac{\lambda}{3}+1,\frac{5}{3},-\frac{v^3}{9x}\right)+x^{\frac{\lambda-6}{3}}|v|^4M\left(-\frac{\lambda}{3}+2,\frac{8}{3},-\frac{v^3}{9x}\right)\right)\\ &\quad + cx^{\frac{\lambda-4}{3}}|v|^2M\left(-\frac{\lambda-1}{3}+1,\frac{4}{3},-\frac{v^3}{9x}\right).\end{aligned}$$

若 $v^3 \gg x$，则利用 (C.56) 可推出

$$|\partial_v^2\psi_l(x,v)| \leq c\left(x^{\frac{\lambda-3}{3}}|v|(v^3/9x)^{\frac{\lambda-3}{3}}+x^{\frac{\lambda-6}{3}}|v|^4(v^3/9x)^{\frac{\lambda-6}{3}}+x^{\frac{\lambda-4}{3}}|v|^2(v^3/9x)^{\frac{\lambda-4}{3}}\right) \leq cv^{\lambda-2} \leq c. \tag{C.71}$$

另一方面，对于某个较大的常数 $c \geq 1$，若 $v^3 \leq cx$，则有

$$|\partial_v^2\psi_\lambda(x,v)| \leq c(x^{\frac{\lambda-3}{3}}x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{\lambda-6}{3}}x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{\lambda-4}{3}}x^{\frac{2}{3}}) \leq cx^{\frac{\lambda-2}{3}} \leq c.$$

事实上，利用 (C.60) 和 (C.68)，可得 ψ_l 连续至边界 $\{x=0\}\times\{v>0\}$，且 $\psi_l = cv^{3l+2}$，其中 $c \in \mathbb{R}$为某个常数。综上，我们证明了 (C.66)，即 $\partial_{vv}\psi_l \in L^\infty_{\mathrm{loc}}((0,\infty)\times\mathbb{R})$。由于 ψ_l 在经典意义下满足 (C.62)，因此这给出 $v\partial_x\psi_l \in L^\infty_{\mathrm{loc}}((0,\infty)\times\mathbb{R})$。因此，根据注2.2，$\psi_l$ 是 (C.62) 的弱解。

接下来，我们将证明 (C.63)。为此，首先证明：若 $v^3 \gg x$，且 v、$x \geq 0$ 和 $k > \lambda$,

$$\partial_v^k\psi_l(x,v) = cv^{3l+2-k}O\left(\frac{x}{v^3}\right). \tag{C.72}$$

首先，写作

$$F(z) \coloneqq M\left(-\frac{\lambda}{3},\frac{2}{3},-z\right)+C\widetilde{M}\left(-\frac{\lambda-1}{3},\frac{4}{3},z\right) \quad \text{and} \quad G(v) \coloneqq \frac{v^3}{9x}$$

并回顾 (C.67)，可知

$$x^{\frac{\lambda}{3}}(F\circ G)(v) = \psi_l(x,v). \tag{C.73}$$

由此，结合 Fa´a di Bruno 公式以及当 $j \geq 4$ 时 $G^{(j)}(v) = 0$ 的事实，我们得到

$$\partial_v^k(F\circ G)(v) = \sum_{i+2j+3m=k}\frac{k!}{i!l!2^jm!6^m}F^{(i+j+m)}(G(v))\left(\frac{v^2}{3x}\right)^i\left(\frac{2v}{3x}\right)^j\left(\frac{2}{3x}\right)^m. \tag{C.74}$$

在继续进行进一步估计之前，我们先证明：若 $\frac{v^3}{9x} \gg 1$，则

$$\begin{aligned} F^{(j)}\left(\frac{v^3}{9x}\right) &= (-1)^j M^{(j)}\left(-\frac{\lambda}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{v^3}{9x}\right) + C\widetilde{M}^{(j)}\left(-\frac{\lambda-1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{v^3}{9x}\right) \\ &= (-1)^j A_\lambda \left(\frac{v^3}{9x}\right)^{-j+\frac{\lambda}{3}} \left((-\lambda/3)_j + O\left(\frac{9x}{v^3}\right)\right), \end{aligned} \tag{C.75}$$

其中

$$A_\lambda \coloneqq \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1-\lambda}{3}\right)\left(\frac{1}{\Gamma\left(\frac{2+\lambda}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1-\lambda}{3}\right)} + \frac{1}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{3}\right)\Gamma\left(\frac{3+\lambda}{3}\right)}\right).$$

为证明这一点，我们结合 [AS64, 13.5.1] 以及以下事实： $e^{i\pi a} z^{-a} = (-z)^{-a}$ （注意，由于 M 的解析性，我们总可以取 $\log\, z = \log\, |z| + i\pi$ 的主支）对于 $z \in \mathbb{R}$，从而可知，当 $v^3 \gg x$ 时，对任意 j,

$$M\left(j - \frac{\lambda}{3}, j + \frac{2}{3}, -\frac{v^3}{9x}\right) = \frac{\Gamma(l + 2/3)}{\Gamma(2/3 + \lambda/3)}\left(\frac{v^3}{9x}\right)^{\frac{\lambda}{3}-j}\left(1 + O\left(\frac{9x}{v^3}\right)\right), \tag{C.76}$$

and

$$M\left(-\frac{\lambda-1}{3}, -j + \frac{4}{3}, -\frac{v^3}{9x}\right) = \frac{\Gamma(-j + 4/3)}{\Gamma(-j + \lambda/3 + 1)}\left(\frac{v^3}{9x}\right)^{\frac{\lambda-1}{3}}\left(1 + O\left(\frac{9x}{v^3}\right)\right). \tag{C.77}$$

回顾 [DLMF, 13.3.16] 和 (C.69)，可得

$$M^{(l)}\left(-\frac{\lambda}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{v^3}{9x}\right) = \frac{(-\lambda/3)_j}{(2/3)_j} M\left(j - \frac{\lambda}{3}, j + \frac{2}{3}, -\frac{v^3}{9x}\right), \tag{C.78}$$

and

$$C\widetilde{M}^{(j)}\left(-\frac{\lambda-1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{v^3}{9x}\right) = C(4/3 - j)_j \left(\frac{v^3}{9x}\right)^{\frac{4}{3}-j-1} M\left(-\frac{\lambda-1}{3}, -j + \frac{4}{3}, -\frac{v^3}{9x}\right). \tag{C.79}$$

将 (C.76) 和 (C.77) 分别代入 (C.78) 和 (C.79)，我们得到

$$M^{(j)}\left(-\frac{\lambda}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{v^3}{9x}\right) = (-\lambda/3)_j \frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(2/3 + \lambda/3)}\left(\frac{v^3}{9x}\right)^{-j+\frac{\lambda}{3}}\left(1 + O\left(\frac{9x}{v^3}\right)\right), \tag{C.80}$$

and

$$C\widetilde{M}^{(j)}\left(-\frac{\lambda-1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{v^3}{9x}\right) = C\frac{\Gamma(4/3)}{\Gamma(-j + \lambda/3 + 1)}\left(\frac{v^3}{9x}\right)^{-j+\frac{\lambda}{3}}\left(1 + O\left(\frac{9x}{v^3}\right)\right), \tag{C.81}$$

wh这里还用到了以下事实： $\Gamma(a + j) = (a)_j \Gamma(a)$。由 (C.67) 可知

$$C\frac{\Gamma(4/3)}{\Gamma(-j + \lambda/3 + 1)} = C\frac{\Gamma(4/3)(-\lambda/3)_j}{(-1)^j \Gamma(\lambda/3 + 1)} = (-1)^j \frac{\Gamma((1-\lambda)/3)\Gamma(2/3)(-\lambda/3)_j}{\Gamma(-\lambda/3)\Gamma(\lambda/3 + 1)}.$$

因此，利用这一点、(C.80) 和 (C.81)，我们得到 (C.75)。

现在将 (C.75) 代入 (C.74)，可得

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial_v^k(F\circ G)(v)}{A_\lambda}\\
&=\sum_{i+2j+3m=k}\frac{k!}{i!j!2^j m!6^m}(-1)^{i+j+m}\left(\frac{v^3}{9x}\right)^{-(i+j+m)+\frac{\lambda}{3}}\left(\left(-\frac{\lambda}{3}\right)_{i+j+m}+O\left(\frac{9x}{v^3}\right)\right)\left(\frac{v^2}{3x}\right)^i\left(\frac{2v}{3x}\right)^j\left(\frac{2}{3x}\right)^m\\
&=\sum_{i+2j+3m=k}\frac{k!}{i!j!m!}(-1)^{i+j+m}v^{\lambda-k}x^{-\frac{\lambda}{3}}\left(\left(-\frac{\lambda}{3}\right)_{i+j+m}+O\left(\frac{9x}{v^3}\right)\right)3^{i+j-\frac{2\lambda}{3}}.
\end{aligned}\tag{C.82}$$

现在我们要证明，对任意 $k>\lambda$,

$$a_k\coloneqq\sum_{i+2j+3m=k}\frac{1}{i!j!m!}(-1)^{i+j+m}3^{i+j}\left(-\frac{\lambda}{3}\right)_{i+j+m}=0.$$

这可由如下观察得到。对于非常小的 y，例如 $|y|\ll 1$，我们得到

$$\begin{aligned}
(1+3y+3y^2+y^3)^{\frac{\lambda}{3}}&=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\lambda/3}{k}(3y+3y^2+y^3)^k\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda/3(\lambda/3-1)\cdots(\lambda/3-(k-1))}{k!}(3y+3y^2+y^3)^k\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(-\lambda/3)_k}{k!}(3y+3y^2+y^3)^k\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(-\lambda/3)_k}{k!}\sum_{i+j+m=k}\frac{(3y)^i(3y^2)^l(y^3)^m}{i!j!m!}k!\\
&=\sum_{\substack{k=0\\ i,l,m\geq 0}}^{\infty}(-1)^{i+j+m}\frac{(-\lambda/3)_{i+j+m}}{i!j!m!}3^{i+j}y^{i+2j+3m},
\end{aligned}$$

其中我们使用了广义二项式定理和多项式定理。此外，由于$|y|\ll 1$ 且$(3y+3y^2+y^3)\ll 1$，上述求和均收敛。此外，我们可以改写

$$(1+y)^\lambda=(1+3y+3y^2+y^3)^{\frac{\lambda}{3}}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i+2j+3m=k}(-1)^{i+j+m}\frac{(-\lambda/3)_{i+j+m}}{i!j!m!}3^{i+j}y^{i+2j+3m}=\sum_{k=0}^{\infty}a_k y^k.$$

因此，当 $k\leq\lambda=3l+2$ 时我们得到$a_k=\binom{\lambda}{k}$，当 $k>\lambda=3l+2$时得到 $a_k=0$。

Th

将此结果与(C.82)和(C.73)相结合，我们得到(C.72)。因此，当 $k>\lambda=3l+2$时，对任意 $x\leq v^{k+3-\lambda}$，我们有

$$|\partial_v^k\psi(x,v)|\leq cv^{\lambda-k}\frac{v^{k+3-\lambda}}{v^3}\leq c.\tag{C.83}$$

事实上，当 $v\leq v_0$ 对某个小常数 v_0成立时，则 $v^3\gg v^{k+3-\lambda}\geq x$ 且(C.72)蕴含所需结果。若 $v\geq v_0$，则将(C.56)与 $x\ll 1$ 应用于(C.75)中给出的第一个等式，并结合(C.78)与(C.79)，我们得到(C.83)。

此外，当 $k\leq\lambda$ 时，由 (C.82) 和 (C.73) 可得

$$|\partial_v^k\psi(x,v)|\leq cv^{\lambda-k}\leq c.$$

综上，我们证明了 (C.63)。

现在，我们旨在证明 (C.64)。

- 假设 $|x_1 - x_2| \geq v^{\frac{1+k}{\epsilon}}$。由 (C.70)、(C.68)、(C.76) 和 (C.77) 可知

$$\partial_v^k \psi_0(x,v) = cv^{2-k} + v^{2-k} O(9x/v^3) = \partial_v^k \psi_0(0,v) + v^{2-k} O(9x/v^3) \tag{C.84}$$

当 $k \in \{0,1,2\}$ $v^3 \gg x$ 时。由于情形 $k = 1$ 可通过结合 (C.68)、(C.76) 和 (C.77) 进行几步初等计算类似地得到，因此我们省略证明。因此，只要 $v \leq v_0$ 对某个足够小的常数 v_0 成立，我们就有

$$\frac{|\partial_v^k \psi_0(x_1,v) - \partial_v^k \psi_0(x_2,v)|}{|x_1 - x_2|^{1-\epsilon}} \leq c \sum_{j=1}^{2} \frac{|\partial_v^k \psi_0(x_j,v) - \partial_v^k \psi_0(0,v)|}{v^{\frac{(1+k)(1-\epsilon)}{\epsilon}}} \leq \frac{1}{v^{\frac{(1+k)(1-\epsilon)}{\epsilon}}} \sum_{j=1}^{2} v^{2-k} O(9x_j/v^3) \leq c, \tag{C.85}$$

这里我们用到了如下事实： $x_j \leq v^{\frac{1+k}{\epsilon}} \ll v^3$，因为 $v \leq v_0$。当 $v \geq v_0$ 时，我们使用引理 6.1 中的边界正则性结果推出 (C.85)；该结果适用，因为当 $v \geq v_0$ 时，(x,v) 远离 γ_0。

- 假设 $|x_1 - x_2| < v^{\frac{1+k}{\epsilon}}$。那么

$$\begin{aligned} \frac{|\partial_v^k \psi_0(x_1,v) - \partial_v^k \psi_0(x_2,v)|}{|x_1 - x_2|^{1-\epsilon}} &\leq |x_1 - x_2|^{\epsilon} \int_0^1 \left| \partial_v^k \partial_x \psi_0(tx_1 + (1-t)x_2, v) \right| dt \\ &\leq |x_1 - x_2|^{\epsilon} \int_0^1 \left| \partial_v^k (v^{-1}\partial_{vv}) \psi_0(tx_1 + (1-t)x_2, v) \right| dt \\ &\leq c \frac{|x_1 - x_2|^{\epsilon}}{v^{1+k}} \leq c, \end{aligned} \tag{C.86}$$

其中我们用到了以下事实： $v\partial_x \psi_0 = \partial_{vv} \psi_0$ 以及 (C.63)。

结合 (C.85) 和 (C.86)，可得

$$\begin{aligned} &\frac{|\psi_0(x_1,v) - \psi_0(x_2,v)|}{|x_1 - x_2|^{1-\epsilon}} \leq c \qquad \text{for any } x_1, x_2 \leq v^{\frac{1}{\epsilon}}, \\ &\frac{|\partial_v^2 \psi_0(x_1,v) - \partial_v^2 \psi_0(x_2,v)|}{|x_1 - x_2|^{1-3\epsilon}} \leq c \qquad \text{for any } x_1, x_2 \leq v^{\frac{1}{\epsilon}}, \end{aligned} \tag{C.87}$$

现在我们使用 (C.63) 和 (C.87)，以推导 $\psi_0 \in C^{3-3\epsilon}(\{x \leq v^{\frac{1}{\epsilon}}\})$。取两个点 $z_1, z_2 \in \mathcal{H}_1 \cap \{x \leq v^{\frac{1}{\epsilon}}\}$，并对任意 $z \in \mathcal{H}_1 \cap \{x \leq v^{\frac{1}{\epsilon}}\}$, p_z，将其写为 ψ_0 在 z 处的二阶泰勒多项式。于是可得

$$|(\psi_0 - p_{z_1})(z_2)| \leq |(p_{(t_1,x_1,v_2)} - p_{z_1})(z_2)| + |(\psi_0 - p_{(t_1,x_1,v_2)})(z_2)| =: J_1 + J_2,$$

其中 $p_{(t_1,x_1,v_2)}$ 是 ψ_0 在 (t_1, x_1, v_2) 处的二阶泰勒多项式。根据微积分基本定理、(C.63) 以及事实 $v\partial_x \psi_0 = \partial_v^2 \psi_0$，我们估计 J_1 为

$$\begin{aligned} J_1 &\leq |v_2 \partial_x \psi_0(x_1,v_2) - v_1 \partial_x \psi_0(x_1,v_1)||t_2 - t_1| \\ &\quad + |\psi_0(x_1,v_2) - (\psi_0(X_1) + \partial_v \psi_0(X_1)(v_2 - v_1) + \partial_v^2 \psi_0(X_1)(v_2 - v_1)^2| \\ &\leq |t_2 - t_1||\partial_v^2 \psi_0(x_1,v_2) - \partial_v^2 \psi_0(x_1,v_1)| + c\|\partial_v^3 \psi_0\|_{L^\infty(\{x_n \leq v_n^{\frac{1}{\epsilon}}\})} (v_2 - v_1)^3 \\ &\leq c|t_2 - t_1||v_1 - v_2|, \end{aligned}$$

其中 $X_1 := (x_1, v_1)$。对于估计式 J_2，我们沿用 (A.4) 和 (A.5) 中的相同思路，得到

$$J_2 \leq |p_{(t_2,x_1+(t_2-t_1)v_2,v_2)}(z_2) - p_{(t_1,x_1,v_2)}(z_2)| + |\psi_0(z_2) - p_{(t_2,x_1+(t_2-t_1)v_2,v_2)}(z_2)|$$

$$
\begin{aligned}
&\le \left| \int_0^1 (\mathcal{D}\psi_0(t_1+\xi(t_2-t_1), x_1+\xi(t_2-t_1)v_2, v_2) - \mathcal{D}\psi_0(t_1, x_1, v_2))\, d\xi(t_2-t_1) \right| \\
&\quad + |\psi_0(x_2, v_2) - \psi_0(x_1+(t_2-t_1)v_2, v_2)| \\
&\le \left| \int_0^1 (v_2\partial_x\psi_0(x_1+\xi(t_2-t_1)v_2, v_2) - v_2\partial_x\psi_0(x_1, v_2))\, d\xi(t_2-t_1) \right| \\
&\quad + c|x_2 - (x_1+(t_2-t_1)v_2)|^{1-\epsilon} \\
&\le c(|(t_2-t_1)v_2|^{1-3\epsilon}|t_2-t_1| + |x_2-(x_1+(t_2-t_1)v_2)|^{1-\epsilon}),
\end{aligned}
$$

其中 $\mathcal{D} = \partial_t + v\partial_x$，并且我们用到了以下事实： $\psi_0 = \psi_0(x,v)$、 $v\partial_x\psi_0 = \partial_v^2\psi_0$ 以及 (C.87)。结合估计式 J_1 和 J_2，可得

$$
|(\psi_0 - p_{z_1})(z_2)| \le c(|t_2-t_1||v_1-v_2| + |t_2-t_1|^{2-3\epsilon} + |x_2-(x_1+(t_2-t_1)v_2|^{1-\epsilon}), \tag{C.88}
$$

这意味着当 $\epsilon \le \frac{1}{3}$ 时， $\psi_0 \in C^{3-3\epsilon}(\mathcal{H}_1 \cap \{x \le v^{\frac{1}{\epsilon}}\})$。注意，当 $\epsilon > \frac{1}{3}$ 时，由 (C.87) 中给出的第一个不等式和 (C.66) 可得 $\psi_0 \in C^{3-3\epsilon}(\mathcal{H}_1 \cap \{x \le v^3\})$。此外，对于非常小的 δ 和 v，记 $x_1 = \frac{v^{\frac{1}{\epsilon}-\delta}}{2}$, $x_2 = v^{\frac{1}{\epsilon}-\delta}$。于是利用 (C.84)，我们有

$$
\frac{|\psi_0(x_1,v) - \psi_0(x_2,v)|}{|x_1-x_2|^{1-\epsilon}} \eqsim \frac{v^2 O(v^{\frac{1}{\epsilon}-\delta-3})}{v^{(\frac{1}{\epsilon}-\delta)(1-\epsilon)}} \eqsim v^{-\delta\epsilon}, \tag{C.89}
$$

这意味着 $\psi_0 \notin C^{3-3\epsilon}(\mathcal{H}_1 \cap \{x \le v^{\frac{1}{\epsilon}-\delta}\})$。

对于 $l \ge 1$，沿用相同的推导思路，我们得到

$$
\frac{|\psi_l(x_1,v) - \psi_l(x_2,v)|}{|x_1-x_2|} \le c(j) \quad \text{for any } (x_1,v),(x_2,v) \in H_1 \cap \mathcal{R}^-.
$$

□

Appendix D. A stability result for weak solutions

本节中，我们证明弱解序列的极限也是弱解。我们给出一个适用于命题 5.1 证明情形的结果。

引理 D.1. 设 (f_m) 是以下方程的弱解序列

$$
\begin{cases}
(\partial_t + v\cdot\nabla_x)f_m - \mathrm{div}_v(A_m\nabla_v f_m) = B_m\cdot\nabla_v f_m + F_m + \sum_{k=0}^{k_0} F_{m,k}\widetilde{\mathbf{\Phi}}_k & \text{in } \mathcal{H}_{\frac{1}{r_m}}, \\
f_m = g_m & \text{in } \gamma_- \cap \mathcal{Q}_{\frac{1}{r_m}},
\end{cases} \tag{D.1}
$$

其中 $A_m \in C^\alpha(\mathcal{H}_{1/r_m})$， $F \in C^\lambda(\mathcal{H}_{1/r_m})$ $F_{m,k} \in C^{\lambda,k}(\mathcal{H}_{1/r_m})$， $g_m \in C^\alpha(\gamma_- \cap \mathcal{Q}_{1/r_m})$， $r_m \to 0$ 且 $\mathbf{\Phi}_k$ 是 (5.8) 中给出的元素之一。我们作如下假设：

- 对于任意 $R \le \frac{1}{r_m}$,

$$
[F_m]_{C^\lambda(\mathcal{H}_R)}, [F_{m,k}]_{C^{\lambda_1}(\mathcal{H}_R)}, \|g_m\|_{L^\infty(\gamma_-\cap\mathcal{Q}_R)} \le \frac{c(R)}{\theta(r_m)}, \quad \|A_m\|_{C^\alpha(\mathcal{H}_R)} + \|r_m^{-1}B_m\|_{L^\infty(\mathcal{H}_R)} \le \Lambda, \tag{D.2}
$$

  where $\Lambda > 0$, $\theta(r_m) \to 0$ *as* $m \to \infty$.
- *For any* $\mathcal{Q}_1(z_0) \Subset \{x_n > 0\}$,

$$
f_m \to f_\infty \quad \text{in } C^{1,\alpha}(\mathcal{Q}_1(z_0)). \tag{D.3}
$$

• 对于任意 $R>0$,

$$\|f_m\|_{C^\alpha(\mathcal{H}_R)}+\|\nabla_v f_m\|_{L^2(\mathcal{H}_R)}\le c(R). \tag{D.4}$$

那么存在一个弱解 $f_\infty=\lim_{m\to\infty} f_m$ to

$$\begin{cases}(\partial_t+v\cdot\nabla_x)f_\infty-\operatorname{div}_v(A_\infty\nabla_v f_\infty)=F_\infty+F_{\infty,k}\widetilde{\mathbf{\Phi}}_k & \text{in } \mathcal{H}_{\frac{1}{r_m}},\\ f_\infty=0 & \text{in } \{x_n=0\}\times\{v_n>0\},\end{cases}$$

其中 A_∞ 是一个满足 $\Lambda^{-1}I\le A\le\Lambda I$, $F_\infty\in\mathcal{P}_{[\lambda]}$ 和 $F_{\infty,k}\in\mathcal{P}_{[\lambda+k}$ 的常数矩阵 $]$.

Pro。由引理 5.3 以及 (D.2) 和 (D.4)，对于任意 $\psi\in L^2(\mathcal{H}_R$ $)$,

$$\left|\int_{\mathcal{H}_R}F_m\psi\,dz\right|\le\|F_m\|_{L^\infty(\mathcal{H}_R)}\|\psi\|_{L^2(\mathcal{H}_R)}\le c(\theta(r_m)^{-1}+\|f_m\|_{L^\infty(\mathcal{H}_R)})\|\psi\|_{L^2(\mathcal{H}_R)}\le c(R)\|\psi\|_{L^2(\mathcal{H}_R)}.$$

因此，对于某个 $F_\infty\in L^2(\mathcal{H}_R)$，有 $F_m\to F_\infty$。特别地，$[F_m]_{C^\lambda(\mathcal{H}_R)}\to 0$。于是，由上述 F 的 L^∞-界以及插值论证可得 $\|F_\infty\|_{C^\lambda(\mathcal{H}_R)}\le c(R)$，这意味着 $F_\infty\in\mathcal{P}_{[\lambda]}$。类似地，我们证明

$$\int_{\mathcal{H}_R}F_{m,k}\widetilde{\mathbf{\Phi}}_k\psi\to\int_{\mathcal{H}_R}F_{\infty,k}\widetilde{\mathbf{\Phi}}_k\psi,\qquad\int_{\mathcal{H}_R}B_m\cdot\nabla_v f_m\psi\to 0.$$

此外，根据（D.3）及上述观察，f_∞ 是以下方程的弱解

$$(\partial_t+v\cdot\nabla_x)f_\infty-\operatorname{div}_v(A_\infty\nabla_v f_\infty)=F_\infty+F_{\infty,k}\widetilde{\mathbf{\Phi}}_k\quad\text{in }\mathcal{H}_R,$$

其中，A_∞ 是满足一致椭圆性条件的常数矩阵。证明完毕。□

References

[AAMN24] D. Albritton、S. Armstrong、J.-C. Mourrat 和 M. Novack。《动理学福克-普朗克方程的变分方法》。*Anal. PDE*，17(6):1953–2010，2024。[AH26] B. Avelin 和 M. Hou。《有界区域内定常克拉默斯-福克-普朗克方程的弱解与佩龙解》。*Potential Anal.*，64(1):第 11 号论文，32，2026。[AS64] M. Abramowitz 和 I. Stegun。*Handbook of mathematical functions with formulas graphs and mathematical*，，，第 卷。*tables* 55 *National Bureau of Standards Applied Mathematics Series* 美国政府印刷局，华盛顿特区，1964。由文献主管出售。[CSS18] S. Cameron、L. Silvestre 和 S. Snelson。《中等软势非齐次兰道方程的全局先验估计》。*Ann. Inst. H. Poincaré C Anal. Non Linéaire*，35(3):625–642，2018。[DGY22] H. Dong、Y. Guo 和 T. Yastrzhembskiy。《带镜面反射边界条件的动理学福克-普朗克方程和兰道方程》。*Kinet. Relat. Models*，15(3):467–516，2022。[DLMF] *NIST Digital Library of Mathematical Functions*。https://dlmf.nist.gov/，2025年12月15日发布的 1.2.5 版。F. W. J. Olver、A. B. Olde Daalhuis、D. W. Lozier、B. I. Schneider、R. F. Boisvert、C. W. Clark、B. R. Miller、B. V. Saunders、H. S. Cohl 和 M. A. McClain 编。[DV01] L. Desvillettes 和 C. Villani。《空间非齐次熵耗散系统趋向全局平衡：线性福克-普朗克方程》。*Comm. Pure Appl. Math.*，54(1):1–42，2001。[DV05] L. Desvillettes 和 C. Villani。《空间非齐次动理学系统趋向全局平衡：玻尔兹曼方程》。*Invent. Math.*，159(2):245–316，2005。[FRO22] M. Fall 和 X. Ros-Oton。《Ω 上 $H^s(\Omega)$ 能量极小化子的全局 Schauder 理论》。*J. Funct. Anal.*，283 3 109523，50，2022 ( ):论文编号 。[FRROW25] X. Fern´andez-Real、X. Ros-Oton 和 M. Weidner。《基于压力和矩界条件的玻尔兹曼方程正则性》。*Comm. Math. Phys.*，406(8):第 175 号论文，39，2025。[GHJO20] Y. Guo、H. Hwang、J. Jang 和 Z. Ouyang。《带镜面反射边界条件的兰道方程》。*Arch. Ration. Mech. Anal.*，236(3):1389–1454，2020。

[GIMV19] F. Golse、C. Imbert、C. Mouhot 和 A. Vasseur。《粗糙系数动理学福克-普朗克方程的哈纳克不等式及其在兰道方程中的应用》。 *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*，19 1 253 295，2019 ( ): – 。[GJW99] P. Groeneboom、G. Jongbloed 和 J. Wellner。《条件为正的积分布朗运动》。*Ann. Probab.*，27(3):1283–1303，1999。[GKTT17] Y. Guo、C. Kim、D. Tonon 和 A. Trescases。《凸区域内玻尔兹曼方程的正则性》。*Invent. Math.*，207(1):115–290，2017。[Gol71] M. Goldman。《积分维纳过程的首次穿越》。 *Ann. Math. Statist.*，42 2155，1971 2150: – 。[GS25] N. Guillen 和 L. Silvestre。《兰道方程不会爆破》。 *Acta Math.*，234(2):315–375，2025。[HJJ15] H. Hwang、J. Jang 和 J. Jung。《带吸收屏障的半空间内动理学福克-普朗克方程》。 *Indiana Univ. Math. J.*，64(6):1767–1804，2015。[HJJ18] H. Hwang、J. Jang 和 J. Jung。《有界区域内带吸收边界条件的福克-普朗克方程》。 *SIAM J. Math. Anal.*，50(2):2194–2232，2018。[HJV14] H. Hwang、J. Jang 和 J. Vel´azquez。《带吸收边界条件的福克-普朗克方程》。*Arch. Ration. Mech. Anal.*，214(1):183–233，2014。[HLW24] C. Henderson、G. Lucertini 和 W. Wang。《动理学纳什不等式与动理学福克-普朗克方程的精确边界行为》。 *arXiv:2407.08785*，2024年7月。[Hou26] M. Hou。《有界区域内亚椭圆型退化柯尔莫哥洛夫方程弱解的有界性》。 *J. Differential Equations*，453:第 113794 号论文，27，2026。[HS20] C. Henderson 和 S. Snelson。 C^∞ 非齐次兰道方程弱解的平滑化。*Arch. Ration. Mech. Anal.*，236(1):113–143，2020。[HST25] C. Henderson、S. Snelson 和 A. Tarfulea。《非规则初始数据下玻尔兹曼方程的经典解》。 *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*，58(1):107–201，2025。[IM21] C. Imbert 和 C. Mouhot。《动理学理论中的舍德估计及其在玩具非线性模型中的应用》。 *Ann. H. Lebesgue*，4:369–405，2021。[IS20] C. Imbert 和 L. Silvestre。《无截断玻尔兹曼方程的弱哈纳克不等式》。

J. ，( ): – 。[IS

Eur. Math. Soc. (JEMS) 22 2 507 592, 2020

21] C. Imbert 和 L. Silvestre。《动理学积分方程的舍德估计》。 *Anal. PDE*，14 204，2021 1 171( ): – 。[IS22] C. Imbert 和 L. Silvestre。《无截断玻尔兹曼方程的全局正则性估计》。

J. ，( ): – 。[

Amer. Math. Soc. 35 3 625 703, 2022

ISV26] C. Imbert、L. Silvestre 和 C. Villani。《玻尔兹曼方程中费希尔信息的单调性》。 *Inventiones mathematicae*，243(1):127–179，2026。[IW94] Y. Isozaki 和 S. Watanabe。《柯尔莫哥洛夫扩散的渐近公式及对 Sinai 积分布朗运动估计的改进》。 *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*，70 276，1994 9 271( ): – 。[KLN25] K. Kim、H.-S. Lee 和 S. Nowak。《非线性动理学福克-普朗克方程的梯度估计》。*arXiv:2502.09366*，2025。[LN21] M. Litsg˚ard 和 K. Nystr¨om。《粗糙系数柯尔莫哥洛夫-福克-普朗克型方程的狄利克雷问题》。 *J. Funct. Anal.*，281(10):第 109226 号论文，39，2021。[McK63] H. P. McKean, Jr.《白噪声驱动谐振器的绕行问题》。 *J. Math. Kyoto Univ.*，2 227 235，1963 : – 。[Mis10] S. Mischler。《带麦克斯韦边界条件的动理学方程》。 *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*，43 5 719 760，2010 ( ): – 。[ROS16] X. Ros-Oton 和 J. Serra。《全非线性积分微分方程的边界正则性》。

Duke Math. ，( ): – 。[

J. 165 11 2079 2154, 2016

RW25] X. Ros-Oton 和 M. Weidner。《区域内动理学福克-普朗克方程的最优正则性》。*arXiv:2505.11943*，2025年5月。[Sil22] L. Silvestre。¨动理学福克-普朗克方程直至边界的 Hölder 估计。 *Ars Inven. Anal.*，第 6 号论文，29 页，2022。[Sin92] Y. G. Sinai。《随机游走积分的若干泛函的分布》。 *Teoret. Mat. Fiz.*，90(3):323–353，1992。[Vil02] C. Villani。《碰撞动理学理论中的数学主题综述》。载于 *Handbook of mathematical fluid dynamics Vol. I* 71 305 2002 ，，第 – 页。

北荷兰出版社，阿姆斯特丹，。

[Zhu24] Y. Zhu. 有界区域内动力学 Fokker-Planck 方程的正则性。 *Ann. H. Lebesgue*, 7 1366, 2024 1323: – .[Zhu25] Y. Zhu. 次椭圆动力学方程的尖锐边界正则性。 *arXiv:2509.02536*, 2025 年 9 月。

Institute for Applied Mathematics, University of Bonn, Endenicher Allee 60, 53115, Bonn, Germany
Email address: kkim@uni-波恩.de

URL: https://sites.google.com/view/kyeongbaekim/

Institute for Applied Mathematics, University of Bonn, Endenicher Allee 60, 53115, Bonn, Germany
Email address: mweidner@uni-bonn.de*URL*: https://sites.google.com/view/marvinweidner/